Δευτεροβάθμιες Εξισώσεις

Μεθοδολογία για να λύνουμε δευτεροβάθμιες εξισώσεις:

Βήμα 1 Φέρνω την εξίσωση στην κλασσική της μορφή:

$$\boxed{\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0}, \alpha \neq 0$$

- Απαλοιφή παρονομαστών
- Π.Ε.Π.Α.Δ.Ρ. (Πολλαπλασιασμοί)
- Τα φέρνω όλα στο Α' ΜΕΛΟΣ
- Αναγωγή ομοίων όρων
- Βγάζω κοινό παράγοντα (εάν υπάρχει) και τον απλοποιώ
- γράφω τους όρους σε μορφή φθινουσών δυνάμεων του x

Βήμα 2 Βρίσκω τα α, β, γ

Βήμα 3 Αν $\underline{\beta \neq 0}$ και $\underline{\gamma \neq 0}$

Τότε εφαρμόζω τον τύπο της ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑΣ

Δηλ. υπολογίζω τη διακρίνουσα απ' τον τύπο: $\boxed{\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma}$ (SOS)

Αν $\Delta > 0$, τότε η δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$, έχει 2 λύσεις τη x_1 και τη x_2 πραγματικές και άνισες (απλές λύσεις, αλγεβρικής πολλαπλότητας 1)

Οι οποίες δίνονται απ' τον τύπο:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha}} \quad (\text{SOS})$$

Αν $\Delta = 0$, τότε η δευτ. εξ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει μια λύση τη x_0 η οποία είναι πραγματική και διπλή (δλδ αλγεβρικής πολλαπλότητας 2) και δίνεται απ' τον τύπο:

$$\boxed{x_0 = \frac{-\beta}{2 \cdot \alpha} \quad (\text{διπλή})}$$

Αν $\Delta < 0$, τότε η δευτ. εξ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι ΑΔΥΝΑΤΗ στο $\mathbb{R}$, δλδ δεν έχει πραγματικές λύσεις

$\boxed{\text{Βήμα 4}}$ Αν $\boxed{a=1,}$ τότε πολύ πιθανόν για να λύσω τη δευτ. εξ. $a\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma=0$ να χρησιμεύει ο $\boxed{\text{ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΤΡΟΠΟΣ (Τύποι του Vieta)}}$:

Ψάχνω 2 αριθμούς τον x_1 και τον x_2 (που είναι οι λύσεις της εξίσωσης) τ.ω. το γινόμενό τους $x_1\cdot x_2$ να μου κάνει το σταθερό όρο γ. Και το άθροισμά τους x_1+x_2 να μου κάνει τον αντίθετο του β.

ΔΛΔ $\boxed{\begin{aligned} x_1\cdot x_2 &= \gamma \\ x_1+x_2 &= -\beta \end{aligned}}\Bigg\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \ldots \\ x_2 &= \ldots \end{aligned}$

$\boxed{\text{Βήμα 5}}$ Αν $\boxed{\beta=0}$, τότε η δευτ. εξ. γράφεται $ax^2+\gamma=0$

$\boxed{\text{Πάω το } \gamma \text{ στο άλλο μέλος (δεν ξεχνώ να του αλλάξω πρόσημο)}}$

$\boxed{\text{Διαιρώ και τα 2 μέλη με το } a\ (a\neq 0)}$

$\boxed{\text{Βάζω τετραγωνική ρίζα και στα 2 μέλη (δεν ξεχνώ να βάλω απόλυτο)}}$

Απόδειξη (όχι SOS)

Για $\beta=0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση γράφεται

$$a x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Longrightarrow a \cdot x^2 + \gamma = 0$$

0

$$\Longrightarrow a \cdot x^2 = -\gamma \Rightarrow \frac{\cancel{a} \cdot x^2}{\cancel{a}} = \frac{-\gamma}{a}$$

