unicef
for every child

Accelerated
Learning
Programme

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

για το Γυμνάσιο

Funded by the Asylum, Migration and Integration Fund of the European Union

IOM
UN MIGRATION

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΑΔ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ & ΠΟΛΥΓΛΩΣΣΙΑΣ

unicef
for every child

Accelerated
Learning
Programme

ALP
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
για το Γυμνάσιο

Funded by the Asylum, Migration and Integration Fund of the European Union

IOM
UN MIGRATION

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΔΑ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ & ΠΟΛΥΓΛΩΣΣΙΑΣ

ΕΡΓΟ ALP

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ ΣΥΓΓΡΑΦΙΚΗΣ ΟΜΑΔΑΣ
ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΣ
Καθηγητής Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ
ΜΑΗΑ FARAH
ΜΙΧΑΛΗΣ ΚΑΣΚΑΝΤΑΜΗΣ
ΒΙΚΥ ΠΑΠΑΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΥ
ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΦΑΚΟΥΔΗΣ

ΚΡΙΤΙΚΟΣ ΑΝΑΓΝΩΣΤΗΣ ΙΕΠ
ΚΩΣΤΑΣ ΣΤΟΥΡΑΪΤΗΣ

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ
ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ ΠΑΠΑΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΕΡΓΟΥ ALP
ΓΙΩΡΓΟΣ ΑΝΔΡΟΥΛΑΚΗΣ
Διευθυντής του Εργαστηρίου ΜΔΔ Ελληνικής Γλώσσας και Πολυγλωσσίας
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΥΠΕΥΘΥΝΟΙ ΓΙΑ ΤΗ UNICEF
ΝΑΟΚΟ ΙΜΟΤΟ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΣΙΜΟΠΟΥΛΟΣ

ΕΚΠΡΟΣΩΠΟΣ ΓΝΩΜΟΔΟΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ ΙΕΠ
ΝΤΟΡΕΤΤΑ ΑΣΤΕΡΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το Πρόγραμμα Ταχύρρυθμης Μάθησης (Accelerated Learning Program, ALP) αναπτύχθηκε το 2020 από ένα σχήμα τριμερούς συνεργασίας, του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, της UNICEF και του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής, με σκοπό να αντιμετωπίσει τα ζητήματα εκπαιδευτικής συμπερίληψης στην κατώτερη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Γυμνάσιο) για έφηβους/ες μαθητές/ριες με προσφυγική ή μεταναστευτική εμπειρία. Μαθητές/ριες που, στην πλειονότητά τους, εκτός από την πρόκληση της εκμάθησης της γλώσσας του σχολείου, αντιμετωπίζουν σημαντικά εμπόδια στην παρακολούθηση των υπόλοιπων μαθημάτων, συχνά εξαιτίας των περισσότερο ή λιγότερο εκτεταμένων περιόδων κατά τις οποίες έχουν μείνει εκτός εκπαίδευσης στη χώρα προέλευσής τους, κατά τη διάρκεια της προσφυγικής διαδρομής, αλλά και κατά το πρώτο διάστημα παραμονής τους στην Ελλάδα.

Στο πλαίσιο αυτό, το Accelerated Learning Program συγκροτήθηκε ως ένα πλαίσιο μάθησης, συμβατό με τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών, μετουσιωμένο σε αντίστοιχα εκπαιδευτικά υλικά για τους μαθητές και τις μαθήτριες, σε οδηγούς για τους/τις εκπαιδευτικούς και σε διαγνωστικές δοκιμασίες για την αποτύπωση γνώσεων και δεξιοτήτων, στα μαθήματα:

- Βιολογία
- Ιστορία
- Κοινωνική και Πολιτική Αγωγή
- Μαθηματικά
- Φυσική
- Χημεία.

Τα εκπαιδευτικά υλικά για τους/τις μαθητές/ριες συμπυκνώνουν, σε ένα πλαίσιο που είναι δυνατόν να παρουσιαστεί σε ένα σχολικό έτος φοίτησης, τις βασικές γνώσεις και δεξιότητες που παρέχονται στα τρία έτη φοίτησης στο Γυμνάσιο, με στόχο να είναι εφικτή η αποτελεσματική συμπερίληψη των μαθητών/ριών αυτών στις τάξεις στις οποίες τοποθετούνται με βάση την ηλικία τους. Με άλλα λόγια, τα υλικά του ALP υποστηρίζουν μαθητές/ριες, που για οποιονδήποτε λόγο έχουν βρεθεί εκτός εκπαίδευσης για μικρότερα ή μεγαλύτερα διαστήματα, να αναπληρώσουν τις γνώσεις που θα τους επιτρέψουν να συμβαδίζουν με τους/τις μαθητές/ριες της ηλικίας τους και να έχουν μια επιτυχημένη σχολική διαδρομή και πρόσβαση στις επόμενες εκπαιδευτικές βαθμίδες πέραν της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Υπό αυτήν την έννοια η αντιμετώπιση της πρόωρης σχολικής εγκατάλειψης, της μη συστηματικής παρακολούθησης και της σχολικής διαρροής είναι ανάμεσα στις κεντρικές επιδιώξεις του Προγράμματος.

Το γεγονός, παράλληλα, ότι οι μαθητές με προσφυγική ή μεταναστευτική εμπειρία έρχονται σε επαφή με τα γνωστικά αντικείμενα αυτά μέσω μιας γλώσσας με την οποία κατά κανόνα έχουν περιορισμένη ή και μηδενική εξοικείωση, μας οδήγησε στην επιλογή να μεταφραστεί το γλωσσάρι κάθε γνωστικού αντικειμένου, δηλαδή το βασικό λεξιλόγιο με τους αντίστοιχους ορισμούς, σε 8 από τις περισσότερο ομιλούμενες από άτομα αυτής της ομάδας γλώσσες: Αγγλικά, Αραβικά, Γαλλικά, Κουρμάντζι, Ουρντού, Σορανί, Τουρκικά, Φαρσί. Θεωρούμε, παράλληλα, ότι ο τρόπος με τον οποίο έχει δομηθεί το περιεχόμενο των διαφορετικών υλικών, η γλωσσική εξομάλυνση (με γενικό γνώμονα το επίπεδο Α2 του *Κοινού Ευρωπαϊκού Πλαισίου Αναφοράς για τις Γλώσσες*), η εστίαση στην ανάπτυξη δεξιοτήτων, τα πολυτροπικά ή και πολυγλωσσικά κείμενα, οι βιωματικές-συμμετοχικές δραστηριότητες, ο μαθητοκεντρικός και ομαδοκεντρικός προσανατολισμός, η εστίαση στην επίλυση προβλημάτων, προσφέρουν ευκαιρίες όχι μόνο κατάκτησης των επιμέρους γνωστικών αντικειμένων, αλλά και εξοικείωσης με τη γλώσσα του σχολείου σε ένα πλαίσιο πολυγλωσσικών συνεισφορών και αξιοδότησης των γλωσσών καταγωγής των μαθητών.

Επίσης, στις 8 παραπάνω γλώσσες έχουν μεταφραστεί πλήρως ορισμένες από τις ενότητες του υλικού, προσφέροντας με τον τρόπο αυτό μια πρόσθετη δυνατότητα να συνεχίσουν να μαθαίνουν σε μαθητές/ριες που είτε δεν έχουν ακόμη ενταχθεί στην τυπική δημόσια εκπαίδευση, είτε βρίσκονται εκτός σχολείου για άλλους λόγους (ανάμεσα στους οποίους και τα διαστήματα κατά τα οποία τα σχολεία παρέχουν μαθήματα εξ αποστάσεως εξαιτίας της πανδημίας).

Στον πλανήτη, υπολογίζονται σε 260 εκατομμύρια τα παιδιά που δεν πηγαίνουν σχολείο! Εργαστήκαμε για το ALP με αίσθημα ευθύνης και αποστολής, έχοντας στον νου μας αυτό το ασύλληπτο σε έκταση, παγκόσμιο πρόβλημα, επιδιώκοντας ωστόσο να βρούμε κατάλληλες τοπικές λύσεις. Έχουμε επίγνωση ότι η δημιουργία των υλικών είναι μόνο το πρώτο βήμα προς την κατεύθυνση της εφαρμογής ενός ολοκληρωμένου και αποτελεσματικού ALP στην Ελλάδα. Το κατά πόσο και πώς θα αξιοποιηθεί στην πράξη αυτό το υλικό είναι το επόμενο ζητούμενο. Δεν παραγνωρίζουμε πιθανές δυσκολίες που μπορεί το ALP να συναντήσει στη χρήση του, και δεν υποτιμούμε την υπερποικιλότητα του κοινού και των εκπαιδευτικών περικειμένων όπου μπορεί να εφαρμοστεί. Θεωρούμε ωστόσο πως το έργο αυτό θα έχει βάλει το μικρό του λιθαράκι στη γενικότερη προσπάθεια να βρούνε ή να ξαναβρούνε τον δρόμο για την εκπαίδευση αρκετά από τα προσφυγόπουλα.

Το υλικό του ALP τέθηκε υπό την κρίση όχι μόνο του Υπουργείου Παιδείας και του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής και μιας ομάδας εμπειρογνωμόνων που συγκροτήθηκε από στελέχη του ΙΕΠ και Συντονιστές Εκπαιδευτικού Έργου, αλλά και μιας σημαντικής ομάδας εκπαιδευτικών που το προσέγγισαν κριτικά και το δοκίμασαν πιλοτικά στις τάξεις τους, προσφέροντας πολύτιμη ανατροφοδότηση. Θα θέλαμε να τους/τις ευχαριστήσουμε καθέναν και καθεμία χωριστά: φανταζόμαστε το υλικό αυτό ως ένα ζωντανό, εξελισσόμενο σώμα πολυτροπικών και πολυγλωσσικών κειμένων και δραστηριοτήτων, που αλλάζει, βελτιώνεται και προσαρμόζεται ευέλικτα σε διαφορετικές ανάγκες διαφορετικών ομάδων του μαθητικού πληθυσμού και σε ποικίλα συμφραζόμενα εκπαίδευσης. Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά όλους τους συντελεστές και όλους τους κριτικούς φίλους αυτού του Προγράμματος, όπως επίσης και την Επιστημονική Ένωση Εκπαίδευσης Ενηλίκων για την έρευνα-βάση που χαρτογράφησε το πεδίο της εκπαίδευσης των παιδιών με προσφυγικό ή μεταναστευτικό υπόβαθρο, τις ανάγκες τους, αλλά και τις προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί τους στην πράξη.

Η πλήρης ηλεκτρονική μορφή του υλικού βρίσκεται διαθέσιμη εδώ:

https://alp.teach4integration.gr/

Για την ομάδα της UNICEF:

Naoko Imoto

Γιώργος Σιμόπουλος

Για την ομάδα του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας:

Γιώργος Ανδρουλάκης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α΄ ΜΕΡΟΣ

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Γ΄ ΜΕΡΟΣ

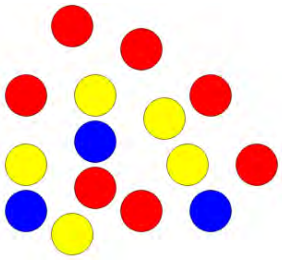
ΓΛΩΣΣΑΡΙ

Ενότητα Α0

Οι φυσικοί αριθμοί

1. Εισαγωγή

Δραστηριότητα 1.1



Στη διπλανή εικόνα βλέπετε κύκλους με χρώματα.

Βρείτε και γράψτε:

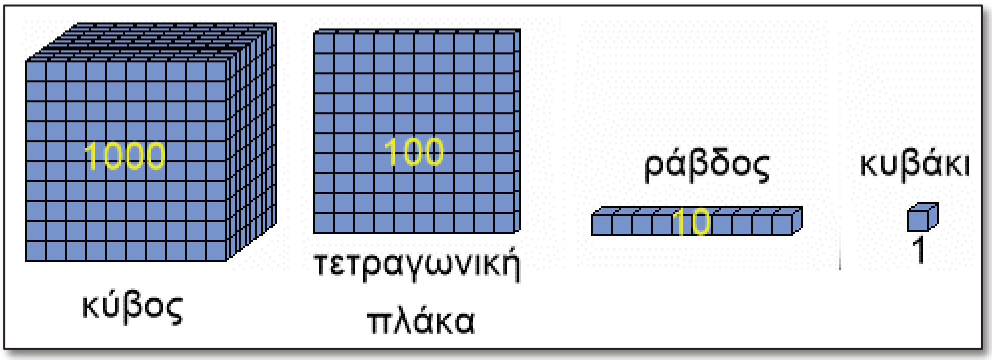
- Πόσοι είναι οι κόκκινοι κύκλοι; …….
- Πόσοι είναι οι κίτρινοι κύκλοι; …….
- Πόσοι είναι οι μπλε κύκλοι; …….
- Πόσοι είναι οι πράσινοι κύκλοι; …… (*η ερώτηση δεν είναι λάθος*)
- Πόσοι είναι οι μπλε και οι κίτρινοι μαζί; ……
- Πόσοι πιο πολλοί είναι οι κίτρινοι από τους μπλε κύκλους; ……
- Πόσοι πιο λίγοι είναι οι κίτρινοι από τους κόκκινους; ……

Τέτοιοι αριθμοί δείχνουν **πόσα** έχουμε σε μία ομάδα ή κατηγορία, δηλαδή το **πλήθος**. Ονομάζουμε αυτούς τους αριθμούς: **φυσικούς αριθμούς.**

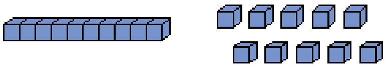
Με τους φυσικούς αριθμούς περιγράφουμε και τη σειρά. Στην επόμενη εικόνα ο Αλί έβαλε σε σειρά τα παιχνίδια ζώα που έχει και έγραψε την σειρά που έχει το κάθε ζώο (1ο – πρώτο, 2ο – δεύτερο, 3ο – τρίτο, 4ο – τέταρτο, 5ο – πέμπτο) .

Γράφουμε τους φυσικούς αριθμούς με τα **ψηφία**[1]: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Όταν γράφουμε τον αριθμό με **1** μόνο **ψηφίο** (π.χ. 3) ο φυσικός αριθμός λέγεται **μονοψήφιος**. Όταν τον γράφουμε με **2** **ψηφία** (π.χ. 36) ο αριθμός λέγεται **διψήφιος**. Με **3** **ψηφία** (π.χ. 199) λέγεται **τριψήφιος** κλπ.

Μπορούμε να δείξουμε τους φυσικούς αριθμούς[2] με μικρούς κύβους (κυβάκια), ράβδους, τετραγωνικές πλάκες και κύβους.



- Κάθε μικρός κύβος (κυβάκι) είναι μια μονάδα. Τα κυβάκια είναι για τις μονάδες ενός αριθμού.
- 10 κυβάκια είναι μια ράβδος. Οι ράβδοι είναι για τις 10-δες (δεκάδες) ενός αριθμού.

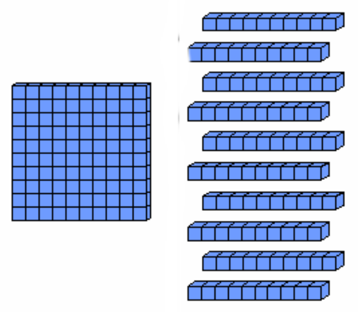


---

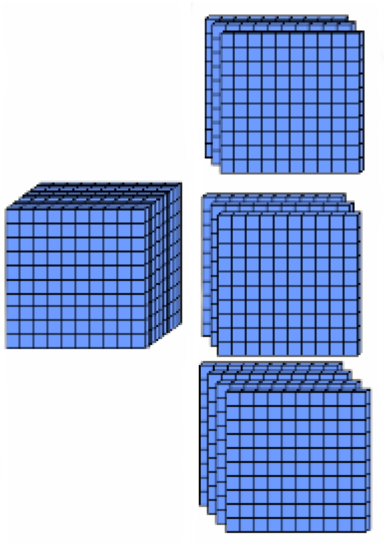
[1] Τα ψηφία είναι «σαν» τα γράμματα από το αλφάβητο. Με τα γράμματα σχηματίζουμε λέξεις και με τα ψηφία σχηματίζουμε αριθμούς.

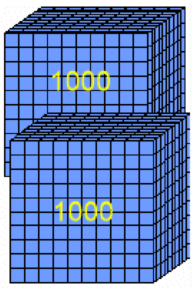
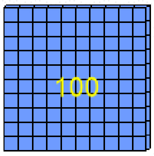
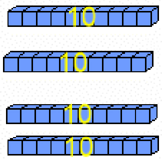
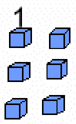
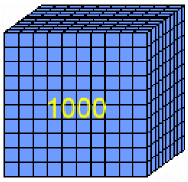
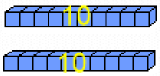
[2] Μέχρι τετραψήφιους αριθμούς.

- 10 ράβδοι είναι μια τετραγωνική πλάκα. Η τετραγωνική πλάκα είναι ίση με 100 μονάδες (κυβάκια). Οι ράβδοι είναι για τις 100-άδες (εκατοντάδες) ενός αριθμού.



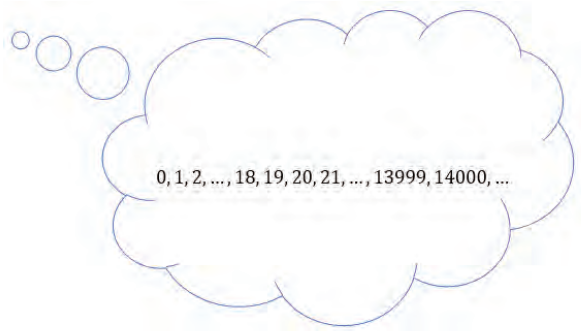
- 10 τετραγωνικές πλάκες είναι ένας κύβος. Ο κύβος είναι ίσος με 1000 μονάδες. Οι κύβοι είναι για τις 1000-δες (χιλιάδες) ενός αριθμού.



				Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	μονάδες
				2	1	4	6
				1	0	2	0

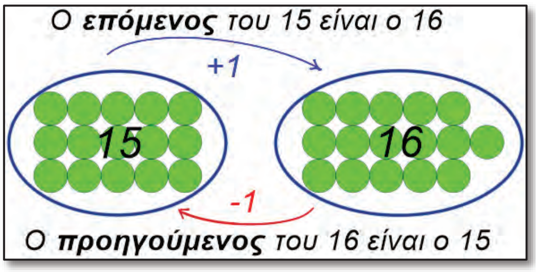
Δραστηριότητα 1.2 *(Χαρακτηριστικά των φυσικών αριθμών).*

Ας σκεφτούμε τώρα για όλους τους φυσικούς αριθμούς.



Συμπληρώστε όπου υπάρχουν τα κενά:……

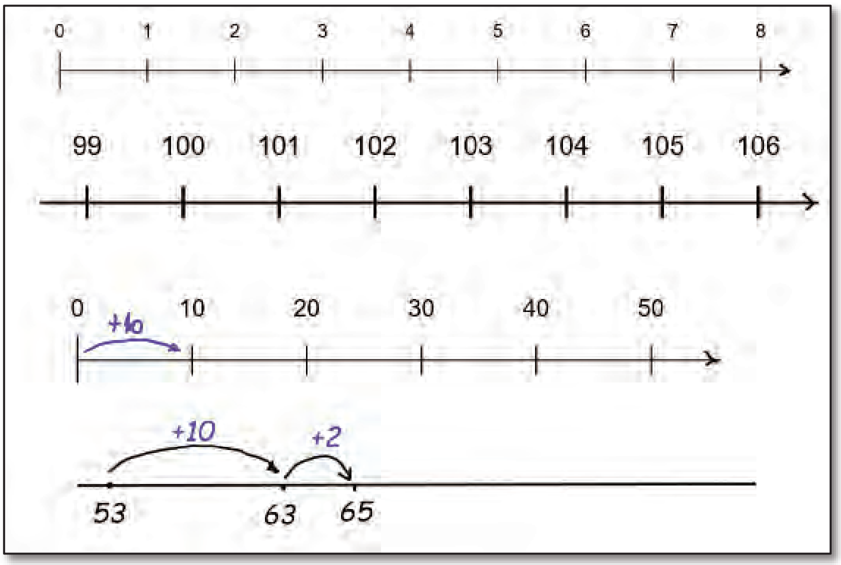
- Ο πρώτος φυσικός αριθμός είναι ο ……..
- Ο επόμενος του 137 είναι ο 138.
- Ο επόμενος του 159 είναι ο 160.
- Ο επόμενος του 6398 είναι ο ……
- Ο επόμενος του 123429 είναι ο ……
- Ο επόμενος του 254999 είναι ο ……
- Ο προηγούμενος του 130657 είναι ο 130656
- Ο προηγούμενος του 2000 είναι ο 1999
- Ο προηγούμενος του 346 είναι ο ……
- Ο προηγούμενος του 1 είναι ο ……
- Υπάρχει φυσικός αριθμός προηγούμενος από το 0; ………………… (ναι ή όχι)
- Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός πιο μεγάλος από όλους τους φυσικούς αριθμούς; Συνεργαστείτε σε ομάδες και απαντήσετε σε αυτήν την ερώτηση.
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………



Μαθαίνω

- Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν **επόμενο** φυσικό αριθμό.
- Ανάμεσα σε έναν φυσικό αριθμό και τον επόμενό του, δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός.
- Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν **προηγούμενο** φυσικό αριθμό. Μόνον ο μηδέν δεν έχει φυσικό αριθμό πριν από αυτόν.
- Οι φυσικοί αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ. **Λέμε ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι.**

Μπορούμε να παρουσιάσουμε τους φυσικούς αριθμούς σε αριθμογραμμές όπως στην παρακάτω εικόνα.



Άσκηση 1.1

α. Γράψε τον μικρότερο μονοψήφιο αριθμό ……. και τον μεγαλύτερο μονοψήφιο αριθμό ……….

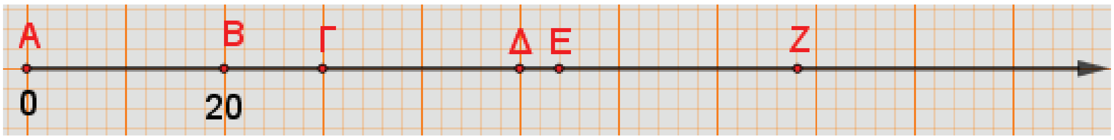
β. Γράψε τον μικρότερο διψήφιο αριθμό ……. και τον μεγαλύτερο διψήφιο αριθμό ……….

γ. Γράψε τον μικρότερο τριψήφιο αριθμό ……. και τον μεγαλύτερο τριψήφιο αριθμό ……….

δ. Γράψε τον μικρότερο τετραψήφιο αριθμό ……. και τον μεγαλύτερο τετραψήφιο αριθμό ……….

Άσκηση 1.2

Να βρείτε τους αριθμούς που είναι στα σημεία Γ, Δ, Ε και Ζ.



Δραστηριότητα 1.3 (άρτιοι αριθμοί)

Ο Αλί έχει μια συλλογή με πολλά ψεύτικα νομίσματα.
Ο Αλί θέλει να πάρει κάποια νομίσματα.
Θα τα χωρίσει σε δύο ομάδες.
Κάθε ομάδα θέλει να έχει τον ίδιο αριθμό νομισμάτων.
Πόσα νομίσματα πρέπει να πάρει ο Αλί;
(Γράψτε αρκετές διαφορετικές απαντήσεις)

……

Συζητήστε με τα υπόλοιπα παιδιά της τάξης τις απαντήσεις στο παραπάνω ερώτημα.

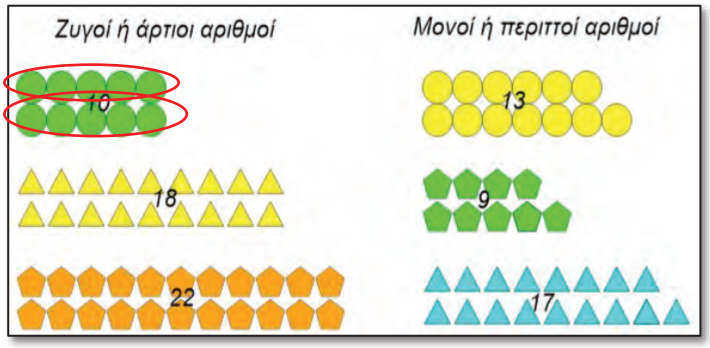
Γράψτε μερικούς από τους αριθμούς που είπαν τα άλλα παιδιά (να είναι διαφορετικοί από τους δικούς σας αριθμούς):

………

Μαθαίνω

Οι φυσικοί αριθμοί 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, …. ονομάζονται **ζυγοί ή άρτιοι αριθμοί**. Εκτός από το μηδέν, **είναι οι αριθμοί που χωρίζονται σε δύο ίσες ομάδες.**

Οι φυσικοί αριθμοί 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, …. ονομάζονται **μονοί ή περιττοί αριθμοί.** Είναι **οι αριθμοί που δεν είναι ζυγοί (άρτιοι)**.



Άσκηση 1.3

α. Γράψε τον αριθμό από την ημερομηνία που γεννήθηκες. (Για παράδειγμα κάποιος είναι γεννημένος 23 Φεβρουαρίου, τότε γράφει το 23) …………

β. Ο αριθμός που έγραψες στο ερώτημα α, είναι μονός (περιττός) ή ζυγός (άρτιος); …………………

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

……………………………………………………………………

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

………

2. Πράξεις με φυσικούς αριθμούς

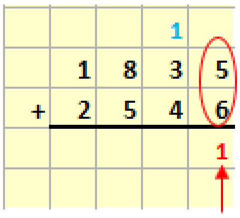
Δραστηριότητα 2.1 (Πρόσθεση)

1835 τουρίστες πήγαν στην Ακρόπολη το Φεβρουάριο.
2546 τουρίστες πήγαν την Ακρόπολη το Μάρτιο.
Πόσοι τουρίστες πήγαν συνολικά το Φεβρουάριο και το Μάρτιο την Ακρόπολη;

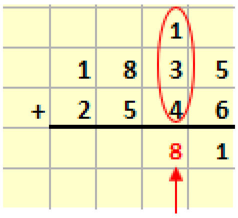
Για να λύσει το πρόβλημα, η Μαρία έκανε:

$$\begin{aligned}
&1835+2546=\\
&=(1000+800+30+5)+(2000+500+40+6)\\
&=(1000+2000)+(800+500)+(30+40)+(5+6)\\
&=3000+1300+70+11\\
&=3000+1000+300+70+10+1\\
&=4000+300+80+1\\
&=4381
\end{aligned}$$

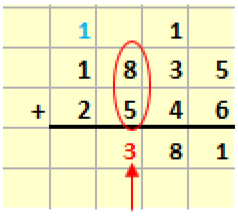
Για να λύσει το πρόβλημα ο Χαλίλ έγραψε κατακόρυφα[3] τους δύο αριθμούς και έκανε τα επόμενα:



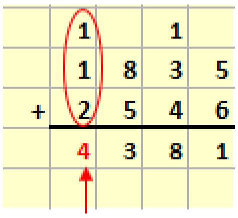
$5+6=11$



$1+3+4=8$



$5+8=13$



$1+1+2=4$

Συζητήστε στην ομάδα σας για τις 2 μεθόδους. Τι βρίσκετε ίδιο; Τι είναι διαφορετικό;

………

………

………

………

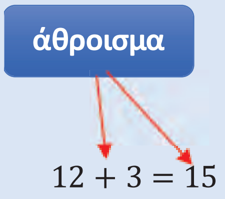
………

---

[3] Δηλαδή έγραψε πρώτα τον έναν αριθμό και μετά έγραψε από κάτω του τον άλλο αριθμό.

Μαθαίνω

Ονομάζουμε **άθροισμα δύο αριθμών** : την πράξη της πρόσθεσης αυτών των αριθμών και το αποτέλεσμά της.
Οι δύο αριθμοί που χρησιμοποιούμε ονομάζονται **όροι του αθροίσματος**.



$12 + 3 = 15$

Οι **όροι του αθροίσματος** είναι ο 12 και ο 3

Ένα άθροισμα μπορεί να έχει περισσότερους από δύο όρους, όπως το: $12 + 3 + 20$

Άσκηση 2.1

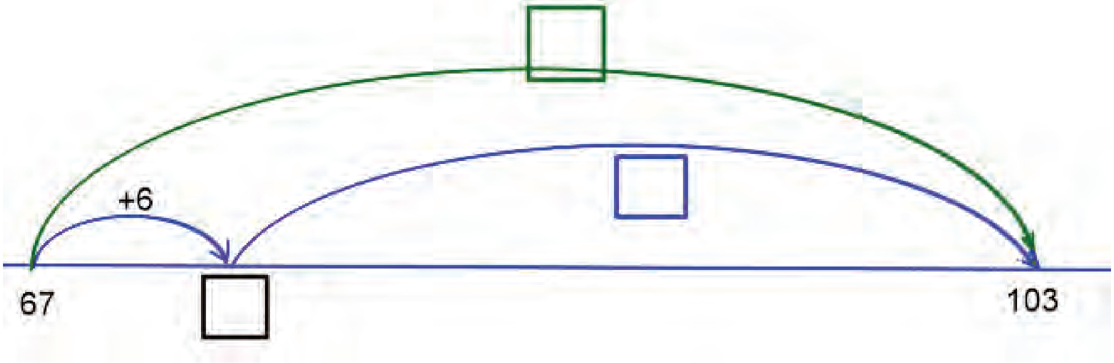
Βρείτε με την μέθοδο του Χαλίλ τα επόμενα αθροίσματα.

α. $345 + 89$
β. $786 + 579$
γ. $5238 + 8770$

Δραστηριότητα 2.2 (Αφαίρεση)

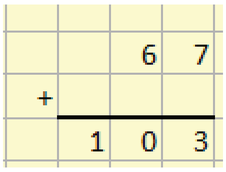
Ο Αλί αγόρασε ένα ποδήλατο με 103 ευρώ. Η Μαρία αγόρασε ένα ποδήλατο με 67 ευρώ. Πόσο πιο φτηνό είναι το ποδήλατο της Μαρίας;

Για να λύσει το πρόβλημα ο Αλί χρησιμοποίησε την παρακάτω αριθμογραμμή.



Συμπληρώστε τα παραπάνω κουτάκια με τους κατάλληλους αριθμούς.

Για να λύσει το πρόβλημα η Μαρία έγραψε:



		6	7
+			
	1	0	3

Συμπληρώστε το παραπάνω.

Συζητήστε στην ομάδα σας για τις 2 μεθόδους. Τι βρίσκετε ίδιο; Τι είναι διαφορετικό;

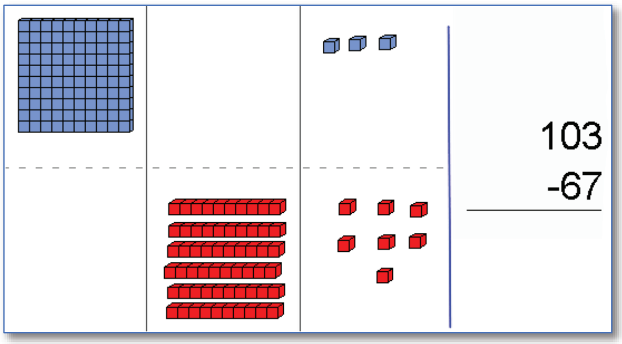
……

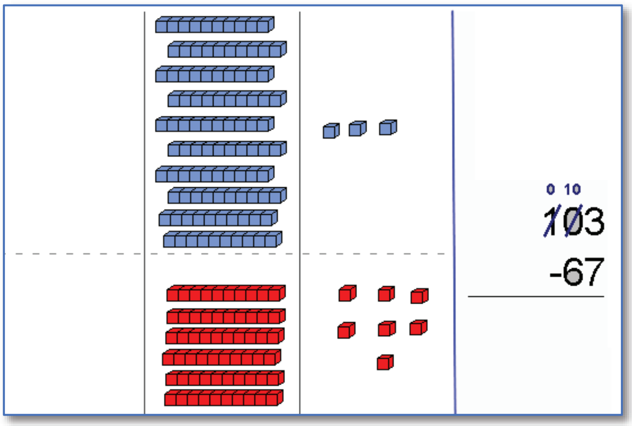
……

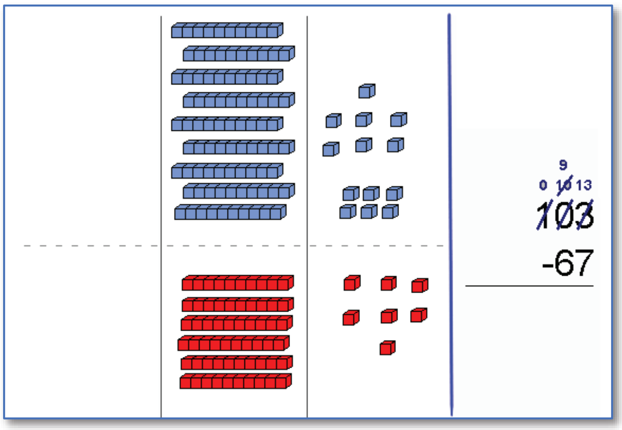
……

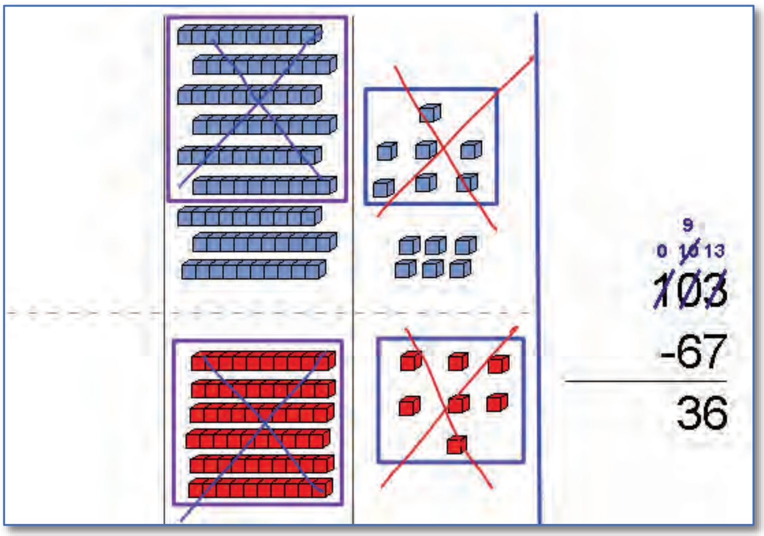
……

Ο Χαλίλ χρησιμοποίησε κυβάκια, ράβδους και τετραγωνική πλάκα για να αναπαραστήσει τους αριθμούς και να κάνει την αφαίρεση.









Συζητήστε στην ομάδα σας και εξηγήστε την μέθοδο του Χαλίλ.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Μαθαίνω

Ονομάζουμε **διαφορά** δύο αριθμών: την πράξη της αφαίρεσης των δύο αριθμών και το αποτέλεσμα της πράξης αυτής.

διαφορά

$$18 - 6 = 12$$

Άσκηση 2.2

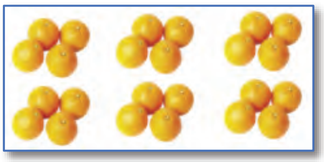
Βρείτε τις επόμενες διαφορές με την μέθοδο του Χαλίλ.

α. $171 - 89$
β. $706 - 579$
γ. $15238 - 770$

Άσκηση 2.3

Αγοράσαμε ένα παντελόνι 23 € και μια μπλούζα 19 €. Τι ρέστα θα πάρουμε από 100 €;

Δραστηριότητα 2.3 (Πολλαπλασιασμός)



Ο Χαλίλ βοηθάει τον μπαμπά του στο μανάβικο. Βάζει τα πορτοκάλια σε ομάδες, όπως στην διπλανή εικόνα. Στην εικόνα υπάρχουν 6 ομάδες. Κάθε ομάδα έχει 4 πορτοκάλια.

Βρείτε πόσα είναι όλα τα πορτοκάλια στην εικόνα.

………

Για να βρούμε πόσα πορτοκάλια είναι στην εικόνα μπορούμε να κάνουμε την πρόσθεση: $4+4+4+4+4+4=24$.
Μπορούμε όμως να βρούμε την απάντηση και με πολλαπλασιασμό:

$$\underbrace{4+4+4+4+4+4}_{6\ \text{ίσοι όροι με}\ 4} = 6 \times 4 = 24$$

Αποτέλεσμα για το γινόμενο
παράγοντας του γινομένου
παράγοντας του γινομένου

Μαθαίνω

Ονομάζουμε **γινόμενο** δύο αριθμών: την πράξη του πολλαπλασιασμού των δύο αριθμών και το αποτέλεσμα της πράξης αυτής.
Οι δύο αριθμοί που χρησιμοποιούμε ονομάζονται **παράγοντες του γινομένου**.

γινόμενο

$6 \cdot 2 = 12$

Συμβολίζουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού με το × ή με το ·
$6 \times 2 = 6 \cdot 2$

Οι **παράγοντες του γινομένου** είναι ο 6 και ο 2

Μπορούμε να έχουμε γινόμενο με περισσότερους από δύο παράγοντες, όπως για παράδειγμα το: $23 \cdot 2 \cdot 10$, το οποίο είναι γινόμενο με τρεις παράγοντες.

Ονομάζουμε **αριθμητική παράσταση**: αριθμούς που έχουν ανάμεσά τους σύμβολα των πράξεων. Για παράδειγμα $4 \cdot 2 + 3$

Άσκηση 2.4

Αγοράσαμε 4 μπλούζες και 6 παντελόνια. Η κάθε μπλούζα κάνει 13 € και το ένα παντελόνι κοστίζει 15 €.

α. Βρείτε πόσο πρέπει να πληρώσουμε.

β. Τι ρέστα θα πάρουμε από 150 €;

Άσκηση 2.5

Γράψε την αριθμητική παράσταση που λέει κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις και υπολόγισε το αποτέλεσμα :

α. Το άθροισμα των φυσικών 3, 7 και 13

β. Το γινόμενο του 4 και του 5.

γ. Το άθροισμα του 7 με το γινόμενο του 3 με το 6.

Άσκηση 2.6

Γράψε με πιο σύντομο τρόπο τα επόμενα αθροίσματα και βρες το αποτέλεσμα.

α. $3+3+3+3+3=$

β. $5+5+5+5+5+5=$

γ. $\underbrace{20+20+\cdots+20}_{12\ όροι}=$

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

……………………………………………………………………

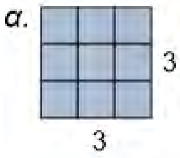
Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

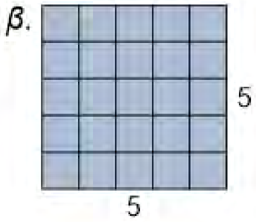
………

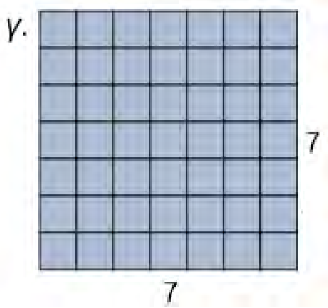
3. Δυνάμεις- Προτεραιότητα πράξεων

Δραστηριότητα 3.1 (Η έννοια της δύναμης)

1. Πόσα μικρά τετράγωνα □ έχει το καθένα από τα επόμενα τετράγωνα;





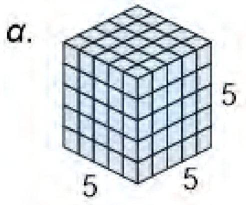


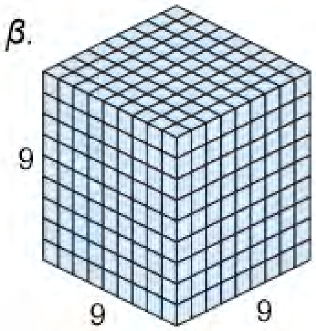
Για να βρει η Μαρία την απάντηση στο α, έγραψε: $3 \cdot 3 = 9$.
Γράψτε τις απαντήσεις για τα άλλα δύο ερωτήματα (β και γ).

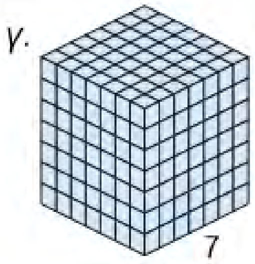
……

……

2. Πόσους μικρούς κύβους ⬡ έχει ο καθένας από τους επόμενους κύβους;







Για να βρει ο Χαλίλ την απάντηση στο α, έγραψε: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.
Γράψτε τις απαντήσεις για τα άλλα δύο ερωτήματα (β και γ).

……

……

3. Τι κοινό (ίδιο) χαρακτηριστικό έχουν οι πολλαπλασιασμοί που γράψατε στις παραπάνω ασκήσεις 1 και 2;

……

……

……

……

Το κτίριο στο οποίο ζει η Μαρία έχει 4 ορόφους.
Κάθε όροφος έχει 4 διαμερίσματα.
Σε κάθε διαμέρισμα ζει μια οικογένεια με 4 άτομα.
Στο ισόγειο έχει μόνο πάρκινγκ για τα αυτοκίνητα.

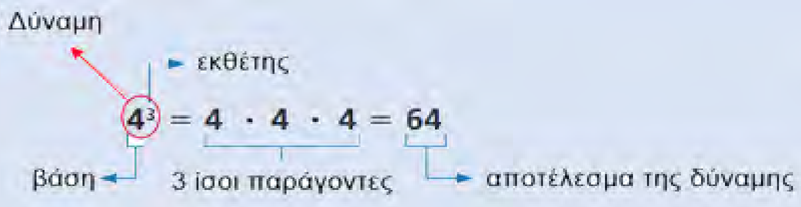
Για να συμβολίσουμε τον αριθμό των ατόμων που ζουν στο κτίριο γράφουμε το γινόμενο: $\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3\ ίσοι\ παράγοντες\ με\ 4}$.

Γινόμενο όπως το $\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3\ ίσοι\ παράγοντες\ με\ 4}$ θα το συμβολίζουμε πιο σύντομα 4^3, δηλαδή $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$. Το λέμε **τρίτη δύναμη του 4** ή **4 στην 3η (τρίτη)**.

Με όμοιο τρόπο:

- Το γινόμενο $\underbrace{7 \cdot 7}_{2\ ίσοι\ παράγοντες\ με\ 7}$ το συμβολίζουμε σύντομα 7^2, δηλαδή

  $7 \cdot 7 = 7^2$ και το διαβάζουμε **7 στην 2α (δευτέρα)** ή **δεύτερη δύναμη του 7**.
- Το γινόμενο $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6\ παράγοντες\ ίσοι\ με\ 5}$ το γράφουμε σύντομα 5^6 και το διαβάζουμε **5 στην 6η (έκτη)** ή **έκτη δύναμη του 5**.
- Στον συμβολισμό 4^3 το 4 ονομάζεται **βάση** της δύναμης και το 3 ονομάζεται **εκθέτης** της δύναμης.



Παρατηρήσεις

- Η δεύτερη δύναμη ενός αριθμού, για παράδειγμα το 3^2, ονομάζεται **τετράγωνο του αριθμού** (3 **στο τετράγωνο** ή **τετράγωνο του** 3).
- Η τρίτη δύναμη ενός αριθμού, για παράδειγμα 5^3, ονομάζεται **κύβος του αριθμού** (5 **στον κύβο** ή **κύβος** του 5).
- **Πρώτη δύναμη** ενός αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός, για παράδειγμα $7^1 = 7$.

Άσκηση 3.1

Γράψετε με σύντομο τρόπο τα επόμενα γινόμενα.

α. $4 \cdot 4 \cdot 4 =$
β. $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$
γ. $\alpha \cdot \alpha =$
δ. $x \cdot x \cdot x =$
ε. $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$=

Άσκηση 3.2

Να γράψετε αναλυτικά και να υπολογίσετε τις επόμενες δυνάμεις, όπως στο παράδειγμα.

α. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

β. $3^2 =$

γ. $10^2 =$

δ. $2^4 =$

ε. $2^5 =$

στ. $2^6 =$

ζ. $2^7 =$

η. $2^8 =$

θ. $2^9 =$

ι. $2^{10} =$

ια. $3^3 =$

ιβ. $3^4 =$

ιγ. $10^3 =$

ιδ. $10^5 =$

Δραστηριότητα 3.2 (Προτεραιότητα πράξεων)

Μαθαίνω

Σε μία αριθμητική παράσταση, οι πράξεις γίνονται με μία σειρά:

1. Πρώτα, υπολογίζουμε τις δυνάμεις..
2. Μετά, υπολογίζουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά.
3. Μετά, υπολογίζουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.

Στο τέλος, το αποτέλεσμα που βρίσκουμε λέγεται **η τιμή της αριθμητικής παράστασης**.

Ο Χαλίλ κάνει τις πράξεις για να υπολογίσει την τιμή της αριθμητικής παράστασης $2^3 + 7 \cdot 5 - (10 - 3 \cdot 2)^2$.

$2^3 + 7 \cdot 5 - (10 - 3 \cdot 2)^2 =$	Πρώτα οι πράξεις μέσα στην παρένθεση. Υπάρχει αφαίρεση και πολλαπλασιασμός. Πρώτα γίνεται ο πολλαπλασιασμός.
$2^3 + 7 \cdot 5 - (10 - 6)^2 =$	Η αφαίρεση μέσα στην παρένθεση
$2^3 + 7 \cdot 5 - 4^2 =$	Δυνάμεις
$8 + 7 \cdot 5 - 16 =$	Πολλαπλασιασμός
$8 + 35 - 16 =$	Η πρόσθεση που είναι αριστερά
$43 - 16 =$	Η αφαίρεση
27	

Κάντε τις επόμενες πράξεις:

α. $2 + 3 \cdot 5 =$..

β. $10^2 - 3^2 \cdot 2 =$..

γ. $3 \cdot (7 + 6 \cdot 2) =$ ....

δ. $4 \cdot 20 - 3 \cdot 2^2 + (7 - 2 \cdot 1)^3 =$ ....
....
....

Άσκηση 3.3

Κάντε τις επόμενες πράξεις.

α. $2 + 3 \cdot 4 =$

β. $(2 + 3) \cdot 4 =$

γ. $2^2 + 3 \cdot 4 =$

δ. $(2+3)^2 \cdot 4 =$

ε. $(2+3) \cdot 4^2 =$

στ. $2^2 + 3^2 \cdot 4 =$

ζ. $(2^2+3) \cdot 4 =$

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

……………………………………………………………………………

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

……

4. Ευκλείδεια διαίρεση – Πολλαπλάσια – Διαιρέτες – Διαιρετότητα

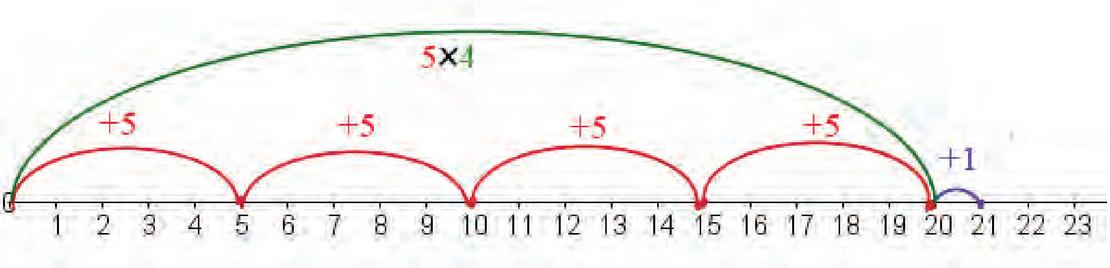
Δραστηριότητα 4.1 (Ευκλείδεια διαίρεση)

Ο Αμίρ βοηθάει τον μπαμπά του να βάλει βόλους σε συσκευασίες. Έχουν 21 βόλους.

Συμπληρώσετε τα επόμενα (οι ερωτήσεις είναι κάθε φορά για τους 21 βόλους)

1. Κάθε συσκευασία που φτιάχνει ο Αμίρ πρέπει να έχει 3 βόλους. Πόσες συσκευασίες θα φτιάξει; .... Πόσοι βόλοι από τους 21 περισσεύουν (δηλαδή μένουν); ....
2. Κάθε συσκευασία πρέπει να έχει 4 βόλους, πόσες συσκευασίες θα φτιάξει; .... Πόσοι βόλοι από τους 21 θα περισσεύουν; ....
3. Κάθε συσκευασία πρέπει να έχει 6 μπίλιες, πόσες συσκευασίες θα φτιάξει; .... Πόσοι βόλοι από τους 21 περισσεύουν; ....
4. Για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις 1 έως 3, γράψτε μια αριθμητική παράσταση που χρησιμοποιεί τους αριθμούς των ερωτήσεων 1 έως 3 και το αποτέλεσμα θα είναι 21.
   ....
   ....
   ....
5. Συζητήστε τις απαντήσεις σας στο ερώτημα 4 με τα άλλα παιδιά της τάξης σας και τον καθηγητή σας.

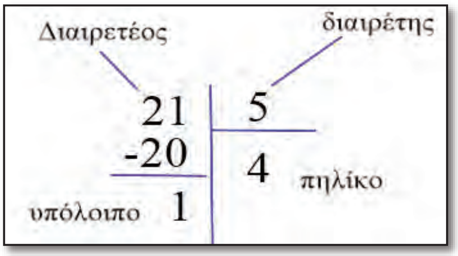
Η παρακάτω αριθμογραμμή παριστάνει την διαδικασία για να βάλει ο Αμίρ τους 21 βόλους σε συσκευασίες των 5. Χρειάζονται 4 συσκευασίες και περισσεύει 1 βόλος.



Η αριθμητική παράσταση που γράφουμε είναι: $5 \times 4 + 1 = 21$.

Η διαδικασία στην οποία μας δίνουν δύο φυσικούς αριθμούς, τον **Διαιρετέο (Δ)** και τον **διαιρέτη (δ)** (στο παραπάνω Δ=21 και δ=5) και βρίσκουμε δύο άλλους φυσικούς αριθμούς, το **πηλίκο (π)** και το **υπόλοιπο (υ)** (στο παραπάνω π=4 και υ=1), ώστε $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$, με $\upsilon < \delta$, ονομάζεται **Ευκλείδεια διαίρεση**.

Όταν το **υπόλοιπο είναι μηδέν** η διαίρεση ονομάζεται **τέλεια διαίρεση**.



Το σύμβολο < διαβάζεται «μικρότερος από». *Για παράδειγμα $2<5$ διαβάζεται: «ο 2 είναι μικρότερος από τον 5»*

Χρησιμοποιήστε αριθμομηχανή και κάντε την διαίρεση 21 : 5.
Γράψτε πώς μπορείτε να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης 21:5 με την βοήθεια της αριθμομηχανής.

....

....

....

Άσκηση 4.1

Να βρείτε τον αριθμό κάθε φορά με βάση τις πληροφορίες που δίνονται.

α. Αν διαιρέσουμε τον αριθμό με το 5 βρίσκουμε πηλίκο 12 και υπόλοιπο 3. Ποιος είναι ο αριθμός;
β. Αν διαιρέσουμε τον αριθμό με το 15 βρίσκουμε πηλίκο 20 και υπόλοιπο 0. Ποιος είναι ο αριθμός;

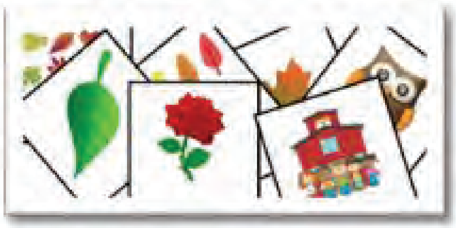
Άσκηση 4.2

Σε ένα σχολείο υπάρχουν 345 μαθητές. Μπορούν να χωριστούν οι μαθητές

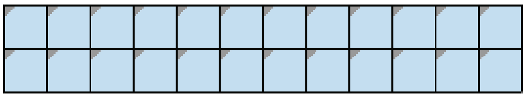
α. σε 3 ίσες ομάδες; ....
β. σε 5 ίσες ομάδες; ....
γ. σε 6 ίσες ομάδες; ....

Δραστηριότητα 4.3 (διαιρέτες)

Η Νάντα έχει 24 κάρτες ζωγραφισμένες. Οι κάρτες έχουν μορφή το τετράγωνο.



Η Νάντα θέλει να βάλει τις κάρτες στον τοίχο και να φτιάξει ένα ορθογώνιο. Δοκιμάζει να βρει **όλους τους διαφορετικούς τρόπους** για να αποφασίσει ποιος της αρέσει περισσότερο.



Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται ένας τρόπος που δοκίμασε. Έφτιαξε δύο σειρές και δώδεκα στήλες και έγραψε $2 \times 12 = 24$.

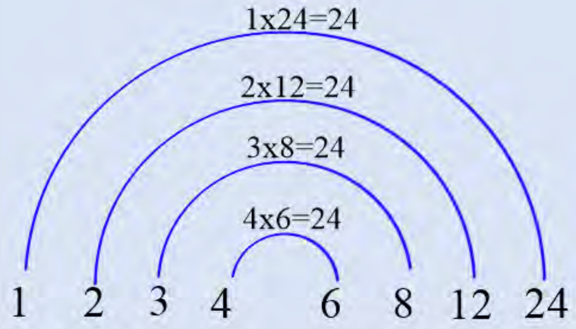
Α. Μπορείτε να την βοηθήσετε να βρει **όλους** τους δυνατούς τρόπους;

Γράψτε διαφορετικούς τρόπους που βρήκατε: ………………………………………………………

……

Συζητήστε με τα υπόλοιπα παιδιά της τάξης αυτά που βρήκατε.

Ο **2 είναι παράγοντας του 24** , γιατί $2 \cdot 12 = 24$.
Επίσης λέμε ότι **ο 2 είναι διαιρέτης του 24**, γιατί $24 : 2 = 12$.
Με ίδιο τρόπο ο 12 είναι ένας άλλος παράγοντας του 24 ή λέμε ότι ο 12 είναι διαιρέτης του 24, γιατί $24 : 12 = 2$.
Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει όλους τους διαιρέτες του 24, δηλαδή οι διαιρέτες του 24 είναι οι: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.



Λέμε ότι **ο 24 διαιρείται** από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Επίσης, λέμε ότι **ο 24 είναι πολλαπλάσιος** των αριθμών 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν φυσικό αριθμό (π.χ. το 5) με όλους τους φυσικούς αριθμούς, ξεκινώντας από το 0, τα γινόμενα που θα έχουμε ονομάζονται **πολλαπλάσια του 5.**
Για παράδειγμα, οι αριθμοί: 0, 5, 10, 15, 20, 25, ….. είναι τα πολλαπλάσια του 5, γιατί:
$0 \cdot 5 = 0,\ 1 \cdot 5 = 5,\ 2 \cdot 5 = 10,\ 3 \cdot 5 = 15,\ 4 \cdot 5 = 20\ ,\ 5 \cdot 5 = 25, \dots$

Άσκηση 4.3

α. Αν ένας παράγοντας του 12 είναι ο 6, ποιος είναι ο άλλος παράγοντας;
β. Είναι ο 12 διαιρέτης του 60; Εξηγήστε την απάντησή σας.
γ. Είναι ο 30 διαιρέτης του 5; Εξηγήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 4.4

Ποιος από τους επόμενους αριθμούς έχει τους περισσότερους διαιρέτες;
α. 13 β. 14 γ. 25 δ. 36 ε. 42

Δραστηριότητα 4.4 (κριτήρια διαιρετότητας για το 2, το 5 και το 10)

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τους φυσικούς αριθμούς από το 0 έως το 119.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119

α. Βρείτε στον πίνακα όλα τα πολλαπλάσια του 2.
Προσπαθήστε να φτιάξετε έναν κανόνα για να ξέρουμε πότε ένας αριθμός που δεν είναι στον πίνακα είναι πολλαπλάσιο του 2.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Ισχύει ο κανόνας που βρήκατε για τους αριθμούς 247, 1358, 4563, 15340;

……………………………………………………………………………………………………

β. Βρείτε στον πίνακα τα πολλαπλάσια του 5. Φτιάξτε έναν κανόνα για να βρίσκουμε αν ένας αριθμός που δεν είναι στον πίνακα είναι πολλαπλάσιο του 5.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Γράψτε μερικούς αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 5 και που δεν είναι στον πίνακα. ………………………………………………………………………………

γ. Βρείτε στον πίνακα τα πολλαπλάσια του 10. Φτιάξετε έναν κανόνα για να ξέρουμε αν κάποιος αριθμός που δεν είναι στον πίνακα είναι πολλαπλάσιο του 10.

....

....

....

....

Γράψτε μερικούς αριθμούς που δεν είναι στον πίνακα και είναι πολλαπλάσια του 10. ....

<u>**Κριτήρια διαιρετότητας**</u> είναι οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να ξέρουμε αν ένας αριθμός διαιρείται ακριβώς από κάποιον άλλο αριθμό χωρίς να κάνουμε την διαίρεση.

Μαθαίνω

Ένας αριθμός **διαιρείται με το 2** μόνο **όταν είναι άρτιος**, δηλαδή όταν **το ψηφίο των μονάδων του είναι 0, 2, 4, 6 ή 8.** *Ο 13576 διαιρείται με το 2, γιατί τελειώνει σε 6.*

Ένας αριθμός **διαιρείται με το 5**, μόνο **όταν το ψηφίο των μονάδων του είναι 0 η 5**. *Ο 975 διαιρείται με το 5, γιατί το ψηφίο των μονάδων του είναι το 5.*

Ένας αριθμός **διαιρείται με το 10**, μόνο **όταν το ψηφίο των μονάδων του είναι 0**. *Ο 210 διαιρείται με το 10.*

Ένας αριθμός **διαιρείται με το 3**, μόνο **όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3**. *Ο 534 διαιρείται με το 3, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του: 5 + 3 + 4 = 12 διαιρείται με το 3. Ο 623 δεν διαιρείται με το 3 γιατί το άθροισμα των ψηφίων του: 6+2+3=11 δεν διαιρείται με το 3.*

Ένας αριθμός **διαιρείται με το 9**, μόνο **όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9**. *Ο 2835 διαιρείται με το 9, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του: 2 + 8 + 3 + 5=18 διαιρείται με το 9. Ο 239 δεν διαιρείται με το 9 γιατί 2+3+9=14.*

Άσκηση 4.5

Σημειώστε ✓ στην κατάλληλη στήλη του πίνακα, όπως στο παράδειγμα.

Αριθμός	Διαιρείται με				
	το 2	το 3	το 5	το 9	το 10
1410	✓	✓	✓		✓
1610					
2963					
161					
617					
177					
1101					
459					
895					
593					
835					
2711					
2263					
1412					
1119					
1926					

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

....

....

....

....

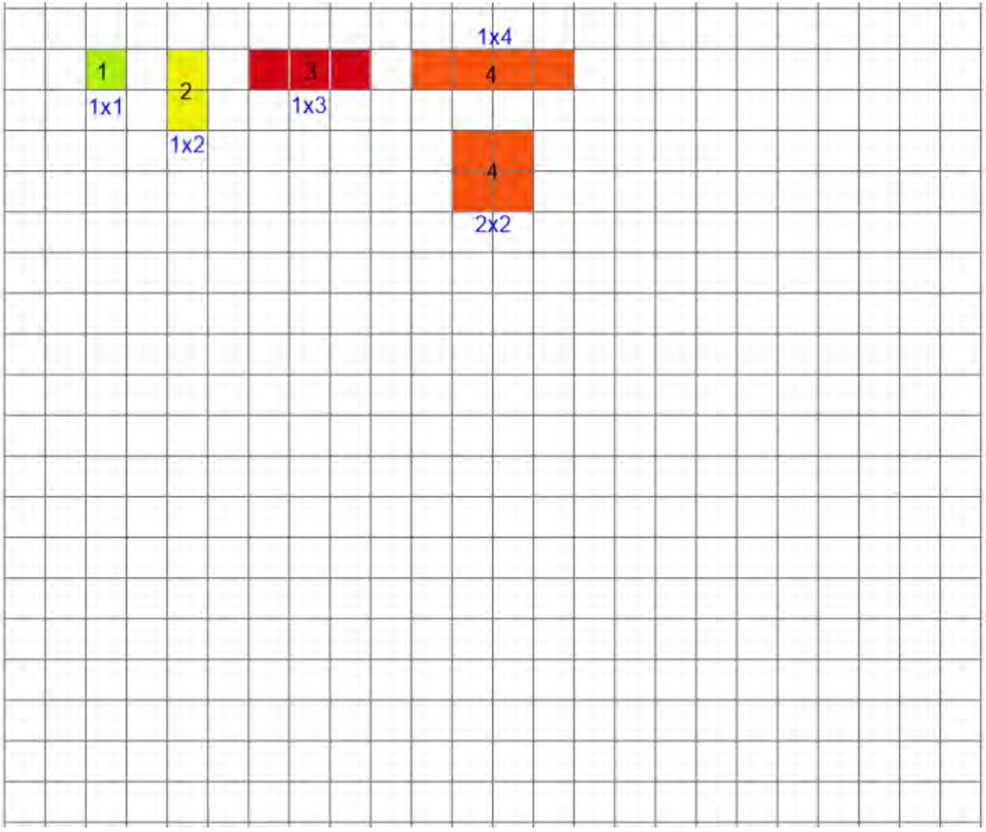
Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

....

5. Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί - Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων – Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) – Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)

Δραστηριότητα 5.1 (πρώτοι – σύνθετοι αριθμοί)

α. Ο Αλί σχεδίασε όλα τα διαφορετικά ορθογώνια που έχουν εμβαδόν 1, 2, 3 και 4 τετραγωνικές μονάδες, όπως φαίνεται πιο κάτω. Επίσης έγραψε τις διαστάσεις των ορθογωνίων. Να συνεχίσετε την εργασία του και να σχεδιάσετε όλα τα διαφορετικά ορθογώνια που έχουν εμβαδόν 5 έως και 15 τετραγωνικές μονάδες.



β. Με βάση την εργασία στο ερώτημα α, συμπληρώστε τον επόμενο πίνακα, όπως στο παράδειγμα.

Αριθμός	Διαιρέτες	Πλήθος διαιρετών (δηλαδή πόσοι είναι)
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5		
6		
7		
8		

9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		

γ. Ποιοι αριθμοί έχουν μόνον δύο διαιρέτες;

……………………………………………………………………………………………………

Μαθαίνω

Ένας φυσικός αριθμός που έχει μόνο δύο διαιρέτες, τον εαυτό του και το 1, ονομάζεται **πρώτος** αριθμός. *Για παράδειγμα οι αριθμοί 2 , 3, 5, 7, 11 είναι πρώτοι.*

Ο αριθμός 1 δεν είναι πρώτος αριθμός, γιατί έχει έναν μόνο διαιρέτη.

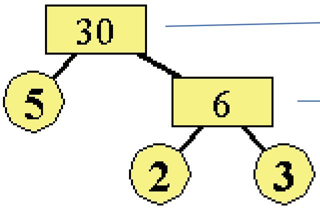
Ένας φυσικός που έχει περισσότερους από δύο διαιρέτες ονομάζεται **σύνθετος**. *Για παράδειγμα οι αριθμοί 4, 6, 8, 9, 10 είναι σύνθετοι.*

Δραστηριότητα 5.3 (Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων)

Θέλουμε να γράψουμε τον αριθμό 30 ως γινόμενο από πρώτους παράγοντες.

Α. Μέθοδος με δεντροδιάγραμμα

Η Λέιλα χρησιμοποίησε την παρακάτω μέθοδο (**δεντροδιάγραμμα**).



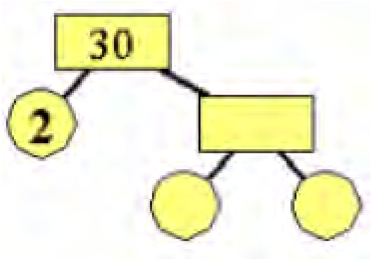
Το 30 είναι πολλαπλάσιο του 5

γιατί $5 \cdot 6 = 30$. Το 6 είναι πολλαπλάσιο του 3.

γιατί $2 \cdot 3 = 6$

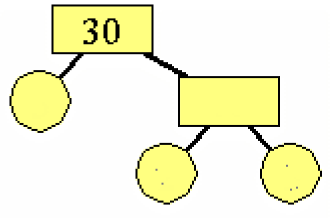
Οι αριθμοί 5, 2 και 3 είναι πρώτοι αριθμοί , άρα: $30 = 5 \cdot 2 \cdot 3$

Ο Αμίρ ξεκίνησε την ίδια μέθοδο, αλλά με παράγοντα τον αριθμό 2. *Προσπαθήστε να συνεχίσετε την μέθοδο και γράψτε το 30 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.*



$30 =$ ....

Προσπαθήστε να χρησιμοποιήσετε την ίδια μέθοδο, ξεκινώντας στην αρχή με άλλους παράγοντες. Γράψτε το 30 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.



$30 =$..........................

Κάθε σύνθετος αριθμός μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. Η σειρά των παραγόντων στο γινόμενο δεν έχει σημασία.

Β. Συστηματική μέθοδος

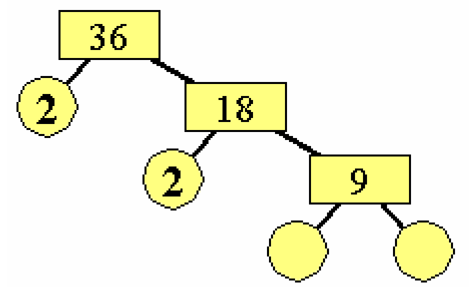
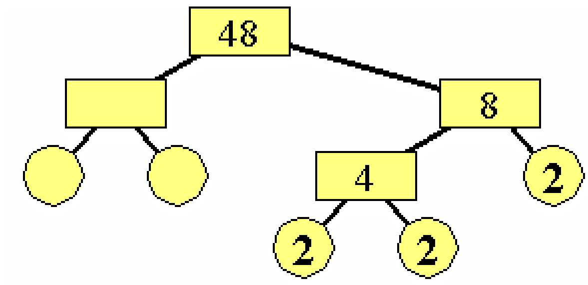
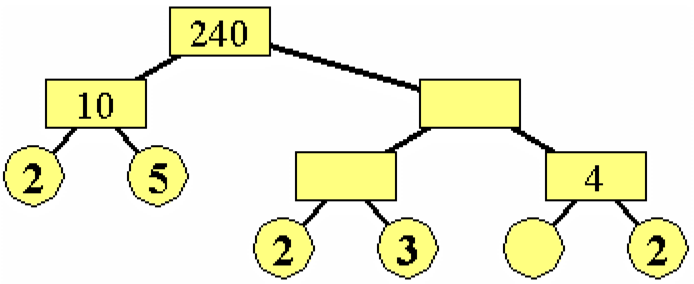
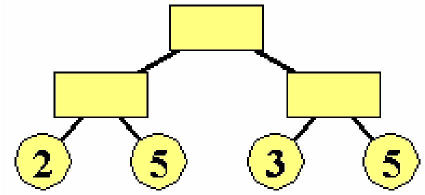
Ο καθηγητής έδειξε στην τάξη έναν πιο συστηματικό τρόπο και τον εφάρμοσε για να αναλύσει το 60.
Έγραψε μερικούς από τους αρχικούς πρώτους αριθμούς: 2, 3, 5, 7, 11, ……

		Σκέψεις
60	2	*Ο 2 διαιρεί το 60; Ναι, γιατί 60:2=30*
30	2	*Ο 2 διαιρεί το 30; Ναι, γιατί 30:2=15*
15	3	*Ο 2 διαιρεί το 15; Όχι. Ο 3 διαιρεί το 15; Ναι, γιατί 15:3=5*
5	5	*Ο 3 διαιρεί το 5; Όχι. Ο 5 διαιρεί το 5; Ναι, γιατί 5:5=1*
1		*Τέλος*

Άρα $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ ή $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

Άσκηση 5.1

Συμπλήρωστε τα επόμενα και γράψτε τον αρχικό αριθμό ως γινόμενο πρώτων παραγόντων:

Α.		36=.................
Β.		48=....................
Γ.		240=....................
Δ.		....

Άσκηση 5.2

Να αναλύσετε τους αριθμούς 25, 48, 360 και 1000 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με όποια μέθοδο θέλετε.

Δραστηριότητα 5.4 (Μέγιστος κοινός διαιρέτης)

Ο Αμίρ φτιάχνει πακέτα με δώρα για μια τάξη. Έχει 260 τετράδια και 100 στυλό. Τα πακέτα δώρων πρέπει να είναι ίδια. Κάθε πακέτο πρέπει να έχει μέσα τετράδια και στυλό.

α. Μπορεί να φτιάξει 5 πακέτα δώρων; Αν ναι, πόσα τετράδια και στυλό θα έχει κάθε πακέτο;

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

β. Μπορεί να φτιάξει 10 πακέτα δώρων; Αν ναι, πόσα τετράδια και στυλό θα έχει κάθε πακέτο;

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

γ. Τι είναι οι αριθμοί 5 και 10 (από τα ερωτήματα 1 και 2) για τους αριθμούς 260, και 100; ………………………………………………………………

δ. Μπορεί να γίνουν περισσότερα από 10 πακέτα; Αν ναι, πόσα πακέτα μπορούν να γίνουν; ……………………………………………………………………

Μαθαίνω

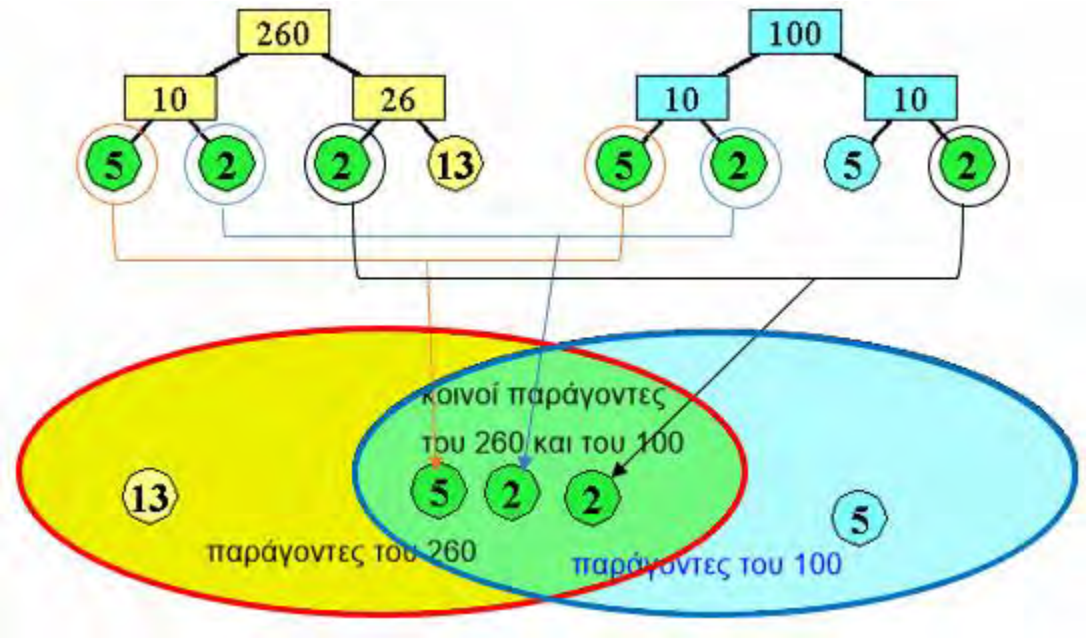
Μέγιστος (μεγαλύτερος) **κοινός** (ίδιος) **διαιρέτης** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών είναι ο πιο μεγάλος αριθμός που διαιρεί αυτούς τους δύο αριθμούς.
Γράφουμε συμβολικά **ΜΚΔ** για τον **Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη**. Για παράδειγμα, $ΜΚΔ(6,4) = 2$

Για να βρούμε τον μεγαλύτερο κοινό διαιρέτη δύο (ή περισσότερων) αριθμών αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με μια από τις επόμενες μεθόδους.

Να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 260 και 100, δηλαδή να βρεθεί ο ΜΚΔ(260, 100).

$1^{ος}$ τρόπος (Με δεντροδιάγραμμα)

Στο επόμενο διάγραμμα οι αριθμοί που είναι μέσα στην κόκκινη καμπύλη (κίτρινη και πράσινη περιοχή) είναι οι πρώτοι παράγοντες του 260. Όσοι είναι μέσα στην μπλε καμπύλη (γαλάζια και πράσινη περιοχή) είναι οι πρώτοι παράγοντες του 100.



Οι παράγοντες που είναι στην μπλε και στην κόκκινη καμπύλη (πράσινη περιοχή) είναι οι κοινοί παράγοντες και των δύο.
Άρα το γινόμενό τους, δηλαδή το $5\cdot2\cdot2=20$ θα διαιρεί και τους δύο αριθμούς.
Οπότε $ΜΚΔ(260,100)\ =20$.

2ος τρόπος

Είναι:

260	2
130	2
65	5
13	13
1	

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

Δηλαδή $260=\underbrace{2\cdot2\cdot5}_{20}\cdot13=20\cdot13$ και $100=\underbrace{2\cdot2\cdot5}_{20}\cdot5=20\cdot5$.

Το 20 είναι ο μεγαλύτερος (μέγιστος) κοινός παράγοντας (ή διαιρέτης) του 260 και του 100, δηλαδή $ΜΚΔ(260,100)\ =20$.

Άσκηση 5.3

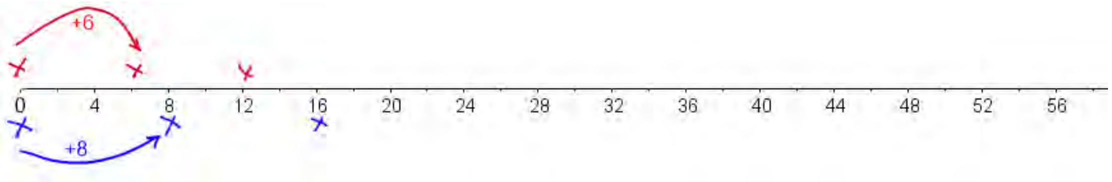
Να βρείτε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των επόμενων αριθμών.

α. ΜΚΔ(4, 14)
β. ΜΚΔ(3, 8)
γ. ΜΚΔ(12, 20)

Δραστηριότητα 5.5 (Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο)

Ο Αμίρ και η Μαρία έβαλαν μπλε και κόκκινα φωτάκια στην τάξη τους για διακόσμηση. Τα κόκινα φωτάκια ανάβουν κάθε 6 δευτερόλεπτα. Τα μπλε φωτάκια ανάβουν κάθε 8 δευτερόλεπτα. Μόλις τα έβαλαν στην πρίζα άναψαν μαζί τα μπλε και τα κόκκινα φωτάκια. Θέλουν να βρουν μετά από πόσα δευτερόλεπτα τα μπλε και τα κόκκινα φωτάκια θα ανάψουν μαζί.

Ο Αμίρ έφτιαξε την επόμενη αριθμογραμμή για να βρει την απάντηση. *Συνεχίστε την μέθοδό του όσο είναι δυνατόν.*



Η Μαρία έφτιαξε τον επόμενο πίνακα. *Συνεχίστε τη μέθοδό της.*

Χρόνος που ανάβουν τα κόκκινα	0	6	12												
Χρόνος που ανάβουν τα μπλε	0	8	16												

1. Ύστερα από πόσα δευτερόλεπτα από την αρχή τα μπλε και τα κόκκινα φωτάκια θα ανάψουν ξανά μαζί για 1η φορά;
   ……………………………………………………………………………………………………
   α. Πώς φαίνεται αυτό στην αριθμογραμμή που έφτιαξε ο Αμίρ;
   ……………………………………………………………………………………
   β. Πώς φαίνεται αυτό στον πίνακα της Μαρία;
   ……………………………………………………………………………………
2. Ύστερα από πόσα δευτερόλεπτα από την αρχή τα μπλε και τα κόκκινα φωτάκια θα ανάψουν ξανά μαζί:
   α. για 2η φορά; ……………………………………………………………………………
   β. για 3η φορά; ……………………………………………………………………………
3. Πόσες φορές (χωρίς την αρχική) θα ανάψουν μαζί στα πρώτα 2 λεπτά (120 δευτερόλεπτα); ……………………………………………………………………………

Μαθαίνω

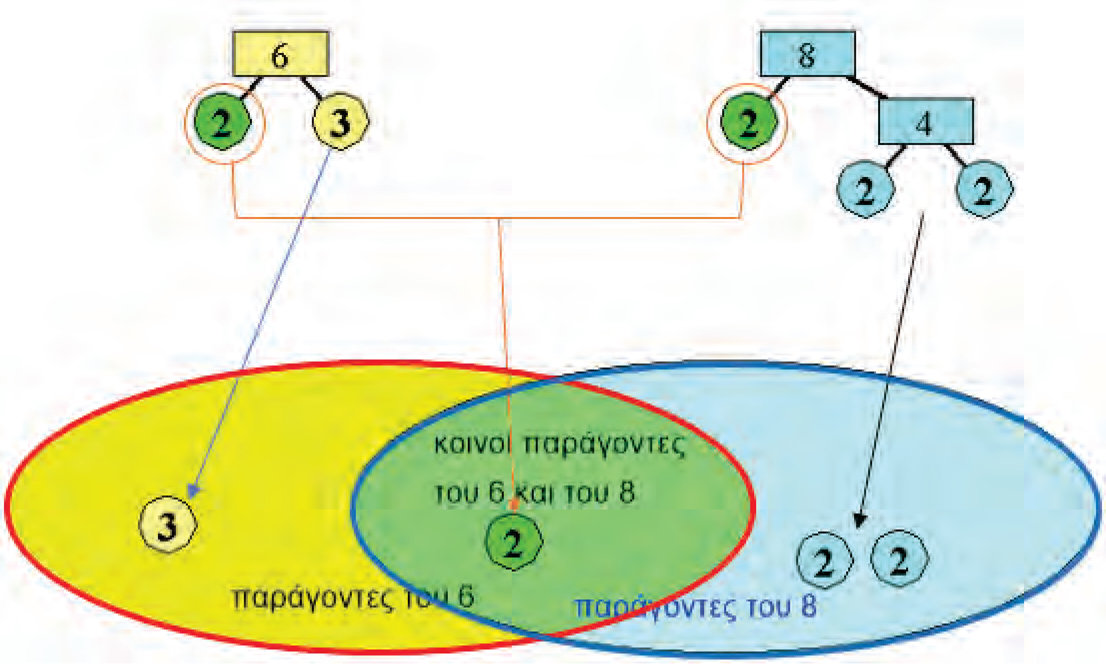
Ελάχιστο (μικρότερο) **κοινό πολλαπλάσιο** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών είναι ο πιο μικρός αριθμός που είναι πολλαπλάσιο των αριθμών και δεν είναι μηδέν.
Γράφουμε **ΕΚΠ** για το **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο.**
Για παράδειγμα $ΕΚΠ\,(2,3)=6$

Για να βρούμε το μικρότερο (ελάχιστο) κοινό πολλαπλάσιο δύο (ή περισσότερων αριθμών) αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Να βρεθεί το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 6 και 8, δηλαδή το $ΕΚΠ\,(6\,,8)$

$1^{ος}$ τρόπος (με δεντροδιάγραμμα)

Οι αριθμοί που είναι μέσα στην κόκκινη καμπύλη (κίτρινη και πράσινη περιοχή) είναι οι πρώτοι παράγοντες του 6. Όσοι είναι μέσα στην μπλε καμπύλη (γαλάζια και πράσινη περιοχή) είναι οι πρώτοι παράγοντες του 8.



Οι παράγοντες που είναι στην μπλε και στην κόκκινη καμπύλη (πράσινη περιοχή) είναι οι κοινοί παράγοντες των δύο αριθμών.
Το γινόμενο των κοινών (μόνο μια φορά το κάθε ζευγάρι) και των μη κοινών παραγόντων, δηλαδή το $3\cdot2\cdot2\cdot2=24$ είναι το μικρότερο (ελάχιστο) κοινό πολλαπλάσιο του 6 και του 8. **Γράφουμε ΕΚΠ(6, 8)=24**.

2ος τρόπος

Βρίσκουμε τα πολλαπλάσια του κάθε αριθμού (όπως έκανε η Μαρία πριν).
Μετά βρίσκουμε τα κοινά πολλαπλάσιά τους.
Το 1ο κοινό πολλαπλάσιο **που δεν είναι μηδέν** είναι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των δύο αριθμών.

Πολλαπλάσια του 6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	…
Πολλαπλάσια του 8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	…

Άσκηση 5.4

Δύο πλοία επισκέπτονται ένα νησάκι. Το πρώτο κάθε 5 ημέρες, το δεύτερο κάθε 4 ημέρες. Αν σήμερα ήταν στο λιμάνι του νησιού και τα δύο πλοία μαζί μετά πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι του νησιού;

Άσκηση 5.5

Βρείτε το ΕΚΠ των επόμενων αριθμών.

α. ΕΚΠ(3, 4)
β. ΕΚΠ (12, 6)
γ. ΕΚΠ(5, 3)
δ. ΕΚΠ(14,28)

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

…………………………………………………………………………

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

……

Ενότητα Α1

Κλάσματα

1. Η έννοια του κλάσματος – Ισοδύναμα κλάσματα

1.1 Διερεύνηση *(το κλάσμα ως μέρος ενός όλου)*

Η σημαία της Νιγηρίας είναι χωρισμένη σε τρία ίσα μέρη χρωματισμένα είτε με πράσινο είτε με άσπρο.

-Από τα τρία μέρη πόσα είναι άσπρα; ……

Λέμε ότι το άσπρο κομμάτι είναι το $\frac{1}{3}$ από τη σημαία.

-Από τα τρία μέρη πόσα είναι πράσινα; ……

Λέμε ότι το πράσινο κομμάτι είναι το $\frac{2}{3}$ από τη σημαία.

Το $\frac{1}{3}$ και το $\frac{2}{3}$ είναι αριθμοί και τα λέμε **κλάσματα.**

- Ένα κλάσμα είναι ένας αριθμός.
- Ένα κλάσμα μπορεί να δείχνει το μέρος μιας μονάδας (εδώ μονάδα είναι η σημαία).
- Ο παρονομαστής ονομάζει σε πόσα μέρη χωρίστηκε δίκαια ένα ολόκληρο.
- Ο αριθμητής μετράει (αριθμεί) πόσα από αυτά τα μέρη μας ενδιαφέρουν.
- Όταν ο **αριθμητής είναι ίδιος με τον παρονομαστή** (π.χ. $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$) **το κλάσμα είναι ίσο με 1**.

Μαθαίνω

αριθμητής

Κλάσμα: $\frac{2}{3}$ ← γραμμή κλάσματος

παρονομαστής

Το διαβάζουμε «δύο τρίτα» (ή «δύο προς τρία»)

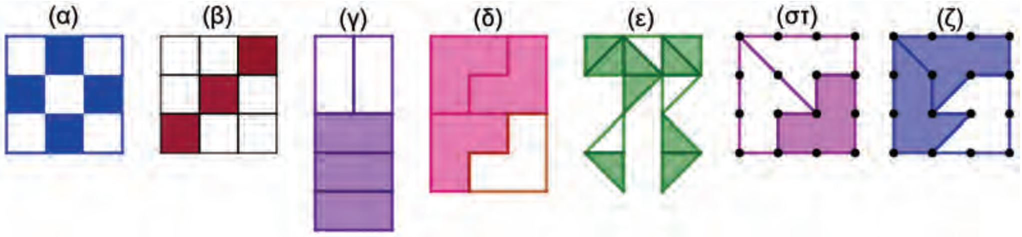
Α) Γράψτε για κάθε σχήμα ως κλάσμα, το μέρος που έχει χρώμα. Όπως στο πρώτο παράδειγμα:

(α) $\frac{4}{9}$, (β) —

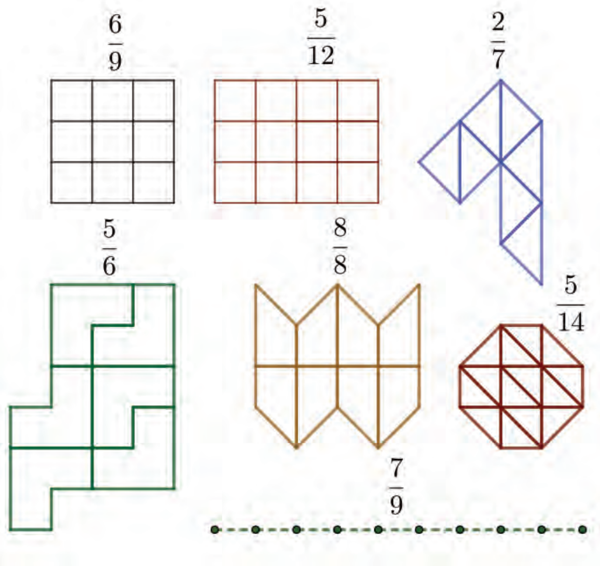
(γ) — , (δ) — ,

(ε) — , (στ) —

(ζ) —



Β) Πάνω από κάθε σχήμα, υπάρχει ένα κλάσμα. Σχεδιάστε το αντίστοιχο μέρος σε κάθε σχήμα.

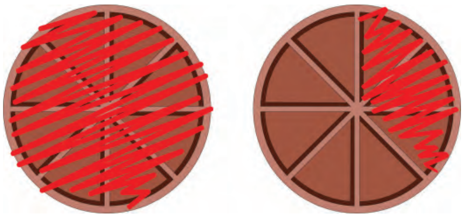


Γ) - Έχουμε μία στρογγυλή σοκολάτα χωρισμένη σε 8 ίσα κομμάτια. Όπως στην εικόνα.

Ο Αρήφ έφαγε 3 κομμάτια.

- Τι μέρος της σοκολάτας έφαγε; —

- Ο Γιώργος έφαγε τα $\frac{11}{8}$ μιας σοκολάτας. Μία ολόκληρη σοκολάτα δηλαδή και άλλα 3 κομμάτια από μια δεύτερη ίδια σοκολάτα.



- Η Κατερίνα έφαγε τα $\frac{17}{8}$ μιας σοκολάτας. Σχεδιάστε τα κομμάτια που έφαγε η Κατερίνα.

Πόσες ολόκληρες σοκολάτες έφαγε η Κατερίνα;

Μαθαίνω

Όταν σ’ ένα κλάσμα, ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα. Για παράδειγμα $\frac{25}{17}>1$ γιατί 25>17. Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}>1$, όταν α>β.

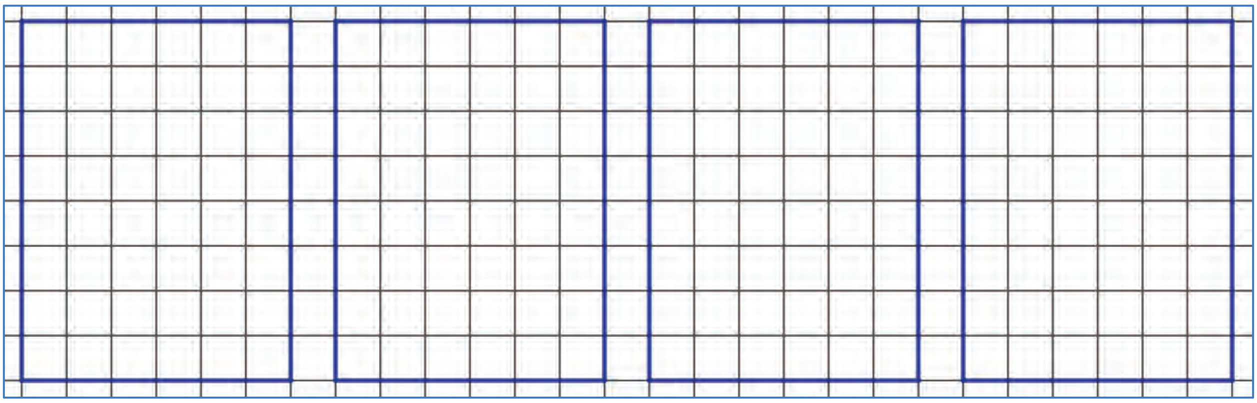
Δ) Η Δανάη έχει αυτό το βραχιόλι που έχει πράσινες, κόκκινες και μπλε χάντρες.

Οι πράσινες χάντρες είναι τα — από το βραχιόλι.

Οι κόκκινες χάντρες είναι τα — από το βραχιόλι.

Οι μπλε χάντρες είναι τα — από το βραχιόλι.

Ε) Χωρίστε το κάθε ορθογώνιο σε τέσσερα ίσα μέρη, με διαφορετικό τρόπο κάθε φορά. Όσες περισσότερες φορές μπορείτε.



1.2 Διερεύνηση *(το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης)*

Α) Στο σπίτι της Σάρα έχουν παραγγείλει 3 ίδιες πίτσες, για να φάνε τα 5 άτομα της οικογένειας. Πώς θα βρούμε τι μέρος της πίτσας θα φάει ο καθένας;

α) Η Σάρα λέει**:** «για να βρούμε τι μέρος θα πάρουμε από μία πίτσα, θα χωρίσουμε την κάθε πίτσα σε 5 κομμάτια. Ο καθένας μας θα πάρει ένα κομμάτι από κάθε πίτσα, δηλαδή $\frac{1}{5}$. Συνολικά ο καθένας θα πάρει 3 φορές το $\frac{1}{5}$, άρα $\frac{3}{5}$ της κάθε πίτσας». Συμφωνείτε;

β) Η αδελφή της Σάρα, λέει: «για να βρούμε τι μέρος της παραγγελίας θα πάρει ο καθένας, θα κάνουμε διαίρεση». Κάντε και σεις τη διαίρεση. Ποιόν δεκαδικό αριθμό βρήκατε;

γ) Η Σάρα και η αδελφή της δούλεψαν με διαφορετικό τρόπο. Βρήκαν το ίδιο; Θα φάει ο καθένας το ίδιο κάθε φορά; Πώς μπορούμε να βρούμε ποιος δεκαδικός αριθμός είναι ένα κλάσμα;

Μαθαίνω

Κάθε κλάσμα εκφράζει το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή δια του παρονομαστή. Για παράδειγμα, $\frac{4}{5}$ = 4:5 = 0,8. Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}$ = α:β.

Μαθαίνω

Ισχύει ότι: $\frac{\alpha}{\beta}=\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\alpha}=1$, $\frac{0}{\alpha}=0$.

Β) Βρείτε ποιος αριθμός είναι το κάθε κλάσμα:

$\frac{15}{5}$ = …… , $\frac{16}{4}$ = …… , $\frac{34}{17}$ = …… , $\frac{1}{2}$ = …… , $\frac{5}{4}$ = …… , $\frac{7}{5}$ = …… ,

$\frac{1}{10}$ = …… , $\frac{17}{10}$ = …… , $\frac{1}{100}$ = …… , $\frac{534}{100}$ = …… , $\frac{1}{1000}$ = …… , $\frac{35}{1000}$ = …… ,

Γ) Γράψτε τους παρακάτω φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς ως κλάσμα.

5= $\frac{10}{2}$, 2 = — , 3 = — , 8 = — , 15 = — , 200 = —

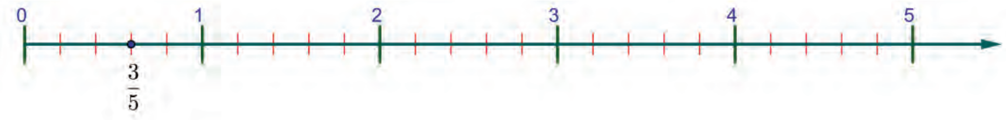
1,2= $\frac{12}{10}$, 3,7 = — , 4,54 = — , 0,62 = — , 2,143 = — , 14,543 = —

Παρατήρηση

Κάθε φυσικός και δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως κλάσμα.

1.3 Διερεύνηση *(το κλάσμα ως μέτρηση)*

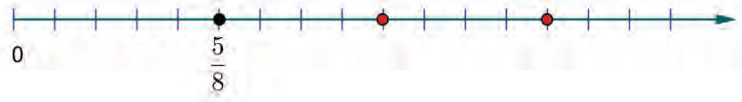
Ένα κλάσμα μπορούμε να το βάλουμε στην αριθμογραμμή. Για παράδειγμα, για να βάλουμε το $\frac{3}{5}$, θα χωρίσουμε το διάστημα από 0 έως 1, σε 5 ίσα διαστήματα και θα το βάλουμε στην τρίτη γραμμή.



α) Γράψτε στην προηγούμενη αριθμογραμμή στη σωστή θέση, τα κλάσματα:
$\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{21}{5}$, $\frac{19}{5}$, $\frac{25}{5}$

β) Να χωρίσετε την παρακάτω αριθμογραμμή και να γράψετε στη σωστή θέση τα κλάσματα:
$\frac{2}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{19}{4}$

γ) Βρείτε τα κλάσματα που είναι στα κόκκινα σημεία σε κάθε αριθμογραμμή.

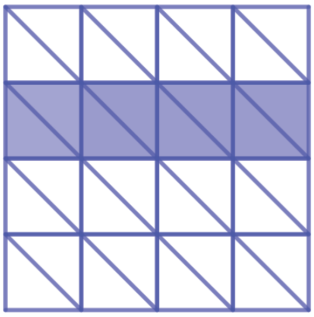


1.4 Διερεύνηση *(κλάσμα ως λόγος - ισοδύναμα κλάσματα και το “τείχος” των κλασμάτων)*

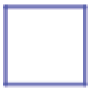
α) Στο διπλανό σχήμα:

- υπάρχουν 4

Άρα το μπλε μέρος είναι το $\frac{1}{4}$



- υπάρχουν 16



Άρα το μπλε μέρος είναι το $\frac{\quad}{16}$

- υπάρχουν 32

Άρα το μπλε μέρος είναι το $\frac{\quad}{32}$

Άρα, $\frac{1}{4} = \frac{\quad}{16} = \frac{\quad}{32}$ γιατί εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός όλου.

Ορισμός

Κλάσματα που είναι ίσα μεταξύ τους ονομάζονται **ισοδύναμα**.

β) Βρείτε ισοδύναμα κλάσματα στον “τοίχο” των κλασμάτων, όπως στο πρώτο παράδειγμα:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

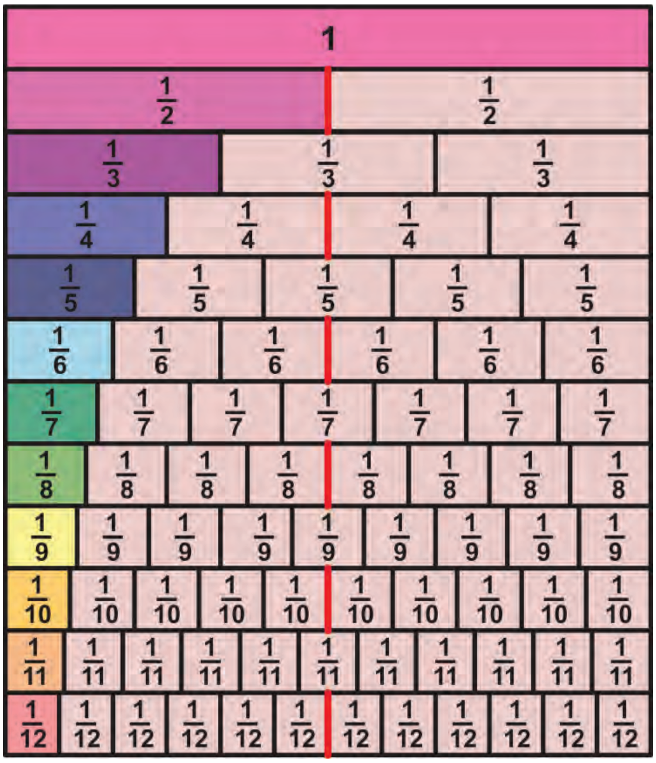
$\frac{1}{3} =$

$\frac{2}{3} =$

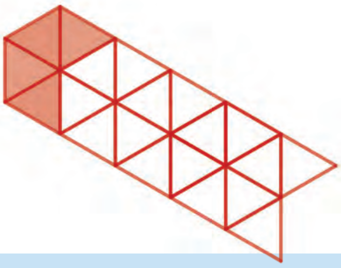
$\frac{3}{4} =$

$\frac{3}{5} =$

$\frac{5}{6} =$



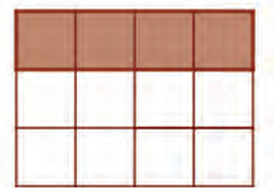
γ) Γράψτε το κόκκινο μέρος του σχήματος με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

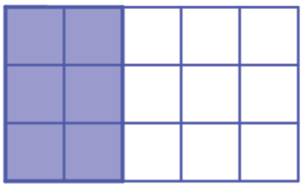


$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

1.5 Διερεύνηση *(ιδιότητες ισοδύναμων κλασμάτων)*

α) – Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ότι: $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$





– Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ότι: $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$

Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{3}\underset{x\,4}{\overset{x\,4}{=}}\frac{4}{12}$. Όπως, και ότι $\frac{2}{5}\underset{x\,3}{\overset{x\,3}{=}}\frac{6}{15}$

Ιδιότητα

Αν πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αριθμό τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος, τότε το κλάσμα είναι ισοδύναμο με το αρχικό, π.χ. $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot5}{3\cdot5}$. Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma}$

- Πόσα ισοδύναμα κλάσματα έχει ένα κλάσμα; *Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.*

- Συμπληρώστε τα κενά όπως στην πρώτη ισότητα:

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{\quad}{6}=\frac{\quad}{8}=\frac{5}{\quad}=\frac{6}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$

$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{\quad}{15}=\frac{10}{\quad}=\frac{\quad}{35}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$

β) Ας δούμε διαφορετικά τις προηγούμενες ισότητες:

Παρατηρούμε ότι $\frac{4}{12}\underset{:\,4}{\overset{:\,4}{=}}\frac{1}{3}$. Όπως, και ότι $\frac{6}{15}\underset{:\,3}{\overset{:\,3}{=}}\frac{2}{5}$

Τι συμπεραίνετε;

Ιδιότητα

Όταν σε ένα κλάσμα, διαιρούμε με τον ίδιο αριθμό τον αριθμητή και τον παρονομαστή, τότε θα έχουμε ένα ισοδύναμο κλάσμα, π.χ. $\frac{10}{15}=\frac{10:5}{15:5}=\frac{2}{3}$. Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma}$.
Λέμε ότι κάνουμε **απλοποίηση** στο κλάσμα.

- Συμπληρώστε τα κενά: $\frac{16}{100} = \frac{8}{\_\_} = \frac{\_\_}{25}$, $\frac{5}{25} = \frac{1}{\_\_}$, $\frac{6}{12} = \frac{1}{\_\_}$, $\frac{14}{21} = \frac{\_\_}{\_\_}$

Ορισμός

Ένα κλάσμα που δεν μπορεί να απλοποιηθεί, ονομάζεται **ανάγωγο κλάσμα**.

Για παράδειγμα: $\frac{1}{17}$, $\frac{3}{5}$.