$\Rightarrow x^2 = -\frac{\gamma}{a}$ και διακρίνουμε περιπτώσεις

- Αν $-\frac{\gamma}{a} > 0$, τότε $x = \pm\sqrt{-\frac{\gamma}{a}}$
- Αν $-\frac{\gamma}{a} = 0 \Rightarrow \gamma = 0$, τότε $x = 0$ (διπλή)
- Αν $-\frac{\gamma}{a} < 0$, τότε η δευτεροβάθμια εξίσωση

είναι ΑΔΥΝΑΤΗ στο $\mathbb{R}$, δηλ. δεν έχει πραγματικές λύσεις

Βήμα 6 Αν $\gamma = 0$, τότε

Βγάζω κοινό παράγοντα το x

Κι εφαρμόζω το κολπάκι

Εαν $(\text{κάτι}) \cdot \left(\begin{matrix}\text{κάτι} \\ \text{άλλο}\end{matrix}\right) = 0 \Rightarrow (\text{κάτι}) = 0$ ή $\left(\begin{matrix}\text{κάτι} \\ \text{άλλο}\end{matrix}\right) = 0$

<u>Απόδειξη</u> (όχι sos)

Αν $\gamma = 0$, τότε η δευτ. εξ. $\alpha x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$

γράφεται: $\alpha x^2 + \beta x = 0$

$$\Rightarrow x \cdot (\alpha \cdot x + \beta) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha \cdot x + \beta = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha \cdot x = -\beta$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\cancel{\alpha} \cdot x}{\cancel{\alpha}} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\beta}{\alpha}}$$

* <u>Παρατήρηση:</u> ΟΛΕΣ οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις μπορούν να λυθούν με διακρίνουσα. Απλά σε κάποιες περιπτώσεις βολεύει να τη λύσουμε με διακρίνουσα (βλ. <u>Βήμα3</u>), ενώ σε άλλες περιπτώσεις δε βολεύει να τη λύσουμε με διακρίνουσα (βλ. <u>Βήμα4</u>, <u>Βήμα5</u>, <u>Βήμα 6</u>)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

i) $\boxed{x^2-5x+6=0}$

Λύση

Βήμα 1: Η δευτ. εξίσωση $x^2-5x+6=0$ είναι ήδη στη κλασσική της μορφή: $a\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma=0$

Βήμα 2: Βρίσκω τα a, β, γ

$$\boxed{1\cdot x^2-5x+6=0}$$

$\boxed{a=1}$ $\boxed{\beta=-5}$ $\boxed{\gamma=6}$

Αφού $a=1$ → Βολεύει ο ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΤΡΟΠΟΣ

1ος Τρόπος (Με διακρίνουσα)

$$\Delta=\beta^2-4\cdot a\cdot\gamma=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6$$

$$=25-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$$

$\Rightarrow \boxed{\Delta=1>0}$

$$X_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{+5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 = X_1 \\ \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 = X_2 \end{cases}$$

Άρα $X = 3$ ή $X = 2$

$2^{ος}$ Τρόπος (ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΤΡΟΠΟΣ, αφού $a=1$)

$$X^2 - 5X + 6 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \cdot X_2 = 6 \\ X_1 + X_2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X_1 = 2 \\ X_2 = 3 \end{array}$$

Άρα $X = 2$ ή $X = 3$

ii) $x^2 = 2 \cdot x$

Λύση

Βήμα 1: Δεν είναι στην κλασσική της μορφή

$$\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$$

Θα τη φέρουμε στη κλασσική της μορφή:

$$x^2 = x$$

$$\Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\alpha \cdot x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