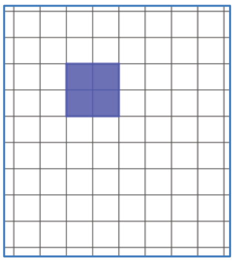
Την απλοποίηση σε ένα κλάσμα μπορούμε να τη γράφουμε: $\frac{18}{27} = \frac{18:9}{27:9} = \frac{2}{3}$ ή $\frac{18}{27} = \frac{9 \cdot 2}{9 \cdot 3} = \frac{2}{3}$,

γ) Κάντε απλοποιήσεις στα κλάσματα, ώστε να γίνουν ανάγωγα:

$\frac{4}{12} = \frac{\_\_}{\_\_}$, $\frac{7}{28} = \frac{\_\_}{\_\_}$, $\frac{25}{100} = \frac{\_\_}{\_\_}$, $\frac{45}{18} = \frac{\_\_}{\_\_}$, $\frac{18}{24} = \frac{\_\_}{\_\_}$, $\frac{100}{75} = \frac{\_\_}{\_\_}$, $\frac{250}{75} = \frac{\_\_}{\_\_}$

δ) Γράψε το κάθε κλάσμα στη σωστή θέση στην αριθμογραμμή: $\frac{3}{8}$, $\frac{17}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{17}{4}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{48}{32}$. Γιατί κάποια είναι στην ίδια θέση;

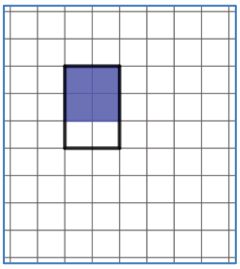
ε) Ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να φτιάξουν ισοδύναμα κλάσματα με το $\frac{2}{3}$. Ο Φαρούκ σκέφτηκε να προσθέσει τον ίδιο αριθμό σε αριθμητή και παρονομαστή. Για παράδειγμα: $\frac{2}{3} = \frac{2+4}{3+4} = \frac{6}{7}$. Έχει δίκιο ο Φαρούκ; *Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.*



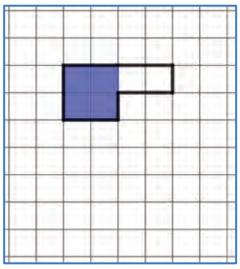
στ) – Ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές να σχεδιάσουν το ολόκληρο, όταν ξέρουν το μέρος και το κλάσμα. Τους είπε ότι το μέρος είναι τα 4 τετράγωνα και κλάσμα το $\frac{2}{3}$.

Οι μαθητές απάντησαν:

Τζεμάλ



Ελένη

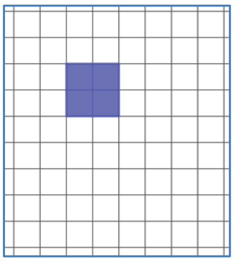


Σχεδίασε ο Τζεμάλ σωστά το ολόκληρο; Η Ελένη;

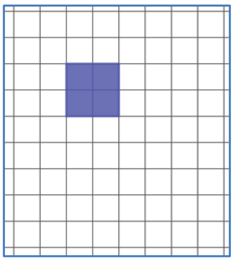
Μπορείτε και σεις να σχεδιάσετε ένα διαφορετικό ολόκληρο;

- Ποιο μπορεί να είναι το ολόκληρο σε κάθε εικόνα; Σχεδιάστε το. (Το κλάσμα πάνω από κάθε εικόνα εκφράζει το μέρος προς το ολόκληρο).

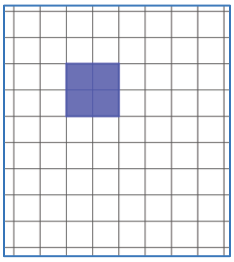
$\frac{4}{5}$



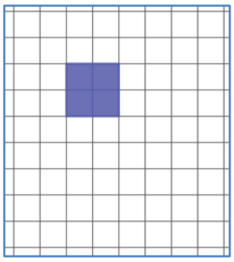
$\frac{1}{2}$



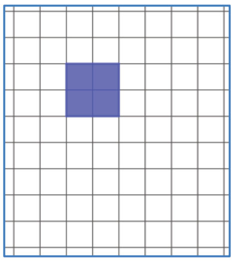
$\frac{1}{3}$



2



$\frac{2}{7}$



Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

……

……

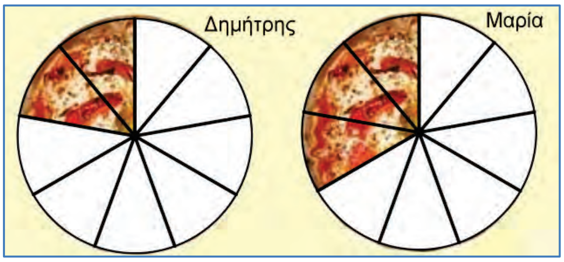
……

2. Διάταξη και Σύγκριση κλασμάτων

2.1 Διερεύνηση *(σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων)*

Ορισμός

Κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα.** Για παράδειγμα: $\frac{3}{5}$ και $\frac{12}{5}$, $\frac{5}{7}$ και $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{13}$ και $\frac{17}{13}$.



α) Ο Δημήτρης και η Μαρία πήραν από μία πίτσα που είναι ίδιες. Τι μέρος της πίτσας έφαγε το κάθε παιδί; (τα κομμάτια που έφαγαν είναι τα άσπρα).

Δημήτρης: —

Μαρία: —

Ποιος έφαγε περισσότερη ποσότητα πίτσας; Γιατί;

Πώς μπορούμε να συγκρίνουμε δύο ομώνυμα κλάσματα;

Τα κομμάτια της πίτσας του Δημήτρη και της Μαρίας είχαν το ίδιο μέγεθος, ήταν το ίδιο μεγάλα. Για να βρούμε ποιο παιδί έφαγε περισσότερη πίτσα, μετρήσαμε τα κομμάτια που έφαγε το καθένα.

Μαθαίνω

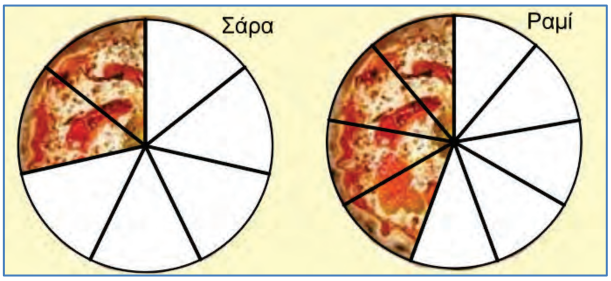
Σε ομώνυμα κλάσματα, μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή.

β) Τοποθετήστε το κατάλληλο σύμβολο (“<” μικρότερο, “>” μεγαλύτερο) ανάμεσα στα κλάσματα:

$\frac{4}{5} < \frac{6}{5}$, $\frac{13}{2}$ ..... $\frac{5}{2}$, $\frac{9}{15}$ ..... $\frac{8}{15}$, $\frac{12}{27}$ ..... $\frac{16}{27}$, $\frac{40}{100}$ ..... $\frac{55}{100}$, $\frac{567}{247}$ ..... $\frac{645}{247}$

γ) Μία άλλη μέρα παρήγγειλαν πίτσες από διαφορετικά μαγαζιά. Ο Δημήτρης έφαγε τα $\frac{7}{9}$ από τη δική του πίτσα και η Μαρία τα $\frac{6}{9}$ από τη δική της. Ο Δημήτρης έχει φάει λιγότερη πίτσα από τη Μαρία. Πώς γίνεται αυτό;

2.2 Διερεύνηση *(σύγκριση κλασμάτων με τον ίδιο αριθμητή)*



α) Η Σάρα και η Ραμί πήραν από μία πίτσα που είναι ίδιες. Τι μέρος της πίτσας έφαγε το κάθε παιδί; (τα κομμάτια που έφαγαν είναι τα άσπρα).

Σάρα: —   Ραμί: —

Ποια έφαγε περισσότερη ποσότητα πίτσας;
Γιατί;

Πώς μπορούμε να συγκρίνουμε δύο κλάσματα που έχουν τον ίδιο αριθμητή;

Η Σάρα και η Ραμί έφαγαν τον ίδιο αριθμό από κομμάτια. Τα κομμάτια της πίτσας της Σάρας όμως είναι μεγαλύτερα από της Ραμί.

Μαθαίνω

Όταν δύο κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή.

β) Τοποθετήστε το κατάλληλο σύμβολο (“<” μικρότερο, “>” μεγαλύτερο) ανάμεσα στα κλάσματα:

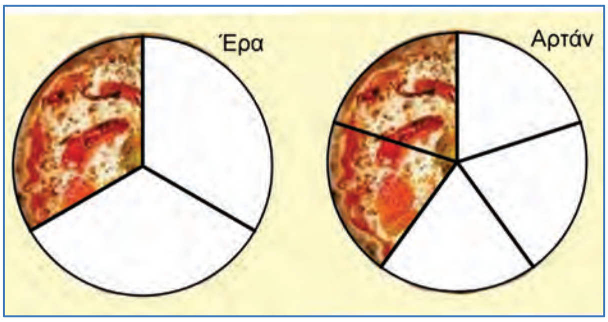
$\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$ ..... $\frac{5}{4}$, $\frac{12}{15}$ ..... $\frac{12}{5}$, $\frac{7}{10}$ ..... $\frac{7}{20}$, $\frac{25}{7}$ ..... $\frac{25}{13}$

γ) Η Ταμάρ έχει μία πίτσα από την οποία τρώει τα $\frac{3}{4}$. Ο Λεβάν έχει μια άλλη πίτσα και τρώει τα $\frac{3}{5}$. Ο Λεβάν έχει φάει περισσότερη ποσότητα πίτσας από την Ταμάρ. Πώς γίνεται αυτό;

2.3 Διερεύνηση *(σύγκριση ετερώνυμων κλασμάτων)*

Ορισμός

Κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή λέγονται **ετερώνυμα.**
Για παράδειγμα: $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$ και $\frac{6}{11}$.

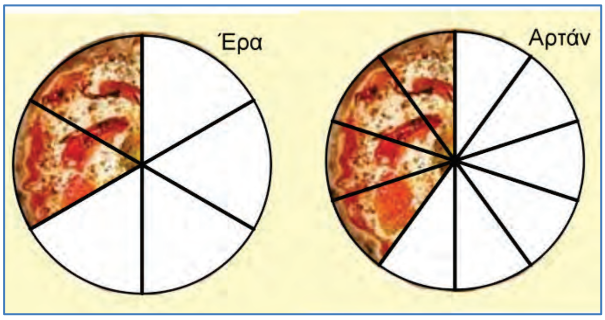


α) Η Έρα και ο Αρτάν πήραν από μία ίδια πίτσα**.** Τι μέρος της πίτσας του, έφαγε το κάθε παιδί; (τα κομμάτια που έφαγαν είναι τα άσπρα).

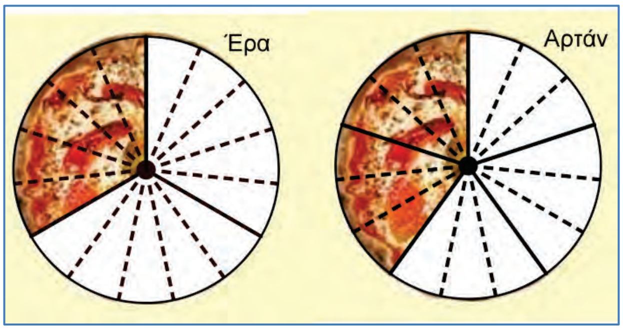
Έρα: —   Αρτάν: —

Ο Αρτάν λέει ότι η Έρα έφαγε περισσότερο αλλά η Έρα το αρνείται.

- Ο Αρτάν το έδειξε με την διπλανή εικόνα. Λέει «εσύ έφαγες 1/6 πιο πολύ από τη μισή πίτσα. Εγώ έφαγα 1/10 πιο πολύ από τη μισή πίτσα. Τα έκτα όμως είναι μεγαλύτερα από τα δέκατα. Άρα εσύ έφαγες περισσότερο».



- Η Έρα χώρισε τις πίτσες με το τρόπο που φαίνεται στην εικόνα και παραδέχθηκε ότι έφαγε περισσότερο.



Γράψτε το ισοδύναμο κλάσμα της Έρα: —

Γράψτε το ισοδύναμο κλάσμα του Αρτάν: —

Ποιος έφαγε περισσότερη ποσότητα πίτσας;
Γιατί χώρισε την πίτσα σε 15 κομμάτια;
Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε έναν τρόπο, για να συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα.

Μέθοδος

Για να **συγκρίνουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα**, όπως τα $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2}$, τα κάνουμε ομώνυμα:

1. Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών που είναι **ΕΚΠ**(2,3)=6

2. Βρίσκουμε τα ισοδύναμα κλάσματα με παρονομαστή το ΕΚΠ: $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot2}{3\cdot2}=\frac{4}{6}$ και $\frac{1}{2}=\frac{1\cdot3}{2\cdot3}=\frac{3}{6}$

3. Συγκρίνουμε τους αριθμητές. Αφού 4>3 άρα $\frac{4}{6}>\frac{3}{6}$, οπότε και $\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$

Μέθοδος

<u>Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)</u>

Για να βρούμε το ΕΚΠ των 2 και 3:

- Πολλαπλάσια του 2:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, …

- Πολλαπλάσια του 3:

3, 6, 9, 12, 15, 18, …

- Κοινά πολλαπλάσια:

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, …

- ΕΚΠ(2,3)=6

β) Δύο φίλοι παίζουν μπάσκετ. Ο Αμίρ έριξε 5 φορές και έβαλε 3 καλάθια. Ο Γιώργος έριξε 3 φορές και έβαλε 2 καλάθια. Ποιος ήταν ο καλύτερος στα σουτ;

γ) Να συγκρίνετε τα κλάσματα:

$\frac{4}{5}$ και $\frac{5}{6}$ $\frac{3}{4}$ και $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{10}$ και $\frac{1}{5}$

δ) Γράψτε τον αμέσως προηγούμενο και επόμενο φυσικό αριθμό σε κάθε ένα από τα παρακάτω κλάσματα:

…… $< \frac{8}{11} <$ …… , …… $< \frac{15}{4} <$ …… , …… $< \frac{32}{31} <$ …… , …… $< \frac{25}{2} <$ ……

ε) Να συγκρίνετε τα κλάσματα: $\frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{15}, \frac{41}{30}, \frac{17}{12}, \frac{7}{6}$

και να τα βάλετε σε σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο

------ < ------ < ------ < ------ < ------ < ------

2.4 Διερεύνηση *(σύγκριση με ένα κοινό σημείο αναφοράς, πυκνότητα των κλασματικών)*

α) Λέει ο καθηγητής: «Ο κ. Πασχάλης ξοδεύει τα $\frac{7}{16}$ από το μισθό του, για να καλύψει τα έξοδα του σπιτιού του. Η κ. Νικολίνα ξοδεύει τα $\frac{6}{11}$ από το μισθό της. Ποιος από τους δύο ξοδεύει μεγαλύτερο μέρος από το μισθό του;»

Η Σάρα, αντί να κάνει τα κλάσματα ομώνυμα, έκανε το εξής:

$\frac{7}{16} < \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, $\frac{6}{11} > \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

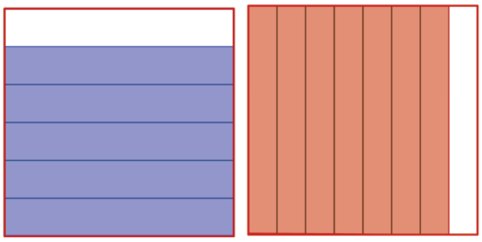
Είναι σωστά αυτά που έκανε η Σάρα; Τώρα μπορεί να συγκρίνει τα δύο κλάσματα; Ποιος ξοδεύει περισσότερο;

β) Μπορείτε να συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα χωρίς να τα κάνετε ομώνυμα;

$\frac{7}{13}$ και $\frac{14}{29}$, $\frac{31}{32}$ και $\frac{45}{43}$,

γ) Ο καθηγητής ζήτησε να συγκρίνουν οι μαθητές το $\frac{5}{6}$ και το $\frac{7}{8}$

- Ο Δημήτρης είπε: «είναι ίσα αφού και τα δύο κλάσματα θέλουν ένα ακόμα κομμάτι για να σχηματίσουν ένα ολόκληρο». Συμφωνείτε με την άποψη του Δημήτρη;



Μπορείτε να συγκρίνετε τα δύο κλάσματα χωρίς να τα κάνετε ομώνυμα; (Υπόδειξη: ποιο είναι μεγαλύτερο, το $\frac{1}{6}$ ή το $\frac{1}{8}$;)

δ) Ο καθηγητής ζήτησε να γράψουν οι μαθητές κλάσματα που να είναι ανάμεσα στο $\frac{3}{5}$ και $\frac{4}{5}$.

- Η Ερίνα είπε: «όχι, δεν γίνεται αυτό». Εσείς τι λέτε;

Ο Ιρφάν τότε σκέφτηκε να τα γράψει έτσι: $\frac{6}{10}$ και $\frac{8}{10}$.

- Έχει δίκιο ο Ιρφάν; Ποιόν αριθμό σκέφτηκε ότι είναι ανάμεσά τους;

- Βρείτε και σεις αριθμούς ανάμεσα στα δύο προηγούμενα κλάσματα.

- Πόσα κλάσματα υπάρχουν ανάμεσα σε δύο κλάσματα; *Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.*

ε) Ο πιο μικρός φυσικός αριθμός πάνω από 0 είναι ο 1. Υπάρχει κλασματικός αριθμός πάνω από 0, που είναι ο πιο μικρός από όλους τους κλασματικούς αριθμούς; *Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.*

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

3. Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

3.1 Διερεύνηση *(πρόσθεση και αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων)*

α) Η Ελένη φτιάχνει ένα κεντητό. Την πρώτη μέρα έφτιαξε τα $\frac{3}{14}$.

Τη δεύτερη μέρα τα $\frac{5}{14}$.

Σχεδιάστε τα μέρη που έφτιαξε. Τι μέρος από το κεντητό έχει φτιάξει και τις δύο ημέρες; —

Άρα $\frac{3}{14} + \frac{5}{14} =$ —

Τι μέρος από το κεντητό έχει μείνει για τις επόμενες μέρες; —

Μπορείτε να το γράψετε με μία αφαίρεση; $\frac{14}{14} - \frac{}{14} =$ —

β) Η Νάντια ξεκίνησε από την Αθήνα για τη Θεσσαλονίκη και κάλυψε τα $\frac{2}{13}$ της απόστασης. Την ίδια ώρα ο Ιασίν ξεκίνησε από Θεσσαλονίκη προς Αθήνα και κάλυψε τα $\frac{3}{13}$.

- Πού βρίσκεται η Νάντια και πού ο Ιασίν; Σημειώστε πάνω σχήμα.

- Τι μέρος από την απόσταση έχουν καλύψει και οι δύο; —

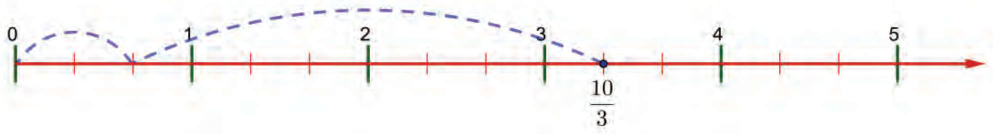
Γράψτε το με μία πράξη:

- Τι μέρος της απόστασης θα κάνουν μέχρι να συναντηθούν; —

Γράψτε το με μία πράξη:

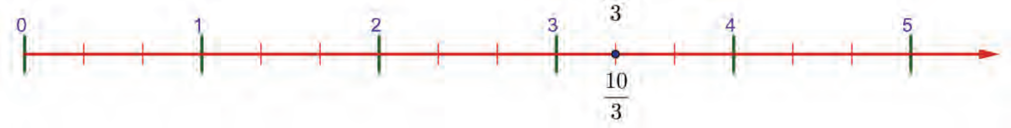
γ) Γράψτε το κλάσμα $\frac{10}{3}$ ως άθροισμα δύο κλασμάτων, με 2 διαφορετικούς τρόπους, όπως στο παράδειγμα.

$\frac{10}{3} = \frac{2}{3} + \frac{8}{3}$



$\frac{10}{3} =$ — + —

$\frac{10}{3} =$ — + —



δ) Βρείτε με κλάσμα την απόσταση ανάμεσα στους δύο αριθμούς που είναι στην παρακάτω αριθμογραμμή και κάντε την αντίστοιχη αφαίρεση:

— – — = —

Μαθαίνω

Για να **προσθέσουμε** ομώνυμα κλάσματα, προσθέτουμε τους αριθμητές και ο παρονομαστής μένει ο ίδιος, π. χ. $\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{3+5}{7}$. Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$

Για να **αφαιρέσουμε** ομώνυμα κλάσματα, αφαιρούμε τους αριθμητές και ο παρονομαστής μένει ο ίδιος, π. χ. $\frac{8}{7} - \frac{3}{7} = \frac{8-3}{7}$. Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}$

ε) Κάντε τις παρακάτω προσθέσεις. Το αποτέλεσμα να είναι κλάσμα ανάγωγο.

$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{\quad}{\quad}$

$\frac{7}{10} - \frac{2}{10} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{15}{4} + \frac{5}{4} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{35}{12} - \frac{5}{12} = \frac{\quad}{\quad}$

3.2 Διερεύνηση *(πρόσθεση και αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων)*

α) Η Μαρία έφαγε το $\frac{1}{3}$ μιας σοκολάτας και η Ερίνα τα $\frac{2}{5}$.

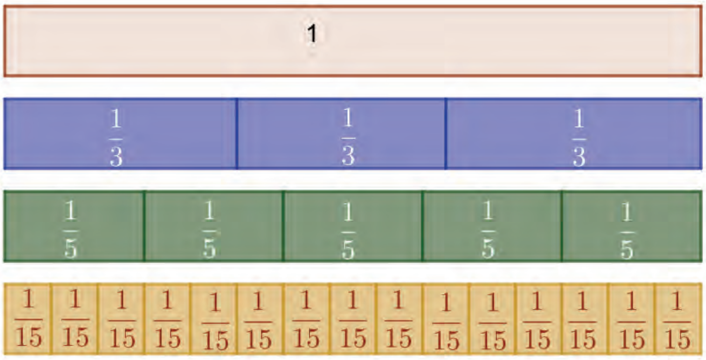
- Η Μαρία για να βρει πόσο έφαγαν και οι δύο έκανε: $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$ αλλά η Ερίνα διαφωνεί. Με ποιαν συμφωνείτε και γιατί;
- Τι πρέπει να κάνουν τα παιδιά, για να προσθέσουν τα δύο ετερώνυμα κλάσματα;

Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τις ιδέες σας σε όλη την τάξη.

- Για να βρούμε τι μέρος της σοκολάτας έφαγαν και οι δύο θα προσθέσουμε τα δύο κλάσματα. Πρώτα θα τα κάνουμε ομώνυμα. Είναι σαν να χωρίζουμε τη σοκολάτα της Μαρίας και τη σοκολάτα της Ερίνας σε ίδια κομμάτια.

Το τείχος των κλασμάτων μπορεί να σας βοηθήσει, για να βρείτε τα ισοδύναμα κλάσματα:

$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$



Κάντε πάλι την ίδια πράξη με το ΕΚΠ

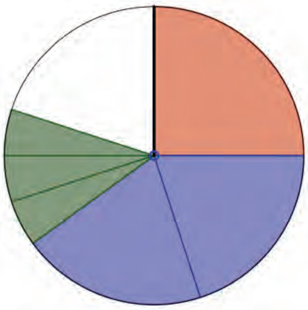
ΕΚΠ (3,5) = ……

$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot \dots}{3 \cdot \dots} + \frac{2 \cdot \dots}{5 \cdot \dots} = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

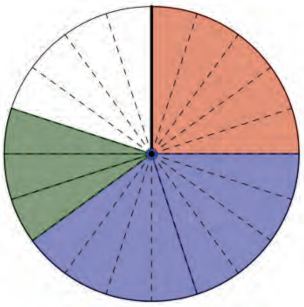
β) Ο Παναγιώτης πήρε το $\frac{1}{4}$ μιας πίτας (κόκκινο μέρος).

Η Μπαράν τα $\frac{2}{5}$ (μπλε μέρος) και ο Θωμάς τα $\frac{3}{20}$ (πράσινο μέρος).

Τι μέρος της πίτας πήραν όλοι μαζί;



Για να βρείτε το άθροισμα, κάντε τα κλάσματα ομώνυμα με το ΕΚΠ. Επαληθεύστε τα ισοδύναμα κλάσματα που βρήκατε με το διπλανό σχήμα.



Τι μέρος από την πίτα έμεινε; Επαληθεύστε αυτό που βρήκατε αριθμητικά, με το σχήμα.

γ) Κάντε τις πράξεις:

$\frac{3}{2}+\frac{2}{5}=$

$\frac{7}{15}-\frac{1}{5}=$

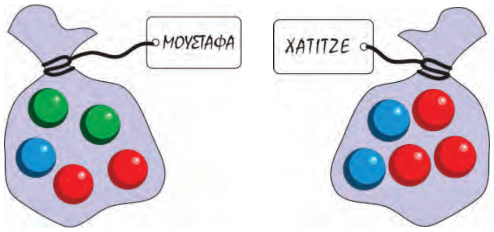
$\frac{13}{10}-\frac{4}{7}=$

$\frac{15}{4}+\frac{7}{12}=$

$\frac{3}{4}+\frac{7}{3}-\frac{5}{6}=$

$5-\frac{1}{4}-\frac{5}{3}=$

δ) Ο Μουσταφά και η Χατιτζέ πήραν στο σχολείο από ένα σακουλάκι με 5 από τις αγαπημένες τους καραμέλες. Ο Μουσταφά στο διάλειμμα έφαγε τις 2 κόκκινες καραμέλες και η Χατιτζέ τις 3 κόκκινες καραμέλες.



Ο Μουσταφά λέει:

«Εγώ έφαγα τα $\frac{2}{5}$ από το σακουλάκι μου κι εσύ τα $\frac{3}{5}$ από το δικό σου. Άρα μαζί φάγαμε μισό σακουλάκι αφού $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{5}{10}$!» Η Χατιτζέ όμως δεν συμφώνησε με τον Μουσταφά. Μπορείτε να σκεφτείτε γιατί;

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

....

....

....

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

....

....

....

4. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων

4.1 Διερεύνηση *(πολλαπλασιασμός κλασμάτων)*

α) Αν χωρίσουμε ένα εξάγωνο που έχει έξι ίσες πλευρές, μπορούμε να βρούμε τρία γνωστά σχήματα.

Τι μέρος του εξαγώνου είναι:

- το μπλε τραπέζιο; —

- ο πράσινος ρόμβος; —

- το πορτοκαλί τρίγωνο; —

Τι μέρος του εξαγώνου είναι:

- πέντε τρίγωνα; — . Δηλαδή — + — + — + — + — = 5 · — = — μέρη του εξαγώνου.

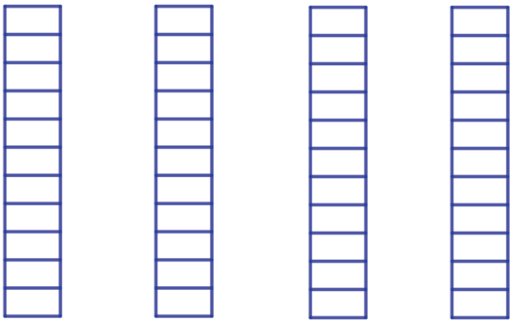
- δύο ρόμβοι; — . Δηλαδή — + — = 2 · — = — μέρη του εξαγώνου.

Μαθαίνω

Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν φυσικό αριθμό με κλάσμα, ο φυσικός αριθμός δείχνει πόσες φορές προσθέτουμε το κλάσμα με τον εαυτό του.

β) Πόσο κάνει $3 \cdot \frac{2}{11}$; Συμπληρώστε τα κενά και σχεδιάστε από κάτω τα αντίστοιχα κλάσματα

$3 \cdot \frac{2}{11} =$ — + — + — = —



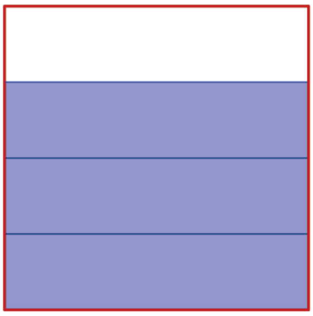
\+ \+ =

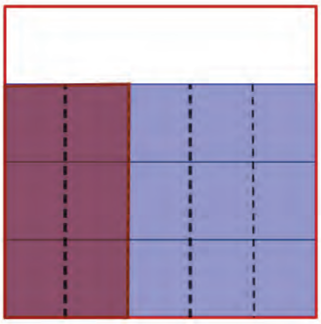
Πώς πολλαπλασιάζουμε έναν φυσικό αριθμό με έναν κλάσμα; *Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.*

Μαθαίνω

Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού με κλάσμα, είναι ένα κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο του αριθμητή με το φυσικό αριθμό και παρονομαστή τον ίδιο π.χ. $4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}$. Δηλαδή $\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$

γ) Οι μαθητές μιας τάξης έβαψαν τα $\frac{3}{4}$ σε ένα τοίχο. Ο καθηγητής τους είπε: «στο μέρος που βάψατε, μπορείτε το $\frac{2}{5}$, να τα χρησιμοποιήσετε για να φτιάξετε ένα γκράφιτι. Αρκεί να βρείτε τι μέρος όλου του τοίχου είναι ο χώρος για το γκράφιτι».

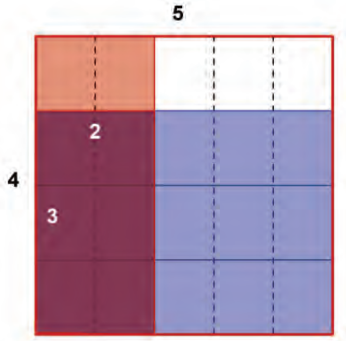




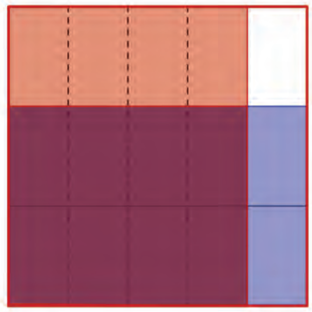
Ο Στέφαν είπε: «αν μας έλεγε το διπλάσιο του $\frac{3}{4}$ θα έκανα $2\cdot\frac{3}{4}$. Το ίδιο θα κάνω και τώρα που ζητάει το $\frac{2}{5}$ του $\frac{3}{4}$. Δηλαδή $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$». Συμφωνείτε;

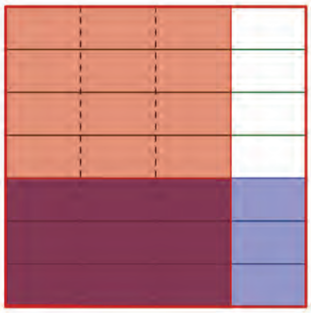
Η Ιωάννα είπε: «κοιτάξτε το σχήμα μου. Αν το χωρίσω όπως στο διπλανό σχήμα, φαίνεται ότι το μέρος που θα έχουμε για το γκράφιτι έχει 6 (3 · 2) κομμάτια, ενώ όλος ο τοίχος είναι 20 (4 · 5)». Συμφωνείτε;

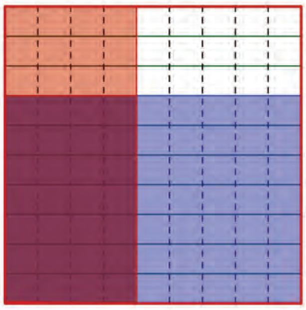
Δηλαδή $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2\cdot3}{5\cdot4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$



Ο καθηγητής τους έδωσε και άλλα παραδείγματα και τους ζήτησε να συμπληρώσουν τα κενά. Μπορείτε να τους βοηθήσετε;







$\frac{4}{5}\cdot\text{—}=\frac{\_\_\cdot\_\_}{\_\_\cdot\_\_}=\text{—}$

$\text{—}\cdot\text{—}=\frac{\_\_\cdot\_\_}{\_\_\cdot\_\_}=\text{—}$

$\text{—}\cdot\text{—}=\frac{\_\_\cdot\_\_}{\_\_\cdot\_\_}=\text{—}$

Δώστε το τελικό αποτέλεσμα ως ανάγωγο κλάσμα.

Μπορείτε να πείτε πως πολλαπλασιάζουμε δύο κλάσματα; *Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.*

Μαθαίνω

Το γινόμενο δύο κλασμάτων είναι ένα κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών, π.χ. $\frac{3}{4}$ $\cdot \frac{5}{} = \frac{3\cdot 5}{} = \frac{15}{}$. Δηλαδή: $\frac{\alpha}{} \cdot \frac{\gamma}{} = \frac{\alpha\cdot\gamma}{}$

δ) Κάντε τις πράξεις: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} =$, $\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} =$, $\frac{9}{2} \cdot \frac{7}{8} =$

ε) Ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να κάνουν τον πολλαπλασιασμό $\frac{15}{49} \cdot \frac{7}{5}$ σύμφωνα με τον προηγούμενο κανόνα. Το αποτέλεσμα πρέπει να είναι κλάσμα ανάγωγο.

- Ο Στέφαν το έκανε έτσι : $\frac{15}{49} \cdot \frac{7}{5} = \frac{15\cdot 7}{49\cdot 5} = \frac{105}{245} = \frac{105:5}{245:5} = \frac{21}{49} = \frac{21:7}{49:7} = \frac{3}{7}$

- Η Ασλί το έκανε διαφορετικά: $\frac{15}{49} \cdot \frac{7}{5} = \frac{15\cdot 7}{49\cdot 5} = \frac{3\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{7}}{7\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{5}} = \frac{3}{7}$

Αν είναι μεγάλοι οι αριθμοί, ποιος τρόπος/οι είναι προτιμότερος;

- Κάντε και σεις τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς με τον τρόπο που θεωρείτε πιο εύκολο:

$\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{5} =$ $\frac{1}{10} \cdot \frac{40}{7} =$ $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8} =$

$\frac{12}{7} \cdot \frac{14}{9} =$ $\frac{6}{25} \cdot \frac{5}{16} =$ $\frac{35}{8} \cdot \frac{16}{49} =$

$\frac{21}{15} \cdot \frac{25}{33} \cdot \frac{11}{14} =$

ε) Κάντε τις πράξεις και συμπληρώστε το αποτέλεσμα

$20 \cdot \frac{8}{10} =$ ____ , $20 \cdot \frac{9}{10} =$ ____ , $20 \cdot 1 =$ ____ , $20 \cdot \frac{11}{10} =$ ____ , $20 \cdot \frac{12}{10} =$ ____ , $20 \cdot \frac{13}{10} =$ ____ ,

- Όταν πολλαπλασιάζουμε το 20 με ένα κλάσμα μικρότερο του 1, το αποτέλεσμα είναι ………………. (μεγαλύτερο ή μικρότερο) από το 20.
- Όταν πολλαπλασιάζουμε το 20 με ένα κλάσμα μεγαλύτερο του 1, το αποτέλεσμα είναι ………………. (μεγαλύτερο ή μικρότερο) από το 20.

- Όταν ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται με κλασματικό αριθμό, τότε μεγαλώνει ή μικραίνει ο αριθμός; Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.

Παρατήρηση

Όταν ένας αριθμός α πολλαπλασιάζεται:

- με φυσικό αριθμό > 1, το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο από το α.
- με κλασματικό αριθμό > 1, το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο από το α.
- με κλασματικό αριθμό < 1, το αποτέλεσμα είναι μικρότερο από το α.

4.2 Διερεύνηση *(Αντίστροφοι αριθμοί)*

Η μαθηματικός ζήτησε από τους μαθητές να παίξουν ένα παιχνίδι. Να χωριστούν ανά δύο. Να λέει ο ένας έναν αριθμό και ο άλλος να λέει έναν άλλο αριθμό έτσι ώστε όταν πολλαπλασιαστούν οι δύο αριθμοί να δίνουν 1.

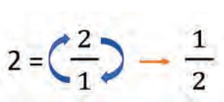
Λέει ο Πέτρος: «2». Λέει η Άννα: «$\frac{1}{2}$». Συμφωνείτε; Αν όχι, διορθώστε την: .....

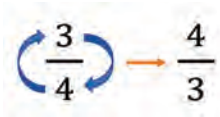
Λέει ο Ελένη: «5». Λέει ο Εμιρχάν : «$\frac{1}{10}$». Συμφωνείτε; Αν όχι, διορθώστε τον: .....

Λέει ο Λεβάν : «$\frac{3}{5}$». Λέει η Σωτηρία : «$\frac{5}{3}$». Συμφωνείτε; Αν όχι, διορθώστε την: .....

Λέει η Νάτια : «$\frac{13}{7}$». Λέει ο Λεωνίδας: «$\frac{13}{7}$». Συμφωνείτε; Αν όχι, διορθώστε τον: .....

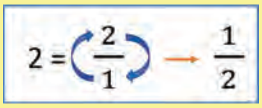
Αυτοί οι αριθμοί που ζητά η μαθηματικός, ονομάζονται αντίστροφοι αριθμοί.

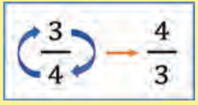




Ορισμός

Αντίστροφοι αριθμοί είναι δύο αριθμοί που όταν πολλαπλασιάζονται δίνουν 1. Για παράδειγμα, αντίστροφοι είναι: ο $\frac{3}{4}$ με το $\frac{4}{3}$, ο 2 με τον $\frac{1}{2}$.





Τον αντίστροφο του α, τον γράφουμε $\frac{1}{\alpha}$.

Συμπληρώστε τα κενά:

Ο αντίστροφος του 5 είναι ο ______ . Ο αντίστροφος του $\frac{1}{5}$ είναι ο ______ .

Ο αντίστροφος του $\frac{6}{7}$ είναι ο ______ . Ο αντίστροφος του $\frac{7}{6}$ είναι ο ______ .

Ο αντίστροφος του $\frac{45}{13}$ είναι ο ______ . Ο αντίστροφος του $\frac{13}{45}$ είναι ο ______ .

Ο αντίστροφος του αντίστροφου ενός αριθμού α, ποιος αριθμός είναι;

Ο αντίστροφος του 1 είναι ο ______ .

Ο αντίστροφος του 0 υπάρχει; Γιατί ναι ή γιατί όχι; *Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.*

4.3 Διερεύνηση *(Διαίρεση κλασμάτων)*

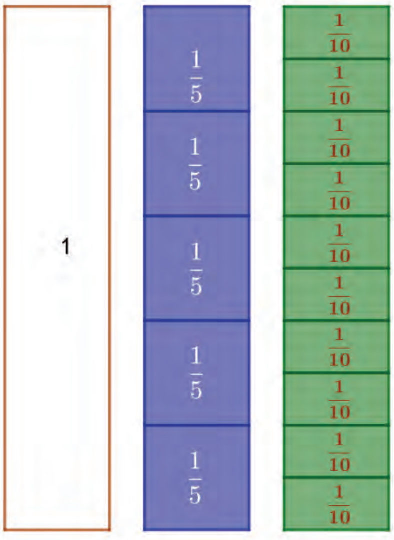
α) - Η Μαρία αγόρασε 10 κιλά ελιές και θέλει να τις αποθηκεύσει σε δοχεία που το καθένα χωράει 2 κιλά. Θα χρειαστεί 5 δοχεία.

Μπορούμε να το γράψουμε και ως εξής: 5 = 10 : 2 = $\frac{10}{2}$ = 10 · $\frac{1}{2}$

Μία διαίρεση δηλαδή, μπορούμε να τη γράψουμε και ως πολλαπλασιασμό του διαιρετέου (το 10) με τον αντίστροφο του διαιρέτη (του 2) . Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις.

- Η Έλσα αγόρασε 10 κιλά ελιές και θέλει να τις αποθηκεύσει σε δοχεία που το καθένα είναι $\frac{1}{2}$ του κιλού, τότε 10 : $\frac{1}{2}$ = 10 · ___ = _____

- Ο Πέτρος αγόρασε 10 κιλά ελιές και θέλει να τις αποθηκεύσει σε δοχεία που το καθένα είναι $\frac{1}{3}$ του κιλού, τότε 10 : $\frac{1}{3}$ = 10 · ___ = _____



β) Ο Εκρέμ έχει $\frac{3}{5}$ λίτρα νερό και θέλει να το βάλει σε ποτήρια του $\frac{1}{10}$ του λίτρου.

- Βρείτε από το διπλανό σχήμα τα ποτήρια που θα γεμίσει. Τα ποτήρια είναι: ______
- Για να βρούμε τα ποτήρια με διαίρεση, θα κάνουμε την πράξη: $\frac{3}{5} : \frac{1}{10} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\;}{\;} = \frac{3\cdot \ldots}{5\cdot \ldots} =$

Μαθαίν

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.
Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$ Για παράδειγμα $\frac{5}{2} : \frac{3}{7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{5\cdot 7}{2\cdot 3} = \frac{35}{6}$

γ) Κάντε τις διαιρέσεις: $\frac{3}{8} : \frac{9}{4} =$

$\frac{5}{2} : \frac{25}{8} =$

$\frac{15}{21} : \frac{30}{28} =$

$\frac{12}{35} : \frac{18}{25} =$

δ) Ένας παραγωγός έχει 54 λίτρα με λάδι και θέλει να τα συσκευάσει σε μπουκάλια των $\frac{3}{5}$ του λίτρου. Πόσα μπουκάλια θα χρειαστεί;

ε) Μία χελώνα περπάτησε σε μία μέρα 54 m. Σε μια ώρα περπατάει περίπου $\frac{27}{5}$ m. Πόσες ώρες βάδισε;

στ) Κάντε τους παρακάτω πράξεις και συμπληρώστε τα κενά:

$20 : \frac{10}{8} =$ $\qquad 20 : \frac{10}{9} =$ $\qquad 20 : 1 =$

$20 : \frac{10}{11} =$ $\qquad 20 : \frac{10}{12} =$ $\qquad 20 : \frac{10}{13} =$

- Όταν διαιρούμε το 20 με ένα κλάσμα μεγαλύτερο του 1, το αποτέλεσμα είναι .... (μεγαλύτερο ή μικρότερο) από το 20.
- Όταν διαιρούμε το 20 με ένα κλάσμα μικρότερο του 1, το αποτέλεσμα είναι .... (μεγαλύτερο ή μικρότερο) από το 20.
- Όταν ένας αριθμός διαιρείται με κλασματικό αριθμό, τότε μεγαλώνει ή μικραίνει ο αριθμός;

Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.

Παρατήρηση

Όταν ένας αριθμός α διαιρείται:

- με φυσικό αριθμό > 1, το αποτέλεσμα είναι μικρότερο από το α.
- με κλασματικό αριθμό > 1, το αποτέλεσμα είναι μικρότερο από το α.
- με κλασματικό αριθμό < 1, το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο από το α.

4.4 Διερεύνηση *(Αναγωγή στην κλασματική μονάδα και κλάσμα ως τελεστής)*

α) Οι μαθητές της Α΄ τάξης ενός γυμνασίου είναι 80. Τα $\frac{2}{5}$ των μαθητών είναι από άλλες χώρες.

Πόσοι μαθητές είναι από άλλες χώρες;

- Η Ευθυμία έκανε πολλαπλασιασμό και εξήγησε ότι «αν θέλαμε το διπλάσιο των μαθητών θα κάναμε πολλαπλασιασμό. Το ίδιο θα κάνουμε και τώρα».

Βρείτε τη λύση με τον τρόπο της Ευθυμίας:

- Ο Μερτάν λέει: «θα βρω πρώτα πόσο είναι το ένα πέμπτο και μετά θα πολλαπλασιάσω με το 2».

Συμπληρώστε τη λύση με τον τρόπο του Μερτάν:

- Τα $\frac{5}{5}$ των μαθητών είναι 80
- Το $\frac{1}{5}$ των μαθητών είναι 80: ___ = ____
- Τα $\frac{2}{5}$ των μαθητών είναι ___ · 2 = ____

Τον τρόπο αυτόν το λέμε **αναγωγή στην κλασματική μονάδα**.

β) Σε ένα γυμνάσιο οι 54 είναι μαθητές από άλλες χώρες. Είναι τα $\frac{3}{7}$ από όλους τους μαθητές του σχολείου. Πόσοι είναι όλοι οι μαθητές;

Συμπληρώστε τα κενά:

- Τα $\frac{3}{7}$ είναι 54
- Το $\frac{1}{7}$ είναι 54 : ___ = ____

- Τα $\frac{7}{7}$ είναι _____ · _____ = _____

Πως αλλιώς μπορεί να λυθεί το πρόβλημα;

γ) Η Κατερίνα έφαγε τα $\frac{3}{5}$ μιας πίτσας. Τα $\frac{4}{9}$ της πίτσας ζυγίζουν 460 γραμμάρια. Πόσα γραμμάρια έφαγε η Κατερίνα;

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

Ενότητα Α2

Οι δεκαδικοί αριθμοί

1. Τα δεκαδικά κλάσματα και οι δεκαδικοί αριθμοί

Δραστηριότητα 1.1 *(Τα δεκαδικά κλάσματα)*

Κυκλώστε από τα παρακάτω κλάσματα αυτά που έχουν παρανομαστή μία δύναμη του 10, δηλαδή 10, 100,1000, ….

$$\frac{7}{30} \qquad \frac{9}{10} \qquad \frac{59}{1000} \qquad \frac{9}{11} \qquad \frac{10}{100}$$

$$\frac{8}{100} \qquad \frac{10}{13} \qquad \frac{19}{3} \qquad \frac{7258}{100} \qquad \frac{40}{10}$$

Τα κλάσματα που κυκλώσατε λέγονται δεκαδικά κλάσματα.

Μαθαίνω

Το **δεκαδικό κλάσμα** είναι κάθε κλάσμα με παρανομαστή 10, 100, 1000, … (δηλαδή μία δύναμη του 10).

Π.χ. $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000}, \frac{3}{10000}$ …. $\qquad \frac{58}{10}, \frac{58}{100}, \frac{58}{1000}, \frac{58}{10000}$ ….

Δραστηριότητα 1.2 *(Κλάσματα ισοδύναμα με δεκαδικά κλάσματα)*

1) Το κάθε ένα από τα παρακάτω κλάσματα είναι ίσο με ένα δεκαδικό κλάσμα. Ποιο είναι αυτό;

Παράδειγμα: $\frac{32}{5} = \frac{32 \times 2}{5 \times 2} = \frac{64}{10}$

$\frac{9}{2} =$ $\qquad\qquad$ $\frac{45}{50} =$

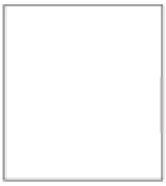
$\frac{8}{25} =$ $\qquad\qquad$ $\frac{21}{20} =$

2) Το κλάσμα $\frac{11}{3}$ δεν μπορεί να είναι ίσο με ένα δεκαδικό κλάσμα. Συζητήστε στην ομάδα σας και εξηγήστε γιατί.

Δραστηριότητα 1.3 *(Η δεκαδική μορφή ενός δεκαδικού κλάσματος)*

Ο Αμίρ και η Μαρία θέλουν να καταλάβουν καλύτερα τι αριθμοί είναι τα δεκαδικά κλάσματα: $\frac{3}{10}$ και $\frac{3}{100}$. Γι’ αυτό ρωτάνε τον δάσκαλο.

1) Ο δάσκαλος σχεδιάζει ένα τετράγωνο που συμβολίζει μία μονάδα.

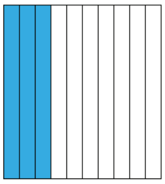


1 μονάδα = $\frac{1}{1}$

Μετά χωρίζει το τετράγωνο σε 10 ίσα μέρη

1 μονάδα = $\frac{10}{10}$

και παρουσιάζει το κλάσμα $\frac{3}{10}$ όπως στην παρακάτω εικόνα



Το μπλε μέρος είναι ένα «κομμάτι» από την ομάδα. Άρα, ο αριθμός που εκφράζει το κλάσμα $\frac{3}{10}$ είναι πιο μικρός από μία μονάδα. Είναι ανάμεσα στο 0 και στο 1.

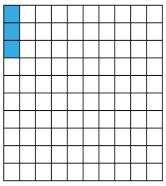
Ο Αμίρ ρωτάει: «Πώς μπορούμε να το γράψουμε αλλιώς τον αριθμό $\frac{3}{10}$;»

Ο δάσκαλος τους εξηγεί: Μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό $\frac{3}{10}$ σε άλλη μορφή, που λέγεται δεκαδική μορφή: 0,3. Το σύμβολο «,» εδώ θα το λέμε υποδιαστολή.

Λέμε επίσης ότι ο αριθμός 0,3 είναι δεκαδικός αριθμός. Τον διαβάζουμε «μηδέν κόμμα 3».
Ο 0,3 είναι πιο μικρός από 1 μονάδα. Για να τον παρουσιάσουμε στον πίνακα με την αξία θέσης για κάθε ψηφίο, προσθέτουμε δεξιά μία στήλη για τα δέκατα όπως παρακάτω:

Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Υποδιαστολή	Δέκατα
			0	,	3

2) Για το κλάσμα $\frac{3}{100}$, ο δάσκαλος χωρίζει το τετράγωνο (της μονάδας) σε 100 ίσα μέρη και χρωματίζει 3 από αυτά:



Το γράφει με την υποδιαστολή: 0,03. Και για να τον βάλει στον πίνακα με την αξία θέσης για κάθε ψηφίο, προσθέτει μία στήλη δεξιά για τα εκατοστά:

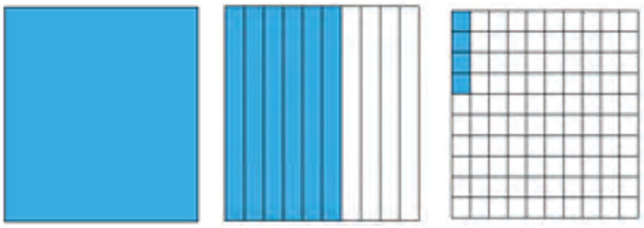
Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Υποδιαστολή	Δέκατα	Εκατοστά
			0	,	0	3

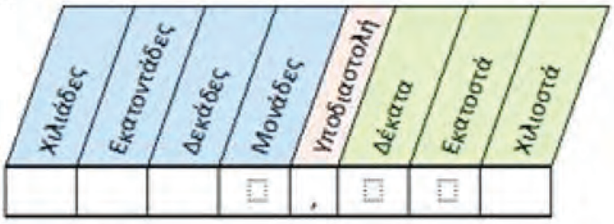
<u>Δραστηριότητα 1.4</u> *(Η δεκαδική μορφή και η κλασματική μορφή ενός αριθμού)*

Ο Χαλίλ ζωγραφίζει τα τετράγωνα όπως στην παρακάτω εικόνα. Θέλει να βρει τον αριθμό που εκφράζει <u>όλα τα μπλε κομμάτια μαζί</u>.

Συμπληρώστε τα κενά για να τον βοηθήστε να τον γράψει σε δεκαδική μορφή και σε κλασματική μορφή.

1) <u>Δεκαδική μορφή:</u>





1	$\frac{\square}{10}$	$\frac{\square}{100}$
1 μονάδα	⬚ δέκατα	⬚ εκατοστά

Άρα, αυτός ο αριθμός σε δεκαδική μορφή είναι .....

2) <u>Κλασματική μορφή:</u>

$$1 + \frac{\square}{10} + \frac{\square}{100} = \frac{\square}{100} + \frac{\square}{100} + \frac{\square}{100}$$

$$= \frac{\square}{100}$$

Άρα, αυτός ο αριθμός σε κλασματική μορφή είναι .....

3) <u>Δύο διαφορετικές γραφές για τον ίδιο αριθμό:</u>

- Ο Χαλίλ λέει: Άρα, έχουμε $\frac{164}{100} = 1{,}64$. Το μέρος μετά το κόμμα, είναι ένα «κομμάτι» της μονάδας. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός 1,64 είναι πιο μικρός από το 2, αλλά και πιο μεγάλος από το 1.

Συζητήστε στην ομάδα σας γιατί ο Χαλίλ έχει δίκιο.

- Η Λέιλα θέλει να γράψει τη δεκαδική μορφή για το κλάσμα $\frac{41}{25}$. Βοηθήστε την.

Μαθαίνω

Ένας **δεκαδικός αριθμός** είναι ένας άλλος τρόπος να γράψουμε ένα δεκαδικό κλάσμα.

Ένας **δεκαδικός αριθμός** γράφεται με υποδιαστολή: «,». Π.χ. 15,86.

- Το μέρος που είναι αριστερά από την υποδιαστολή λέγεται «**ακέραιο μέρος**».
- Το μέρος που είναι δεξιά από την υποδιαστολή λέγεται «**δεκαδικό μέρος**».

$$\underbrace{15}_{\text{ακέραιο μέρος}}\underset{\text{υποδιαστολή}}{\underset{\uparrow}{,}}\underbrace{86}_{\text{δεκαδικό μέρος}}$$

- Τον διαβάζουμε: Δέκα πέντε κόμμα ογδόντα έξι.

Παραδείγματα:

1) Οι αριθμοί 1,9 , 0,004 , 12,82 , 0,56 , 7,569 , 214,82 είναι δεκαδικοί αριθμοί. Γιατί, για παράδειγμα, 1,9 = $\frac{19}{10}$, 0,004 = $\frac{4}{1000}$, 12,82 = $\frac{1282}{100}$, ...

2) Οι φυσικοί αριθμοί είναι δεκαδικοί αριθμοί, γιατί μπορούμε να τους γράψουμε ως δεκαδικά κλάσματα. Π.χ. 3 = $\frac{30}{10}$ = 3,0.

3) Κάποια κλάσματα μπορούμε να τα γράψουμε ως δεκαδικούς αριθμούς. Π.χ. $\frac{11}{5} = \frac{22}{10}$ = 2,2.

4) Κάποια κλάσματα δεν μπορούμε να τα γράψουμε ως δεκαδικούς αριθμούς. Π.χ. $\frac{11}{3}$, $\frac{1}{7}$.

Εξήγηση: Για παράδειγμα, το $\frac{11}{3}$ δεν μπορούμε να το γράψουμε ως δεκαδικό αριθμό γιατί δεν μπορεί να είναι ίσο με ένα δεκαδικό κλάσμα. Ή και γιατί όταν διαιρούμε το 11 με το 3, έχουμε 11÷3 = 3,6666..... (δεν τελειώνει).

Άσκηση 1.1

Γράψτε τον δεκαδικό αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε ένα από τα παρακάτω κλάσματα.

Παραδείγματα: $\frac{3}{200} = \frac{3\times 5}{200\times 5} = \frac{15}{1000}$ = 0,015. $\frac{9}{4} = \frac{9\times 25}{4\times 25} = \frac{225}{100}$ = 2,25.

$\frac{49}{100} =$ $\frac{4}{1000} =$ $\frac{4326}{10} =$ $\frac{4}{25} =$

$\frac{9}{5} =$ $\frac{137}{2} =$ $\frac{40}{50} =$ $\frac{13}{4} =$

Άσκηση 1.2

Γράψτε κάθε αριθμό από τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς ως δεκαδικό κλάσμα.

Παραδείγματα: 21,59 = $\frac{2159}{100}$. 0,5 = $\frac{5}{10}$.

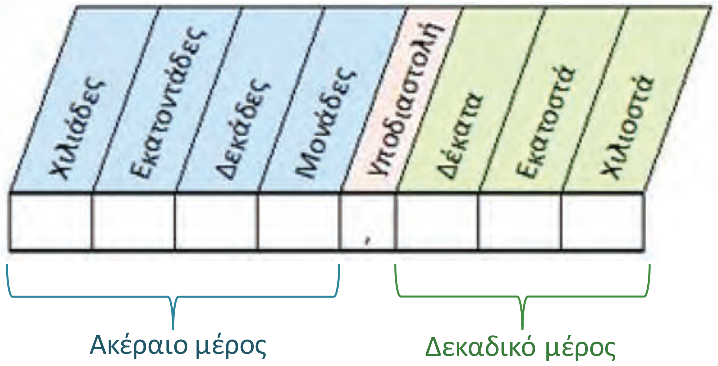
3,7 = 0,07 = 119,5 =

4,399 = 23,07 = 0,001 =

2. Σύγκριση – Διάταξη δεκαδικών αριθμών

Για να παρουσιάσουμε έναν δεκαδικό αριθμό στον πίνακα με την αξία θέσης για κάθε ψηφίο:

- για το ακέραιο μέρος, κάνουμε όπως για τους φυσικούς,
- για το δεκαδικό μέρος, προσθέτουμε στήλες στα δεξιά, για τα δέκατα, τα εκατοστά και τα χιλιοστά.



Παράδειγμα:

Ο αριθμός 72,485 είναι ένας δεκαδικός αριθμός.

Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Υποδιαστολή	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά
		7	2	,	4	8	5

- Στο ακέραιο μέρος,

- Το ψηφίο 7 έχει αξία 7 δεκάδες.
- Το ψηφίο 2 έχει αξία 2 μονάδες.

- Στο δεκαδικό μέρος,

- Το ψηφίο 4 έχει αξία 4 δέκατα ($\frac{4}{10}$).
- Το ψηφίο 8 έχει αξία 8 εκατοστά ($\frac{8}{100}$).
- Το ψηφίο 5 έχει αξία 5 χιλιοστά ($\frac{5}{1000}$).

Εφαρμογή:

1) Βάλτε τους αριθμούς 21,3 , 0,704 , 2,50 , 176 , 2314,9 και 0,008 στον παρακάτω πίνακα στη σωστή θέση.

Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Υποδιαστολή	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά

Γράψτε και κάποιους δικούς σας δεκαδικούς αριθμούς.

2) Βάλτε στον παρακάτω πίνακα τις επόμενες ποσότητες:

17 δέκατα, 1,7 δεκάδες, 71 εκατοστά, 0,07 εκατοντάδες, 1700 χιλιοστά.

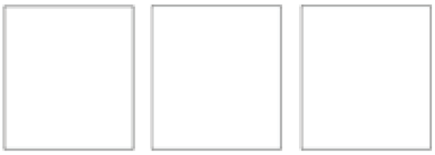
Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Υποδιαστολή	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά

3) Η Εκίν λέει: «Όσα μηδέν και να βάλω μετά την υποδιαστολή στον αριθμό 3,0… , η αξία του δεν θα αλλάξει. Θα είναι πάντα 3.». Συζητήστε στην ομάδα σας γιατί η Εκίν έχει δίκιο.

Δραστηριότητα 2.1 ***(Σύγκριση των τάξεων του δεκαδικού μέρους ενός δεκαδικού αριθμού)***

Συζητήστε με την ομάδα σας και απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις.

1) Πόσες φορές πιο μεγάλος είναι ο αριθμός 3 από τον αριθμό 0,3; …………………



3 μονάδες

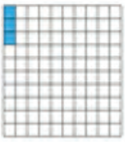
3 δέκατα της μονάδας

$\frac{3}{10}$

2) Πόσες φορές πιο μεγάλος είναι ο αριθμός 0,3 από τον αριθμό 0,03; …………………

3 δέκατα της μονάδας

$\frac{3}{10}$



3 εκατοστά της μονάδας

$\frac{3}{100}$

3) Πόσες φορές πιο μεγάλος είναι ο αριθμός 3 από τον αριθμό 0,03; …………………

4) Πόσες φορές πιο μικρός είναι ο αριθμός 0,03 από τον αριθμό 0,3; …………………

Μαθαίνω

Κάθε μία θέση σε έναν δεκαδικό αριθμό έχει αξία 10 φορές πιο μεγάλη από τη θέση στα δεξιά της.

Άσκηση 2.1

Δείτε τον παρακάτω πίνακα, και συμπληρώστε κατάλληλα τις επόμενες προτάσεις.

Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Υποδιαστολή	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά
		7	0				
			7				
			0	,	7		
			0	,	0	7	
			0	,	0	0	7

1) Ο αριθμός 70 είναι δέκα φορές πιο μεγάλος από τον αριθμό …..
2) Ο αριθμός 7 είναι δέκα φορές πιο μεγάλος από τον αριθμό …..
3) Ο αριθμός 7 είναι χίλιες φορές πιο μεγάλος από τον αριθμό …..
4) Ο αριθμός 0,7 είναι …. φορές πιο μεγάλος από τον αριθμό 0,007.
5) Ο αριθμός 0,007 είναι χίλιες φορές πιο μικρός από τον αριθμό …..
6) Ο αριθμός 0,07 είναι χίλιες φορές πιο μικρός από τον αριθμό …..
7) Ο αριθμός 0,07 είναι … φορές πιο μικρός από τον αριθμό 7.

Δραστηριότητα 2.2 *(Σύγκριση δύο δεκαδικών αριθμών)*

Συμπληρώστε τα κενά:

1) 8,5 είναι ….. μονάδες και ….. δέκατα. Άρα, 8,5 = 8 + $\frac{\square}{10}$.

3,9 είναι ….. μονάδες και ….. δέκατα. Άρα, 3,9 = … + $\frac{\square}{10}$.

Άρα, ο πιο μεγάλος αριθμός από τους 8,5 και 3,9 είναι ο ……..

2) 8,5 είναι ….. μονάδες και ….. δέκατα. Άρα, 8,5 = 8 + $\frac{\square}{10}$.

8,7 είναι ….. μονάδες και ….. δέκατα. Άρα, 8,7= 8 + $\frac{\square}{10}$.

Άρα, ο πιο μεγάλος αριθμός από τους 8,5 και 8,7 είναι ο ……..

3) 8,57 είναι ….. μονάδες, …. δέκατα και …. εκατοστά. Άρα, 8,57 = 8 + $\frac{\square}{10} + \frac{\square}{100}$.

8,53 είναι ….. μονάδες, …. δέκατα και …. εκατοστά. Άρα, 8,53 = 8 + $\frac{\square}{10} + \frac{\square}{100}$.

Άρα, ο πιο μεγάλος αριθμός από τους 8,57 και 8,53 είναι ο ……..

4) 8,574 είναι ….. μονάδες, …. δέκατα, …. εκατοστά και … χιλιοστά. Άρα, 8,574= $8+\frac{\square}{10}+\frac{\square}{100}+\frac{\square}{1000}$

8,572 είναι ….. μονάδες, …. δέκατα, …. εκατοστά και … χιλιοστά. Άρα, 8,572= $8+\frac{\square}{10}+\frac{\square}{100}+\frac{\square}{1000}$

Άρα, ο πιο μεγάλος αριθμός από τους 8,574 και 8,572 είναι ο ……..

Άσκηση 2.2

Σκεφτείτε με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω και συμπληρώστε τα επόμενα κενά με < ή >.

3,7 …… 3,1

45,28 …… 45,278

12,2 …… 2,103

0,925 ……. 0,931

7,6 …… 7,438

23 …… 23,01

6,205 …… 6,204

24,928 …… 24,921

119,5 …… 120,400

Το μηδέν στο τέλος από το δεκαδικό μέρος δεν έχει καμία αξία.

Άσκηση 2.3

1) Γράψτε τους αριθμούς 6,374 , 6,1 , 7,3 , 6,02 , 6 , 7 , 6,5, από τον πιο μικρό μέχρι τον πιο μεγάλο.

… < … < … < … < … < … < …

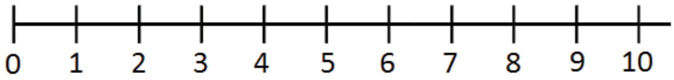
2) Γράψτε τους αριθμούς 8,003 , 7,94 , 8 , 7,403 , 8,2 , 7,8, από τον πιο μεγάλο μέχρι τον πιο μικρό.

… > … > … > … > … > … > …

3. Η αναπαράσταση των δεκαδικών αριθμών στην αριθμογραμμή

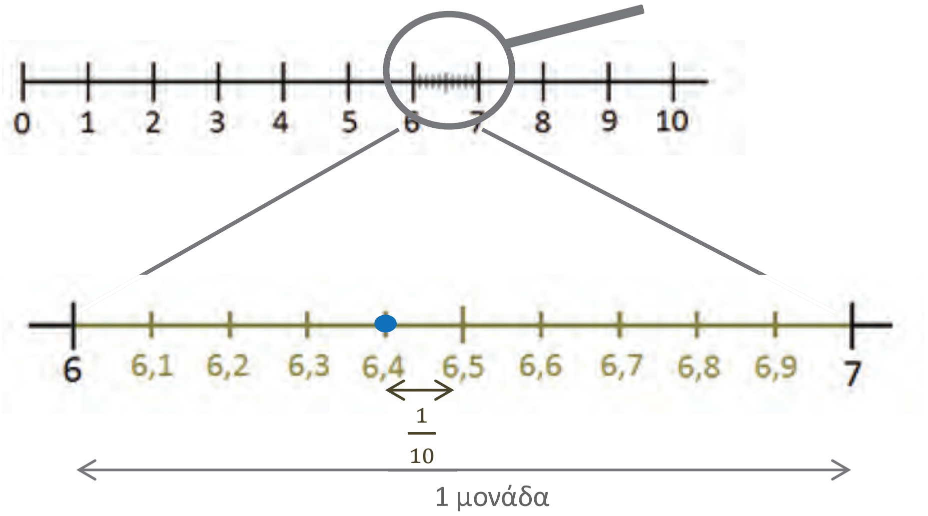
Δραστηριότητα 3.1

Α) Η Ταμάρ θέλει να βάλει τον αριθμό 6,4 στην παρακάτω αριθμογραμμή.

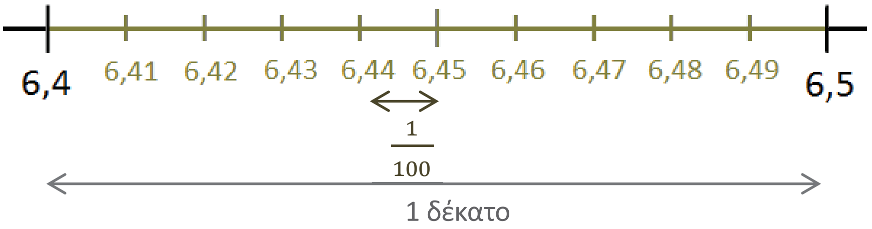


Γι’ αυτό, χωρίζει την μονάδα που είναι ανάμεσα στον 6 και στον 7 σε δέκα ίσα μέρη, δηλαδή σε 10 δέκατα (1 μονάδα = 10 × $\frac{1}{10}$).

Zoom:



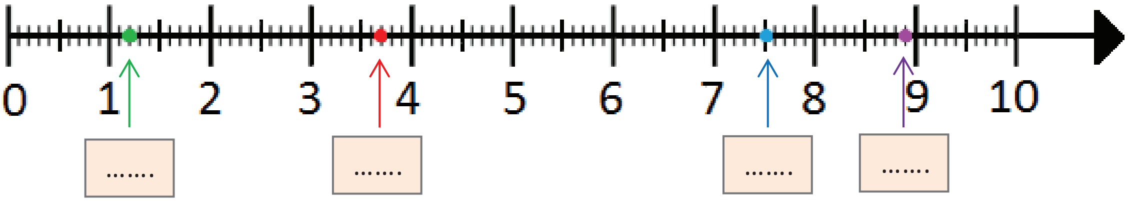
Β) Συζητήστε στην ομάδα σας, τι πρέπει να κάνει για να βάλει τον αριθμό 6,42. Η Νεμάλ τη βοηθάει. Χωρίζει το δέκατο ανάμεσα το 6,4 και το 6,5 σε δέκα ίσα μέρη, δηλαδή σε 10 εκατοστά.



Σημειώστε στην παραπάνω αριθμογραμμή τους αριθμούς 6,42 και 6,49. Για να σημειώσετε τον αριθμό 6,463 τι πρέπει να κάνετε;

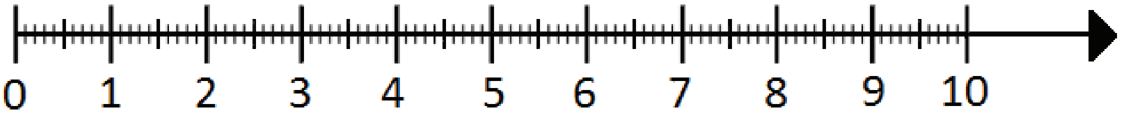
Άσκηση 3.1

Στην παρακάτω αριθμογραμμή, σημειώσαμε κάποια σημεία. Συμπληρώστε τα κενά με τους δεκαδικούς αριθμούς που τους αντιστοιχίζουν.

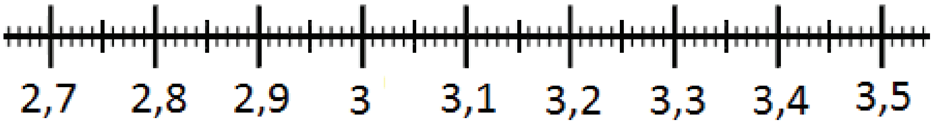


Άσκηση 3.2

1) Βάλτε στην παρακάτω αριθμογραμμή τους αριθμούς: 9,6 , 0,5 , 3,8 , 2,0 , 7,1.



2) Βάλτε στην παρακάτω αριθμογραμμή τους αριθμούς: 3,06 , 2,78 , 3,42 , 2,90 , 3,15.



3) Συμπληρώστε παρακάτω τα κενά με τους αριθμούς που είναι στις ερωτήσεις 1) και 2).

… < … < … < … < … < … < … < … < … < …

Στην αριθμογραμμή, ο αριθμός που είναι πιο δεξιά είναι ο πιο μεγάλος.

4. Η πρόσθεση και η αφαίρεση των δεκαδικών αριθμών

4.1 Πρόσθεση

Για να προσθέσουμε δεκαδικούς αριθμούς, χρησιμοποιούμε τον ίδιο τρόπο όπως με τους φυσικούς. Προσέχουμε όμως την υποδιαστολή όπως θα δούμε στην παρακάτω δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 4.1

Α) Ας προσπαθήσουμε να προσθέσουμε τους αριθμούς 5,34 + 6,27.

$$5{,}34 = 5 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100}$$ (5 μονάδες, 3 δέκατα και 4 εκατοστά)

$$6{,}27 = 6 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100}$$ (6 μονάδες, 2 δέκατα και 7 εκατοστά)

Συνολικά έχουμε $$11 + \frac{5}{10} + \frac{11}{100}$$ (11 μονάδες, 5 δέκατα και 11 εκατοστά)

$$\downarrow$$

$$\frac{10}{100} + \frac{1}{100} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$$

Άρα, έχουμε $$11 + \frac{5}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$$

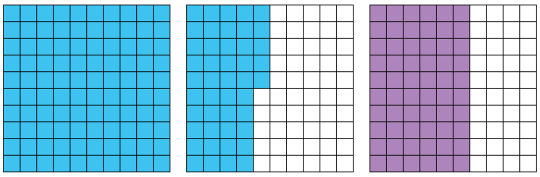
$$\downarrow$$

Τελικά, έχουμε $$11 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100}$$ (11 μονάδες, 6 δέκατα και 1 εκατοστό)

Άρα, 5,34 + 6,27 = 11,61.

Β) Μπορούμε πιο γρήγορα να κάνουμε την πρόσθεση όπως στο παρακάτω παράδειγμα. Θα πρέπει όμως να προσέξουμε να βάλουμε τα ψηφία από τον κάθε αριθμό κάτω από τα ψηφία με **την ίδια αξία θέσης** από τον άλλο αριθμό.

Θέλουμε να υπολογίσουμε 1,45 + 0,6.



1) Γράφουμε κατακόρυφα[1] τους αριθμούς 1,45 και 0,6.

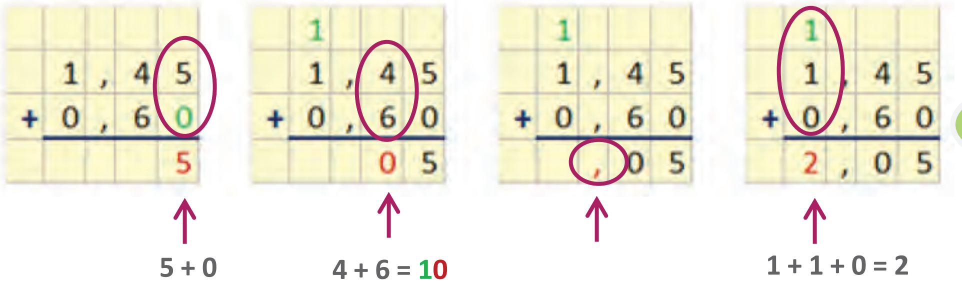
	1	,	4	5
+	0	,	6	

- Η υποδιαστολή του 0,6 πρέπει να είναι κάτω από την υποδιαστολή του 1,45.
- Τα ψηφία του 0,6 πρέπει να είναι κάτω από τα ψηφία του 1,45 με την ίδια αξία θέσης.

2) Αν μας βοηθάει βάζουμε 0 στο δεκαδικό μέρος. Έτσι για να έχουμε ίδιο αριθμό από ψηφία στο δεκαδικό μέρος.

	1	,	4	5
+	0	,	6	0

3) Προσθέτουμε τα ψηφία όπως στους φυσικούς αριθμούς, από δεξιά προς αριστερά.



Βάζουμε την υποδιαστολή και στο αποτέλεσμα.

Άρα 1,45 + 0,6 = 2,05.

Για να προσθέσουμε δεκαδικούς αριθμούς,
- προσέχουμε την αξία θέσης για κάθε ψηφίο και προσθέτουμε (όπως κάναμε με τους φυσικούς).
- βάζουμε την υποδιαστολή στη σωστή θέση.

Π.χ. 2 + 3,5 = 5,5   2,1 + 3,5 = 5,6   2,12 + 3,5 = 5,62   2,123 + 3,5 = 5,623

Άσκηση 4.1

Συμπλήρωσε στα παρακάτω αθροίσματα τα κενά όπως στο παράδειγμα.

Παράδειγμα

	2	,	5	6	
+	3	,	3	3	2
	5		8		2

2,56 + 3,332 =

	2	,	5	6	0
+	3	,	3	3	2
	5	,	8	9	2

2,56 + 3,332 = 5,892

---

[1] Δηλαδή γράφουμε πρώτα έναν αριθμό και μετά γράφουμε από κάτω του τον άλλο αριθμό.

(α)

		5	,	4	1	
+	2	4	,	8	3	7
	3		,	2	4	

5,41 + 24,837 =

(β)

	9				
+	7	,	0	0	6
1			0		

9 + 7, 006 =

(γ)

		3	9	,	7	8	9
+	5	8	7	,	5	2	
		2		,		0	

39,789 + 587,52 =

Άσκηση 4.2

Υπολόγισε κατακόρυφα τις παρακάτω προσθέσεις:

(α) 48 + 126,27
(β) 35,5 + 7,508
(γ) 32,36 + 62
(δ) 4,37 + 167,2
(ε) 620,410 + 82,90
(στ) 0,237 + 33,2 + 14,35

Άσκηση 4.3

Στα παρακάτω αθροίσματα, λείπει η υποδιαστολή «,» από τα αποτελέσματα.
Σε κάθε αποτέλεσμα, βάλε την υποδιαστολή στη σωστή θέση.

(α) 62 + 8,396 = 70396
(β) 806,7 + 25,81 = 83251
(γ) 1,168 + 3,208 = 4376
(δ) 114,80 + 53,9 + 0,082 = 168782

4.2 Αφαίρεση

Για να αφαιρέσουμε δεκαδικούς αριθμούς, χρησιμοποιούμε τον ίδιο τρόπο όπως με τους φυσικούς. Προσέχουμε όμως την υποδιαστολή όπως στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα: Θέλουμε να υπολογίσουμε 1,45 - 0,6.

1) Γράφουμε κατακόρυφα τους αριθμούς 1,45 και 0,6.

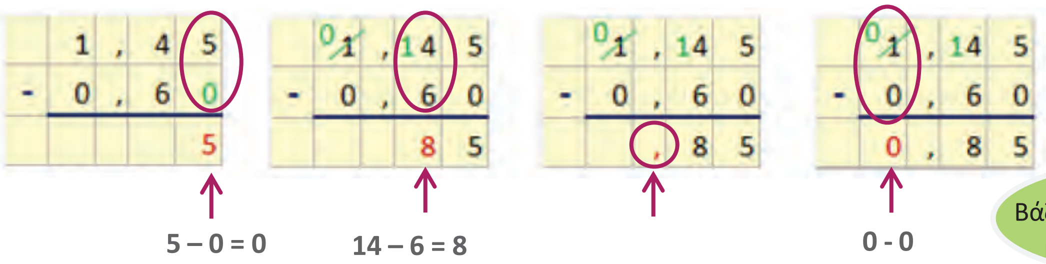
	1	,	4	5
-	0	,	6	

- Η υποδιαστολή του 0,6 πρέπει να είναι κάτω από την υποδιαστολή του 1,45.
- Τα ψηφία του 0,6 πρέπει να είναι κάτω από τα ψηφία του 1,45 με την ίδια αξία θέσης.

2) Αν χρειάζεται βάζουμε 0 στο δεκαδικό μέρος.

	1	,	4	5
-	0	,	6	0

3) Αφαιρούμε τα ψηφία όπως στους φυσικούς αριθμούς.



Βάζουμε την υποδιαστολή και στο αποτέλεσμα.

Άρα, 1,45 – 0,6 = 0,85.

Για να αφαιρέσουμε δεκαδικούς αριθμούς,

- προσέχουμε την αξία θέσης από το κάθε ψηφίο και αφαιρούμε (όπως κάναμε και με τους φυσικούς).
- βάζουμε την υποδιαστολή στη θέση που πρέπει.

Π.χ. 3,5 - 2 = 1,5 3,5 - 2,1 = 1,4 3,57 - 2,1 = 1,47 3,57 - 2,15 = 1,42

Άσκηση 4.4

Υπολόγισε κατακόρυφα τις παρακάτω αφαιρέσεις:

(α) 167,8 – 4,3 (β) 35,56 – 7,508 (γ) 62 – 42,36

(δ) 12,62 – 3,75 (ε) 620,410 – 82,20 (στ) 14,35 – 0,237

Άσκηση 4.5

Στις παρακάτω αφαιρέσεις, λείπει η υποδιαστολή «,» από τα αποτελέσματα.
Σε κάθε αποτέλεσμα, βάλε την υποδιαστολή στη σωστή θέση.

(α) 8,35 – 5,9 = 245 (β) 64,028 – 25,9 = 38128

(γ) 53,3 – 37,755 = 15545 (δ) 120,3 – 15,67 = 10463

5. Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση των δεκαδικών αριθμών

5.1 Πολλαπλασιάζω και διαιρώ έναν δεκαδικό αριθμό με δυνάμεις του 10

Δραστηριότητα 5.1

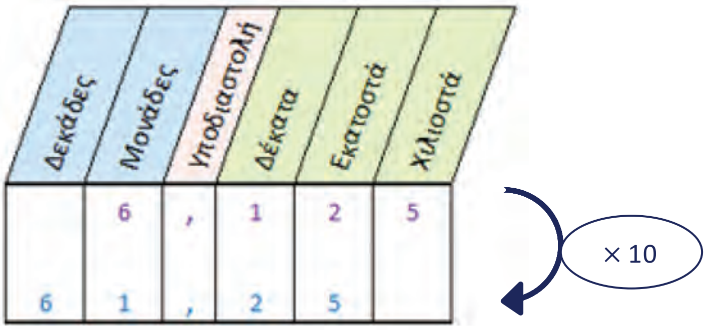
1) Η Νάντα και ο Χαλίλ έχουν να κάνουν 6,125 · 10.

Ο Χαλίλ χρησιμοποιεί κομπιουτεράκι και βρίσκει 61,25.

Η Νάντα λέει «Το βρήκα χωρίς κομπιουτεράκι. Ο αριθμός 6,125 έχει 6 μονάδες, 1 δέκατο, 2 εκατοστά και 5 χιλιοστά. Άρα,

- Όταν πολλαπλασιάζω τις 6 μονάδες με το 10, θα γίνουν 6 δεκάδες.
- Όταν πολλαπλασιάζω το 1 δέκατο με το 10, θα γίνει 1 μονάδα.
- Όταν πολλαπλασιάζω τα 2 εκατοστά με το 10, θα γίνουν 2 δέκατα.
- Όταν πολλαπλασιάζω τα 5 χιλιοστά με το 10, θα γίνουν 5 εκατοστά.

Όλα μαζί κάνουν 6 δεκάδες, 1 μονάδα, 2 δέκατα και 5 εκατοστά, δηλαδή 61,25.»



Η αξία για κάθε ψηφίο γίνεται 10 φορές πιο μεγάλη.

Συζητήστε στην ομάδα σας για τον τρόπο της Νάντα και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

6,125 · 1 =	21,74 · 1 =
6,125 · 10 =	21,74 · 10 =
6,125 · 100 =	21,74 · 100 =
6,125 · 1000 =	21,74 · 1000 =

Τι παρατηρείτε;

Μαθαίνω

Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1000, … μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα δεξιά από μία, δύο, τρεις, … θέσεις.
Αυτό σημαίνει ότι το αποτέλεσμα είναι 10, 100, 1000, … φορές πιο μεγάλο από τον αρχικό αριθμό.

Παράδειγμα

$41{,}836 \xrightarrow{\cdot 10} 418{,}36$ $41{,}836 \xrightarrow{\cdot 100} 4183{,}6$ $41{,}836 \xrightarrow{\cdot 1000} 41836{,}0$ δηλαδή 41836

$1{,}8 \xrightarrow{\cdot 10} 18$ $1{,}8 \xrightarrow{\cdot 100} 180$ $1{,}8 \xrightarrow{\cdot 1000} 1800$

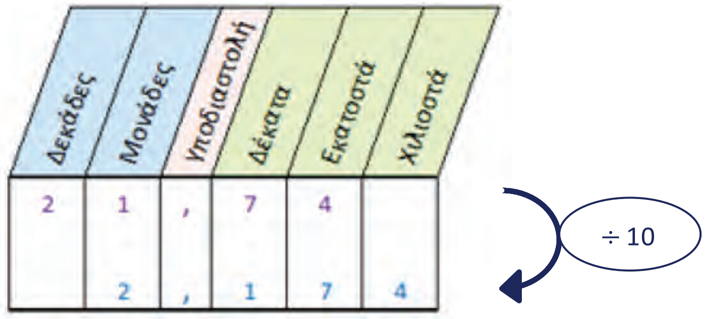
Όταν δεν έχει αρκετά ψηφία για να μεταφέρουμε την υποδιαστολή δεξιά, συμπληρώνουμε αντίστοιχα με μηδέν.

Δραστηριότητα 5.2

Χρησιμοποιήστε ένα κομπιουτεράκι για να συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

612,5 ÷ 1 =	21,74 ÷ 1 =
612,5 ÷ 10 =	21,74 ÷ 10 =
612,5 ÷ 100 =	21,74 ÷ 100 =
612,5 ÷ 1000 =	21,74 ÷ 1000 =

Τι παρατηρείτε;



Η αξία για κάθε ψηφίο γίνεται 10 φορές πιο μικρή.

Μαθαίνω

Όταν διαιρούμε έναν δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1000, … μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά από μία, δύο, τρεις, … θέσεις.
Αυτό σημαίνει ότι το αποτέλεσμα είναι 10, 100, 1000, … φορές πιο μικρό από τον αρχικό αριθμό.

Παράδειγμα

$41{,}8 \xrightarrow{\div 10} 4{,}18$ $41{,}8 \xrightarrow{\div 100} 0{,}418$ $41{,}8 \xrightarrow{\div 1000} 0{,}0418$

$1{,}8 \xrightarrow{\div 10} 0{,}18$ $1{,}8 \xrightarrow{\div 100} 0{,}018$ $1{,}8 \xrightarrow{\div 1000} 0{,}0018$

Όταν δεν έχει αρκετά ψηφία για να μεταφέρουμε την υποδιαστολή αριστερά, συμπληρώνουμε αντίστοιχα με μηδέν.

Άσκηση 5.1

Υπολογίστε τα αποτελέσματα στις παρακάτω πράξεις

4,735 · 10 =	159,7 · 10 =
4,735 · 100 =	159,7 · 100 =
4,735 · 1000 =	159,7 · 1000 =
4,735 ÷ 10 =	159,7 ÷ 10 =
4,735 ÷ 100 =	159,7 ÷ 100 =
4,735 ÷ 1000 =	159,7 ÷ 1000 =

Άσκηση 5.2

Συμπληρώστε τα κενά

18,026 · ⬚ = 18026	18,026 · ⬚ = 1802,6	18,026 ÷ ⬚ = 1,8026	18,026 ÷ ⬚ = 0,018026
1,7 · ⬚ = 1700	1,7 · ⬚ = 17	1,7 ÷ ⬚ = 0,17	1,7 ÷ ⬚ = 0,0017
⬚ · 100 = 24	⬚ · 1000 = 3190	⬚ ÷ 10 = 2,3	⬚ ÷ 100 = 0,015

5.2 Ο πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών

Δραστηριότητα 5.3 *(Ο πολλαπλασιασμός ενός δεκαδικού αριθμού με έναν φυσικό αριθμό)*

Συμπληρώστε τα παρακάτω κενά όπως στο παράδειγμα.

Παράδειγμα: $13 \cdot 0{,}2 = 13 \cdot \frac{2}{10} = \frac{13 \cdot 2}{10} = 26 \div 10 = 2{,}6$

$13 \cdot 0{,}02 = 13 \cdot \frac{2}{⬚} = \frac{13 \cdot 2}{⬚} = ⬚ \div ⬚ = ⬚$

$13 \cdot 0{,}002 = 13 \cdot \frac{2}{⬚} = \frac{13 \cdot 2}{⬚} = ⬚ \div ⬚ = ⬚$

Γράψτε τα αποτελέσματα που βρήκατε στον παρακάτω πίνακα, και συμπληρώστε τα υπόλοιπα.

13 · 2 =	13 · 3 =	13 · 4 =
13 · 0,2 = 2,6	13 · 0,3 =	13 · 0,4 =
13 · 0,02 =	13 · 0,03 =	13 · 0,04 =
13 · 0,002 =	13 · 0,003 =	13 · 0,004 =

- Τι παρατηρείτε για τη θέση της υποδιαστολής στα αποτελέσματα;

- Συμπληρώστε:

- 13 · 9 = 117 άρα 13 · 0,9 = ……
- 35 · 7 = 245 άρα 35 · 0,07 = ……
- 11 · 2 = 22 άρα 11 · 0,02 = ……
- 124 · 3 = 372 άρα 124 · 0,003 = ……

Δραστηριότητα 5.4 *(Ο πολλαπλασιασμός δύο δεκαδικών αριθμών)*

Η Εκίν και ο Ιβάν θέλουν να υπολογίσουν 1,3 · 0,2. Η Εκίν λέει: «Όπως 13 · 2 = 26 άρα 1,3 · 0,2 = 0,26». Ο Ιβάν προσπαθεί να καταλάβει. Βοηθήστε τον και συμπληρώστε τα παρακάτω κενά:

$$1{,}3 \cdot 0{,}2 = \frac{13}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{\square \cdot \square}{\square \cdot \square} = \frac{\square}{\square} = \square .$$

- Τι παρατηρείτε για τη θέση της υποδιαστολής στο αποτέλεσμα;

- Ο Ιβάν λέει: «Άρα 1,3 · 0,02 = 0,026 και 0,13 · 0,02 = 0,0026». Έχει δίκιο ο Ιβάν; Συζητήστε στην ομάδα σας και εξηγήστε γιατί.

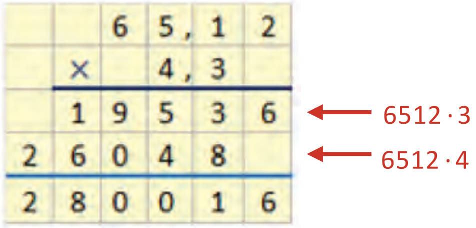
- Συμπληρώστε:
  - 13 · 9 = 117 άρα 1,3 · 0,9 = ...
  - 35 · 7 = 245 άρα 0,35 · 0,07 = ...
  - 11 · 2 = 22 άρα 0,11 · 0,02 = ...
  - 124 · 3 = 372 άρα 12,4 · 0,003 = ...

> Για να πολλαπλασιάσουμε δεκαδικούς αριθμούς,
> - βρίσκουμε πρώτα το γινόμενο όπως κάνουμε με τους φυσικούς αριθμούς,
> - βάζουμε την υποδιαστολή στο αποτέλεσμα μετρώντας πόσα ψηφία είναι συνολικά σε αυτούς τους αριθμούς.
>
> Π.χ. $3 \cdot 5{,}\underbrace{2}_{\text{1 ψηφίο}} = 15{,}\underbrace{6}_{\text{1 ψηφίο}}$ $\quad 0{,}\underbrace{2}_{\text{1 ψηφίο}} \cdot 2{,}\underbrace{6}_{\text{1 ψηφίο}} = 0{,}\underbrace{52}_{\text{2 ψηφία}}$ $\quad 2{,}\underbrace{36}_{\text{2 ψηφία}} \cdot 15{,}\underbrace{89}_{\text{2 ψηφία}} = 37{,}\underbrace{5004}_{\text{4 ψηφία}}$

<u>Εφαρμογή</u> *(Πολλαπλασιασμός δύο δεκαδικών αριθμών κατακόρυφα)*

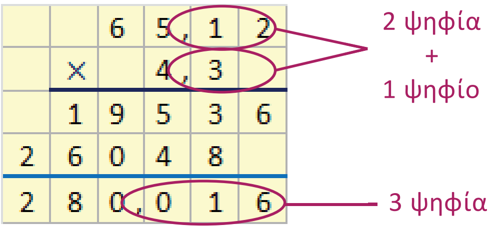
Θέλουμε να υπολογίσουμε κατακόρυφα τον πολλαπλασιασμό 65,12 · 4,3

1) Γράφουμε κατακόρυφα τους αριθμούς και κάνουμε τον πολλαπλασιασμό όπως για τους φυσικούς αριθμούς.



		6	5,	1	2
	×		4,	3	
	1	9	5	3	6
2	6	0	4	8	
2	8	0	0	1	6

2) Μετράμε πόσα δεκαδικά ψηφία έχουμε <u>συνολικά</u> από τους δύο αριθμούς και μετά μετράμε από το τέλος, τόσες θέσεις (όσες και τα δεκαδικά που μετρήσαμε) και βάζουμε την υποδιαστολή.



		6	5,	1	2
	×		4,	3	
	1	9	5	3	6
2	6	0	4	8	
2	8	0,	0	1	6

Πολλαπλασιάζω εκατοστά (2 ψηφία μετά την υποδιαστολή) με δέκατο (1 ψηφίο).

↓

Παίρνω χιλιοστά (3 ψηφία μετά την υποδιαστολή).

Άρα, 65,12 · 4,3 = 280,016.

Άσκηση 5.3

Για κάθε γινόμενο κυκλώστε το σωστό αποτέλεσμα σχετικά με τη θέση της υποδιαστολής.

- 32 · 2,6 = (α) 8,32 (β) 832 (γ) 83,2
- 0,18 · 5,2 = (α) 9,36 (β) 0,936 (γ) 93,6
- 0,09 · 0,35 = (α) 0,315 (β) 0,0315 (γ) 315
- 1,8 · 2,55 = (α) 4,59 (β) 0,0459 (γ) 45,9

Άσκηση 5.4

Στους παρακάτω πολλαπλασιασμούς, λείπει η υποδιαστολή «,» από τα αποτελέσματα.
Σε κάθε αποτέλεσμα, βάλε την υποδιαστολή στη σωστή θέση.

(α) 13 · 1,4 = 182 (β) 0,13 · 8,6 = 1118 (γ) 2,4 · 2,5 = 600
(δ) 12 · 0,5 = 60 (ε) 3,95 · 0,35 = 13825 (στ) 125,615 · 25,9 = 32534285

Άσκηση 5.5

Υπολόγισε τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς:

(α) 48 · 126,27 (β) 35,5 · 7,50
(γ) 22,06 · 2,58 (δ) 4,37 · 0,162
(ε) 120,410 · 8,9 (στ) 0,237 · 0,32

Άσκηση 5.6

Ο Νταούντ είπε: «Όταν πολλαπλασιάζω έναν φυσικό αριθμό, π.χ. 6, με έναν δεκαδικό αριθμό, το αποτέλεσμα είναι πάντα πιο μεγάλο από το αρχικό φυσικό αριθμό».

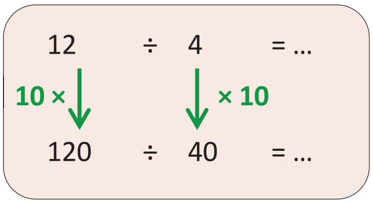
Η Λέιλα του απάντησε: «Όχι πάντα».

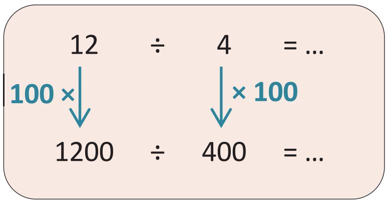
Συνεργαστείτε σε ομάδες, δοκιμάστε κάποια παραδείγματα και πείτε ποιος έχει δίκιο, ο Νταούντ ή η Λέιλα; Γιατί;

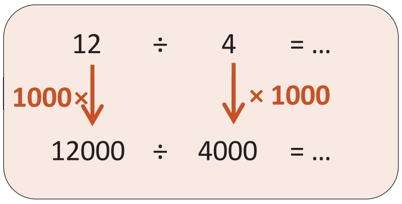
5.3 Η διαίρεση δεκαδικών αριθμών

Δραστηριότητα 5.5 *(Η διαίρεση ενός δεκαδικού αριθμού με έναν φυσικό αριθμό)*

Συμπληρώστε τα παρακάτω







Τι παρατηρείτε;

Τι μπορείτε να πείτε για 19,6 ÷ 4 και 196 ÷ 40; Έχουν το ίδιο αποτέλεσμα; Γιατί;

19,6 ÷ 4 = (19,6 × 10) ÷ (4 × 10) = 196 ÷ 40 = 4,9.

× 10

Συμπληρώστε:

42,5 ÷ 5 = (42,5 × ⬚) ÷ (5 × ⬚) = ⬚ ÷ ⬚ = ⬚.   4,25 ÷ 5 = (4,25 × ⬚) ÷ (5 × ⬚) = ⬚ ÷ ⬚ = ⬚.

× …   × …

0,425 ÷ 5 = (0,425 × ⬚) ÷ (5 × ⬚) = ⬚ ÷ ⬚ = ⬚.

19,6 ÷ 4 = ……………………………………………………

97,6 ÷ 8 = ……………………………………………………

Δραστηριότητα 5.6 *(Η διαίρεση ενός δεκαδικού αριθμού με έναν δεκαδικό αριθμό)*

Ο Μπαχράμ και η Ταμάρ αγόρασαν 1,4 κιλά κεράσια με 5,88€. Για να δουν πόσο κοστίζει το ένα κιλό, θέλουν να υπολογίσουν 5,88 ÷ 1,4. Συζητάνε πώς θα το κάνουν.

Η Ταμάρ λέει ∘ ○ ◯ Για να κάνουμε τη διαίρεση όπως στους φυσικούς, θα προσπαθήσουμε να μην έχουμε υποδιαστολή στους αριθμούς. Άρα, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τους δύο αριθμούς με μία δύναμη του 10.

Ο Μπαχράμ ρωτάει ∘ ○ ◯ Όμως, με ποια δύναμη του 10;

Η Ταμάρ λέει «πρέπει να είναι ίδια δύναμη του 10 για τους δύο αριθμούς», και γράφει

5,88 ← 2 ψηφία μετά την υποδιαστολή
1,4 ← 1 ψηφίο μετά την υποδιαστολή

Άρα, πολλαπλασιάζουμε με 100
τον 5,88 και τον 1,4.
↑
2 μηδέν

- Συζητήστε στην ομάδα σας γιατί πολλαπλασιάζουν με 100 και όχι με 10;
- Βοήθησε την Ταμάρ να συνεχίσει τον υπολογισμό.

5,88 ÷ 1,4 = (5,88 × 100) ÷ (1,4 × 100) = ⬚ ÷ ⬚ = ⬚.

- Υπολογίστε τα επόμενα όπως στο παράδειγμα:

$$\begin{array}{ccc} 58{,}8 & \div & 0{,}14 \\ 100\times\downarrow & & \downarrow\times 100 \\ 5880 & \div & 14 = 420 \end{array}$$

5,88 ÷ 0,14 =

588 ÷ 0,14 =

588 ÷ 1,4 =

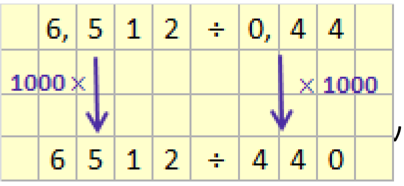
58,8 ÷ 1,4 =

Για να διαιρέσουμε δύο δεκαδικούς αριθμούς,
- πολλαπλασιάζουμε τους δύο αριθμούς με την κατάλληλη δύναμη του 10, για να γίνουν και οι δύο αριθμοί φυσικοί,
- κάνουμε τη διαίρεση όπως με τους φυσικούς αριθμούς.

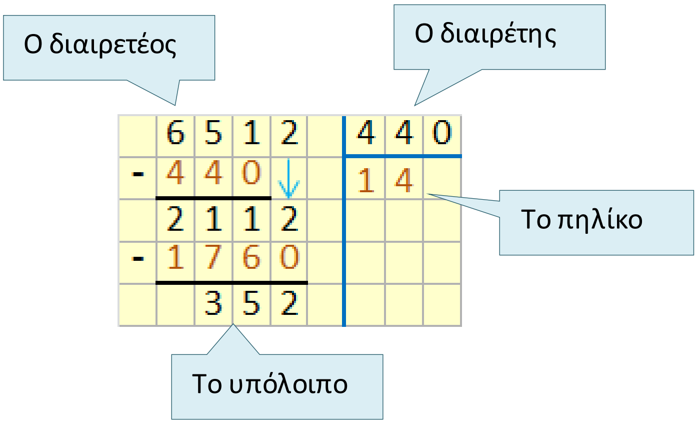
Εφαρμογή *(Η κατακόρυφη διαίρεση δύο δεκαδικών αριθμών)*

Ο δάσκαλος ζητάει από την Αζάρ και τον Αφράν να κάνουν κατακόρυφα την διαίρεση 6,512 ÷ 0,44.

Η Αζάρ και ο Αφράν πολλαπλασιάζουν τους αριθμούς 6,512 και 0,44 με 1000.



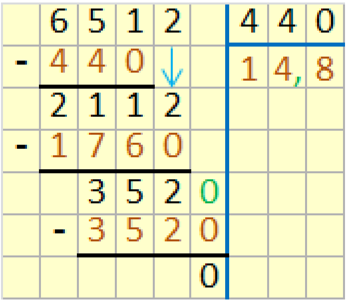
Μετά, γράφουν κατακόρυφα τους αριθ … τη διαίρεση όπως ξέρουν για τους φυσικούς αριθμούς.



Ο δάσκαλος τους ρωτάει: «Σ’ αυτήν τη διαίρεση, έχουμε υπόλοιπο. Πώς μπορείτε να προχωρήσετε για να μην έχετε υπόλοιπο;».

Η Αζάρ λέει: «Ο 352 είναι πιο μικρός από τον 440. Άρα, για να έχουμε 352, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τον 440 με έναν αριθμό πιο μικρό από μία μονάδα.».
Ο Αφράν λέει: «Δηλαδή, θα έχουμε και δέκατα στο πηλίκο».
Η Αζάρ λέει: «Σίγουρα. Γιατί, 14 · 440 = 6160 και 15 · 440 = 6600. Άρα, Για να έχουμε 6512, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τον 440 με έναν αριθμό που είναι ανάμεσα στους 14 και 15. Αλλά πώς θα το κάνουμε;».

Ο δάσκαλος τους εξηγεί: «Επειδή δεν μπορούμε να διαιρέσουμε 352 μονάδες με 440 μονάδες. Θα κάνουμε τις 352 μονάδες δέκατα, δηλαδή 3520. Έτσι για να συνεχίσουμε τη διαίρεση βάζουμε υποδιαστολή στο πηλίκο.».