Βήμα 2: Βρίσκω τα α, β, γ

$$x^2 - x = 0$$

$\boxed{\alpha = 1}$ $\boxed{\beta = -1}$ $\boxed{\gamma = 0}$

Επειδή $\gamma = 0$, πάω στο Βήμα 6

$$x^2 - x = 0$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x

$\Rightarrow x\cdot(x-1)=0$

$\Rightarrow x=0$ ή $x-1=0$

$\Rightarrow x=0$ ή $x=1$

Όταν έχω

$\kappa\cdot\lambda=0$

$\Rightarrow \kappa=0$ ή $\lambda=0$

iii) $x^2-x+1=0$

<u>Λύση</u>

Βήμα 1: Η εξ. $\overset{\overset{\alpha}{\downarrow}}{x^2}\overset{\overset{\beta}{\downarrow}}{-x}+\overset{\overset{\gamma}{\downarrow}}{1}=0$ είναι ήδη στη

Κλασσική Μορφή $\alpha\cdot x^2+\beta x+\gamma=0$

Βήμα 2: $\alpha=1$ $\beta=-1$ $\gamma=1$ $\beta\neq 0$ και $\gamma\neq 0$

Βήμα 3: Διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1$$

$$=1-4\cdot 1\cdot 1=1-4=-3<0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = -3 < 0}$$

Άρα η δευτ. εξ. $x^2 - x + 1 = 0$

είναι ΑΔΥΝΑΤΗ

iv) $2 \cdot x^2 = 18$

Λύση

Δεν είναι στην κλασσική μορφή $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$

Θα τη φέρουμε στη κλασσική μορφή

$$2 \cdot x^2 = 18 \Rightarrow \frac{\cancel{2} \cdot x^2}{\cancel{2}} = \frac{18}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{18}{2}$$

πρέπει να το διώξω

$$\Rightarrow x^2 = 9$$

όταν είναι από πάνω η ρίζα και από κάτω το τετράγωνο μένει πίσω απόλυτο x

$$\Rightarrow \cancel{\sqrt{}}\, x^{\cancel{2}} = \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow |x| = 3$$

$$\Rightarrow x = \pm 3$$

όταν έχω
$|x| = \theta \Rightarrow x = \pm\theta$
(με $\theta > 0$)

$\Rightarrow x = 3$ ή $x = -3$

v) $4 \cdot x \cdot (x-1) = -1 \Rightarrow 4 \cdot x \cdot (x-1) = -1$

$\Rightarrow 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x = -1 \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 = 0$

$a \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$

$a = 4 \quad , \beta = -4 \quad , \gamma = 1$

$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot a \cdot \gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1$

$= 16 - 16 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$

Άρα $x = \dfrac{-\beta}{2 \cdot a} = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \dfrac{\cancel{4}}{2 \cdot \cancel{4}} = \dfrac{1}{2}$ (διπλή)

* Παρατήρηση: Όταν η διακρίνουσα Δ ενός τριωνύμου $(a \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma)$ είναι ίση με το μηδέν, τότε το τριώνυμο σίγουρα είναι ανάπτυγμα τετραγώνου.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow ax^2 + \beta x + \gamma$, είναι ανάπτυγμα τετραγωνου

Όντως στο τελευταίο παράδειγμα είχαμε $\Delta = 0$, άρα το τριώνυμο $4x^2 - 4x + 1$ είναι ανάπτυγμα τετραγώνου.

όντως $4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 = 2^2 \cdot x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 1^2 = \underbrace{(2x)^2 - 2 \cdot (2 \cdot x) \cdot 1 + 1^2}_{a^2 - 2 \cdot a \cdot \beta + \beta^2}$

$= (2x - 1)^2$

HOMEWORK: Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 + 4x - 21 = 0$

Με διακρίνουσα ή με τον ΓΡΗΓΟΡΟ ΤΡΟΠΟ

β) $x^2 + x + 1 = 0$

ΑΔΥΝΑΤΗ

γ) $3 \cdot x^2 - 27 = 0$

$\beta = 0$
$x = +3$ ή $x = -3$

δ) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = 0$
$x = 1$ (διπλή)

ε) $2 \cdot x^2 + 5 \cdot x = 0$

Κοινός παράγοντας το x.
$x = 0$ ή $x = -\frac{5}{2}$

στ) Σελίδα 97, άσκηση 2
όλα τα υποερωτήματα