Άρα, 6,512 ÷ 0,44 = 14,8.

Άσκηση 5.7

Για κάθε διαίρεση κυκλώστε τη σωστή απάντηση.

● 3,2 ÷ 0,008 =	(α) 32 ÷ 8	(β) 3200 ÷ 8	(γ) 320 ÷ 8
● 6,604 ÷ 5,2 =	(α) 6604 ÷ 52	(β) 6604 ÷ 520	(γ) 6604 ÷ 5200
● 395 ÷ 15,8 =	(α) 395 ÷ 158	(β) 3950 ÷ 1580	(γ) 3950 ÷ 158
● 16,44 ÷ 40 =	(α) 1644 ÷ 40	(β) 1644 ÷ 4000	(γ) 1644 ÷ 400

Άσκηση 5.8

Υπολόγισε τις παρακάτω διαιρέσεις:

(α) 6 ÷ 0,12
(β) 137,2 ÷ 56
(γ) 62 ÷ 12,4
(δ) 4,38 ÷ 1,2
(ε) 0,414 ÷ 2,3
(στ) 1,216 ÷ 0,32

6. Ποσοστά

Δραστηριότητα 6.1 *(Η έννοια του ποσοστού)*

Στις παρακάτω εικόνα, μπορείτε να πείτε περίπου τι μέρος είναι το πράσινο κομμάτι από όλο το σχήμα;

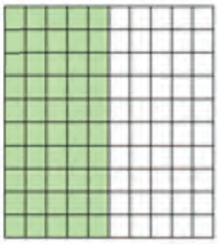
(1)

(2)

(3)

Η Φατίμα και η Ταμάρ θέλουν να βρουν με ακρίβεια τι μέρος είναι το πράσινο κομμάτι από τα παραπάνω σχήματα. Γι' αυτό, χωρίζουν το μεγάλο τετράγωνο σε 100 μικρά ίσα τετράγωνα.

(1)



Για το πρώτο σχήμα, η Φατίμα γράφει τον αριθμό που εκφράζει πόσα είναι τα πράσινα μικρά τετράγωνα σε σχέση με όλα τα 100 τετράγωνα:

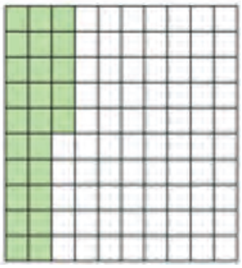
ως κλάσμα: $\frac{50}{100}$ και ως δεκαδικός αριθμός: 0,5.

Συμφωνείτε με τη Φατίμα;

Η Ταμάρ λέει: «Άρα το πράσινο κομμάτι είναι 50% από το μεγάλο τετράγωνο». Συζητήστε στην ομάδα σας για το τι σημαίνει 50%. Πού αλλού βλέπετε τέτοιους αριθμούς, π.χ. 2%, 30%, 50%, …; Τέτοιους αριθμούς λέγονται **ποσοστά στα εκατό**.

Τι μέρος είναι το πράσινο κομμάτι από το μεγάλο τετράγωνο στα παρακάτω σχήματα; Γράψτε τον αριθμό που το εκφράζει, ως κλάσμα, ως ποσοστό και ως δεκαδικό αριθμό.

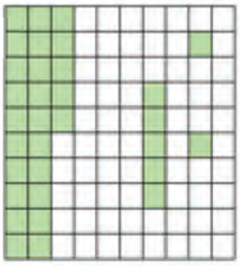
(2)



Κλάσμα: …… Ποσοστό: ………

Δεκαδικός αριθμός: ……..

(3)



Κλάσμα: …… Ποσοστό: ………

Δεκαδικός αριθμός: ……..

Μαθαίνω

Το **ποσοστό** είναι ένας αριθμός που εκφράζει ένα μέρος από μια ποσότητα.
Το **ποσοστό στα εκατό** είναι ίσο με ένα δεκαδικό κλάσμα με παρανομαστή 100. Το γράφουμε με το σύμβολο % και το διαβάζουμε «τοις εκατό».

Π.χ. 42% = $\frac{42}{100}$ = 0,42. (42 τοις εκατό)

Εφαρμογή 6.1

1) Ο Νταούντ έχει 25 καραμέλες. Έφαγε 4 απ’ αυτές. Θέλει να δει τι ποσοστό από τις καραμέλες έφαγε; Θα τον βοηθήστε.

- Βρείτε ποιο κλάσμα με παρανομαστή 100 είναι ίσο με το $\frac{4}{25}$: $\frac{4}{25} = \frac{\square}{100}$.

- Άρα, ποιο είναι το ποσοστό;

2) Η Εκίν έχει 20 καραμέλες. Έφαγε 4 απ’ αυτές. Τι ποσοστό από τις καραμέλες έφαγε; ....

Εφαρμογή 6.2

Στην τάξη της Νάντιας, είναι 20 μαθητές συνολικά. Η Νάντια λέει ότι 30% από τους μαθητές είναι αγόρια. Ο Χαλίλ θέλει να βρει τον αριθμό από τα αγόρια. Γι’ αυτό γράφει:

30% από 20 = $\frac{30}{100}$ × 20 = 0,3 × 20 = 6.

Συζητήστε στην ομάδα σας γι’ αυτό που έκανε ο Χαλίλ. Με τον ίδιο τρόπο, βρείτε τον αριθμό από τους μαθητές που λείπουν, όταν το ποσοστό είναι 10%.

Οι καινούριες μου λέξεις

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που συνάντησες σε αυτή την ενότητα.

....

....

....

Γράψε τις καινούριες μαθηματικές λέξεις που συνάντησες.

....

....

....

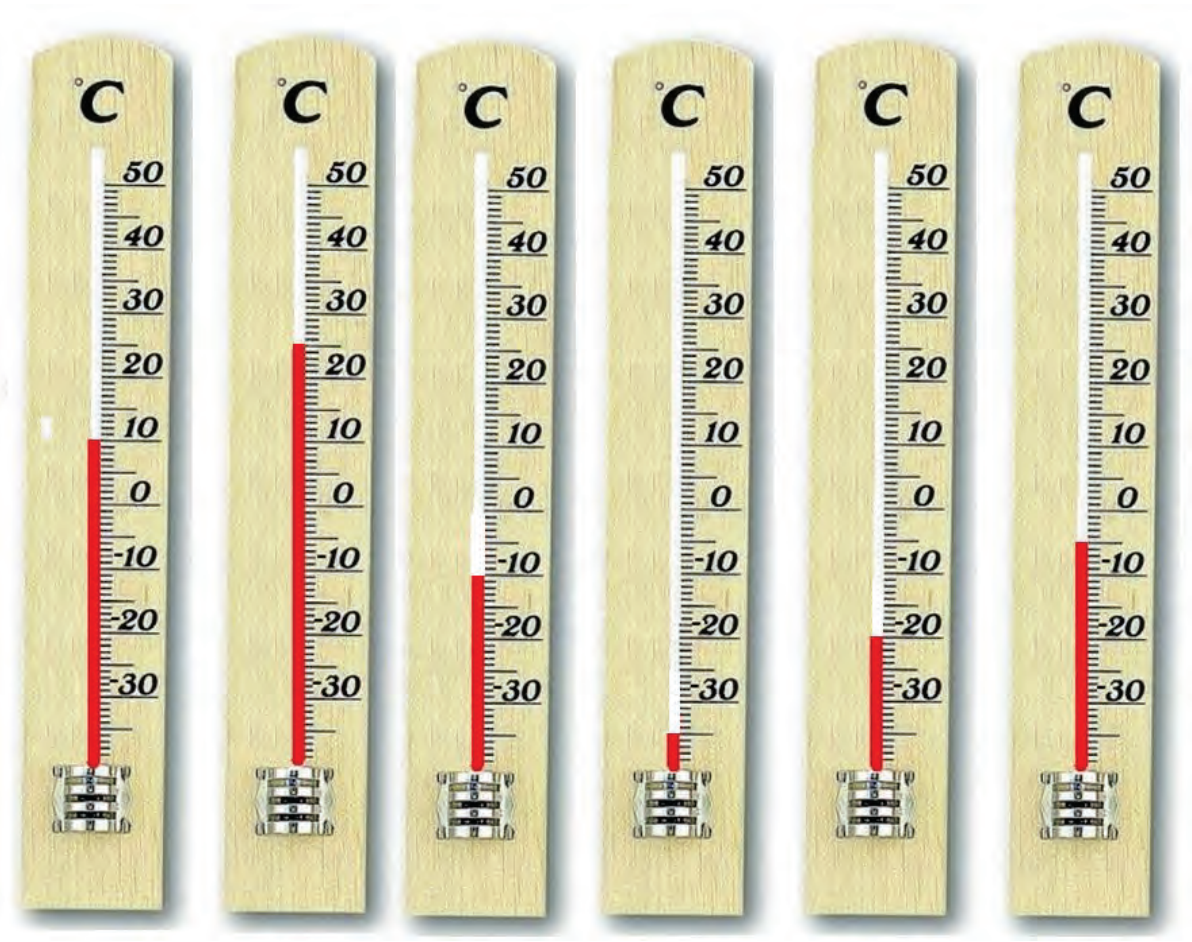
Ενότητα Α3
Οι ακέραιοι αριθμοί

1. Η έννοια των ακεραίων αριθμών – Αριθμογραμμή –Διάταξη και σύγκριση ακεραίων

1.1 Διερεύνηση *(εισαγωγή στους αρνητικούς αριθμούς)*

Στις 13 Δεκεμβρίου, μετρήσαμε τη θερμοκρασία σε 6 πόλεις. Τα θερμόμετρα είναι στην παρακάτω εικόνα. Μπορείτε να γράψετε τη θερμοκρασία, για κάθε πόλη;

Αθήνα	Λευκωσία	Παρίσι	Όσλο	Μόσχα	Βερολίνο



………………	………………	………………	………………	………………	………………

Συζητήστε με την ομάδα σας τι σημαίνουν αυτές οι θερμοκρασίες;

Ορισμοί

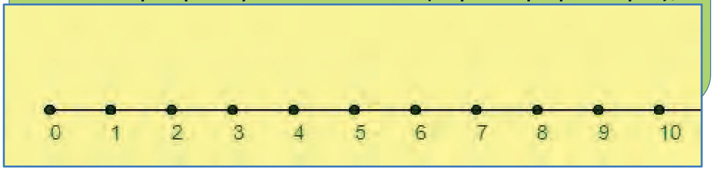
- *Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, … ονομάζονται **φυσικοί** αριθμοί.*
- *Λέμε **αρνητικό αριθμό** κάθε αριθμό που έχει μπροστά το σύμβολο «-», π.χ. -3, -6.*
- *Στους φυσικούς αριθμούς βάζουμε μπροστά το σύμβολο «+» και τους λέμε **θετικούς αριθμούς**. Για παράδειγμα, γράφουμε +2,+65,+509 αντί 2, 65, 509.*

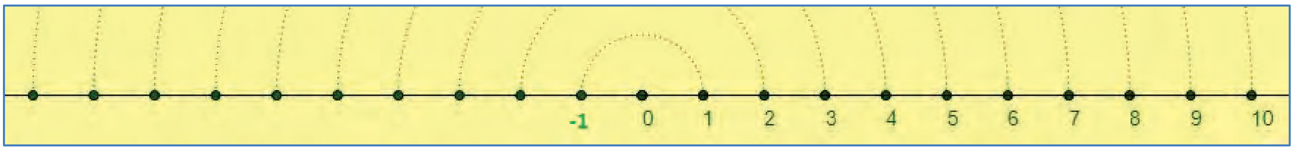
- Το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.
- Τα σύμβολα «-», «+» που γράφουμε μπροστά από τους αριθμούς, τα λέμε **πρόσημα.**
- Τους θετικούς ακεραίους μπορούμε να τους γράφουμε και χωρίς το πρόσημό τους.

1.2 Διερεύνηση *(οι αρνητικοί αριθμοί στην αριθμογραμμή)*

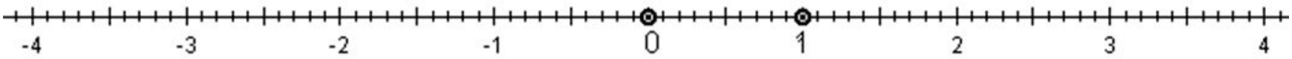
α) Στρέφουμε την ημιευθεία με τους φυσικους αριθμούς γύρω από το 0 κατά 180^{o}. Έτσι παίρνουμε μία ευθεία. Αυτή η ευθεία λέγεται **αριθμογραμμή**. Σε αυτήν την ευθεία βάζουμε και τους αρνητικούς αριθμούς. Ξεκινάμε αριστερά από το 0 με το -1. Μπορείτε να συμπληρώσετε στην παρακάτω ευθεία, τους αριθμούς που λείπουν;

Συνήθως, όταν ένας θετικός αριθμός δεν έχει άλλον αριθμό πριν απ' αυτόν (δηλαδή αριστερά),





β) Με την ίδια λογική, ορίζουμε και τους αρνητικούς δεκαδικούς αριθμούς. Βάλτε στην αριθμογραμμή τους αριθμούς: 1,3 , -1,3 , 2,5 , -2,5 , 3,7 , -3,7.



1.3 Διερεύνηση *(ομόσημοι και ετερόσημοι αριθμοί)*

Ορισμοί

- Δύο αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο λέγονται **ομόσημοι**. Για παράδειγμα, οι +3 και +5 είναι ομόσημοι όπως και οι -2 και -76 .
- Δύο αριθμοί που δεν έχουν το ίδιο πρόσημο λέγονται **ετερόσημοι**. Για παράδειγμα, οι -4 και +6 είναι ετερόσημοι όπως και οι +7 και -6.

α) Γράψτε 4 θετικούς αριθμούς ______ , ______, ______, _______

β) Γράψτε4 αρνητικούς αριθμούς ______ , ______, ______, _______

γ) Γράψτε 3 ζευγάρια ομόσημων αριθμών _____ , _____ _____ , _____ _____ , _____

δ) Γράψτε 3 ζευγάρια ετερόσημων αριθμών _____ , _____ _____ , _____ _____ , _____

1.4 Διερεύνηση *(αντίθετοι αριθμοί)*

Ορισμός

- *Λέμε ότι δύο αριθμοί είναι **αντίθετοι** όταν:*
  - *ο ένας είναι δεξιά από το 0*
  - *ο άλλος είναι αριστερά από το 0*
  - *έχουν την ίδια απόσταση από το 0.*
- *Όταν έχω έναν αριθμό, συμβολίζουμε τον αντίθετό του με –(αριθμός).*

- *Για παράδειγμα, οι αριθμοί 1 και -1 είναι αντίθετοι, οι 2 και -2 είναι αντίθετοι, …*
- *Ο αντίθετος του (+10) είναι ο -10 και γράφεται –(+10). Ο αντίθετος του -5 είναι ο +5 και γράφεται –(–5). Ο αντίθετος του 0 είναι το 0, δηλαδή -0=0.*

α) Μπορείτε να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις;

Ο αντίθετος του 5 είναι ο …….. . Ο αντίθετος του -5 είναι ο ……..

Ο αντίθετος του -9 είναι ο ……… . Ο αντίθετος του 9 είναι ο ……..

Ο αντίθετος του 1098 είναι ο ……… . Ο αντίθετος του -1098 είναι ο ……..

β) Ποιος είναι ο αντίθετος του αντιθέτου ενός αριθμού;

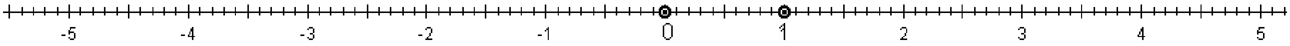
γ) Συμπληρώστε τα κενά: -(-3)=…….. -(+5)=…….., -(-12)=……..,

Ορισμός

Οι φυσικοί αριθμοί και οι αντίθετοί τους, ονομάζονται ***ακέραιοι***

1.5 Διερεύνηση *(απόλυτη τιμή αριθμού)*

α) Γράψτε ζευγάρια αριθμών που απέχουν το ίδιο (έχουν την ίδια απόσταση) από το 0. Συμπληρώστε τα κενά όπως στο παρακάτω παράδειγμα;



Οι -***3*** και ***3*** που απέχουν ***3*** μονάδες από το 0, Οι ………………………………………………………………….,

Οι …………………………………………………………………., Οι ………………………………………………………………….

Ορισμός

- Η απόσταση ενός αριθμού από το 0 λέγεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού.
- Συμβολίζουμε την απόλυτη τιμή ενός αριθμού με |αριθμός|. Για παράδειγμα, $|-2|= 2$, $|+7|= 7$, $|0|= 0$.

β) Από τις απόλυτες τιμές $|-11|$, $|12|$, $|3|$, $|-18|$, $|-12|$, $|15|$, γράψτε δύο που έχουν απόσταση 12 από το 0: ……….. , …………

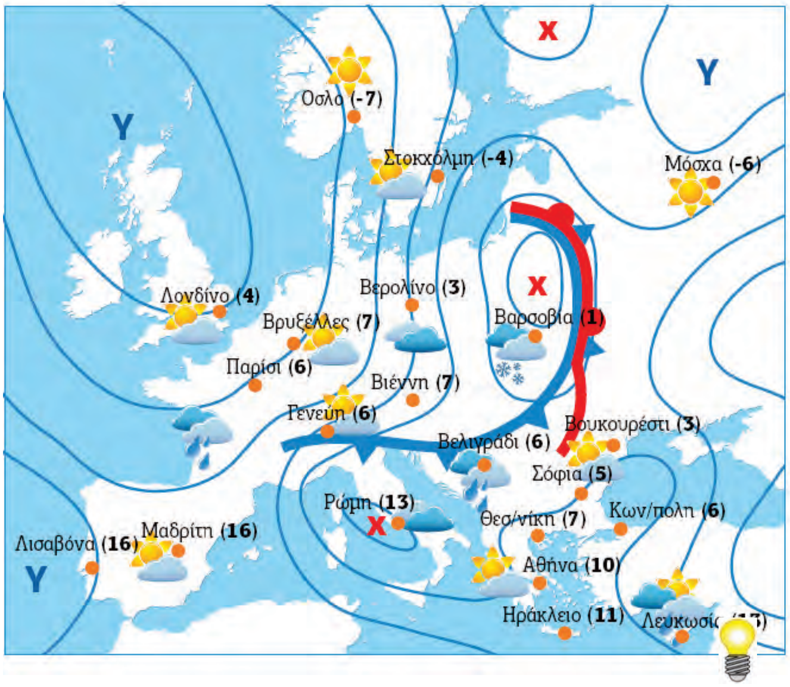
γ) Συμπληρώστε τα κενά με τις αποστάσεις των αντίστοιχων σημείων από το 0:
$|-5|$=……… , $|+8|$= ……… , $|-123|$= ……… , $|+2|$= ………, $|-45|$= ………

$|-3672|$= ……… , $|+53|$= ………, $|-9087|$= ……… , $|32|$= ……… , $|0|$= ……….

1.6 Διερεύνηση *(μικρότερη και μεγαλύτερη θερμοκρασία)*

Στο διπλανό χάρτη είναι οι θερμοκρασίες που είχαν μία ημέρα κάποιες πόλεις. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- Το Βελιγράδι ή το Βουκουρέστι ήταν η πιο ζεστή πόλη;
- Η Στοκχόλμη ή το Όσλο ήταν η πιο ζεστή πόλη;
- Η Στοκχόλμη ή η Μόσχα ήταν η πιο κρύα πόλη;
- Από όλες τις πόλεις, ποια ήταν η πιο ζεστή και ποια ήταν η πιο κρύα;



Χάρτης βαρομετρικών επιφανειακών συστημάτων στις 12/12/2010

1.7 Διερεύνηση *(από το θερμόμετρο στην αριθμογραμμή)*

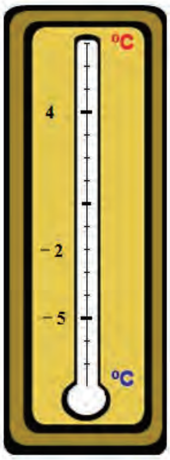
α) Μπορείτε να συγκρίνετε τις παρακάτω θερμοκρασίες βάζοντας το σωστό σύμβολο σύγκρισης (<, = , >);

4 ….. -2

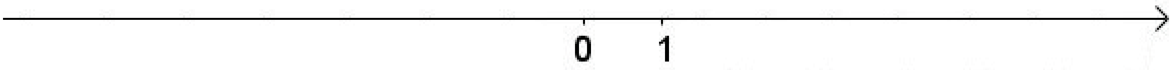
-5 ….. 4

-2 ….. -5

Για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς χρησιμοποιούμε τα σύμβολα ανισότητας“<” και “>”. Για παράδειγμα, λέμε ο αριθμός 4 είναι μικρότερος από τον αριθμό 7 και γράφουμε 4<7. Μπορούμε όμως να το πούμε και αλλιώς, ότι ο αριθμός 7 είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό 4 και γράφουμε 7>4.



β) Προσπαθήστε να βάλετε τους αριθμούς 2, 4, -3, -5 στην αριθμογραμμή.

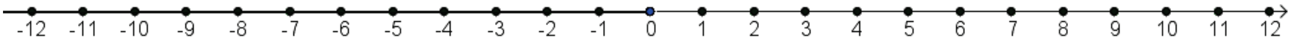


i. Ποιος αριθμός είναι ο μεγαλύτερος;
ii. Ποιος αριθμός είναι ο μικρότερος;

γ) Μπορείτε να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς τοποθετώντας το σωστό σύμβολο σύγκρισης (<, = , >);

-4 …… -2, 6 ….. 4, -2 …… 0 , 0 ……. 6 , -4 …….6, -100000 ……. -3

δ) Παρατηρώντας την αριθμογραμμή συμπληρώστε τις προτάσεις με τις λέξεις «μεγαλύτερος», «μικρότερος»**;**



Κάθε θετικός ακέραιος είναι ……………………………… από το 0.

Κάθε αρνητικός ακέραιος είναι ………………………………από το 0.

Κάθε αρνητικός ακέραιος είναι ……………………………… από κάθε θετικό ακέραιο.

ε) Συμπληρώστε τις προτάσεις με τις λέξεις *“πιο δεξιά”* ή “πιο *αριστερά”*.

Αν έχω δύο θετικούς ακεραίους (π.χ. 5 και 7), μεγαλύτερος πάντα είναι αυτός που βρίσκεται ……………………… στην αριθμογραμμή.

Αν έχω δύο αρνητικούς ακεραίους (π.χ. -5 και -7), μεγαλύτερος πάντα είναι αυτός που βρίσκεται ……………………… στην αριθμογραμμή.

Αν έχω έναν αρνητικό και έναν θετικό ακέραιο (π.χ. -8 και 11) μεγαλύτερος είναι ο θετικός ακέραιος που βρίσκεται …………………… στην αριθμογραμμή.

Συμπέρασμα: Όταν συγκρίνουμε δύο αριθμούς, μεγαλύτερος είναι ο αριθμός που βρίσκεται …………………………. στην αριθμογραμμή.

1.8 Διερεύνηση *(αριθμοί σε αύξουσα και φθίνουσα*

α) Βάλτε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο:

-4, -8, 6, -3, 0, 9 ………….<…………. <………….<………….<………….<…………

β) Βάλτε από το μεγαλύτερο στο μικρότερο τους αριθμούς:-2021, 1999, 0, -50, 100, -8;
………….>………….>………….>………….>…………. >………….,

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

………
………
………

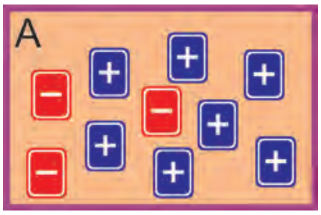
Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

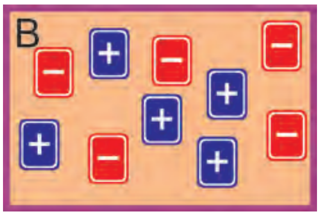
………
………
………

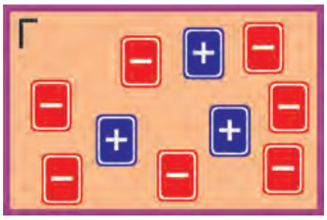
2. Πρόσθεση ακεραίων

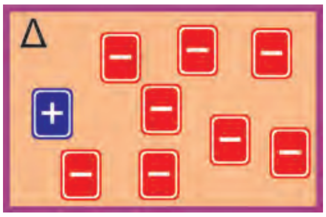
2.1-Διερεύνηση *(θετικοί και αρνητικοί μετρητές)*

Σε μία τάξη οι μαθητές παίζουν ένα παιχνίδι με ερωτήσεις. Ο καθηγητής τους χωρίζει σε τέσσερις ομάδες. Για κάθε σωστή απάντηση ο καθηγητής δίνει μία κάρτα «+» και για κάθε λάθος απάντηση δίνει μία κάρτα «-». Στο τέλος του παιχνιδιού, οι ομάδες έχουν αυτές τις κάρτες:









Η Α ομάδα πήρε 7 θετικές κάρτες και 3 αρνητικές. Για να βρουν τη βαθμολογία τους, η ομάδα Α΄ σκέφτηκε ότι οι 3 θετικές με τις 3 αρνητικές κάρτες που έχουν, δεν αλλάζουν τη βαθμολογία (+3 και -3 είναι αντίθετοι). Έτσι, η τελική τους βαθμολογία είναι +4.

α) Με τον ίδιο τρόπο, ποια είναι η βαθμολογία της κάθε ομάδας; Συμπληρώστε τον πίνακα, και βάλτε σε σειρά τη βαθμολογία τους, από τη μεγαλύτερη στη μικρότερη.

Ομάδες	Α	Β	Γ	Δ
Βαθμολογία	+4	....	....	....

$1^{η}$ είναι η ομάδα :……., $2^{η}$ είναι η ομάδα:……., $3^{η}$ είναι η ομάδα:……., $4^{η}$ είναι η ομάδα:…….,

β) Μπορείτε να γράψετε με πράξεις την τελική βαθμολογία της κάθε ομάδας όπως στην ομάδα Α;

Ομάδα Α: (+7)+(-3)=+4,

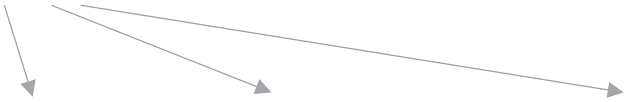
Ομάδα Β: (…….)+(…….)=…….,

Ομάδα Γ: (…….)+(…….)=…….,

Ομάδα Δ: (…….)+(…….)=…….,

Όταν προσθέτουμε δύο ακέραιους αριθμούς τους βάζουμε μέσα σε παρένθεση, π.χ. (+2)+(+3)=+5, που μπορεί να γραφεί και 2+3=5.

γ) Ποιος είναι ο ρόλος (πρόσημο ή πρόσθεση;) του κάθε συμβόλου «+», στην παράσταση (+7)+(+6);



………………. ……………………. …………………….

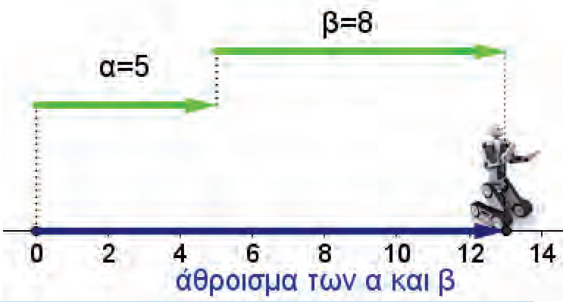
2.2 Διερεύνηση *(άθροισμα ομόσημων αριθμών)*

α) Σε κάθε ομάδα δίνουμε στην αρχή κάποιες κάρτες (1η στήλη του παρακάτω πίνακα). Μετά, δίνουμε σε κάθε ομάδα άλλες κάρτες (2η στήλη). Βλέπουμε στην 3η στήλη τις τελικές κάρτες για κάθε ομάδα. Μπορείτε να συμπληρώσετε την τελευταία στήλη του πίνακα;

Αρχικές κάρτες	Δόθηκαν	Τελικές κάρτες	Αντίστοιχη πράξη
⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞	⊞ ⊞ ⊞	⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞	(+7)+(+3)=.........
⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟	⊟ ⊟ ⊟ ⊟	⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟	....
⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞	⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞	⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞	....
⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟	⊟ ⊟ ⊟	⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟ ⊟	....

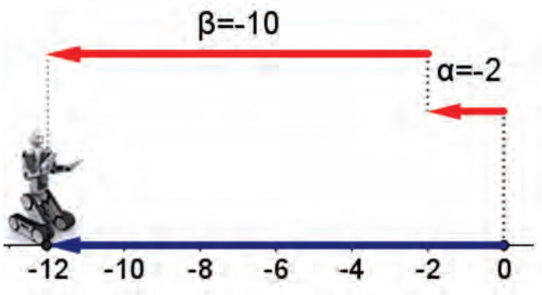
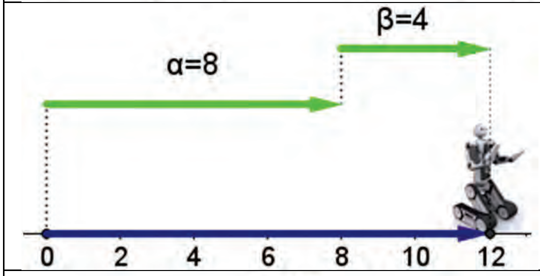
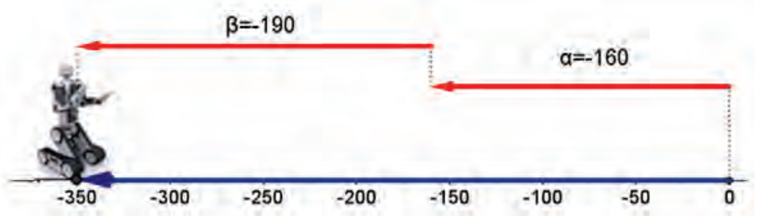
β) Στο μάθημα της τεχνολογίας, μία ομάδα μαθητών έβαλε ένα ρομπότ σε μία αριθμογραμμή. Κοιτά προς τους θετικούς αριθμούς.

Το ρομπότ προχωράει μπροστά και πίσω δίνοντας τιμές σε δύο αριθμούς α και β. Όταν ο αριθμός είναι θετικός, το ρομπότ προχωρά μπροστά. Όταν ο αριθμός είναι αρνητικός, το ρομπότ προχωρά προς τα πίσω.



Βάζουμε το ρομπότ στο 0. Δίνουμε τις τιμές α=5 και β=8. Τότε το ρομπότ πάει στη θέση …………… . Αυτό είναι το ίδιο με την πράξη (+5) + (+8)=………. (ή 5+8=………….).

Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Κίνηση στην αριθμογραμμή	**Αντίστοιχη πράξη και αποτέλεσμα**
	(…………)+(…………)=(…………)
	(…………)+(…………)=(…………)
	(…………)+(…………)=(…………)

γ) Χρησιμοποιήστε τους τρόπους **α (παιχνίδι με τις κάρτες)** και **β (κίνηση στην αριθμογραμμή)** και προσπαθήστε να συμπληρώσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

(-5)+(-4)=……….. , (+4)+(+6)=……….. , (-12)+(-8)=……….., (+10)+(+20)=……….. ,

(-20)+(-40)=………. , (+100)+(+400)=………. , (-700)+(-300)=………. , (+1500)+(+600)=……….

δ) Συμπληρώστε τα κενά (διαλέξτε μία από τις λέξεις που είναι μέσα στις παρενθέσεις)

- Σε μια ομάδα με θετική βαθμολογία προσθέτουμε θετικές κάρτες. Η τελική βαθμολογία θα είναι ………………… (*θετικός ή αρνητικός*) αριθμός.
- Στην αριθμογραμμή αρχίζουμε με έναν θετικό αριθμό. Μετά πηγαίνουμε προς τη θετική κατεύθυνση, δηλαδή δεξιά. Θα φτάσουμε σε …………………… (*θετικό ή αρνητικό*) αριθμό.
- Σε μια ομάδα με αρνητική βαθμολογία προσθέτουμε αρνητικές κάρτες. Η τελική βαθμολογία είναι ………………… (*θετικός ή αρνητικός*) αριθμός.
- Στην αριθμογραμμή αρχίζουμε με αρνητικό αριθμό. Μετά πάμε προς την αρνητική κατεύθυνση, δηλαδή αριστερά. Θα φτάσουμε σε …………………… (*θετικό ή αρνητικό*) αριθμό.

Μπορείτε να βρείτε έναν κανόνα για την πρόσθεση ομόσημων αριθμών;
Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.

Μαθαίν

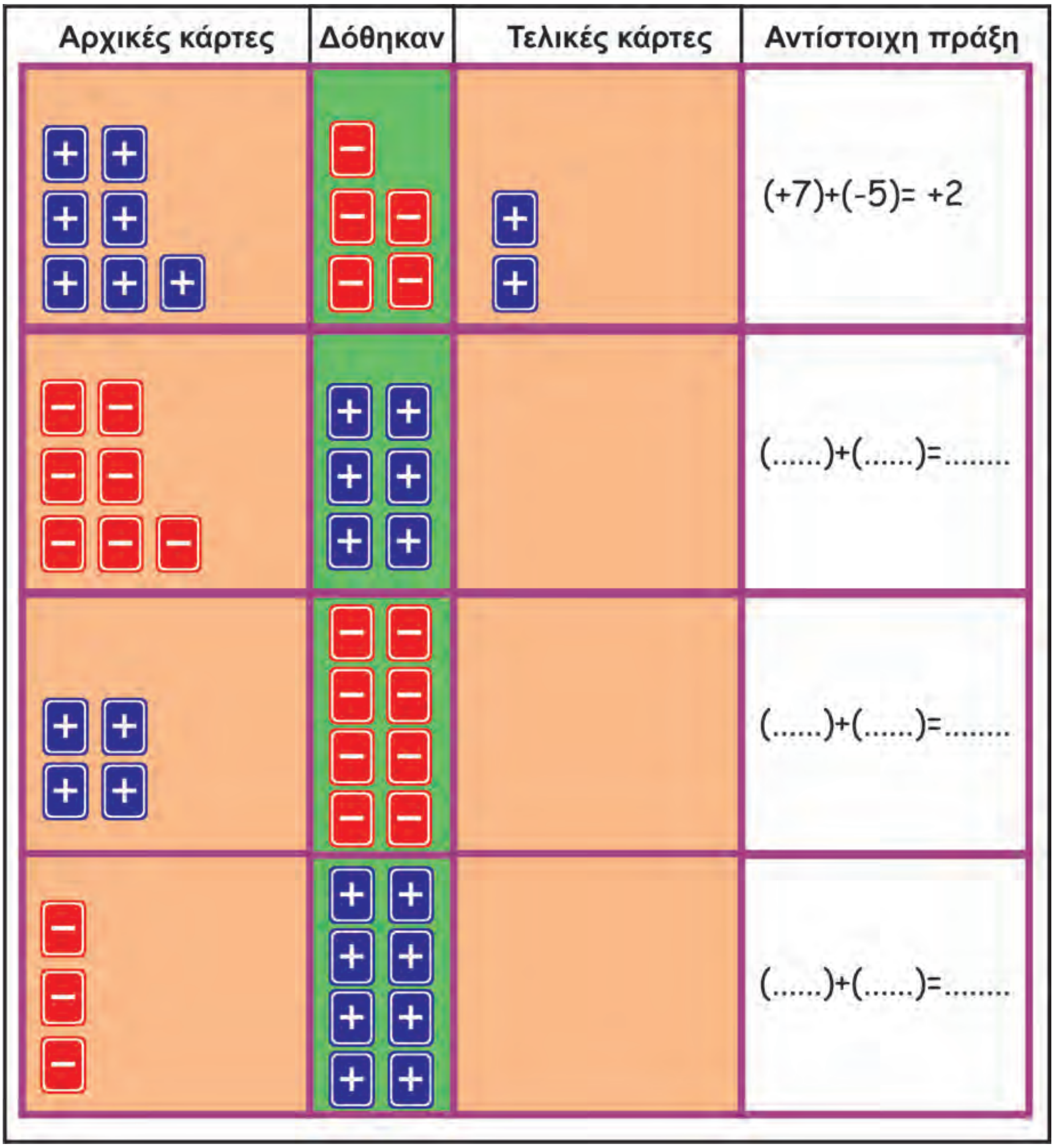
$1^{ος}$ Κανόνας

*Για να προσθέσουμε **ομόσημους αριθμούς**:*
(α): γράφουμε το πρόσημο των δύο αριθμών,
(β): προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές των δύο αριθμών (δηλαδή προσθέτουμε την απόστασή τους από το 0).

Για παράδειγμα: (+8)+(+12)=$+(8+12) = +20$
(-8)+(-12)=$-(8+12) = -20$

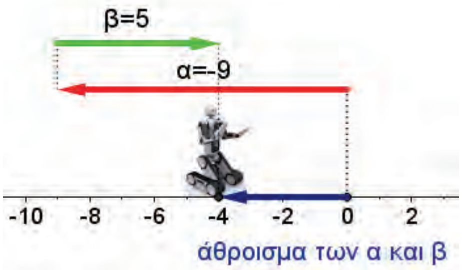
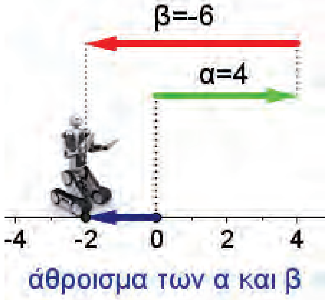
2.3 Διερεύνηση *(άθροισμα ετερόσημων αριθμών)*

α) Σε κάθε ομάδα δίνουμε στην αρχή κάποιες κάρτες ($1^η$ στήλη του παρακάτω πίνακα). Μετά, δίνουμε σε κάθε ομάδα και άλλες κάρτες ($2^η$ στήλη). Στην 3η στήλη είναι οι τελικές κάρτες για κάθε ομάδα. Μπορείτε να συμπληρώσετε τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα όπως στο πρώτο παράδειγμα;



Αρχικές κάρτες	Δόθηκαν	Τελικές κάρτες	Αντίστοιχη πράξη
+ + + + + + +	− − − − −	+ +	(+7)+(-5)= +2
− − − − − − −	+ + + + + +		(......)+(......)=........
+ + + +	− − − − − − − −		(......)+(......)=........
− − −	+ + + + + + + +		(......)+(......)=........

β) Συμπληρώστε τον πίνακα για τις κινήσεις του ρομπότ που κάνει σε κάθε εικόνα, όπως στο πρώτο παράδειγμα:

Κίνηση στην αριθμογραμμή	**Αντίστοιχη πράξη και αποτέλεσμα**
	(-4)+(+8)=+4
	(……….)+(……….)=……….
	(……….)+(……….)=……….
	(……….)+(……….)=……….

γ) Με τους τρόπους (α) και (β), συμπληρώστε τα παρακάτω αθροίσματα:

(-3)+(+5)=………… , (-10)+(+5)=………… , (-10)+(+13)=………… , (+18)+(-10)=………… ,

(-100)+(+60)=………… , (-40)+(+10)=…………, (-200)+(+500)=…………, (-1200)+(+500)=…………

δ) Συζητήστε με την ομάδα σας τις παρακάτω προτάσεις. Πείτε τα συμπεράσματά σας σε όλη την τάξη και δώστε παραδείγματα:

- Σε μια ομάδα με θετική βαθμολογία, προσθέτουμε αρνητικές κάρτες. Συμπληρώστε τα κενά με παραδείγματα, έτσι ώστε:
  - το αποτέλεσμα να είναι 0: (……..) + (……..) = 0
  - το αποτέλεσμα να είναι θετικός αριθμός: (……..) + (……..) = (……..)
  - το αποτέλεσμα να είναι αρνητικός αριθμός: (……..) + (……..) = (……..)

- Σε μια ομάδα με αρνητική βαθμολογία, προσθέτουμε θετικές κάρτες. Συμπληρώστε με παραδείγματα, έτσι ώστε:
  - το αποτέλεσμα να είναι 0, π.χ. (……..) + (……..) = 0
  - το αποτέλεσμα να είναι θετικός αριθμός , π.χ. (……..) + (……..) = (……..)
  - το αποτέλεσμα να είναι αρνητικός αριθμός, π.χ. (……..) + (……..) = (……..)
- Αν δώσουμε στο ρομπότ αρχικά έναν θετικό αριθμό:
  - τι απόσταση (σε σχέση με τον προηγούμενο) πρέπει να κάνει και προς ποια κατεύθυνση, για να φτάσει στο μηδέν; , π.χ. (…….)+(…….)=0
  - τι απόσταση πρέπει να κάνει και προς ποια κατεύθυνση, για να φτάσει σε θετικό αριθμό; π.χ. (…….)+(…….)=0
  - τι απόσταση πρέπει να κάνει και προς ποια κατεύθυνση, για να φτάσει σε αρνητικό αριθμό; π.χ. (…….)+(…….)=0
- Αν δώσουμε στο ρομπότ αρχικά έναν αρνητικό αριθμό
  - τι απόσταση πρέπει να κάνει και προς ποια κατεύθυνση, για να φτάσει στο μηδέν; Π.χ. (…….)+(…….)=0
  - τι απόσταση πρέπει να κάνει και προς ποια κατεύθυνση, για να φτάσει σε θετικό αριθμό; Π.χ. (…….)+(…….)=0
  - τι απόσταση πρέπει να κάνει και προς ποια κατεύθυνση, για να φτάσει σε αρνητικό αριθμό; Π.χ. (…….)+(…….)=0

Μπορείτε να βρείτε έναν κανόνα για την πρόσθεση ετερόσημων αριθμών;
Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.

Μαθαίν

2ος κανόνας
Για να προσθέσουμε ***ετερόσημους αριθμούς***
(α) γράφουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή,
(β) αφαιρούμε, από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, τη μικρότερη.

Για παράδειγμα: (-8) + (+12) = + (12−8) = +4
(+8) + (-12) = − (12−8) = −4

ε) Προσπαθήστε να συμπληρώσετε τα αθροίσματα, χρησιμοποιώντας τον $1^{ο}$ και τον $2^{ο}$κανόνα:

- (+5) + (+3) = +(5+3)=+8, (+7) + (+2)=…………………….. , (+3) + (+8)= ……………………..
  (-5) + (-3)= -(5+3)=-8, (-7) + (-2)= …………………….., (-3) + (-8)= …………………….. ,
- (+5) + (-3)= …………………….. , (+7) + (-2)= …………………….. , (-3) + (+8)= …………………….. ,
  (-5) + (+3)= …………………….. , (-7) + (+2)= …………………….. , (+3) + (-8)= …………………….. ,
- (-9) + (+12)=………………………………. , (-30) + (-20)= ………………………………. ,
  (+7) + (+13)= ………………………………. , (-18) + (+10)= ………………………………. ,
  (-100) + (-60)= ………………………………. , (+40) + (+12)= ………………………………. ,
  (-200) + (+500)= ………………………………. , (-1300) + (+600)= ……………………………….

2.4 Διερεύνηση *(πρόσθεση αντίθετων αριθμών)*

Συμπληρώστε τα κενά:

4+____=0 (-8)+____ =0 126+_____=0 (-1300)+_____=0

Μαθαίνω

Συμβολίζουμε τον αντίθετο ενός αριθμού **α** με **–α**. Το άθροισμά τους είναι πάντα 0. Δηλαδή **α** + (-**α**) = 0.

Προσοχή: Ο αριθμός **–α** δεν είναι αριθμός πάντα αρνητικός, γιατί εδώ το «–» δεν είναι πρόσημο αλλά σύμβολο του αντίθετου αριθμού.

- Αν ο αριθμός **α** είναι θετικός, τότε ο αριθμός **–α** είναι αρνητικός.
- Αν ο αριθμός **α** είναι αρνητικός, τότε ο αριθμός **–α** είναι θετικός.

2.5 Διερεύνηση *(πρόσθεση πολλών προσθετέων)*

Όταν έχουμε άθροισμα με πολλούς αριθμούς:

1. Διαγράφουμε πρώτα τους αντίθετους (αν υπάρχουν) γατί έχουν άθροισμα μηδέν.
2. Χωρίζουμε τους αριθμούς σε θετικούς και αρνητικούς.
3. Προσθέτουμε πρώτα τους ομόσημους και μετά τους ετερόσημους.

Προσθέσαμε τους ετερόσημους

Παράδειγμα:

(+6)+(-4)+(+12)+(-3)+(-5)+(+3)=(+6)+(-4)+(+12)+(~~-3~~)+(-5)+(~~+3~~)=(+6)+(+12)+(-4)+(-5)=(+18)+(-9)=9

Διαγράψαμε τους αντίθετους

Χωρίσαμε σε θετικούς και αρνητικούς

Προσθέσαμε τους ομόσημους

Υπολογίστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, τα αθροίσματα:

α) (+4)+(-2)+(-7)+(+5)+(-3)=

β) 12+(-6)+(-24)+45+(-12)+(-32)=

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3. Αφαίρεση ακεραίων

3.1 Διερεύνηση *(ο αριθμός -α)*

Ο καθηγητής ρώτησε μία τάξη της Α΄ Γυμνασίου: « Ο αντίθετος ενός αριθμού μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό αυτό;». Η 1η Ομάδα απάντησε: «Όχι! Αν **α** είναι ο αριθμός τότε ο αντίθετός του είναι ο **–α**. Είναι αρνητικός, άρα μικρότερος». Έχει δίκιο η 1η ομάδα;
Συζητήστε με την ομάδας σας και πείτε τις απόψεις σας σε όλη την τάξη.

3.2 Διερεύνηση *(“πρόσθεση από το τίποτα”- αφαίρεση με τις κάρτες)*

α) Λέει ο καθηγητής σε μία τάξη της Α΄ Γυμνασίου: «*Στο παιχνίδι με τις κάρτες είναι εύκολο να σκεφτούμε την πράξη (+8)-(+2) αφού από τις 8 θετικές κάρτες αφαιρούμε τις 2. Έτσι το αποτέλεσμα είναι +6. Πως μπορούμε να σκεφτούμε όμως την πράξη (+2)-(-3);*».

Οι μαθητές της 2ης ομάδας είπαν: «*Δεν γίνεται αυτή η πράξη αφού η ομάδα που έχει (+2) δεν έχει αρνητικές κάρτες, άρα πως μπορούμε να αφαιρέσουμε 3 αρνητικές κάρτες;*». Οι μαθητές της 4ης ομάδας έδειξαν με κάρτες και είπαν ότι:

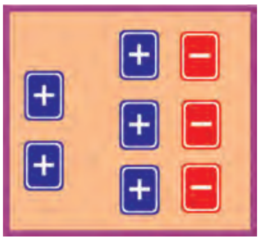
«Οι μαθητές έχουν 2 θετικές κάρτες,

θα προσθέσουμε 3 θετικές και 3 αρνητικές κάρτες. Μπορούμε να το κάνουμε αυτό, γιατί $(+3)+(-3)=0$

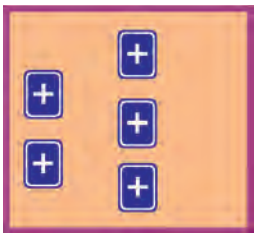
και μετά θα αφαιρέσουμε τις 3 αρνητικές. Έτσι το αποτέλεσμα είναι +5».

(i)

(ii)



(iii)



Δηλαδή, οι μαθητές έκαναν:

$(+2)-(-3)=(+2)+0-(-3)=$

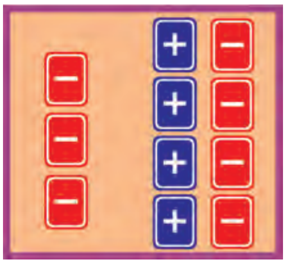
$=(+2)+(+3)+(-3)-(-3)=(+2)+(+3)=5.$

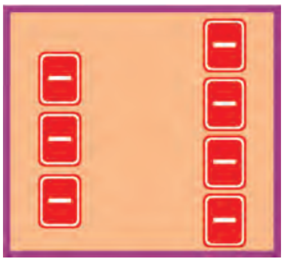
αφαίρεση ίδιων καρτών

Συμφωνείτε με αυτό που σκέφτηκαν οι μαθητές της $4^{ης}$ ομάδας;

β)(1) Για την αφαίρεση (-3)-(+4) οι μαθητές έκαναν:

(i)

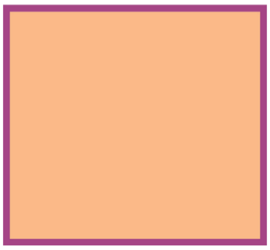

(ii)


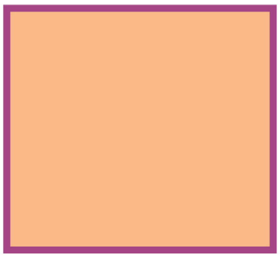
(iii)


Μπορείτε να περιγράψετε τι έκαναν στα βήματα (ii) και (iii);

(2) Συμπληρώστε τα (ii) και (iii) για την αφαίρεση(+2)-(+5);

(i)


(ii)


(iii)


Περιγράψτε τι κάνατε:

γ) Για την πράξη (+2)-(-3)=+5 που έκαναν στο (α) ερώτημα, ο καθηγητής ρώτησε: «*υπάρχει άλλη πράξη που μπορούμε να κάνουμε ώστε η βαθμολογία από +2 να γίνει +5;*».
Η $3^{η}$ ομάδα είπε: «***αντί να αφαιρέσει 3 αρνητικές κάρτες μπορεί να προσθέσει 3 θετικές κάρτες, γιατί το ίδιο έγινε πριν, αν κοιτάξουμε προσεκτικά το (i) και το (iii) κάθε περίπτωσης»***

δ) Αν η ομάδα έχει +2, συμπληρώστε τις προτάσεις σύμφωνα με αυτό που πρότεινε η $3^{η}$ ομάδα:

- ➢ αντί να αφαιρέσει 7 αρνητικές κάρτες, μπορεί να …………………… *(προσθέσει ή αφαιρέσει)* 7 ……………………… *(θετικές ή αρνητικές)* κάρτες
- ➢ αντί να αφαιρέσει 3 θετικές κάρτες, μπορεί να ……………………… *(προσθέσει ή αφαιρέσει)* 3 ……………………… *(θετικές ή αρνητικές)* κάρτες
- ➢ αντί να αφαιρέσει 8 θετικές κάρτες, μπορεί να ……………………… *(προσθέσει ή αφαιρέσει)* 8 ……………………… *(θετικές ή αρνητικές)* κάρτες

ε) Με τη προηγούμενη λογική, η πράξη (+4)-(-3) είναι το ίδιο με το (+4)+(+3)=+7
Συμπληρώστε τα κενά:
(+2) - (-7) = ……………… = ………,   (+2) - (+3) = ……………… = ………,   (+2) - (+8) = ……………… = ………

Μαθαίν

Σύμφωνα με αυτά που είδαμε για την αφαίρεση με τις κάρτες, μπορούμε να πούμε ότι: η αφαίρεση του β από τον α είναι το ίδιο με την πρόσθεση του α με τον αντίθετο του β. Δηλαδή α-β =α+(-β)

στ) Αλλάξτε τις αφαιρέσεις σε προσθέσεις και βρείτε το αποτέλεσμα:

(-4) - (+5) = (-4) + (____) = , (-3) - (-5) = (-3) …. (…….) =

(+12) - (-8) = (+12) …. (…….) = , (-10) - (-18) = (-10) __ (___) =

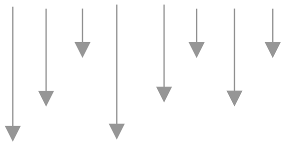
(-19) - (+15) = , (-100) - (+600) =

(-300) - (-200) = , (+5) - (+4) + (-7) - (-2) - (-3) =

3.3 Διερεύνηση *(Το νόημα των συμβόλων)*

α) Μπορείτε να περιγράψετε το ρόλο όλων των συμβόλων «+» και «–» που υπάρχουν στην παράσταση:

-(-2) + (+4) - (-3) - (-9)



***Το σύμβολο «+»** το έχουμε δει:*
- *ως πρόσημο, π.χ. +3 και*
- *ως πρόσθεση, π.χ. (-3)+(+4)*

***Το σύμβολο «-»** το έχουμε δει:*
- *ως πρόσημο, π.χ. –5,*
- *ως αφαίρεση, π.χ. (+6) – (-7),*
- *ως σύμβολο του αντίθετου αριθμού, π.χ. –(+4), –χ*

β) Υπολογίστε την παράσταση:

-(-2)+(+4)-(-3)-(-9)=

3.4 Διερεύνηση *(παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις)*

Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να γράφουμε τις αριθμητικές παραστάσεις πιο απλά.

α) Το (+4)+(+6) μπορεί να γραφεί 4+6.Την πράξη (+4)+(-6) μπορούμε να τη γράψουμε **χωρίς την πρόσθεση και τις παρενθέσεις**, δηλαδή **4-6. Με αυτόν τον τρόπο, το «+» ή «-» ανάμεσα στους αριθμούς δεν δείχνει πράξη Είναι το πρόσημο του επόμενου αριθμού και η πράξη που κάνουμε είναι πάντα πρόσθεση.**

- Γράψτε και σεις τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς τις παρενθέσεις και την πράξη της πρόσθεσης, όπως το παράδειγμα: (-7)+(+6) = -7+6 , (-8)+(-4) = …………….,
  (+4)+(-9)+(-2) = ………………, (-5)+(+12)+(-2) +(-3) = ……………………….,

- Γράψτε τις παρακάτω παραστάσεις ως πρόσθεση μεταξύ αριθμών με παρενθέσεις, όπως το παράδειγμα: -4+2 = (-4)+(+2) , -4-5= ………………., -2+7-5+11= …………………………….

β) Όταν η πράξη είναι αφαίρεση, τότε: (-5)-(+6) = (-5)+(-6) = -5-6, (-5)-(-6) = (-5)+(+6) = -5+6.
Μπορούμε να γράψουμε τις προηγούμενες παραστάσεις πιο απλά, όπως:
(-5)-(+6) = -5-6, (-5)-(-6) = -5+6.

Επίσης, έχουμε μάθει ότι -(-5) = 5, -(+7) = -7. Παρατηρούμε δηλαδή, ότι **όταν αριστερά από μία παρένθεση υπάρχει «-», τότε γράφουμε τον αντίθετο του αριθμού που ακολουθεί.**

i) Γράψτε τις παρακάτω παραστάσεις με παρενθέσεις, όπως τα παραδείγματα: -3+5=(-3)+(+5),

6-9=(+6)+(-9) , 11-5= …………………… , -4-12 = …………………………, 8+7 = …………………………,

ii) Γράψτε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς τις παρενθέσεις, όπως τα παραδείγματα:

(-9)-(+5) = -9-5 , -(-2)-(-8) = 2+8 , (+3)-(-7) = ……………………… ,

-(+5)-(-9) = ……………………, (+10)-(-3)-(-1) = ………………., -(+2)-(-7)+(-5) -(-9) = …………….,

Μαθαίν

*Για να κάνουμε πιο απλές τις αριθμητικές παραστάσεις, μπορούμε να **βγάζουμε τις παρενθέσεις** ως εξής:*

***α)** Όταν **αριστερά από την παρένθεση υπάρχει «+»,** γράφουμε τον αριθμό (μαζί με το πρόσημό του), π.χ. (-4)+(+6)=-4+6*

***β)** Όταν **αριστερά από την παρένθεση υπάρχει «-»**, γράφουμε τον αντίθετο αριθμό, π.χ.(-5)-(-8)=-5+8.*

*<u>Προσοχή</u>**:** Όταν οι παραστάσεις είναι χωρίς παρενθέσεις, **τα σύμβολα «+» και «-» δείχνουν το πρόσημο του επόμενου αριθμού** και η πράξη είναι η **πρόσθεση**, π.χ. -5+8-2=(-5)+(+8)+(-2)*

γ) Σύμφωνα με τους παραπάνω κανόνες, βγάλτε τις παρενθέσεις και υπολογίστε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) -(+8)-(+4)+(-7)-(-5)-(-10)=

β) (+7)-(+5)-(-6)+(-2)-(-11)=

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

……

……

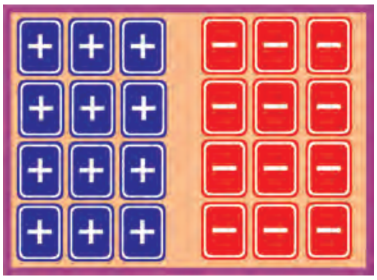
……

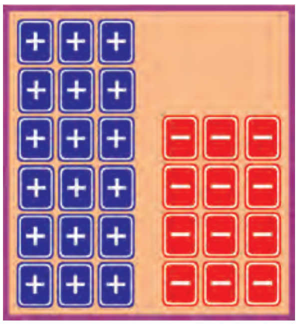
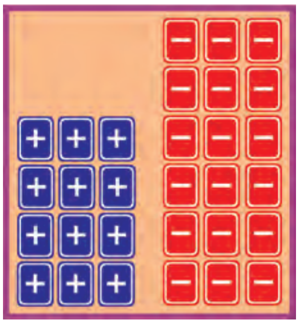
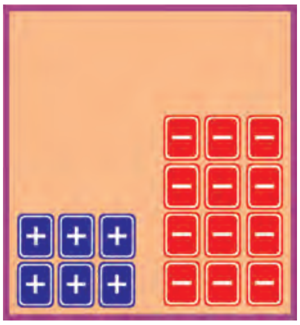
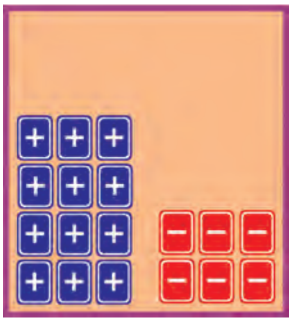
4. Πολλαπλασιασμός ακεραίων

4.1 Διερεύνηση *(πολλαπλασιασμός με κάρτες)*

α) Στο παιχνίδι με τις κάρτες, η ομάδα του Χασάν έχει τις παρακάτω κάρτες. Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά;

Η βαθμολογία της ομάδας είναι : ………



Αν προσθέσουμε 2 γραμμές των 3 θετικών καρτών τότε η βαθμολογία θα γίνει: ___	Αν προσθέσουμε (όταν η βαθμολογία είναι 0) 2 γραμμές των 3 αρνητικών καρτών τότε η βαθμολογία θα γίνει: ___	Αν αφαιρέσουμε (όταν η βαθμολογία είναι 0) 2 γραμμές των 3 θετικών καρτών τότε η βαθμολογία θα γίνει: ____	Αν αφαιρέσουμε (όταν η βαθμολογία είναι 0) 2 γραμμές των 3 αρνητικών καρτών τότε η βαθμολογία θα γίνει: ____
			
Δηλαδή 0 + 2 · (+3)= _____	Δηλαδή 0 + 2 · (-3)= _____	Δηλαδή 0 - 2 · (___) = ____	Δηλαδή 0 - 2 · (____) = ____

β) Η ομάδα της Λάιλα στο παιχνίδι έχει βαθμολογία 0. Τι περιγράφουν οι παρακάτω πράξεις; Συμπληρώστε τα κενά όπως στο πρώτο παράδειγμα:

- Η παράσταση 0 + 3·(+5) δηλώνει ότι ***προσθέτουμε*** 3 γραμμές των 5 ***θετικών*** καρτών.
  Η βαθμολογία της ομάδας είναι: ………
- Η παράσταση 0 + 3·(-5) δηλώνει ότι ………………… (*προσθέτουμε ή αφαιρούμε*) 3 γραμμές των 5 ………………… (*θετικών ή αρνητικών*) καρτών.
  Η βαθμολογία της ομάδας είναι: ………
- Η παράσταση 0 - 3·(+5) δηλώνει ότι ………………… (*προσθέτουμε ή αφαιρούμε*) 3 γραμμές των 5 ………………… (*θετικών ή αρνητικών*) καρτών.
  Η βαθμολογία της ομάδας είναι: ………
- Η παράσταση 0 - 3·(-5) δηλώνει ότι ………………… (*προσθέτουμε ή αφαιρούμε*) 3 γραμμές των 5 ………………… (*θετικών ή αρνητικών*) καρτών.
  Η βαθμολογία της ομάδας είναι: ………

γ) Μπορείτε να σκεφτείτε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα και να συμπληρώσετε τα κενά για τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς;

-4·(+5) = _____ ,   5·(-7) = _____ ,   -2·(-6) = _____ ,   7·(+4) = _____

4.2 Διερεύνηση *(ο κανόνας του πολλαπλασιασμού)*

α) Μπορείτε να συμπληρώσετε τον πίνακα για το γινόμενο δύο αριθμών;

Γινόμενο	Θετικός (+)	Αρνητικός (-)
Θετικός (+)	(+2)·(+3)= _____ (+3)·(+5)= _____	(+2)·(-3)= _____ (+3)·(-5)= _____
Αρνητικός(-)	(-2)·(+3)= _____ (-3)·(+5)= _____	(-2)·(-3)= _____ (-3)·(-5)= _____

β) Παρατηρώντας τον προηγούμενο πίνακα, συμπληρώστε τα κενά με (+) αν το αποτέλεσμα είναι θετικός ή με (-) αν είναι αρνητικός:

(+) · (+) = _____ ,   (+) · (-) = ______ ,   (-) · (+) = ______,   (-) · (-) = ______

Συμπληρώσετε τα κενά με τις λέξεις «θετικός» ή «αρνητικός»: το γινόμενο ομόσημων αριθμών είναι ……………… αριθμός, ενώ το γινόμενο ετερόσημων αριθμών είναι ………………αριθμός.

Συζητήστε με την ομάδα σας, για να βρείτε έναν κανόνα για τον πολλαπλασιασμό ακέραιων αριθμών.

Μαθαίν

Κανόνας

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ακέραιους αριθμούς:

- *βάζουμε μπροστά το πρόσημο «+» αν είναι ομόσημοι ή το πρόσημο «-» αν είναι ετερόσημοι*
- *πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.*

(+) · (+) = (+)
(+) · (-) = (-)
(-) · (+) = (-)
(-) · (-) = (+)

γ) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα για το γινόμενο ακέραιων αριθμών υπολογίστε τα γινόμενα:

(-7)·(+3)=……… ,   (+4)·(+8)= ……… ,   (-11)·(-3)= ………,   (-8)·(+6)= ……… ,
(+10)·(-5)= ……… ,   7·(-6)= ……… ,   (-11)·10=……… ,   12·(-30)= ……… ,
(-3)·(-12)= ………,   (-6)·(+20)= ……… ,   (+100)·(-2)= ……… ,   3·(-200)= ………

δ) Συμπληρώστε τα κενά του πίνακα όπως στο παράδειγμα. Στη συνέχεια συμπληρώστε τα παρακάτω κενά.

Πολ/μος	-7	-5	1	2	6
-4	+28				
-3					
0					
5					
8					

- Αν α είναι οποιοσδήποτε ακέραιος, ποιο είναι το γινόμενο α·1; α·1= ……..
- Αν α είναι οποιοσδήποτε ακέραιος, ποιο είναι το γινόμενο α·0; α·0= ……..

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

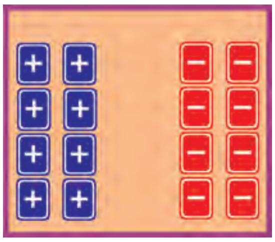
………

………

………

5. Διαίρεση ακεραίων

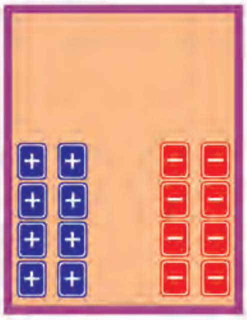
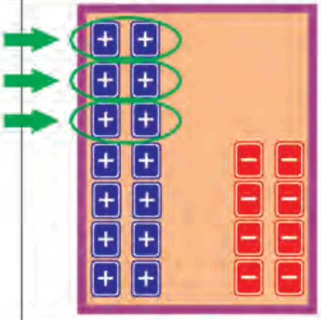
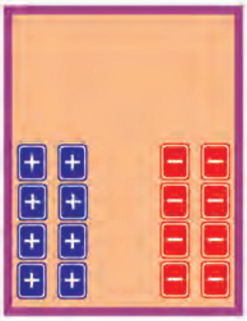
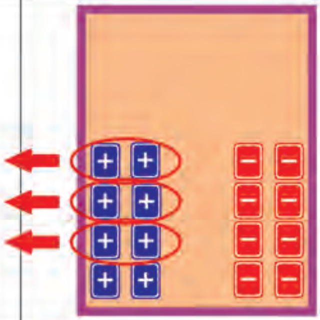
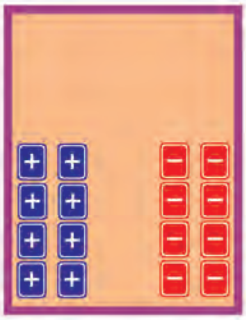
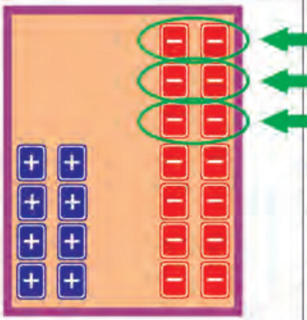
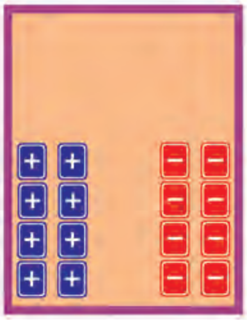
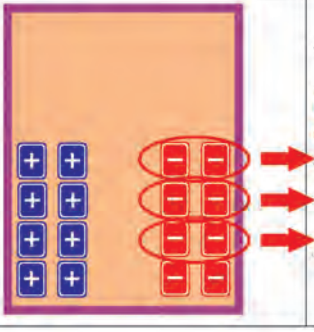
5.1-Διερεύνηση (διαίρεση με κάρτες)



Στο παιχνίδι με τις κάρτες, η ομάδα του Δημήτρη έχει τις παρακάτω κάρτες. Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά;

Η βαθμολογία της ομάδας είναι : ………

Για κάθε γραμμή, διαβάστε το πρόβλημα στη δεύτερη στήλη, παρατηρήστε το σχήμα στην τρίτη στήλη και συμπληρώστε τα κενά στην τέταρτη στήλη.

Αρχικές κάρτες	Πρόβλημα	Γραφική λύση	Αριθμητική λύση
	Για να γίνει η βαθμολογία της ομάδας(+6), τι θα πρέπει να κάνουμε;		- Θα πρέπει να προσθέσουμε. - Πόσες ομάδες των 2 θετικών καρτών; **3** Δηλαδή (+6) : (+2) = **+3**
	Για να γίνει η βαθμολογία της ομάδας (-6), τι θα πρέπει να κάνουμε;		- Θα πρέπει να …………………………… (προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε). - Πόσες ομάδες των 2 θετικών καρτών; …… Δηλαδή (-6) : (+2) = ____
	Για να γίνει η βαθμολογία της ομάδας (-6), τι άλλο μπορούμε να κάνουμε;		- Θα πρέπει να …………………………… (προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε). - Πόσες ομάδες των 2 αρνητικών καρτών; …… Δηλαδή (-6) : (-2) = ____
	Για να γίνει η βαθμολογία της ομάδας (+6), τι άλλο μπορούμε να κάνουμε;		- Θα πρέπει να …………………………… (προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε). - Πόσες ομάδες των 2 αρνητικών καρτών; …… Δηλαδή (+6) : (-2) = ____

5.2 Διερεύνηση *(η διαίρεση ως αντίστροφη πράξη)*

α) Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά όπως στο παράδειγμα;

(+2)·(+5)=+10 άρα (+10):(+2)=+5 και (+10):(+5)=+2

(-2)·(-5)=_____ άρα (_____):(-2)=______ και (_____):(-5)=______

(+2)·(-5)=_____ άρα (_____):(+2)=______ και (_____):(-5)=______

(-2)·(+5)=_____ άρα (_____):(-2)=______ και (_____):(+5)=______

Παρατηρούμε ότι το πηλίκο δύο ομόσημων αριθμών είναι _________________ αριθμός

Παρατηρούμε ότι το πηλίκο δύο ετερόσημων αριθμών είναι _________________ αριθμός

Συζητήστε με την ομάδα σας, για να βρείτε έναν κανόνα για τη διαίρεση ακέραιων αριθμών.

Μαθαίν

Κανόνας

Για να διαιρέσουμε δύο ακέραιους αριθμούς:

- *βάζουμε μπροστά το πρόσημο «+» αν είναι ομόσημοι ή το πρόσημο «-» αν είναι ετερόσημοι*
- *και διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους.*

(+) : (+) =(+)
(+) : (-) = (-)
(-) : (+) = (-)
(-) : (-) = (+)

β) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα, υπολογίστε τα πηλίκα:

(-21):(+3)=……… (+21):(-7)= ……… (-36):(-9)= ……… (-70):(+10)= ………

(+100):(-10)= ……… 180:(-6)= ……… (-110):10=……… 120:(-30)= ………

γ) Μπορείτε να συμπληρώσετε τα πηλίκα των διαιρέσεων στο διπλανό πίνακα;

Διαίρεση		**Διαιρέτης**				
		-3	-2	1	2	3
Διαιρετέος	-18					
	-12					
	-6					
	24					
	30					

Στη διαίρεση α:β, το α ονομάζεται διαιρετέος, το β διαιρέτης και το αποτέλεσμα της διαίρεσης, πηλίκο. Για παράδειγμα στη διαίρεση 15:3=5, το 15 ο διαιρετέος, το 3 ο διαιρέτης και το 5 είναι το πηλίκο.

5.3 Διερεύνηση *(προτεραιότητα πράξεων)*

Υπολογίστε τις παραστάσεις:

α)$-5+2\cdot(-3)=$

β) $-3\cdot(-2)+4\cdot(+6)=$

γ) $-4\cdot(+5)-2\cdot(-7)+(-14):(-7)=$

δ) $-15:(-3)+(-10):(-5)-(-20):(+5)=$

ε) $(-4)^2=$, $-4^2=$

ζ)$(-5)^2-2^2\cdot(-7)+(-16):(-2)^2=$

Η προτεραιότητα των πράξεων

Για να υπολογίσουμε μία αριθμητική παράσταση:

1. *υπολογίζουμε τις δυνάμεις,*
2. *μετά τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις και τέλος*
3. *τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.*

Αν υπάρχουν παρενθέσεις τότε κάνουμε τις πράξεις πρώτα μέσα σ’ αυτές, με την ίδια προτεραιότητα.

Προσοχή: $(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9$, *ενώ* $-3^2=-3\cdot3=-9$

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

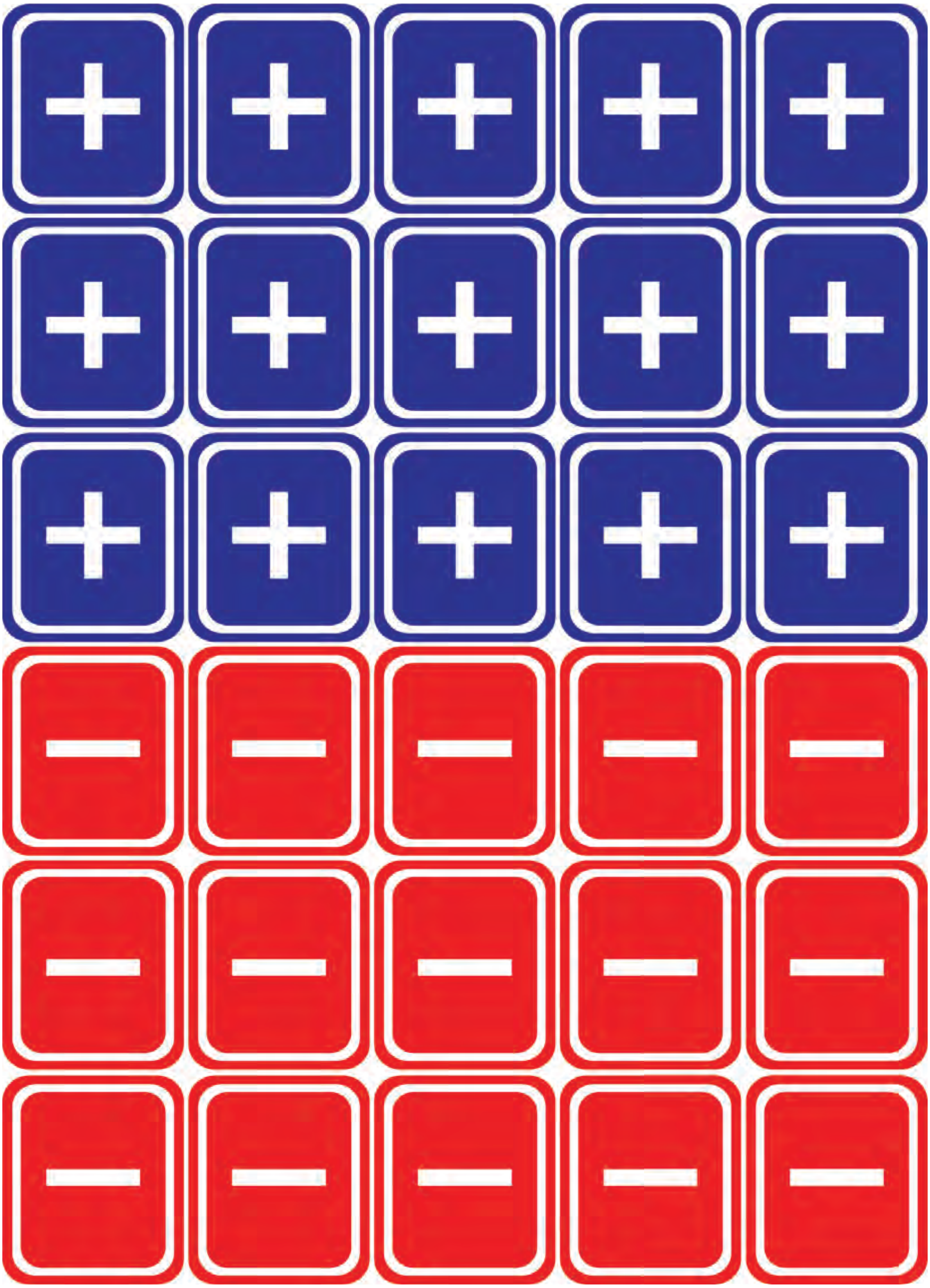
Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

ΘΕΤΙΚΕΣ - ΑΡΝΗΤΙΚΕΣ ΚΑΡΤΕΣ



Ενότητα Α4

Ρητοί αριθμοί

1. Η έννοια του ρητού αριθμού – Σύγκριση και διάταξη ρητών αριθμών

1.1 Διερεύνηση *(η έννοια του ρητού αριθμού- πυκνότητα των ρητών)*

α) Στην πρώτη γραμμή υπάρχουν 4 πολλαπλασιασμοί. Σε κάθε έναν λείπει ο ένας παράγοντας (αριθμός). Αυτός που λείπει είναι ένας αριθμός από τη 2η γραμμή. Βρείτε τον αριθμό και ενώστε τις τελείες (αντιστοίχιση).

$-3\cdot\quad = 7$	$3\cdot\quad = 7$	$10\cdot\quad = -12$	$-4\cdot\quad = -9$
●	●	●	●
●	●	●	●
$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{-3}$	$\frac{-9}{-4}$	$\frac{-12}{10}$

Οι αριθμοί όπως $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{-3}$, $\frac{-9}{-4}$, $\frac{-12}{10}$, λέγονται **ρητοί αριθμοί**.

Ο $\frac{11}{-2}$ είναι ένας αριθμός που όταν τον πολλαπλασιάζουμε με τον (-2) δίνει ως αποτέλεσμα τον 11. Για να τον υπολογίσουμε, κάνουμε 11÷(-2), και έτσι έχουμε $\frac{11}{-2}$ = -5,5. Αυτός ο αριθμός είναι **δεκαδικός**.

Ο $\frac{7}{3}$ είναι ο αριθμός που όταν τον πολλαπλασιάζουμε με τον 3 δίνει ως αποτέλεσμα τον 7. Για να τον υπολογίσουμε, κάνουμε 7÷3. Έτσι έχουμε $\frac{7}{3}$= 2,33333... Αυτή η διαίρεση δεν τελειώνει, το 3 επαναλαμβάνεται συνέχεια μετά την υποδιαστολή. Λέμε ότι ο αριθμός $\frac{7}{3}$ είναι **δεκαδικός περιοδικός** με περίοδο το 3, και το γράφουμε $\frac{7}{3}$= $2,\overline{3}$.

Μαθαίνω

Ο ρητός αριθμός είναι κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιους αριθμούς.

Παραδείγματα:

- Οι αριθμοί 1032 και -14 είναι ρητοί γιατί γράφονται ως $\frac{1032}{1}$ και $\frac{-14}{1}$.
- Οι αριθμοί -3,278 και 0,02 είναι ρητοί γιατί γράφονται ως $\frac{-3278}{1000}$ και $\frac{2}{100}$.
- Οι αριθμοί $5,\overline{857142}$ (=$5,\underbrace{857142}\underbrace{857142}$ ...) και $-0,\overline{27}$ (=$-0,\underbrace{27}\underbrace{27}$...) είναι ρητοί γιατί γράφονται ως $\frac{41}{7}$ και $\frac{-3}{11}$.

Μαθαίνω

Κάθε κλασματικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός.
Κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να γραφεί ως κλάσμα.
Αυτοί οι αριθμοί (δεκαδικοί και περιοδικοί δεκαδικοί ή κλάσματα) ονομάζονται **ρητοί αριθμοί**.

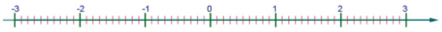
β)

Οι αριθμοί που γνωρίζουμε μέχρι τώρα είναι:
Φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3 , 4, 5, ….
Ακέραιοι αριθμοί: …, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 , 4, 5, ….
Ρητοί αριθμοί: π.χ. 1,2 , -5,34 , -2 , 1032, -134 , $-4,\overline{345}$, $0,\overline{90}$, $-0,\overline{27}$, $2,\overline{3}$, ….

Βρείτε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) ή λάθος (Λ):

- Κάθε φυσικός αριθμός είναι ακέραιος Σ Λ
- Κάθε ακέραιος αριθμός είναι φυσικός Σ Λ
- Κάθε ρητός αριθμός είναι ακέραιος Σ Λ
- Κάθε ακέραιος αριθμός είναι ρητός Σ Λ
- Κάθε φυσικός αριθμός είναι ρητός Σ Λ
- Κάθε ρητός αριθμός είναι φυσικός Σ Λ

γ) - Τοποθετήστε πάνω στην αριθμογραμμή τους αριθμούς: 2, $\frac{3}{2}$, -2,3 , 0,8 , $-\frac{17}{10}$, -2,7, $\frac{8}{5}$,



- Βάλτε σε σειρά τους προηγούμενους αριθμούς, από το μικρότερο στο μεγαλύτερο:
……. < ……. < ……. < ……. < ……. < ……. < …….

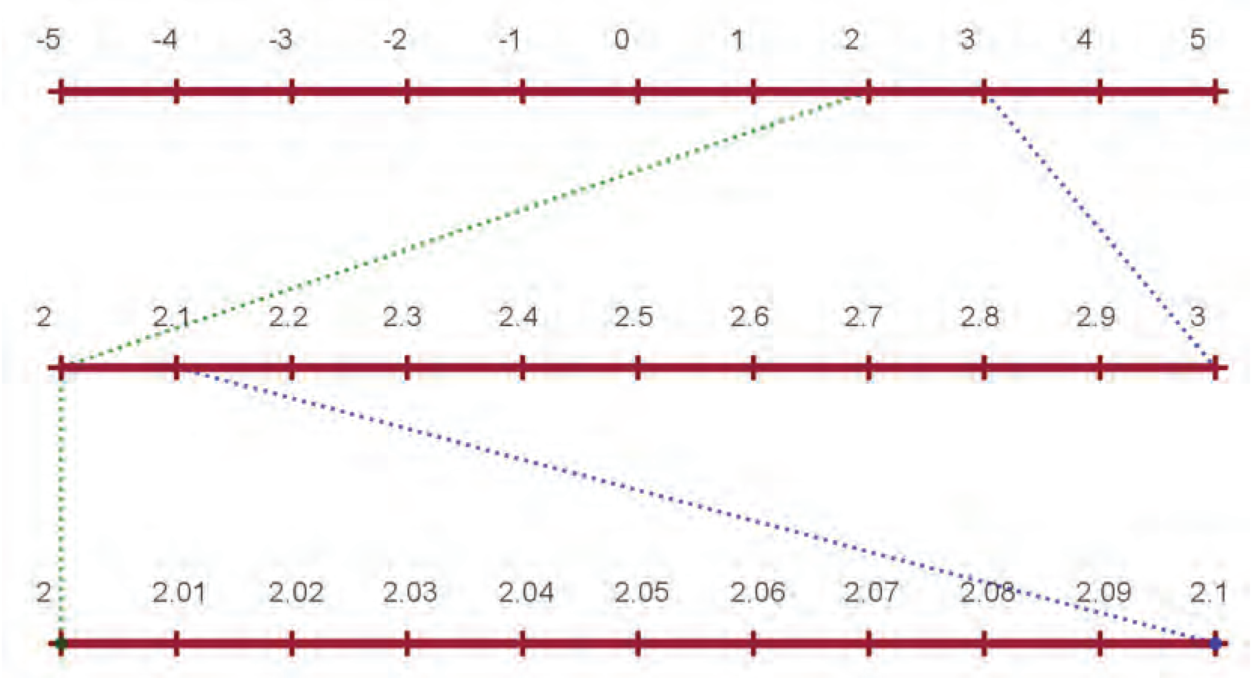
Θυμάμαι

Όταν συγκρίνουμε δύο αριθμούς, μεγαλύτερος είναι ο αριθμός που βρίσκεται πιο δεξιά στην αριθμογραμμή.

δ) Ο δάσκαλος έδειξε στους μαθητές του την παρακάτω αριθμογραμμή και είπε:

-«Ας σκεφτούμε τους ακέραιους αριθμούς. Ποιος είναι ο αμέσως μεγαλύτερος ακέραιος από τον 2;».
- «Ο 3» απάντησαν οι μαθητές.

- «Ας σκεφτούμε τώρα τους ρητούς αριθμούς», είπε ο δάσκαλος. «Ποιος μπορεί είναι ο αμέσως μεγαλύτερος ρητός αριθμός από τον 2; Για να σας βοηθήσω, θα κάνω μεγέθυνση στην αριθμογραμμή, σαν να κοιτάω με το μικροσκόπιο».



Οι περισσότεροι μαθητές είπαν ότι ο επόμενος του 2 είναι ο 2,01 , γιατί είναι πιο κοντά στο 2. Συμφωνείτε;

Η Μαρία είπε:
- «Αυτό δεν είναι σωστό, γιατί ο 2,001 είναι ακόμα πιο κοντά στο 2 και αυτός θα είναι ο επόμενος του 2». Συμφωνείτε;

- Ο Μουσταφά είπε: «Ούτε αυτό είναι σωστό γιατί ο 2,0001 είναι ακόμα πιο κοντά στο 2. Μπορούμε πάντα να βρίσκουμε έναν αριθμό που είναι πιο κοντά στο 2 από έναν άλλον».

Συμφωνείτε με την άποψη του Μουσταφά; Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.

ε) - Ο δάσκαλος ζήτησε να βρουν ρητούς ανάμεσα στο 2,3 και στο 2,4 . Ο Αλί σκέφτηκε: «Αφού μπορώ να γράψω τον 2,3 ως 2,30 ή 2,300 και τον 2,4 ως 2,40 ή 2,400, είναι εύκολο να βρω όσους θέλω ρητούς» . Εσείς ποιους ρητούς θα βάζατε ανάμεσα στον 2,3 και τον 2,4; (γράψτε 12 ή περισσότερους αριθμούς)

- Πόσοι ρητοί υπάρχουν ανάμεσα σε δύο άλλους; *Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.*

Παρατήρηση

Ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχουν άπειροι ρητοί. Αν αρχίσουμε να τους μετράμε δε θα τελειώσει ποτέ αυτό το μέτρημα.

1.2 Διερεύνηση *(αντίθετοι ρητοί αριθμοί - απόλυτη τιμή ρητών)*

α) Δύο αριθμοί είναι **αντίθετοι,** όταν στην αριθμογραμμή:

- ο ένας είναι δεξιά από το 0
- ο άλλος είναι αριστερά από το 0
- έχουν την ίδια απόσταση από το 0.

Τον αντίθετο του x, τον γράφουμε $-$x.

Θυμάμαι

Το σύμβολο «+» *το έχουμε δει:*

- *ως πρόσημο, π.χ. +3 και*
- *ως πρόσθεση, π.χ. (-3)+(-4)*

Το σύμβολο «-» *το έχουμε δει:*

- *ως πρόσημο, π.χ. -5,*
- *ως αφαίρεση, π.χ. (+6)-(+7),*
- *ως σύμβολο του αντίθετου αριθμού, π.χ. $-(+4)$, $-\chi$*

- Γράψτε τους αντίθετους των αριθμών:

Ο αντίθετος του -3 είναι ο ……

Ο αντίθετος του 3 είναι ο ……

Ο αντίθετος του 1,75 είναι ο ……

Ο αντίθετος του -40,2 είναι ο ……

Ο αντίθετος του 0,76 είναι ο ……

Ο αντίθετος του $-0,\overline{27}$ είναι ο ……

Ο αντίθετος του $\frac{32}{21}$ είναι ο ……

- Ο αντίθετος του αντίθετου ενός αριθμού x είναι ο ……….

β) Η απόσταση ενός ρητού αριθμού x από το 0 λέγεται **απόλυτη τιμή** του x. Τη συμβολίζουμε $|x|$.

Για παράδειγμα, $|-2,1|$= 2,1 , $|7,3|$= 7,3 , $|0|$= 0.

Συμπληρώστε τις απόλυτες τιμές: $|-3,4|$= ……. , $|2,87|$= ……. , $|-54,43|$= ……. , $|9,7|$= …….

$\left|-\frac{1}{4}\right|$= …… $\left|\frac{78}{4}\right| =$ …..

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

2. Πράξεις ρητών αριθμών

2.1 Διερεύνηση *(πρόσθεση και αφαίρεση ρητών αριθμών)*

Η πρόσθεση και η αφαίρεση των ρητών αριθμών, γίνονται με τους κανόνες που μάθαμε στους ακεραίους.

Θυμάμαι

$1^{ος}$ Κανόνας: *Για να προσθέσουμε **ομόσημους αριθμούς**:*
(α) γράφουμε το πρόσημο των δύο αριθμών,
(β) προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές των δύο αριθμών.

α) Κάντε τις πράξεις όπως στο πρώτο παράδειγμα σε κάθε γραμμή:

3+2= +(3+2) = 5   6+10=   1,2+3,4= $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=$

-5-3=-(5+3) = -8   -10-8=   -4,2-5,3= $-\frac{7}{3}-\frac{5}{3}=$

Θυμάμαι

-5-3=(-5)+(-3)
7-2-6=(+7)+(-2)+(-6)

Θυμάμαι

2ος κανόνας: *για να προσθέσουμε **ετερόσημους αριθμούς**:*
(α) γράφουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή
(β) αφαιρούμε, από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, τη μικρότερη.

β) Κάντε τις πράξεις όπως στο πρώτο παράδειγμα σε κάθε γραμμή:

-6+8= +(8-6) = 2   12-8=   -2,5+4,7= $-\frac{7}{3}+\frac{5}{3}=$

-10+4=-(10-4) = -6   12-15=   -15,2+10,1= $\frac{13}{5}-\frac{7}{5}=$

γ) Κάντε τις πράξεις:

-1,7+2,3=   -3,4-4,7= $\frac{1}{2}-\frac{4}{3}=$

130,2+240,4=   -250,7-502,4 = $-\frac{1}{4}-\frac{5}{8}=$

-2,4 + 1,8 - 4,5 - 4,2 + 7,1=

Θυμάμαι

Η αφαίρεση α-β είναι το ίδιο με την πρόσθεση του α με τον αντίθετο του β.
Δηλαδή α-β =α+(-β).

δ) Να γίνουν οι πράξεις όπως στο πρώτο παράδειγμα:

-4-(+5)= -4+(-5)=-4-5=-(4+5)=-9

-4,3-(-3,5)=

-(-4,8)-5+(-5,2)-(+1,7)=

$\frac{1}{2}-3-(\frac{4}{3}-\frac{5}{6})=$

2.2 Διερεύνηση *(πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών αριθμών)*

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση των ρητών αριθμών, γίνονται όπως ακριβώς μάθαμε στους ακεραίους.

Θυμάμαι

Κανόνας: *Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ρητούς αριθμούς:*

- *βάζουμε μπροστά το πρόσημο «+» αν είναι ομόσημοι ή το πρόσημο «-» αν είναι ετερόσημοι*
- *πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.*

(+) · (+) = (+)
(+) · (-) = (-)
(-) · (+) = (-)
(-) · (-) = (+)

α) Κάντε τις πράξεις:

(-2) · (+3) = (-4) · (-2) = 5 · (-10) = -2,2 · 3,1 =

(-4,4) · (-1,1) = -3 · (+10,1) = $\frac{1}{2}\cdot(-\frac{2}{5})=$ $(-\frac{4}{5})\cdot(-\frac{15}{8})=$

Θυμάμαι

Κανόνας: *Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς:*

- *βάζουμε μπροστά το πρόσημο «+» αν είναι ομόσημοι ή το πρόσημο «-» αν είναι ετερόσημοι*
- *και διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους.*

(+) : (+) =(+)
(+) : (-) = (-)
(-) : (+) = (-)
(-) : (-) = (+)

β) Κάντε τις πράξεις:

(-10) : (+2) = (-30) : (-5) = 50 : (-10) = -2,2 : (-0,1) =

(-5,5) : (+1,1) = -101 : (-10,1) = $(-\frac{3}{4}):\frac{3}{7}=$ $(-\frac{6}{7}):(-\frac{18}{21})=$

2.3 Διερεύνηση *(προτεραιότητα πράξεων)*

Θυμάμαι

Η προτεραιότητα των πράξεων

Για να υπολογίσουμε μία αριθμητική παράσταση:

1. *υπολογίζουμε τις δυνάμεις,*
2. *μετά τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις και τέλος*
3. *τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.*

Αν υπάρχουν παρενθέσεις τότε κάνουμε τις πράξεις πρώτα μέσα σ’ αυτές, με την ίδια προτεραιότητα.

α) Κάντε τις πράξεις, όπως στο πρώτο παράδειγμα:

$2 \cdot (-3) + (-9) \cdot (-4) = -6 + 36 = 30$

$4 \cdot (-2) + 12 : (-3) =$

$-4 + 7 \cdot (-2{,}1) =$

$\frac{3}{2} \cdot (-\frac{2}{3}) - \frac{4}{5} : (-\frac{2}{15}) =$

$-2^2 - 4{,}2 \cdot (-3) + (-2)^2 =$

$(2+1)^3 - (-2+\frac{3}{4}) : (-1{,}1) =$

***Προσοχή:**(-3)^2=(-3)·(-3)=9, ενώ -3^2=-3·3=-9. Το 1^ο είναι το τετράγωνο του -3 και το 2^ο είναι ο αντίθετος του τετραγώνου του 3.*

β) — **Αλί:** *Τι διαφορά έχει το* $\frac{6}{-2}$ *με το* $\frac{-6}{2}$*;*

—**Μαρία:** *Καμία. Είναι το ίδιο με το* $-\frac{6}{2}$*! Γιατί τα πρόσημα αποφασίζουν μόνο για το πρόσημο στο αποτέλεσμα. Δηλαδή,*

6: (-2) = -3 και (-6) : 2 = -3 και -(6 : 2) = -3

Άρα, $\frac{6}{-2} = \frac{-6}{2} = -\frac{6}{2} = -3$

— **Αλί:** *και τότε τι θα κάνει το* $-\frac{-6}{2}$;

— **Μαρία:** *Θα τα σκεφτούμε ένα-ένα, με τη σειρά. Δηλαδή:* $\frac{-6}{2} = -3$ *άρα,*

$$-\frac{-6}{2} = -(-3) = 3$$

Η Μαρία για να βοηθήσει τον Αλί, τον έβαλε να κάνει τις πράξεις και σε άλλα παραδείγματα. Μπορείτε να τα βρείτε κι εσείς;

1. $\frac{2}{-3} - \frac{1}{2} =$

2. $\frac{12}{-4} + \frac{-3}{-2} = =$

3. $-\frac{-12}{-4} - \frac{3}{-2} = =$

4. $\frac{5}{-3} - \frac{-5}{-2} + \frac{-9}{2} =$

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

3. Δυνάμεις και ιδιότητες των δυνάμεων ρητών αριθμών

3.1 Ορισμός *(ορισμός δύναμης)*

α) - Το άθροισμα $\underbrace{2+2+2+2+2}_{5\ όροι\ ίσοι\ με\ 2}$ είναι ένα άθροισμα 5 ίσων όρων. Ο κάθε όρος είναι ίσος με 2. Ένας άλλος τρόπος για να το γράψουμε, είναι: **$5 \cdot 2$ ή $2 \cdot 5$.**

- Το γινόμενο $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5\ παράγοντες, ίσοι\ με\ 2}$ είναι ένα γινόμενο **5 ίσων παραγόντων**.

Ο κάθε παράγοντας είναι ίσος με 2. Ένας άλλος τρόπος για να το γράψουμε, είναι: 2^5
Το 2^5 ονομάζεται δύναμη του αριθμού 2. Πιο συγκεκριμένα ονομάζεται 5η δύναμη του 2.

Προσοχή: $5^2 = \underbrace{5 \cdot 5}_{2\ παράγοντες\ ίσοι\ με\ 5} = 25$ ενώ $2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5\ παράγοντες\ ίσοι\ με\ 2} = 32$

Τους αριθμούς 3^4, 2^5, $(-5)^2$, $3{,}4^3$ τους ονομάζουμε **δυνάμεις.** Ο αριθμός που πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του λέγεται **βάση**. Ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές πολλαπλασιάζεται η βάση με τον εαυτό της, λέγεται εκθέτης.

Ορισμός

$\underbrace{α \cdot α \cdot α \cdot \ldots \cdot α}_{ν\ παράγοντες,\ ν>1} = α^ν$

εκθέτης
δύναμη
βάση

Ορισμός

$α^1 = α$

β) Γράψτε ως δύναμη τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ = ____

$9 \cdot 9 \cdot 9$ = ____ , $(-8) \cdot (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$ = ____ , $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ =_____

γ) - Βρείτε τις δυνάμεις, όπως στο πρώτο παράδειγμα:

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, $3^2=$, $5^3 =$, $(-2)^3 =$

$(-3)^2 =$, $(-0{,}2)^2=$, $(-0{,}03)^3 =$, $(-1)^{1000}=$

$(-1)^{1001}=$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$

- Πότε το αποτέλεσμα μιας δύναμης είναι αρνητικός; *Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας μέσα στην τάξη.*

3.2 Διερεύνηση *(γινόμενο δυνάμεων με την ίδια βάση)*

α) - Συμπληρώστε τα κενά:

$2^4 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \ \cdot \ 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{\ldots+\ldots} = 2^{\ldots}$

$α^2 \cdot α^4 = α \cdot α \cdot α \cdot α \cdot α \cdot α = α^{\ldots}$

- Τι παρατηρείτε όταν πολλαπλασιάζουμε δυνάμεις με την ίδια βάση;

β) Συμπληρώστε το κενό:

$$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\mu\ \text{ίσοι παράγοντες}}\ \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu\ \text{ίσοι παράγοντες}} = \alpha^{\cdots + \cdots}$$

Ιδιότητα $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$

Για παράδειγμα $3^4 \cdot 3^5 = 3^9$, $\alpha^{10} \cdot \alpha^3 = \alpha^{13}$

γ) Εφαρμόστε την προηγούμενη ιδιότητα και συμπληρώστε τα κενά:

$2^5 \cdot 2^4 = 2^{\cdots}$, $5^4 \cdot 5^7 =$ …….. , $12^3 \cdot 12^{10} =$ ……. , $(-2)^7 \cdot (-2)^{12} =$ …….

$\alpha^4 \cdot \alpha^5 =$ …… , $\beta^6 \cdot \beta^7 =$ …….. , $\chi \cdot \chi^6 \cdot \chi^2 =$ …….. ,

3.3 Διερεύνηση *(πηλίκο δυνάμεων με την ίδια βάση)*

α) - Συμπληρώστε τα κενά:

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{\cdots}$$

$$\frac{\beta^5}{\beta^2} = \frac{\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta}{\beta \cdot \beta} = \ldots..$$

- Τι παρατηρείτε όταν διαιρούμε δυνάμεις με την ίδια βάση;

β) Συμπληρώστε τα κενά (μ>ν) : $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{\overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}^{\mu\ \text{ίσοι παράγοντες}}}{\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu\ \text{ίσοι παράγοντες}}} =$ …….

Ιδιότητα $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$, με μ>ν και α ≠0

Για παράδειγμα $\frac{4^8}{4^5} = 4^{8-5} = 4^3$, $\frac{\alpha^{10}}{\alpha} = \frac{\alpha^{10}}{\alpha^1} = \alpha^{10-1} = \alpha^9$

γ) Εφαρμόστε την προηγούμενη ιδιότητα και συμπληρώστε τα κενά:

$\frac{2^7}{2^2} = 2^{\cdots - \cdots} = 2^{\cdots}$, $\frac{5^{10}}{5^3} =$, $\frac{(-5)^9}{(-5)^3} =$

$\frac{\alpha^{10}}{\alpha^4} =$, $\frac{\beta^5}{\beta^4} =$, $\frac{\alpha^8\ \beta^9}{\alpha^7\ \beta^7} = \frac{\alpha^8}{\alpha^7}\ \frac{\beta^9}{\beta^7} =$

3.4 Διερεύνηση *(δύναμη σε δύναμη)*

α) - Συμπληρώστε τα κενά:

$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{\dots}$

$(5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{\dots\cdot\dots}$

- Τι παρατηρείτε όταν έχουμε μία δύναμη σε μία δύναμη;

β) Συμπληρώστε τα κενά: $(\alpha^\mu)^\nu = \underbrace{\alpha^\mu \cdot \alpha^\mu \cdot \dots \cdot \alpha^\mu}_{\nu \text{ ίσοι παράγοντες}} = \alpha^{\overbrace{\mu+\mu+\mu+\dots+\mu}^{\nu \text{ ίσοι παράγοντες}}} = \alpha^{\dots\cdot\dots}$

Ιδιότητα $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$ Για παράδειγμα $(5^4)^3 = 5^{4\cdot 3} = 5^{12}$, $(x^2)^4 = x^{2\cdot 4} = x^8$

γ) Εφαρμόστε την προηγούμενη ιδιότητα και συμπληρώστε τα κενά:

$(2^5)^4 = 2^{5\cdot 4} = 2^{\dots\dots}$, $(3^4)^5 =$ $((-2)^5)^4 =$

$(\alpha^2)^4 =$, $(\beta^9)^4 =$ $((\alpha^5)^4)^2 =$

3.5 Διερεύνηση *(γινόμενο σε εκθέτη)*

α) - Συμπληρώστε τα κενά:

$36 = 6^2 = (2 \cdot 3)^2 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) = 2^{\dots} \cdot 3^{\dots} = \dots\dots \cdot \dots\dots = \dots\dots$

$(2 \cdot \alpha)^3 = (2 \cdot \alpha) \cdot (2 \cdot \alpha) \cdot (2 \cdot \alpha) = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha) = 2^{\dots} \cdot \alpha^{\dots}$

- Τι παρατηρείτε όταν η βάση μιας δύναμης είναι γινόμενο αριθμών;

β) Συμπληρώστε τα κενά:

$(\alpha \cdot \beta)^\nu = \underbrace{(\alpha \cdot \beta) \cdot (\alpha \cdot \beta) \cdot \dots \cdot (\alpha \cdot \beta)}_{\nu \text{ ίσοι παράγοντες}} = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\nu \text{ ίσοι παράγοντες}}) \cdot (\underbrace{\beta \cdot \beta \cdot \dots \cdot \beta}_{\nu \text{ ίσοι παράγοντες}}) = \alpha^{\dots} \cdot \beta^{\dots}$

Ιδιότητα $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$ Για παράδειγμα $(3 \cdot y)^5 = 3^5 \cdot y^5$

γ) Εφαρμόστε την προηγούμενη ιδιότητα και συμπληρώστε τα κενά:

$(6 \cdot 8)^5 = 6^{\dots} \cdot 8^{\dots}$, $(4 \cdot (-2))^6 =$ $(10 \cdot 5)^7 =$

$(4 \cdot x)^3 =$, $(x \cdot y)^9 =$ $(\alpha^3 \cdot \beta)^4 = (\alpha^3)^{\dots\dots} \cdot \beta^{\dots} =$

δ) Την παραπάνω ιδιότητα τη χρησιμοποιούμε κάποιες φορές όπως στο παράδειγμα:

$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000$

Βρείτε τους αριθμούς:

$2^3 \cdot 5^3 =$, $4^4 \cdot 25^4 =$, $0{,}25^{100} \cdot 4^{100} =$

$1{,}25^5 \cdot 8^3 =$, $5^9 \cdot (\frac{1}{5})^9 =$, $(\frac{2}{3})^{20} \cdot (\frac{3}{2})^{20} =$

3.6 Διερεύνηση *(πηλίκο σε εκθέτη)*

α) - Συμπληρώστε τα κενά:

$$(\frac{3}{5})^4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{3^{\cdots}}{5^{\cdots}}$$

$$(\frac{b}{3})^3 = \frac{b}{3} \cdot \frac{\quad}{\quad} \cdot \frac{\quad}{\quad} = \frac{b \cdot .... \cdot ....}{3 \cdot .... \cdot ....} = \frac{b^{\cdots}}{3^{\cdots}}$$

- Τι παρατηρείτε όταν η βάση μιας δύναμης είναι πηλίκο δύο αριθμών;

β) Συμπληρώστε τα κενά:

$$(\frac{α}{β})^ν = \underbrace{\frac{α}{β} \cdot \frac{α}{β} \cdot \ldots \cdot \frac{α}{β}}_{ν\ \text{ίσοι παράγοντες}} = \frac{\overbrace{α \cdot α \cdot α \cdot \ldots \cdot α}^{ν\ \text{ίσοι παράγοντες}}}{\underbrace{β \cdot β \cdot β \cdot \ldots \cdot β}_{ν\ \text{ίσοι παράγοντες}}} = \frac{α^{\cdots}}{β^{\cdots}}$$

Ιδιότητα $\boxed{(\frac{α}{β})^ν = \frac{α^ν}{β^ν},\ β \neq 0}$

Για παράδειγμα $(\frac{7}{2})^3 = \frac{7^3}{2^3}$, $(\frac{α}{6})^4 = \frac{α^3}{6^4}$, $(\frac{β}{2})^μ = \frac{β^μ}{2^μ}$

γ) Εφαρμόστε την προηγούμενη ιδιότητα και συμπληρώστε τα κενά:

$(\frac{2}{7})^3 =$, $(\frac{5}{6})^6 =$, $(\frac{1}{2})^8 =$

$(\frac{2}{α})^5 =$, $(\frac{x}{y})^6 =$, $(\frac{α^2}{β^3})^4 =$

δ) Την παραπάνω ιδιότητα τη χρησιμοποιούμε κάποιες φορές όπως στο παράδειγμα:

$\frac{20^5}{2^5} = (\frac{20}{2})^5 = 10^5 = 100000$

Βρείτε τους αριθμούς: $\frac{40^4}{4^4} =$, $\frac{250^2}{50^2} =$, $\frac{(-8)^4}{2^4} =$

$\frac{25^3}{(-2{,}5)^3} =$, $\frac{α^2}{5^2} =$, $\frac{(4^2)^3}{8^6} =$

3.7 Διερεύνηση *(δυνάμεις με αρνητικό εκθέτη)*

Μέχρι τώρα ορίσαμε τη δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό μεγαλύτερο του 0. Θα δούμε τώρα πως θα ορίσουμε μία δύναμη με εκθέτη το 0 ή εκθέτη αρνητικό ακέραιο.

α) Για το $α^0$ θα σκεφτούμε ως εξής. Ξέρουμε ότι $\frac{\alpha^7}{\alpha^7} = 1$.

Αν εφαρμόσουμε την ιδιότητα $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$, τότε $\frac{\alpha^7}{\alpha^7} = α^{7-7} = α^0$.

Έτσι, θα ορίσουμε $α^0=1$.

Ορισμός $α^0=1$, με $α \neq 0$

β) Για το $α^{-ν}$ θα σκεφτούμε ως εξής. Ας πάρουμε το πηλίκο $\frac{\alpha^3}{\alpha^5}$.

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^5} = \frac{α \cdot α \cdot α}{α \cdot α \cdot α \cdot α \cdot α} = \frac{\cancel{α} \cdot \cancel{α} \cdot \cancel{α}}{\cancel{α} \cdot \cancel{α} \cdot \cancel{α}} \cdot \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} .$$

Αν εφαρμόσουμε την ιδιότητα $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ τότε: $\frac{\alpha^3}{\alpha^5} = α^{3-5} = α^{-2}$.

Άρα $α^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$

Ορισμός $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$, με $α \neq 0$

Για παράδειγμα $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$, $α^{-5} = \frac{1}{\alpha^5}$

γ) Εφαρμόστε το προηγούμενο ορισμό και υπολογίστε τις δυνάμεις, όπως στο παράδειγμα:

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $2^{-3} =$, $-4^{-3} =$ $(-4)^{-3} =$

3.8 Ασκήσεις *(εφαρμόζοντας τους ορισμούς και τις ιδιότητες)*

Ορισμοί

1. $\underbrace{α \cdot α \cdot α \cdot \ldots \cdot α}_{ν \text{ φορές}} = α^ν$, $ν>1$
2. $α^1 = α$
3. $α^0=1$, με $α \neq 0$
4. $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$, με $α \neq 0$

Ιδιότητες

5. $α^μ \cdot α^ν = α^{μ+ν}$
6. $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$, με $μ>ν$ και $α\neq0$
7. $(α^μ)^ν = α^{μ \cdot ν}$
8. $(α \cdot β)^ν = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$
9. $\left(\frac{\alpha}{}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^\nu}{}$ $β \neq 0$

Σε μία παράσταση πολλές φορές χρησιμοποιούμε περισσότερο από μία ιδιότητα ή ορισμό. Όπως στα παρακάτω παραδείγματα. Ο αριθμός μέσα σε παρένθεση δείχνει τον αριθμό του ορισμού ή της ιδιότητας που χρησιμοποιήσαμε.

$(2^{-2})^4 \underset{(7)}{=} 2^{-8} \underset{(4)}{=} \frac{1}{2^8}$

$(3^{-3}\,4^4)^{-2} \underset{(8)}{=} (3^{-3})^{-2}\cdot(4^4)^{-2} \underset{(7)}{=} 3^{6}\cdot 4^{-8} \underset{(4)}{=} 3^{6}\cdot\frac{1}{4^8} = \frac{3^6}{4^8}$

Παρατήρηση

Όταν μία παράσταση έχει αρνητικούς εκθέτες, το πιο απλό είναι να εφαρμόζουμε τον ορισμό (4) στο τέλος. Αφού δηλαδή έχουμε εφαρμόσει όλες τις άλλες ιδιότητες και τους ορισμούς.

Χρησιμοποιήστε τους ορισμούς και τις ιδιότητες των δυνάμεων, για να απλοποιήσετε τις παραστάσεις. Γράψτε τον αριθμό του ορισμού ή της ιδιότητας που χρησιμοποιείτε κάθε φορά, όπως στα προηγούμενα παραδείγματα.

$(5^3)^{-4} =$

$(5^2\cdot 7^{-3})^{-2} =$

$(3^{-2})^4\cdot(-3^{-4})^{-2} =$

$\frac{5\cdot(5^3)^{-4}}{5^5\cdot(5^{-2})^4} =$

$(\alpha\cdot\beta^{-2})^{-4}\cdot(\alpha^{-2}\cdot\beta)^{-2} =$

$\frac{\beta\cdot(\alpha\cdot\beta^{-2})^3}{(\alpha\cdot\beta)^{-4}\cdot(\alpha^{-2})^{-3}} =$

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

Ενότητα Α5

Άρρητοι αριθμοί

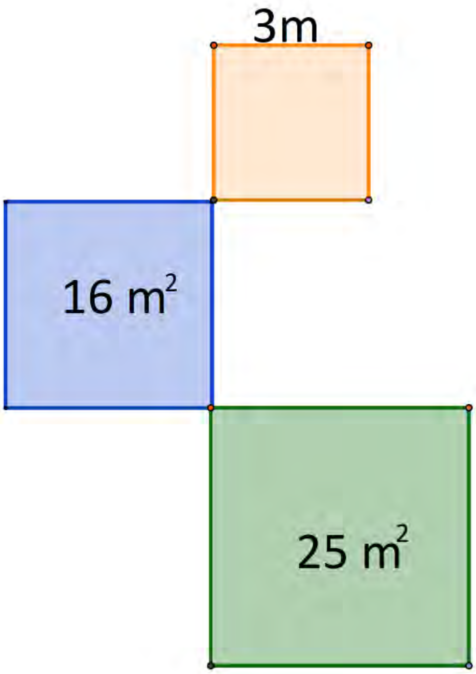
1. Η τετραγωνική ρίζα

1.1 Μία καινούργια έννοια

Δραστηριότητα 1.1 ***(Βρίσκουμε τα εμβαδά ή τις πλευρές κάποιων τετραγώνων)***

Στην παρακάτω εικόνα τα σχήματα είναι τετράγωνα. Σε κάποια από τα τετράγωνα γνωρίζουμε το μήκος της πλευράς τους (σε m). Σε κάποια άλλα τετράγωνα γνωρίζουμε το εμβαδόν τους (σε m^2) .

Μπορείτε να βρείτε το εμβαδόν ή την πλευρά που δεν ξέρουμε από τα παρακάτω τετράγωνα στην εικόνα; (Να γράψετε πάνω στο σχήμα)



Ο Εκίν σκέφτηκε ότι «*όταν ένα τετράγωνο έχει μεγαλύτερη πλευρά από ένα άλλο τότε θα έχει και μεγαλύτερο εμβαδόν»*. Συμφωνείτε; (συζητήστε στην τάξη)

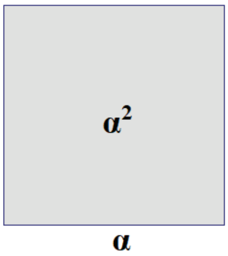
Και ο Φαρούκ τότε ρώτησε: *«Όταν δηλαδή ένα τετράγωνο έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από ένα άλλο τότε θα έχει και μεγαλύτερη πλευρά;»*.

Τι νομίζετε; (συζητήστε στην τάξη).

Το εμβαδόν από ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς α, είναι:

$$Ε = α \cdot α \text{ ή } Ε = α^2$$

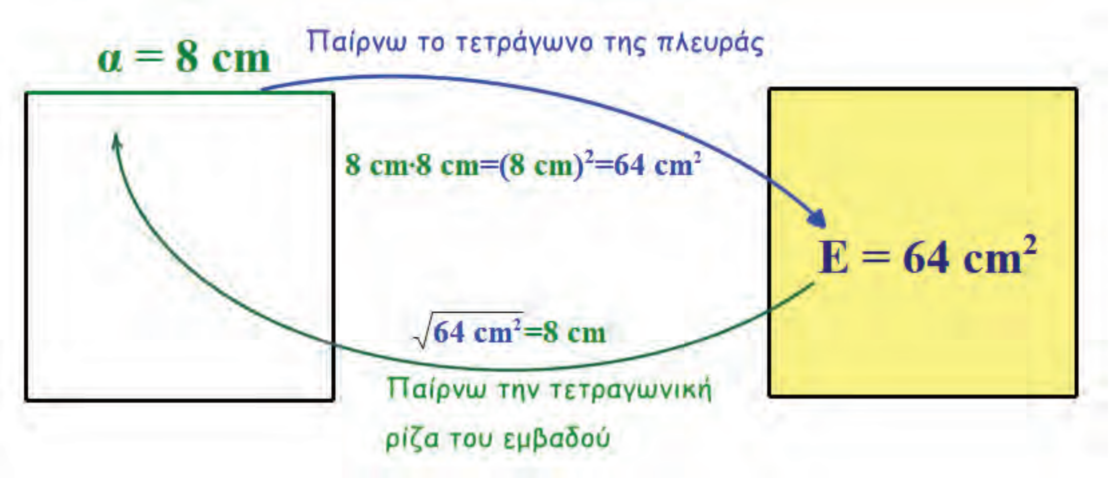
Για παράδειγμα, ένα τετράγωνο με πλευρά 20 cm έχει εμβαδόν $E = 20\ cm\ \cdot 20\ cm = (20\ cm)^2 = 400\ cm^2$.



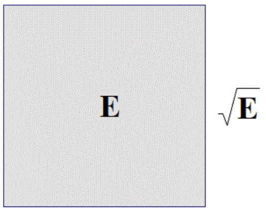
Μερικές φορές όμως, ξέρουμε το εμβαδόν του τετραγώνου και θέλουμε να βρούμε την πλευρά του.
Για παράδειγμα: Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν $64\ cm^2$. Θέλουμε να βρούμε την πλευρά του. Πώς θα σκεφτούμε;

Ξέρουμε ότι 8·8 = 64, άρα η πλευρά του θα είναι 8cm.

Τον αριθμό 8 , τον λέμε **τετραγωνική ρίζα του αριθμού 64** και γράφουμε $\sqrt{64} = 8$.



Γενικά, αν E είναι το εμβαδόν ενός τετραγώνου, τότε η πλευρά του είναι ίση με $\sqrt{E}$.



1.2 Ο ορισμός της τετραγωνικής ρίζας

Είδαμε πριν ότι $\sqrt{64}$ = 8 γιατί 8^2 =64.

Ο Γιάννης όμως σκέφτηκε ότι και $(-8)^2$ = 64. Γιατί να μην είναι τότε $\sqrt{64}$ = -8; Βρείτε την απάντηση στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός

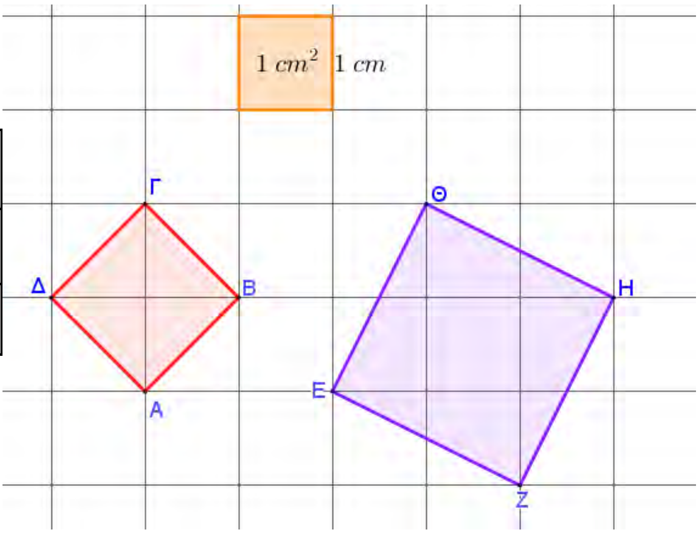
Η Τετραγωνική ρίζα *ενός θετικού αριθμού α (το συμβολίζουμε $\sqrt{\alpha}$) είναι* ***ο θετικός αριθμός*** *που στο τετράγωνο δίνει αποτέλεσμα το α, δηλαδή $\sqrt{\alpha}^2 = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha} = \alpha$.*
Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι, όταν η πλευρά ενός τετραγώνου είναι $\sqrt{\alpha}$, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι α.

Ισχύει ότι: $\sqrt{0} = 0$.

Δραστηριότητα 1.2 *(Βρίσκουμε τις πλευρές κάποιων τετραγώνων, όταν ξέρουμε το εμβαδόν)*

Βρείτε τα εμβαδά και τις πλευρές από τα τετράγωνα στην παρακάτω εικόνα και συμπληρώστε τις τιμές στον πίνακα.

Τετράγωνο	*Εμβαδόν*	*Μήκος πλευράς*
ΑΒΓΔ		
ΕΖΗΘ		



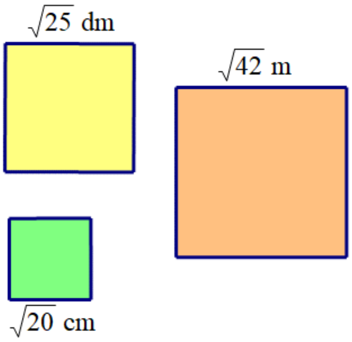
Ασκήσεις

1) **Α)** Να βρείτε τις πλευρές των τετραγώνων που έχουν εμβαδά:

$$9\,cm^2, 36\ cm^2\ , 100\ cm^2\ και\ 400\ cm^2.$$

Β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες: $\sqrt{9}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{100}$ $και$ $\sqrt{400}$.

2) Βρείτε το εμβαδόν από το κάθε τετράγωνο στο διπλανό σχήμα (γράψτε και την κατάλληλη μονάδα μέτρησης).



3) Συμπληρώστε τα κενά στον πίνακα:

$\sqrt{\square} = 5$	$\sqrt{\square} = 0{,}5$	$\sqrt{\square} = 0{,}05$	$\sqrt{\square} = \frac{1}{5}$
$\sqrt{\square} = 7{,}2$	$\sqrt{\square} = \frac{4}{5}$	$\sqrt{\square} = 0{,}8$	$\sqrt{\square} = 0{,}08$

Οι καινούριες μου λέξεις

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που συνάντησες σε αυτή την ενότητα.

………

………

………

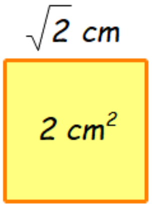
Γράψε τις καινούριες μαθηματικές λέξεις που συνάντησες.

………

………

………

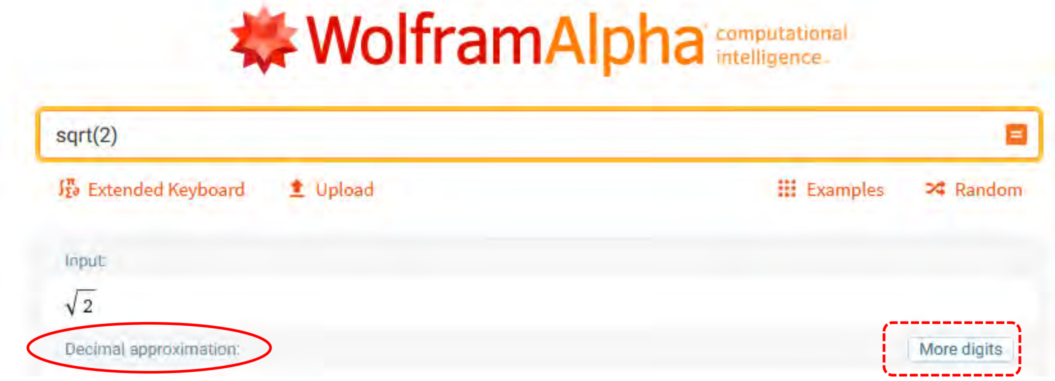
2. Οι άρρητοι αριθμοί



Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν $2\ cm^2$. Άρα η πλευρά του έχει μήκος $\sqrt{2}\ cm$.

Πώς είναι ο $\sqrt{2}$ σε δεκαδική μορφή;

Στην παρακάτω «διεύθυνση» στο διαδίκτυο θα βρείτε την υπολογιστική μηχανή WolframAlpha (https://www.wolframalpha.com/). Μέσα στο πορτοκαλί πλαίσιο γράψτε **sqrt(2)**[1], το οποίο σημαίνει $\sqrt{2}$.



sqrt(2)

Input:

$\sqrt{2}$

Decimal approximation:

Θα δείτε στην οθόνη του υπολογιστή σας μία δεκαδική προσέγγιση (Decimal approximation) για τον αριθμό $\sqrt{2}$. Αν πατήσετε το κουμπί ***More digits*** *(περισσότερα ψηφία)* θα εμφανίσει και άλλα δεκαδικά ψηφία [2]. Τι παρατηρείτε;

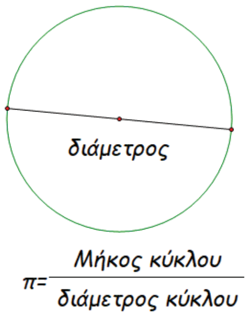
- Ο $\sqrt{2}$ **δεν είναι** φυσικός αριθμός.
- Ο $\sqrt{2}$ **δεν είναι** ούτε περιοδικός δεκαδικός, όπως είναι ο 2,4545454545 … . Σε δεκαδική μορφή, ο $\sqrt{2}$ έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται.
- Ο $\sqrt{2}$ **δεν είναι** κλάσμα (ρητός). Από πολύ παλιά, οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί είχαν αποδείξει ότι **δεν υπάρχει κανένα κλάσμα που στο τετράγωνο δίνει το 2.**

Τι αριθμός είναι τότε ο $\sqrt{2}$;

---

[1] Το sqrt είναι από τα γράμματα των Αγγλικών λέξεων *square root,* οι οποίες σημαίνουν τετραγωνική ρίζα.

[2] Αν δεν έχετε πρόσβαση στο internet ένας αριθμός που θα εμφανιστεί είναι ο: *1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176….*



Ο $\sqrt{2}$ είναι **διαφορετικός** αριθμός από αυτούς που έχουμε μάθει μέχρι τώρα. **Τέτοιοι αριθμοί λέγονται άρρητοι αριθμοί.** Για παράδειγμα άρρητοι είναι οι:

- $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{0{,}6}$ κ.άλ.
- $0{,}1234567891011 \ldots, 34{,}0100100010001$ ...κ.άλ.
- Ο αριθμός π = 3,141592653589793...

Ορισμός

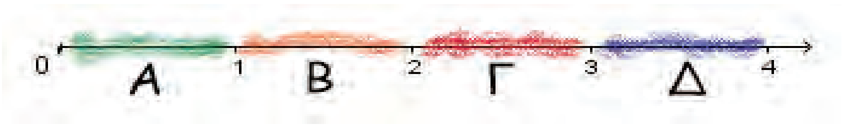
Άρρητος αριθμός είναι ένας αριθμός που **δεν είναι ρητός**. Δηλαδή δεν μπορεί να γραφεί σαν κλάσμα.
Οι ρητοί αριθμοί μαζί με όλους τους άρρητους κάνουν τους **πραγματικούς αριθμούς.**

Αφού ο άρρητος αριθμός έχει **άπειρα δεκαδικά ψηφία** αλλά **δεν είναι περιοδικός**, δεν μπορούμε να γράψουμε ακριβώς την δεκαδική του μορφή**.** Μπορούμε όμως να βρούμε και να γράψουμε δεκαδικούς (ρητούς) που είναι κοντά σ' αυτόν. Δηλαδή τον προσεγγίζουμε με δεκαδικούς (με 1,2,3 ή περισσότερα δεκαδικά ψηφία).

Δραστηριότητα 2.1 *(προσεγγίσεις τετραγωνικών ριζών)*

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μία **δεκαδική προσέγγιση για τον** $\sqrt{5}$. Με άλλα λόγια να βρούμε ποιος δεκαδικός αριθμός στο τετράγωνο θα μας δώσει περίπου 5.

Πρώτα βρίσκουμε ανάμεσα σε ποιους φυσικούς βρίσκεται (συμπληρώστε τα επόμενα).
Επειδή $1^2 = \cdots, 2^2 = \cdots, 3^2 = \cdots$, ο $\sqrt{5}$ θα βρίσκεται στην περιοχή .... (διαλέξτε από τις Α, Β, Γ, Δ)



Δηλαδή $\ldots . < \sqrt{5} < \cdots$

Βρείτε (με κομπιουτεράκι) τα τετράγωνα από τους δεκαδικούς στον επόμενο πίνακα.

Δεκαδικός α	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
Το τετράγωνο $α^2$									

Ανάμεσα σε ποιους δεκαδικούς αριθμούς είναι ο $\sqrt{5}$; Συμπληρώστε την σχέση $\square < \sqrt{5} < \square$.

Θέλουμε τώρα να βρούμε μία καλύτερη προσέγγιση με **δύο δεκαδικά ψηφία.** Πώς νομίζετε ότι πρέπει να συνεχίσουμε; (Συζητήστε στην τάξη)
Μπορείτε να βρείτε ποιος δεκαδικός αριθμός με δύο δεκαδικά ψηφία είναι ο πιο κοντά στο $\sqrt{5}$;

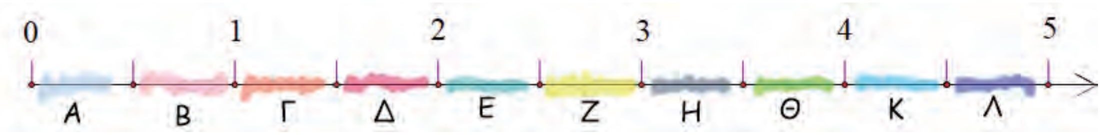
Ασκήσεις

1) Ποιοι από τους αριθμούς $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \cdots, \sqrt{20}$ είναι άρρητοι;

2) Σημειώστε **το είδος** από τους αριθμούς στον παρακάτω πίνακα. Κάποιοι από αυτούς μπορεί να ανήκουν σε πολλά είδη.

	φυσικός	**ακέραιος**	**ρητός**	**άρρητος**	**πραγματικός**
$\sqrt{4}$					
$\frac{3}{7}$					
-7					
$\sqrt{101}$					
$3,078910111213\dots$					
$-2,\overline{15}$					
$0,333$					
$\sqrt{1234572}$					

3) Να εκτιμήσετε σε ποια περιοχή (Α, Β, Γ κ.λπ.) της παρακάτω αριθμογραμμής ανήκουν οι επόμενοι αριθμοί: $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{24,8}$, $\sqrt{0,4}$, . Να εξηγήσετε τον τρόπο που σκεφτήκατε σε κάθε περίπτωση.



Οι καινούριες μου λέξεις

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που συνάντησες σε αυτή την ενότητα.

……

……

……

Γράψε τις καινούριες μαθηματικές λέξεις που συνάντησες.

……

……

……

3. Η εξίσωση $x^2 = α$

Γνωρίζουμε ότι **υπάρχουν πάντα δύο αριθμοί που έχουν το ίδιο τετράγωνο, εκτός αν έχουμε το 0.** Για παράδειγμα **3^2=9** αλλά και **$(-3)^2$=9**.

Επομένως η εξίσωση **$x^2 = 9$** έχει δύο λύσεις. Το 3 και το -3.

Όπως είπαμε το 3 είναι η τετραγωνική ρίζα του 9, δηλαδή $3 = \sqrt{9}$. Άρα η εξίσωση **$x^2 = 9$** έχει λύσεις τους αριθμούς $\sqrt{9}$ *και* $-\sqrt{9}$. Οι αριθμοί αυτοί είναι **αντίθετοι.**

> Η εξίσωση $x^2 = α$, <u>όταν ο αριθμός α είναι θετικός</u>, έχει πάντα δύο λύσεις αντίθετες, το $\sqrt{α}$ και το -$\sqrt{α}$.

Η Μαριάμ ρώτησε: «*ισχύει το ίδιο και για την εξίσωση* ***$x^2 = -9$;*** *Υπάρχει αριθμός που στο τετράγωνο να μας δίνει αρνητικό αποτέλεσμα;*» Τι νομίζετε εσείς;

Ασκήσεις

1) Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

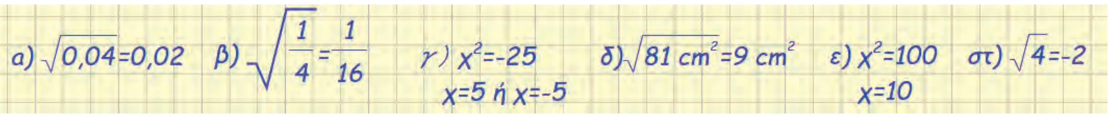
a) $x^2 = 100$

b) $y^2 = 144$

c) $a^2 = -16$

d) $x^2 = \frac{25}{196}$

2) Η Ιασμίν λέει ότι κάποια από τα επόμενα είναι λάθος, ενώ ο Νίκος λέει ότι όλα είναι σωστά. Ποιος έχει δίκιο και γιατί; Αν υπάρχουν λάθη να τα διορθώσετε.



α) $\sqrt{0{,}04}=0{,}02$ β) $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{16}$ γ) $x^2=-25$, $x=5$ ή $x=-5$ δ) $\sqrt{81\ cm^2}=9\ cm^2$ ε) $x^2=100$, $x=10$ στ) $\sqrt{4}=-2$

Οι καινούριες μου λέξεις

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που συνάντησες σε αυτή την ενότητα.

………

………

………

Γράψε τις καινούριες μαθηματικές λέξεις που συνάντησες.

………

………

………

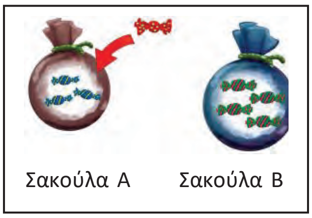
Ενότητα Α6

Εξίσωση 1^{ου} βαθμού

1. Ισότητα

Δραστηριότητα 1.1 ***(Η έννοια της ισότητας μέσα από διαφορετικά παραδείγματα)***

Α) Βλέπουμε την εικόνα και επιλέγουμε τη σωστή απάντηση:



- Στη σακούλα Α κάνουμε: i) $3+1$ ii) $3-1$

- Τελικά στις δύο σακούλες, θα έχουμε .... αριθμό από κύβους.

i) ίδιο ii) διαφορετικό

- Αυτό σημαίνει ότι έχουμε μία **ισότητα**:

$$\underbrace{3+1}_{} = \underbrace{4}_{}$$

1^{ο} μέλος της ισότητας (αριστερά από το =)

2^{ο} μέλος της ισότητας (δεξιά από το =)

Το 1^{ο} μέλος είναι ίσο με το 2^{ο} μέλος!

Β) Τέσσερα παιδιά παίζουν σε μία τραμπάλα:

Ο Ζοράν και ο Αφράν.

Ο καθένας είναι 10 kg [1].

Η Ταμάρ.

Είναι 20 kg.

Ο Άλι.

Είναι 30 kg.

- Για κάθε εικόνα παρακάτω, λέμε αν η τραμπάλα έχει ισορροπία ή όχι.

---

[1] Κιλό, kilogram, کیلوغرام, کیلوگرم.

-------------------------   -------------------------   -------------------------

- Γράφουμε τις ισότητες που βρήκαμε με αριθμούς και μαθηματικά σύμβολα:

……………………….   ……………………….   ……………………….

Μαθαίνω

Όταν δύο παραστάσεις είναι ίσες μεταξύ τους, λέμε ότι έχουμε μία ισότητα. Για παράδειγμα $2+3=5$.

Όταν δύο παραστάσεις δεν είναι ίσες μεταξύ τους, λέμε ότι δεν έχουμε ισότητα και βάζουμε $\neq$ μεταξύ τους. Για παράδειγμα $2+3\neq 4$.

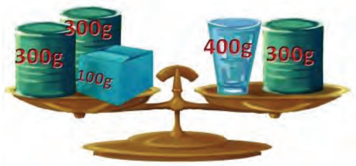
Άσκηση 1.1

Βάλε $=$ όπου υπάρχει ισότητα και $\neq$ όπου δεν υπάρχει ισότητα

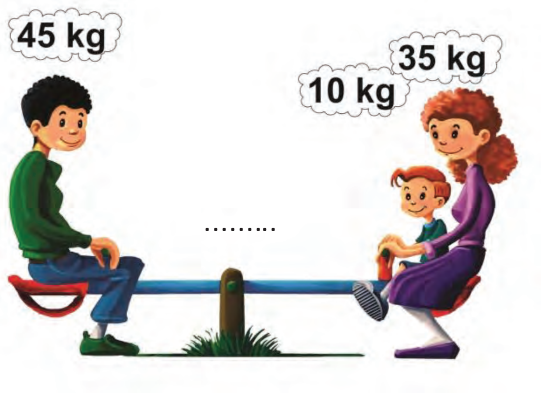
………

………

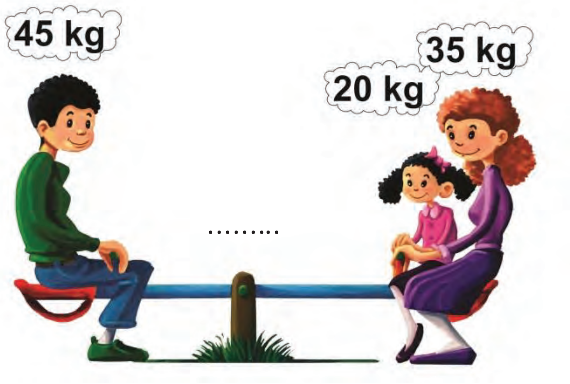
………



………



………



………

$5 \dots 9-4$ $2 \dots 25-27$ $2\cdot 3-5 \dots 101-100$

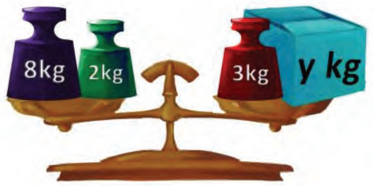
$6 \dots 9-4$ $-2 \dots 25-27$ $2\cdot 3-5 \dots 100-101$

2. Εξίσωση 1ου βαθμού

Δραστηριότητα 2.1 *(Εισαγωγή στην έννοια της εξίσωσης $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο)*

Η Νέλλη έχει δύο κουτιά: ένα κίτρινο και ένα μπλε. Δεν ξέρει πόσα κιλά είναι το κάθε κουτί. Γι' αυτό γράφει πάνω στο κίτρινο x kg και πάνω στο μπλε y kg. Τα βάζει σε μία ζυγαριά όπως στην παρακάτω εικόνα και βρίσκει ισορροπία. Για κάθε εικόνα, γράφουμε την **ισότητα** που έχει.

....



....

Μαθαίνω

Η **εξίσωση** είναι μία ισότητα που έχει αριθμούς και αγνώστους.

Σ' αυτήν την ενότητα, θα μάθουμε:

- να λύνουμε εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο, όπως για παράδειγμα, $x - 6 = 10$ και $15 - 2y = y - 5$,
- και πώς χρησιμοποιούμε τέτοιες εξισώσεις για να λύσουμε προβλήματα.

Παραδείγματα:

$3x + 7 = 10$ $\quad 0 = 4y - 16$ $\quad 16 + 26 = -4t$

$2 - 3y = 25 + y$ $\quad 20 \cdot (6 - z) = 5z$ $\quad 1{,}8x - 1{,}8 = -2 + 1{,}7x$

Είναι εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο.

- Τα παρακάτω είναι παραδείγματα που δεν είναι εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο ή δεν είναι καθόλου εξισώσεις. Συζητήστε στην ομάδα σας και εξηγήστε γιατί:

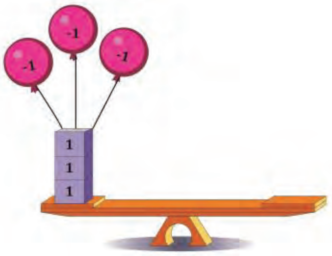
$20x^2 = 5x + 3$ $\quad 2x + 2y = 1$ $\quad y^3 = 2$ $\quad x + 3 = 5 + 2 = 7$ $\quad \frac{1}{x} = 2$

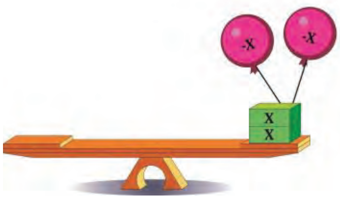
Δραστηριότητα 2.2 *(Η εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού σαν ισορροπία σε μια τραμπάλα)*

Η εξίσωση είναι μία ισότητα. Μπορούμε να την παρουσιάσουμε με μία ισορροπία σε μία τραμπάλα. Σ' αυτήν την τραμπάλα, χρησιμοποιούμε το για κά X αι το για κάθε 1 ή μονάδα. Χρησιμοποιούμε και το για τους αν ● τούς τους, δηλαδή

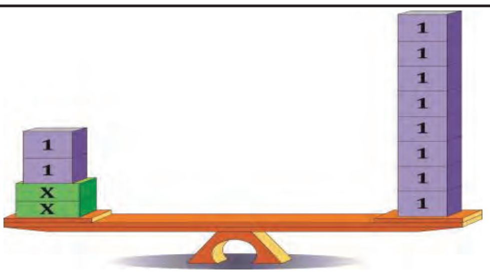
το -1 είναι το αντίθετο του 1 και το αντίθετο του x είναι -X .

Α) Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί υπάρχει ισορροπία σε καθεμιά από τις παρακάτω τραμπάλες;





Β) Έχουμε την εξίσωση $2\boldsymbol{x} + 2 = 8$.



Θα ισχύει η ισορροπία αν:

$\boldsymbol{x} = 1$; ……….. $\boldsymbol{x} = 2$; ………..

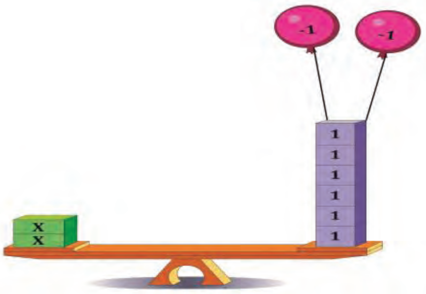
$\boldsymbol{x} = 3$; ……….. $\boldsymbol{x} = 4$; ………..

- Ποιος αριθμός (στη θέση του $\boldsymbol{x}$) είναι ο κατάλληλος για να έχουμε ισότητα ανάμεσα στο $2\boldsymbol{x} + 2$ και το 8; ………………

- Λέμε ότι αυτός ο αριθμός (……) **επαληθεύει την ισότητα** και ότι είναι **η λύση της εξίσωσης** $2\boldsymbol{x} + 2 = 8$.

Γ) Έχουμε την εξίσωση $2\boldsymbol{x} = 6 - 2$. Στο δεύτερο μέλος αφαιρώ το 2 από το 6, αυτό σημαίνει ότι προσθέτω το αντίθετο του 2.

Αφαιρώ έναν αριθμό σημαίνει **προσθέτω τον αντίθετό** του.



- Ποιος αριθμός στη θέση του $\boldsymbol{x}$ είναι ο κατάλληλος για να ισχύει η ισότητα ανάμεσα σε $2\boldsymbol{x}$ και σε $6 - 2$; ………………… Αυτός ο αριθμός είναι η …………….. της εξίσωσης $2\boldsymbol{x} = 6 - 2$.

Μαθαίνω

Η **λύση** ή **ρίζα μιας εξίσωσης** είναι ο αριθμός, που όταν τον βάζουμε στη θέση του αγνώστου, **επαληθεύει την ισότητα**.

Λύνω μία εξίσωση σημαίνει βρίσκω τη λύση της.

Παράδειγμα:

Η λύση της εξίσωσης $2x + 4 = 15 - 5$ είναι το 3, γιατί το 3 επαληθεύει την ισότητα.

Επειδή,

αν $x = 3$, στο 1ο μέλος θα έχουμε: $2x + 4 = 2 \cdot 3 + 4 = 10$,

και στο 2ο μέλος θα έχουμε: $15 - 5 = 10$.

Άρα έχουμε ισότητα.

Αυτή η διαδικασία λέγεται **επαλήθευση**.

Ενώ το 5, για παράδειγμα, δεν είναι μία λύση, επειδή στο 1ο μέλος θα έχουμε:

$2x + 4 = 2 \cdot 5 + 4 = 14$, και έτσι $14 \neq 15 - 5$. Άρα δεν έχουμε ισότητα.

Άσκηση 2.1

Ο αριθμός που δίνεται είναι λύση της αντίστοιχης εξίσωσης:

α) $30 = x + 10$, $x = -10$ ……………

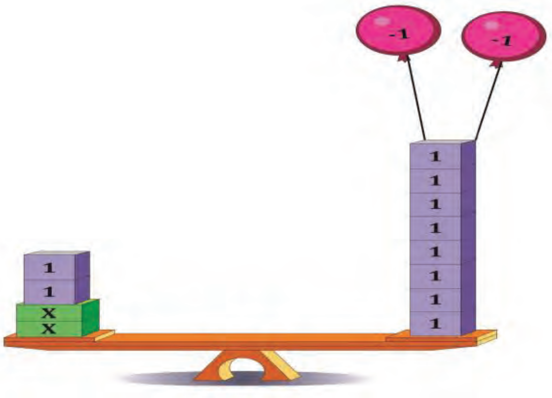
β) $a - 4 = 10$, $a = 14$ ……………

γ) $2y = 8$, $y = \frac{1}{4}$ ……………

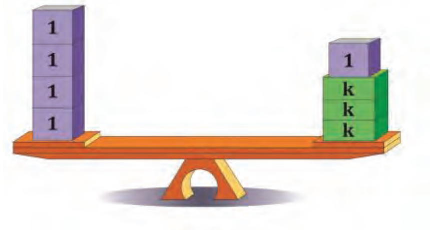
δ) $2{,}5 = w \div 2$, $w = 5$ ……………

Άσκηση 2.2

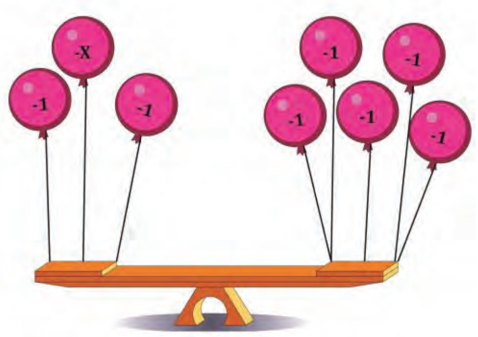
Για κάθε εικόνα, γράψε την εξίσωση και δώσε τη λύση, όπως στο παράδειγμα.



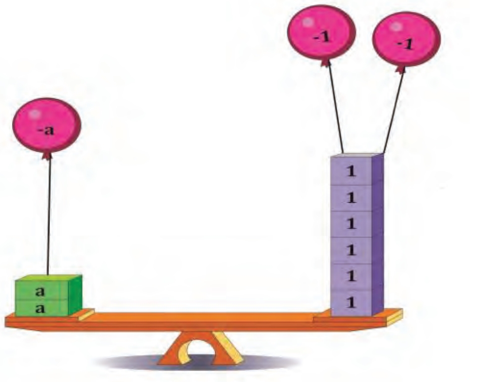
Εξίσωση $2x + 2 = 8 - 2$
Λύση $x = 2$
Επαλήθευση: $1^{ο}$ μέλος: $2 \cdot 2 + 2 = 6$,
$2^{ο}$ μέλος: $8 - 2 = 6$,
άρα έχουμε ισότητα.



Εξίσωση ………………………………
Λύση ……………
Επαλήθευση: ………………………………………….
………………………………………….
………………………………………….



Εξίσωση ………………………………
Λύση ……………
Επαλήθευση: ………………………………………….
………………………………………….
………………………………………….



Εξίσωση ………………………………
Λύση ……………
Επαλήθευση: ………………………………………….
………………………………………….
………………………………………….

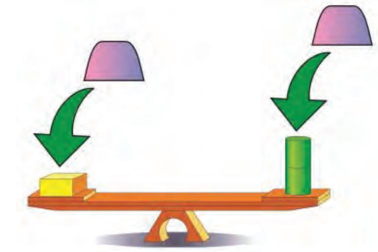
3. Ιδιότητες της ισότητας

Δραστηριότητα 3.1 *Πρόσθεση και αφαίρεση*

Α) Στην τραμπάλα

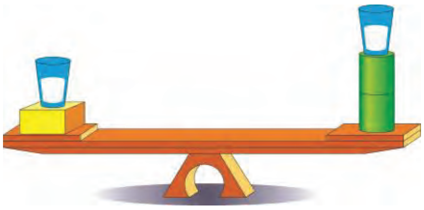
- Έχουμε μία τραμπάλα σε ισορροπία όπως στην εικόνα:

Προσθέτουμε στα 2 μέρη το ίδιο αντικείμενο όπως στην παρακάτω εικόνα:

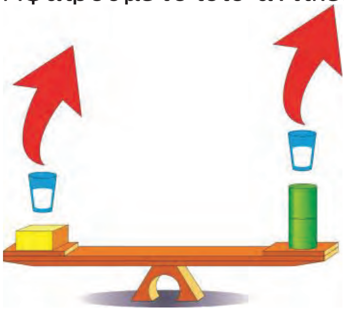


Θα έχουμε πάλι ισορροπία ; ………………..

- Έχουμε μία τραμπάλα σε ισορροπία όπως στην εικόνα:



Αφαιρούμε το ίδιο αντικείμενο από τα δύο μέρη:



Θα έχουμε πάλι ισορροπία ; ………………..

Β) Εφαρμογή στην εξίσωση

1) Ποια είναι η λύση της εξίσωσης $x + 2 = 5$; ……………..

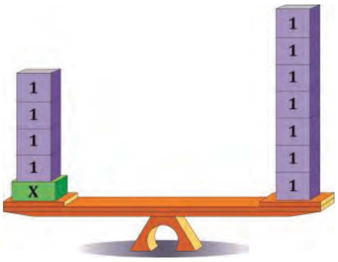
Προσθέτουμε 2 στο 1^{ο} μέλος και στο 2^{ο} μέλος (ταυτόχρονα).

θα έχουμε πάλι ισότητα ανάμεσα στα δύο μέλη ; ……………..

Γράφουμε την εξίσωση που θα έχουμε: ……………………………

Η λύση της είναι: ……….

Τι μπορείτε να πείτε για τις δύο εξισώσεις;



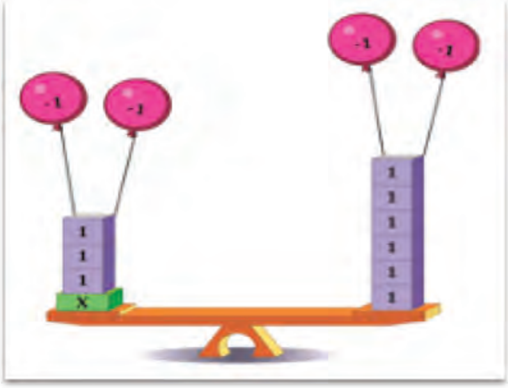
2) Συμπληρώνουμε τα κενά χρησιμοποιώντας την τραμπάλα:

Τραμπάλα σε ισορροπία.

Εξίσωση ……………………

Λύση ……………

Προσθέτουμε στα δύο μέρη το αντίθετο του 2, δηλαδή το -2. Eιναι το ίδιο με το να αφαιρούμε το 2.



2 και **-2** είναι **αντίθετοι.** Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν άθροισμα 0. Δηλαδή 2 + (-2)=0.

… + … + (-2) = … + (-2)

Εξίσωση ………………….

Λύση …………….

Τι παρατηρείτε; ………………………………………………………………………………………………

Μαθαίνω

Όταν σε μία εξίσωση προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό στα δύο μέλη, θα έχουμε μία εξίσωση που έχει την ίδια λύση (την ίδια ρίζα).

Οι δύο εξισώσεις είναι διαφορετικές εκφράσεις για την ίδια ισότητα.

Δηλαδή, αν α = β τότε α + γ = β + γ

αν α = β τότε α + (-γ) = β + (-γ)

Παραδείγματα:

- Οι εξισώσεις $4x - 2 = 120$ και $4x = 122$ έχουν την ίδια λύση.
- Οι δύο παρακάτω εξισώσεις έχουν την ίδια λύση:

$2x - 2 = x + 10$ και $2x - 2 + (-x) = x + 10 + (-x)$.

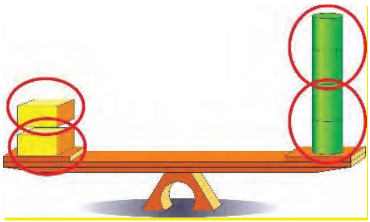
Ο x και ο $-x$ είναι **αντίθετοι**, δηλαδή $x + (-x) = 0$.

Δραστηριότητα 3.2 *Πολλαπλασιασμός και διαίρεση*

Α) Στην τραμπάλα

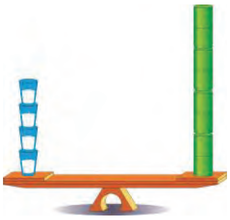
1) Έχουμε μία τραμπάλα σε ισορροπία όπως στην εικόνα:

- Διπλασιάζουμε *(δηλαδή κάνουμε επί 2)* τα αντικείμενα που έχουμε στα δύο μέρη της τραμπάλας, όπως δείχνει η παρακάτω εικόνα:



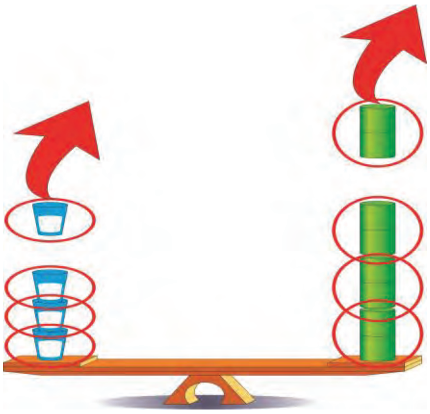
Θα έχουμε πάλι ισορροπία; ……………….

- Όταν πολλαπλασιάζουμε με τον ίδιο αριθμό *(δηλαδή κάνουμε επί τον ίδιο αριθμό)* τα αντικείμενα στα δύο μέρη, θα έχουμε πάλι ισορροπία; …………………………..



2) Έχουμε μία τραμπάλα σε ισορροπία όπως στην εικόνα:

- Κρατάμε το ένα τέταρτο από κάθε μέρος *(δηλαδή* $\div 4$*)*, όπως στην παρακάτω εικόνα:



Θα έχουμε πάλι ισορροπία; ……………….

- Όταν διαιρούμε με τον ίδιο συντελεστή *(δηλαδή κάνουμε διά τον ίδιο αριθμό)* στα δύο μέρη, θα έχουμε πάλι ισορροπία; …………………………..

Β) Εφαρμογή στην εξίσωση

1) Ποια είναι η λύση της εξίσωσης $2x = 2$; ....

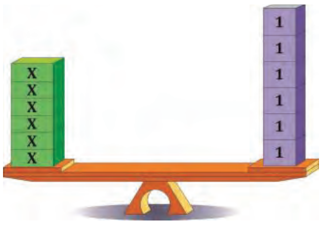
Πολλαπλασιάζουμε με το 3 τα δύο μέλη της εξίσωσης.

θα έχουμε πάλι ισότητα ανάμεσα στα δύο μέλη ; ....

Γράφουμε την εξίσωση που θα έχουμε ………………..

Η λύση της είναι ....

Τι μπορείτε να πείτε για τις δύο εξισώσεις;



2) Συμπληρώνουμε τα κενά χρησιμοποιώντας την τραμπάλα:

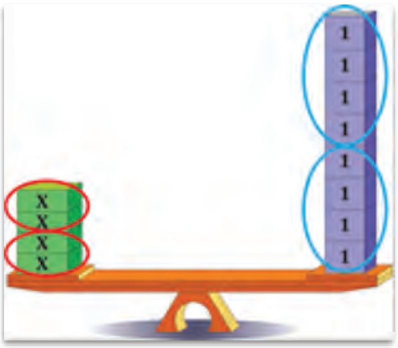
Τραμπάλα σε ισορροπία.

↔

Εξίσωση ……………………

Λύση ……………

Σε κάθε μέρος της τραμπάλας, χωρίζουμε σε δύο ίδιες ομάδες και κρατάμε τη μία. Είναι το ίδιο με το να διαιρούμε με το 2 τα δύο μέρη.



↔

(… …) $\div 2 = \cdots \div 2$
Εξίσωση ……………………

Λύση ……………..

Τι παρατηρείτε; ……

Μαθαίνω

Όταν σε μία εξίσωση πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα δύο μέλη με τον ίδιο συντελεστή, θα έχουμε μία εξίσωση που έχει την ίδια λύση (την ίδια ρίζα).
Οι δύο εξισώσεις είναι διαφορετικές εκφράσεις για την ίδια ισότητα.
Δηλαδή, αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$
Αν $\alpha = \beta$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$

Παραδείγματα:

- Οι εξισώσεις $2x = 10$ και $-2x = -10$ έχουν την ίδια λύση.
- Οι εξισώσεις $30x = 10x + 20$ και $3x = x + 2$ έχουν την ίδια λύση.

- Συνεργαστείτε σε ομάδες και εξηγήστε γιατί.

Άσκηση 3.1

Συμπλήρωσε τα κενά όπως στο παράδειγμα

Οι εξισώσεις στην 1η στήλη και στην τελευταία στήλη, θα πρέπει να έχουν την ίδια λύση!

Παράδειγμα: Έχω $30 = x + 10$ προσθέτω 5 στα δύο μέλη άρα θα έχω $35 = x + 15$

1) Έχω $x - 2{,}5 = 5{,}5$ προσθέτω 2,5 στα δύο μέλη άρα θα έχω ……………….

2) Έχω $30 = x + 10$ προσθέτω 5 στα δύο μέλη άρα θα έχω $35 = x + 15$

3) Έχω $20x - 25 = 15$ προσθέτω -5 στα δύο μέλη άρα θα έχω ……………….

4) Έχω $0{,}8 - 2x = -1$ προσθέτω … στα δύο μέλη άρα θα έχω $-2x = -1{,}8$

5) Έχω $10 - x = 0$ προσθέτω x στα δύο μέλη άρα θα έχω ……………….

Άσκηση 3.2

Οι εξισώσεις στην $1^{η}$ στήλη και στην τελευταία στήλη, θα πρέπει να έχουν την ίδια λύση!

Συμπλήρωσε τα κενά όπως στο παράδειγμα

Παράδειγμα: Έχω $2x = 10$ πολλαπλασιάζω με 15 τα δύο μέλη άρα θα έχω $30x = 150$

1) Έχω $20y = 100$ πολλαπλασιάζω με 0,5 τα δύο μέλη άρα θα έχω ………………..

2) Έχω $-x = -\frac{4}{5}$ πολλαπλασιάζω με ... τα δύο μέλη άρα θα έχω $x = \frac{4}{5}$

3) Έχω $9(x-4) = 18$ διαιρώ με 3 τα δύο μέλη άρα θα έχω ………………..

4) Έχω $-4x = 1$ διαιρώ με ... τα δύο μέλη άρα θα έχω $-x = \frac{1}{4}$

4. Επίλυση μιας εξίσωσης

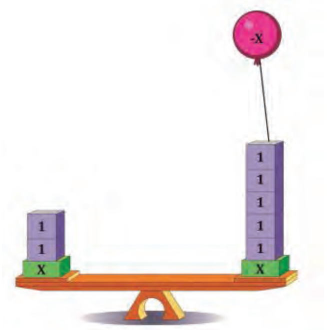
Μαθαίνω

Η **επίλυση μιας εξίσωσης** είναι όλα τα βήματα που κάνουμε για να βρούμε τη λύση της.

Δραστηριότητα 4.1 *(Εφαρμογή του μοντέλου της τραμπάλας στην επίλυση μιας απλής εξίσωσης τύπου αχ+β=γ)*

Η Μελέκ και η Φάτιμα προσπαθούν να λύσουν την εξίσωση $2 = -x + 5$. Θα χρησιμοποιήσουν το μοντέλο της τραμπάλας και τις ιδιότητες της ισότητας.

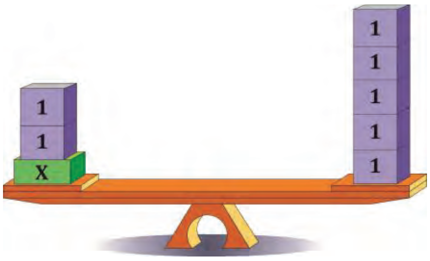
Η Μελέκ πρόσθεσε το x στα δύο μέρη της τραμπάλας και η Φάτιμα έκανε το ίδιο στα δύο μέλη της εξίσωσης.



$$\begin{tikzcd} 2 = -x + 5 \arrow[d, bend right, "+x"'] \arrow[d, bend left, "+x"] \\ 2 + x = -x + 5 + x \end{tikzcd}$$

Ο x και ο $-x$ είναι **αντίθετοι,** δηλαδή $x + (-x) = 0$

Οι δύο φίλες κατέληξαν στα επόμενα:



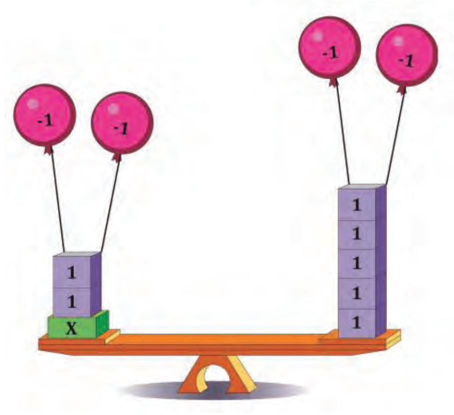
$$2 + x = \cancel{-x} + 5 \cancel{+x}$$

$$2 + x = 5$$

- Συνεργαστείτε σε ομάδες και συζητήστε γιατί αυτό που έκανε η Φάτιμα είναι σωστό; Τι μπορείτε να πείτε για τις δύο εξισώσεις $2 = -x + 5$ και $2 + x = 5$;

Μετά, η Μελέκ πρόσθεσε στα δύο μέρη της τραμπάλας τον αντίθετο του 2, δηλαδή το -2. Το ίδιο έκανε και η Φάτιμα στα δύο μέλη της εξίσωσης.

(θα έβρισκαν το ίδιο αν αφαιρούσαν το 2 από τα δύο μέρη της τραμπάλας ή τα δύο μέλη της εξίσωσης)

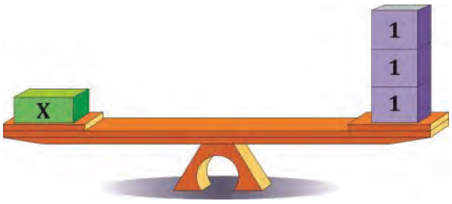


$$2 + x = 5$$

+(-2) +(-2)

$$2 + x + (-2) = 5 + (-2)$$

Τελικά κατέληξαν στο επόμενο:



$$\cancel{2} + x + (\cancel{-2}) = 5 + (-2)$$

$$x = 3$$

- Η Μελέκ και η Φατίμα είναι σίγουρες ότι η τιμή του x που βρήκαν είναι η λύση της εξίσωσης $2 = -x + 5$. Συζητήστε στην ομάδα σας γιατί έχουν δίκιο. Κάντε την επαλήθευση για να βεβαιωθείτε.

Δραστηριότητα 4.2 *(Επίλυση της εξίσωσης τύπου αχ+β=γχ+δ και ανάγκη για γενική μέθοδο)*

Ο Αλί και ο Μάρκος έχουν από μία αριθμομηχανή. Γράφουν σε αυτήν τον ίδιο αριθμό.
Ο Αλί πολλαπλασιάζει αυτόν τον αριθμό με το 4 και μετά προσθέτει το 2.
Ο Μάρκος πολλαπλασιάζει αυτόν τον αριθμό με το 2 και μετά αφαιρεί το 40.
Στο τέλος παρατηρούν ότι έχουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Η Δανάη και η Νάντια ονομάζουν x τον αριθμό που επέλεξαν ο Αλί και ο Μάρκος στην αρχή και θέλουν να τον βρουν. Εμείς θα τις βοηθήσουμε.

- Γράφουμε με μαθηματικά σύμβολα την φράση *«πολλαπλασιάζω το x με το 4 και προσθέτω τον 2.»*

Αλί: ……………………… ①

- Γράφουμε με μαθηματικά σύμβολα την φράση *«πολλαπλασιάζω το x με το 2 και αφαιρώ τον 40.»*

Μάρκος: ……………………… ②

Ψάχνουμε το x έτσι ώστε αυτά που γράψαμε στα ① και ② είναι ίσα: ………………… = …………………

- Με άλλα λόγια, ψάχνουμε την .... της εξίσωσης ....

1) Η Δανάη λέει: *«Ας δοκιμάσουμε κάποιους αριθμούς»*.

Συνεργαστείτε σε ομάδες και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Ο αρχικός αριθμός	-1	1	…	…	…
Το αποτέλεσμα του Αλί	$4\cdot(-1)+2=$…	…	…	…	…
Το αποτέλεσμα του Μάρκου	$2\cdot(-1)-40=$…	…	…	…	…

Ποιος είναι ο αρχικός αριθμός; ....

Συζητήστε με την ομάδα σας: Τι νομίζετε γι’ αυτόν τον τρόπο; Χρειάζεται άλλος τρόπος; Γιατί;

2) Η Νάντια προτείνει άλλον τρόπο. Λέει: *«Για να βρούμε τη τιμή του x στην εξίσωση $4x+2=2x-40$ θα πρέπει να τον απομονώσουμε*[2] *από όλους τους αριθμούς»*. Θα την βοηθήσουμε χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της ισότητας.

Βήμα 1: Στην εξίσωση $4x+2=2x-40$, θέλουμε να έχουμε όλους τους όρους με τον x στο ίδιο μέλος της εξίσωσης. Για παράδειγμα στο 1ο μέλος (αριστερά).

Για αυτό και για να έχουμε μία εξίσωση που θα έχει την ίδια λύση, **θα προσθέσουμε το αντίθετο του $2x$** (δηλαδή $-2x$) **στα δύο μέλη** της εξίσωσης:

$$4x+2=2x-40$$

$$+(-2x) \qquad +(-2x)+4x+2=2x-40+(-2x) \qquad +(-2x)$$

και έτσι θα έχουμε: $2x+2=-40$.

Βήμα 2: Στην εξίσωση $2x+2=-40$, θέλουμε να έχουμε όλους τους γνωστούς όρους (που δεν έχουν το x) στο 2ο μέλος. Για να το κάνουμε χωρίς να αλλάξει η ισότητα, **θα προσθέσουμε το αντίθετο του 2** (δηλαδή -2) **στα δύο μέλη** αυτής της εξίσωσης:

$$2x+2=-40$$

$$+(-2) \qquad 2x+2+(-2)=-40+(-2) \qquad +(-2)$$

και έτσι θα έχουμε $2x=-42$.

Βήμα 3: Στην εξίσωση $2x=-42$, θέλουμε να έχουμε στο 1ο μέλος μόνο τον x. Για να το κάνουμε αυτό χωρίς να αλλάξει η ισότητα, **θα διαιρέσουμε με το 2 τα δύο μέλη** αυτής της εξίσωσης:

$$2x=-42$$

$$\div 2 \qquad \frac{2x}{2}=\frac{-42}{2} \qquad \div 2$$

Οι 3 εξισώσεις σε μπλε είναι διαφορετικές εκφράσεις για την ίδια ισότητα. Έχουν την ίδια λύση, που είναι $x=-21$.

---

[2] Να είναι γραμμένο μόνο του σε ένα μέλος της εξίσωσης, π.χ. $x=\cdots$.

και έτσι θα έχουμε $\boldsymbol{x=-21}$.

Βήμα 4: Επαλήθευση.

Ελέγχουμε αν η τιμή που βρήκαμε επαληθεύει την ισότητα:

$4\cdot \ldots + 2 = \ldots$

$2\cdot \ldots - 40 = \ldots$

Βήμα 5: Γράφουμε το **συμπέρασμα**.

Η λύση της εξίσωσης $4x+2=2x-40$ είναι -21. Αυτός είναι ο αρχικός αριθμός που επέλεξαν ο Αλί και ο Μάρκος.

Μαθαίνω

Για να λύσουμε μία εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο, απομονώνουμε τον άγνωστο σε ένα μέλος με τις ιδιότητες της ισότητας.

Παράδειγμα: Επίλυση της εξίσωσης $-3x-20=5+x$

$+(-x)$ $\quad -3x-20=5+x \quad$ $+(-x)$

$-3x-20+(-x)=5+\cancel{x}+(\cancel{-x})$

Για να έχουμε όλους τους όρους με τον x στο $1^{ο}$ μέλος, προσθέτουμε το αντίθετο του x, δηλαδή $-x$, στα δύο μέλη.

$+20$ $\quad -4x-20=5 \quad$ $+20$

$-4x-\cancel{20}+\cancel{20}=5+20$

Για να έχουμε όλους τους γνωστούς όρους στο $2^{ο}$ μέλος, προσθέτουμε το αντίθετο του (-20), δηλαδή $+20$, στα δύο μέλη.

$\div(-4)$ $\quad -4x=25 \quad$ $\div(-4)$

$$\frac{-4x}{-4}=\frac{25}{-4}$$

Για να έχουμε την τιμή του x, διαιρούμε με το (-4) τα δύο μέλη.

$\boldsymbol{x=-6,25}$

Επαλήθευση:

Ελέγχουμε αν αυτός ο αριθμός επαληθεύει την ισότητα.

$-3\cdot(\ldots)-20=\cdots$

$5+(\ldots)\ =\cdots$

Η **λύση της εξίσωσης** $-3x-20=5+x$ είναι ...

Γράφουμε το συμπέρασμα.

Άσκηση 4.1

Λύσε τις παρακάτω εξισώσεις

1) $36 - 9x = 30$

2) $0 = 4y - 16$

3) $45 = -5 - 10a$

4) $5{,}8\,z - 35{,}5 = -50$

5) $25 + y = 2 - 3y$

6) $3 - 4x = 5x - 10$

7) $1{,}8x - 1{,}8 = -2 + 1{,}7x$

8) $20 \cdot (6 - z) = 170 + 5z$

9) $-y + 39 = -\frac{y}{2} + \frac{61}{2}$

10) $\frac{3x}{2} - 4 = \frac{4}{2} + 2x$

Άσκηση 4.2

Θυμήσου την επιμεριστική ιδιότητα:
$\kappa \cdot (\alpha + \beta) = k \cdot \alpha + k \cdot \beta$

Σωστό ή λάθος και γιατί;

Η Άιντα εφάρμοσε τη μέθοδο της απομόνωσης του αγνώστου στην εξίσωση $15(12 - z) = 150$ και βρήκε το 2 ως λύση. Έχει δίκιο;

Άσκηση 4.3

Λύσε τις παρακάτω εξισώσεις χρησιμοποιώντας τη βοήθεια που σου δίνεται

1) $2(x - 6) = 3(5 - x) - 7$

Ανάπτυξε πρώτα τους δύο παράγοντες $2(x - 6)$ και $3(5 - x)$ με την επιμεριστική ιδιότητα: $2(x - 6) = 2 \cdot x - 2 \cdot 6$

2) $4x - (3x - 5) = x + 3(4 - 2x)$

3) $3(x + 1) + 2(x - 4) = 2x$

4) $\frac{4x+2}{10} = \frac{6+2x}{5}$

Ξεκίνησε πρώτα να πολλαπλασιάσεις τα δύο μέλη της εξίσωσης με το 10 που είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δύο παρονομαστών 10 και 5.

5. Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

***Δραστηριότητα 5.2** (Χρησιμότητα της επίλυσης της εξίσωσης $1^{ου}$ βαθμού σε καθημερινά προβλήματα)*

Παρακάτω έχετε τρία προβλήματα, διαβάστε τα.

Πρόβλημα 1

Ο Όμαρ πουλάει τριαντάφυλλα για να βοηθήσει τους γονείς του. Χθες, πούλησε 5 άσπρα, 8 κόκκινα και 2 κίτρινα. Πήρε συνολικά 22€. Ξέρουμε ότι η τιμή του κόκκινου είναι διπλάσια της τιμής του άσπρου και η τιμή του κίτρινου είναι μισή της τιμής του άσπρου. Πόσο πουλάει το κάθε τριαντάφυλλο;

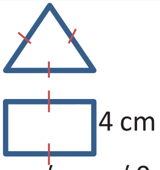
Πρόβλημα 2

Στην τάξη της Λίνας, το ένα τέταρτο των μαθητών ξέρουν Γαλλικά, οι μισοί ξέρουν Αγγλικά και οι υπόλοιποι 6 ξέρουν Αραβικά.

Πόσοι μαθητές είναι στην τάξη της Λίνας;

Πρόβλημα 3

Η Λήδα σχεδιάζει ένα ορθογώνιο με πλάτος 4 cm και ένα ισόπλευρο τρίγωνο έτσι ώστε το μήκος του ορθογωνίου και το μήκος κάθε πλευράς του τριγώνου είναι ίσα.



Πόσο πρέπει να είναι το μήκος του ορθογωνίου για να έχουν την ίδια περίμετρο το τρίγωνο και το ορθογώνιο;

Υπενθύμιση:

Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με μήκος β και πλάτος α είναι 2·(α + β).

Η περίμετρος ενός τριγώνου με μήκος πλευράς α είναι 3α.

- Χωριστείτε σε ομάδες και συζητήστε για την επίλυση αυτών των προβλημάτων. Επιλέξτε ένα πρόβλημα και προσπαθήστε να το λύσετε (αναλυτικά) και στη συνέχεια παρουσιάστε την μέθοδό σας στην τάξη.

Μαθαίνω

Στην καθημερινή ζωή έχουμε προβλήματα με αριθμούς. Πολλές φορές είναι δύσκολο να βρούμε άμεσα τη λύση τους.
Οι εξισώσεις είναι ένα εργαλείο που θα μας βοηθήσει στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων.

Όμως **πώς γίνεται**;

1) Πρώτα, διαβάζουμε καλά το πρόβλημα για να καταλάβουμε τι μας ζητά. Εντοπίζουμε μία άγνωστη ποσότητα και τη **συμβολίζουμε** με ένα γράμμα (π.χ. x),
2) Μετά, “μεταφράζουμε” το πρόβλημα σε μαθηματική γλώσσα. Δηλαδή το “μεταφράζουμε” σε μια εξίσωση (με άγνωστο x),
3) Στην συνέχεια, λύνουμε αυτήν την εξίσωση,

4) Τέλος, ελέγχουμε αν το αποτέλεσμα επαληθεύει το αρχικό πρόβλημα (ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος) και γράφουμε το συμπέρασμα.

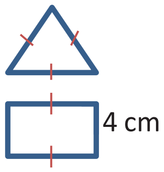
Παράδειγμα: Λύνουμε το **πρόβλημα 2**

Βήμα 1 **Καθορίζω τον άγνωστο και εκφράζω συμβολικά όλες τις σχέσεις**	- Διαβάζω πολύ καλά το πρόβλημα. Εντοπίζω τις πληροφορίες που έχω και την ποσότητα που ψάχνω. Σ’ αυτό το πρόβλημα ζητάνε τον αριθμό όλων των μαθητών. Τότε, ονομάζω x αυτόν τον αριθμό. - Εκφράζω όλες τις υπόλοιπες ποσότητες ως προς τον άγνωστο x. Ο x συμβολίζει τον αριθμό όλων των μαθητών, άρα το ένα τέταρτο των μαθητών είναι $\frac{x}{4}$ και οι μισοί μαθητές είναι $\frac{x}{2}$.
Βήμα 2 **Γράφω μία εξίσωση που μεταφράζει το πρόβλημα**	- Γράφω το πρόβλημα στη μαθηματική γλώσσα χρησιμοποιώντας τον άγνωστο x. Από το πρόβλημα έχουμε: (Το ένα τέταρτο των μαθητών) + (Οι μισοί μαθητές) + (Οι υπόλοιποι 6 μαθητές) = (Όλοι οι μαθητές) Χρησιμοποιώντας τον x, αυτή η ισότητα γράφεται ως εξής: $\frac{x}{4} \quad + \quad \frac{x}{2} \quad + \quad 6 \quad = \quad x$ Αυτή είναι η εξίσωση που εκφράζει το πρόβλημα.
Βήμα 3 **Λύνω την εξίσωση**	- Λύνω την εξίσωση 1^{ου} βαθμού με άγνωστο τον x όπως έμαθα προηγουμένως. $x = \frac{x}{4} + \frac{x}{2} + 6$ $4 \cdot x = 4 \cdot (\frac{x}{4} + \frac{x}{2} + 6)$ $4x = 4 \cdot \frac{x}{4} + 4 \cdot \frac{x}{2} + 4 \cdot 6$ $4x = \frac{4x}{4} + \frac{4x}{2} + 24$ $4x = x + 2x + 24$ $4x = 3x + 24$ $4x - 3x = -3x + 3x + 24$ $x = 24$ Υπενθύμιση: $α.\frac{β}{γ} = \frac{α.β}{γ}$ Επαλήθευση στην εξίσωση: $\frac{24}{4} + \frac{24}{2} + 6 = 6 + 12 + 6 = 24$. Άρα το 24 είναι η λύση της εξίσωσης.

Βήμα 4 **Επαληθεύω τη λύση στο πρόβλημα και γράφω το συμπέρασμα**	- Βλέπω αν η τιμή του αγνώστου x έχει νόημα στο πρόβλημα. Όλοι οι μαθητές = x, άρα είναι 24. Οι μαθητές που ξέρουν Γαλλικά είναι $\frac{x}{4}$, άρα είναι $\frac{24}{4}$ δηλαδή 6. Οι μαθητές που ξέρουν Αγγλικά είναι $\frac{x}{2}$, άρα είναι $\frac{24}{2}$ δηλαδή 12. Αυτές οι τιμές είναι δεκτές, δηλαδή ‘βγάζουν νόημα’ στο πρόβλημα. - Γράφω το συμπέρασμα για το ερώτημα του προβλήματος. Στην τάξη της Λίνας, είναι 24 μαθητές.

Άσκηση 5.1

Η Λέλα Θέλει να λύσει το πρόβλημα 3. Βοήθησέ της.

Βήμα 1 **Καθορίζω τον άγνωστο και εκφράζω συμβολικά όλες τις σχέσεις**	- Διαβάζω πολύ καλά το πρόβλημα και εντοπίζω τις πληροφορίες που έχω και την ποσότητα που ψάχνω. Σ’ αυτό το πρόβλημα, μας ζητάνε …………………………………. Τότε, ονομάζω ……………………………………………  - Εκφράζω όλες τις υπόλοιπες ποσότητες ως προς τον άγνωστο. Ο ….. συμβολίζει ………………………………….., άρα το μήκος μιας πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου είναι …….
Βήμα 2 **Γράφω μία εξίσωση που μεταφράζει το πρόβλημα**	- Γράφω το πρόβλημα στη μαθηματική γλώσσα χρησιμοποιώντας τον άγνωστο. Στο πρόβλημα ψάχνουμε το μήκος του ορθογωνίου έτσι ώστε: (Περίμετρος του τριγώνου) = (Περίμετρος του ορθογωνίου) Χρησιμοποιώντας τον άγνωστο, η περίμετρος του τριγώνου γράφεται ως: ………………. και η περίμετρος του ορθογωνίου γράφεται ως: …………………. Άρα, η εξίσωση που μεταφράζει το πρόβλημα είναι: ………… = …………
Βήμα 3 **Λύνω την εξίσωση**	- Λύνω την εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού με έναν άγνωστο όπως έμαθα προηγουμένως. …………………… …………………… …………………… Επαλήθευση στην εξίσωση: ………………………. Άρα, το … είναι η ……………………………………………
Βήμα 4 **Επαληθεύω τη λύση στο πρόβλημα και γράφω το συμπέρασμα**	- Βλέπω αν η τιμή του αγνώστου έχει νόημα στο πρόβλημα. Το μήκος του ορθογωνίου είναι …… Το μήκος μιας πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου είναι …… Αυτές οι τιμές ………………………………………………………… στο πρόβλημα. - *Γράφω το συμπέρασμα για το ερώτημα του προβλήματος.* …………………………………………………………………………….

Άσκηση 5.2

Λύσε τα παρακάτω προβλήματα.

1) Το **πρόβλημα 1** της σελίδας 18.

2) **Πρόβλημα 4**

Σε ένα φροντιστήριο, έχουμε τρεις τάξεις για τη Φαρσί γλώσσα. Ξέρουμε ότι ο αριθμός των παιδιών στην 1^η τάξη είναι διπλάσιος του αριθμού των παιδιών στην 2^η τάξη. Επίσης, ξέρουμε ότι ο αριθμός των παιδιών στην 3^η τάξη είναι ο μισός του αριθμού των παιδιών στην 2^η τάξη. Πόσα παιδιά είναι όλα μαζί;

Οι καινούριες μου λέξεις

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που συνάντησες σε αυτή την ενότητα.

……

……

……

Γράψε τις καινούριες μαθηματικές λέξεις που συνάντησες.

……

……

……

Ενότητα Α7

Ανίσωση 1^{ου} βαθμού

1. Ανισότητα

Μαθαίνω

Δύο αριθμοί που δεν είναι ίσοι, είναι άνισοι.
Για παράδειγμα, το 2 και το 5 είναι άνισοι.
Γράφουμε $2 \neq 5$.

Μαθαίνω

Όταν δύο αριθμοί είναι άνισοι, μπορούμε να τους συγκρίνουμε.

- Αν ο πρώτος είναι πιο μικρός από τον άλλο, βάζουμε το σύμβολο **<**.

Για παράδειγμα, γράφουμε $2 < 9$ και διαβάζουμε: το 2 είναι **μικρότερο από** το 9.

- Αν ο πρώτος είναι πιο μεγάλος από τον άλλο, βάζουμε το σύμβολο **>**.

Για παράδειγμα, γράφουμε $8 > 5$ και διαβάζουμε: το 8 είναι **μεγαλύτερο από** το 5.

Παράδειγμα:

$3 < 6$

Το 3 είναι μικρότερο από το 6.

$6 > 3$

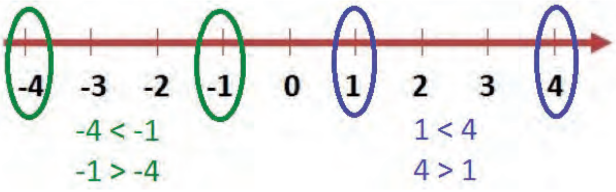
Το 6 είναι μεγαλύτερο από το 3.

Μαθαίνω

Όταν συγκρίνουμε δύο αριθμούς, μικρότερος είναι πάντα αυτός που είναι αριστερά στην αριθμογραμμή.

Δηλαδή, μεγαλύτερος είναι πάντα αυτός που είναι δεξιά στην αριθμογραμμή.

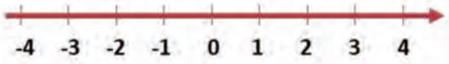
Παράδειγμα:



Άσκηση 1.1

Συμπλήρωσε με **μικρότερος** ή **μεγαλύτερος**. Δώσε παράδειγμα με τα σύμβολα < ή >.

- Κάθε θετικός αριθμός είναι …………………… από το 0. Παράδειγμα: ………
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι …………………… από το 0. Παράδειγμα: ………
- Κάθε θετικός αριθμός είναι …………………… από κάθε αρνητικό αριθμό. Παράδειγμα: ………



Άσκηση 1.2

Συμπλήρωσε με < ή >.

7 9   -7 ..... -9   -9 0   9 0

-20 2   -2,9 2,7   0 ..... -9   0 9

Μαθαίνω

Σε μία **ανισότητα**, όπως για παράδειγμα 6+3 > 4+2, λέμε:

- **φορά** για το σύμβολο της ανισότητας,
- **1ο μέλος** για το μέλος που είναι αριστερά από το σύμβολο,
- **2ο μέλος** για το μέλος που είναι δεξιά από το σύμβολο.

$$\underbrace{6+3}_{1^{ο}\ μέλος} \underset{φορά}{>} \underbrace{4+2}_{2^{ο}\ μέλος}$$

Παραδείγματα για ανισότητες: 6 > 4 + 2, 7 - 2 < 9 + 6, -5 + 2 < 0, 4 - 2 > 0.

Δώσε και εσύ τα δικά σου παραδείγματα...

Άσκηση 1.3

Συμπλήρωσε με < ή >.

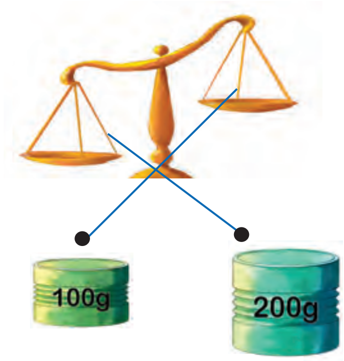
-9-7 ..... -9+6   -7·2 ..... -10   -3,5 + 2·1,5 5   6+3·4 ..... -5 + 7

7÷2 ..... 0,5 - 4   7÷2 ..... -0,5 + 4   -3,5 + 1 ..... 5 + 2,7   -3,5 + 1 ..... -5 + 2,7

Άσκηση 1.4

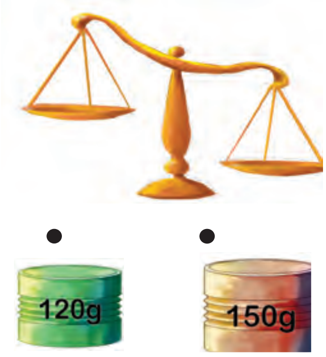
Συμπλήρωσε όπως στο παράδειγμα.

Παράδειγμα:



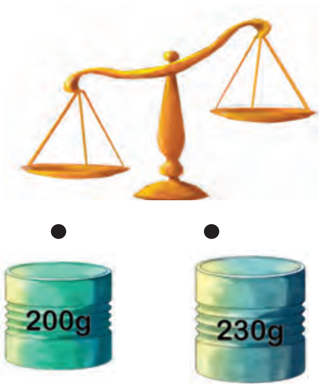
100....<...200

200....>...100



.... < ....

.... > ....



.... < ....

.... > ....

● ●


5kg
8kg


15kg

.... < ....
.... > ....

● ●


10kg


2.5kg
5kg

.... < ....
.... > ....

● ●


5kg
8kg

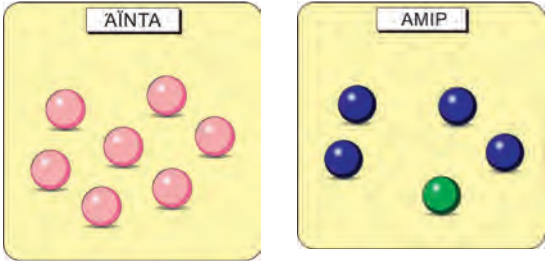

2.5kg
10kg

.... < ....
.... > ....

2. Ιδιότητες της ανισότητας

Δραστηριότητα 2.1 ***(Οι ιδιότητες της ανισότητας σχετικά με την πρόσθεση και την αφαίρεση)***

1) Η Άιντα έχει 7 ροζ μπάλες. Ο Αμίρ έχει 1 πράσινη μπάλα και 4 μπλε μπάλες.

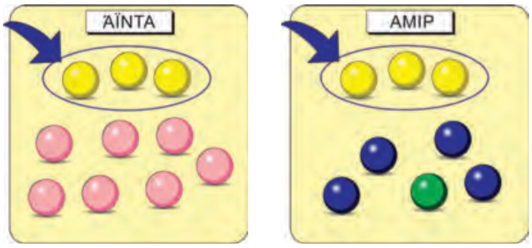


Ποιος έχει περισσότερες μπάλες; …………….

Γράφουμε αυτήν την **ανισότητα** με μαθηματικά σύμβολα: …… …… ……..

Άϊντα Αμίρ

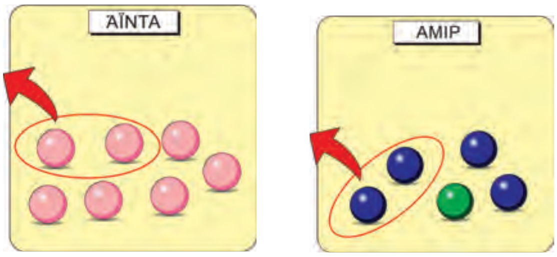
- Ο Πέτρος δίνει 3 μπάλες στην Άιντα και 3 μπάλες στον Αμίρ.



Άϊντα Αμίρ

Άρα έχουμε την **ανισότητα** 7 + 3 …. 5 + 3.

- Η Μίριαμ παίρνει 2 μπάλες από την Άιντα και 2 μπάλες από τον Αμίρ.



Άϊντα Αμίρ

Άρα έχουμε την **ανισότητα** 7 - 2 …. 5 - 2.

Στις 2 περιπτώσεις ποιος έχει περισσότερες μπάλες; …………………

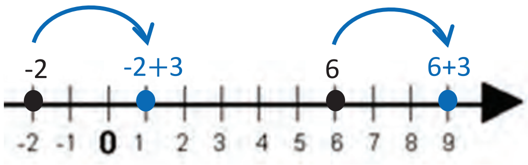
Μαθαίνω

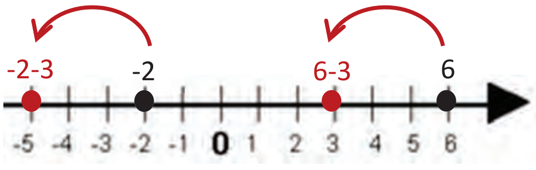
Το σύμβολο της ανισότητας **δεν αλλάζει** όταν προσθέτουμε ή αφαιρούμε τον ίδιο αριθμό στα δύο μέλη.

Δηλαδή, αν $α > β$, τότε $α + γ > β + γ$ και $α - γ > β - γ$

Παραδείγματα:

-2 < 6 τότε -2+3 < 6+3 και -2-3 < 6-3, 9 > 2 τότε 9+2 > 2+2 και 9-3 < 2-3.

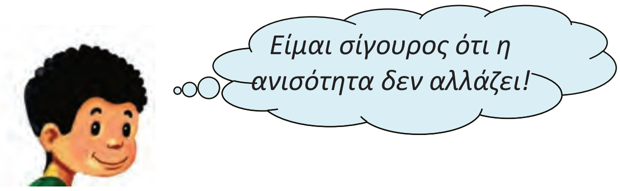




Δραστηριότητα 2.1 *(Οι ιδιότητες της ανισότητας σχετικά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση)*

Α) Έχουμε την ανισότητα $3 < 5.$

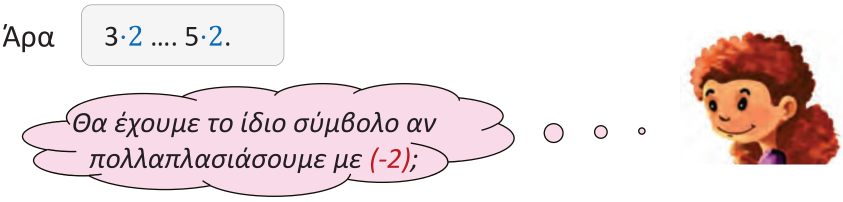
1) Ο Χαλίλ πολλαπλασιάζει τα δύο μέλη με 2 και λέει



Έχει δίκιο; Συμπληρώνουμε:

$3\cdot 2=$ …. και $5\cdot 2=$ …. Άρα $3\cdot 2$ …. $5\cdot 2$.

2) Η Νάντα ρωτάει



Βοηθάμε τη Νάντα και συμπληρώνουμε: $3\cdot(-2)=$ …. και $5\cdot(-2)=$ …. Άρα $3\cdot(-2)$ …. $5\cdot(-2)$.

Απάντα στην ερώτηση της Νάντα: ……………………………………………………………………………………………

Β) Έχουμε την ανισότητα $6 < 10.$ Συμπληρώνουμε:

$6\div 2=$ …. και $10\div 2=$ ….

Άρα $6\div 2$ …. $10\div 2$.

$6\div(-2)=$ …. και $10\div(-2)=$ ….

Άρα $6\div(-2)$ …. $10\div(-2)$.

Πότε αλλάζει το σύμβολο της ανισότητας; ………………………………………………………………………

Μαθαίνω

- Το σύμβολο της ανισότητας **δεν αλλάζει** όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με τον ίδιο **θετικό** αριθμό τα δύο μέλη.

Δηλαδή, αν $\alpha > \beta$, και **γ θετικός** τότε $\alpha\cdot\gamma > \beta\cdot\gamma$ και $\alpha\div\gamma > \beta\div\gamma$

αν $\alpha < \beta$, και **γ θετικός** τότε $\alpha\cdot\gamma < \beta\cdot\gamma$ και $\alpha\div\gamma < \beta\div\gamma$

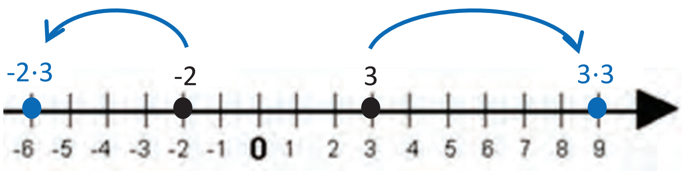
- Το σύμβολο της ανισότητας **αλλάζει** όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό τα δύο μέλη.

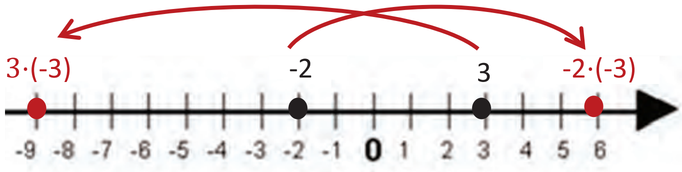
Δηλαδή, αν $\alpha > \beta$, και **γ αρνητικός** τότε $\alpha\cdot\gamma \overset{\downarrow}{<} \beta\cdot\gamma$ και $\alpha\div\gamma \overset{\downarrow}{<} \beta\div\gamma$

αν $\alpha < \beta$, και **γ αρνητικός** τότε $\alpha\cdot\gamma \underset{\uparrow}{>} \beta\cdot\gamma$ και $\alpha\div\gamma \underset{\uparrow}{>} \beta\div\gamma$

Παραδείγματα:

$-2 < 3$ τότε $-2\cdot 3 < 3\cdot 3$ αλλά $-2\cdot(-3) > 3\cdot(-3)$, $8 > 6$ τότε $8\div 2 > 6\div 2$ αλλά $8\div(-2) < 6\div(-2)$.





3. Ανίσωση 1^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο

Μαθαίνω

Όταν σε μία ανισότητα έχουμε έναν άγνωστο, λέμε ότι έχουμε μία **ανίσωση με έναν άγνωστο**. Για παράδειγμα, **$2x + 5 > 1$**, **$3 - x < 6x - 11$**.

Σε μία ανίσωση, κάποιες φορές βάζουμε και τα σύμβολα $\leq$ ή $\geq$. Για παράδειγμα,

- γράφουμε $x \leq 7$ και διαβάζουμε: ο x είναι **μικρότερος ή ίσος με** το 7. Δηλαδή, ο x μπορεί να είναι 7 ή μπορεί να είναι ένας αριθμός πιο μικρός από το 7.
- γράφουμε $y \geq 5$ και διαβάζουμε: ο y είναι **μεγαλύτερος ή ίσος με** το 5. Δηλαδή, ο y μπορεί να είναι 5 ή να είναι ένας αριθμός πιο μεγάλος από το 5.

Άσκηση 3.1

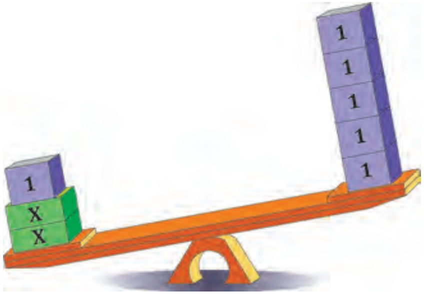
Συνέχισε όπως στο παράδειγμα.

Ανίσωση			Σημασία
$x \leq 2$	●—	—●	ο x είναι **μικρότερος ή ίσος με** το 2
$x > 6$	●	●	ο x είναι **μικρότερος από** το 6
$6 \geq x$	●	●	το 6 είναι **μικρότερο από** τον x
$x < 6$	●	●	ο x είναι **μεγαλύτερος ή ίσος με** το 6
$6 < x$	●	●	ο x είναι **μικρότερος ή ίσος με** το 6
$x \leq 6$	●	●	ο x είναι **μεγαλύτερος από** το 6
$x \geq 6$	●	●	το 6 είναι **μεγαλύτερο ή ίσο με** τον x

Σ’ αυτήν την ενότητα, θα μάθουμε:

- να λύνουμε ανισώσεις 1^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο, όπως για παράδειγμα, $2x - 5 < 11$ και $1 - y \geq 2y - 8$,
- και πώς χρησιμοποιούμε τέτοιες ανισώσεις για να λύσουμε προβλήματα.

Δραστηριότητα 3.1 *(Λύση μιας ανίσωσης)*



Βάζουμε το 3 στη θέση του x στη διπλανή εικόνα.

Η τραμπάλα θα γυρίσει πάλι προς την ίδια μεριά; ……..

Λέμε ότι το 3 είναι μία λύση της ανίσωσης $2x + 1 > 5$.

Το 1 είναι μία λύση; ……….. Γιατί; ……………………………………………………………………………………………

Μαθαίνω

Όταν ένας αριθμός επαληθεύει την ανισότητα, λέμε ότι είναι μία **λύση** της ανίσωσης.

Για παράδειγμα, το 3 είναι μία λύση για την ανίσωση $x + 2 < 7$.

Δραστηριότητα 3.2 *(Μια ανίσωση μπορεί να έχει πολλές λύσεις)*

Ποιοι αριθμοί από τους παρακάτω μπορεί να είναι στη θέση του x στη διπλανή τραμπάλα;
1, 5, -8, 0, 20, 2, 3, -2,5.

Συζήτησε με την ομάδα σου, πόσες λύσεις μπορεί να έχει η ανίσωση $2x + 1 < x + 4$; ………………………………………………

Μαθαίνω

Μία ανίσωση μπορεί να έχει «πάρα πολλές» λύσεις! Λέμε ότι έχει άπειρες λύσεις.

Άσκηση 3.1

Για κάθε ανίσωση, κύκλωσε τους αριθμούς που είναι λύσεις.

• $x \leq 2$	1, 4, -6, -0,5, 2, 0, 5, 11.
• $2x + 3 > 5$	1, 4, -6, -0,5, 2, 0, 5, 11.
• $y - 1 < 8 - 2y$	1, 4, -6, -0,5, 2, 0, 5, 11.

4. Επίλυση της ανίσωσης $1^{\text{ου}}$ βαθμού με έναν άγνωστο

Η **επίλυση μιας ανίσωσης** είναι όλα τα βήματα που κάνουμε για να λύσουμε την ανίσωση. Δηλαδή, για να βρούμε τις λύσεις της.

Μαθαίνω

Για να λύσουμε μία ανίσωση $1^{\text{ου}}$ βαθμού με έναν άγνωστο, απομονώνουμε τον άγνωστο σε ένα μέλος με τις ιδιότητες της ανισότητας.

Παραδείγματα:

1) Επίλυση της ανίσωσης $2x + 5 \leq 11$.

+(-5) +(-5)

$$\begin{array}{rcl} 2x + 5 & \leq & 11 \\ 2x \cancel{+ 5} + (\cancel{-5}) & \leq & 11 + (-5) \\ 2x & \leq & 6 \\ \frac{2x}{2} & \leq & \frac{6}{2} \\ x & \leq & 3 \end{array}$$

÷ 2 ÷ 2

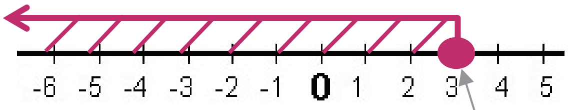
Για να έχουμε όλους τους γνωστούς όρους στο $2^{\text{ο}}$ μέλος, προσθέτουμε το αντίθετο του 5, δηλαδή, -5 στα δύο μέλη.

Για να έχουμε την τιμή του x, διαιρούμε με το 2 τα δύο μέλη.

Γράφουμε το συμπέρασμα :

Όλοι οι αριθμοί που είναι **μικρότεροι ή ίσοι με το 3** είναι λύσεις της ανίσωσης $2x + 5 \leq 11$.

Μπορούμε και να σχεδιάσουμε το συμπέρασμα στην αριθμογραμμή!



Αυτό σημαίνει ότι το 3 είναι μία λύση.

2) Λύνουμε την ανίσωση -3x – 1 < x + 7.

$$\begin{array}{lrcll} & -3x - 1 & < & x + 7 & \\ +(-x) & -3x - 1 + (-x) & < & \cancel{x} + 7 + \cancel{(-x)} & +(-x) \\ & -4x - 1 & < & 7 & \\ +1 & -4x \cancel{-1} \cancel{+} 1 & < & 7 + 1 & +1 \\ & -4x & < & 8 & \\ \div(-4) & \frac{-4x}{-4} & > & \frac{8}{-4} & \div(-4) \\ & x & > & -2 & \end{array}$$

Για να έχουμε όλους τους όρους με τον x στο 1^{ο} μέλος, προσθέτουμε το αντίθετο του x, δηλαδή $-x$, στα δύο μέλη.

Για να έχουμε όλους τους γνωστούς όρους στο 2^{ο} μέλος, προσθέτουμε το αντίθετο του (-1), δηλαδή $+1$, στα δύο μέλη.

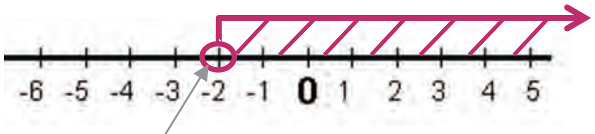
Για να έχουμε την τιμή του x, διαιρούμε με το (-4) τα δύο μέλη.

Προσοχή! **Το σύμβολο της ανίσωσης αλλάζει!** Σκέψου γιατί;

Γράφουμε το συμπέρασμα :

Όλοι οι αριθμοί που είναι **μεγαλύτεροι από το -2** είναι λύσεις της ανίσωσης -3x – 1 < x + 7.

Σχεδιάσουμε το συμπέρασμα στην αριθμογραμμή.



Αυτό σημαίνει ότι το -2 δεν είναι μία λύση.

Άσκηση 4.1

Λύσε τις παρακάτω ανισώσεις και δείξε τις λύσεις στην αριθμογραμμή

1) 5x < -15

2) 3x + 5 > 1

3) 4x - 20 ≤ 4

4) 8,5 ≤ 3α-2,5

Σκέψου ότι αυτή η ανίσωση είναι ίδια με 3α-2,5 ≥ 8,5.

5) -x + 2 > 3

Θυμήσου: - x = -1·x

6) $-\frac{1}{4} < -y$

7) 2x + 5 ≥ 3x + 1

8) 9ω + 6 ≤ 18 + 6ω

9) 6t + 1 > 4.5t - 2

10) 4x - 4 < -6x + 10

11) 2y - 1,8 ≥ -2y + 14,2

12) 2(y - 1) ≥ 4y - 12

Θυμήσου: κ·(α+β) = κ·α + κ·β

5. Επίλυση προβλημάτων με ανισώσεις

Μαθαίνω

Στην καθημερινή ζωή έχουμε προβλήματα με αριθμούς. Οι ανισώσεις μας βοηθάνε να λύνουμε κάποια από αυτά τα προβλήματα.

Δραστηριότητα 5.1 *(Τα σύμβολα της ανισότητας σε καθημερινές εκφράσεις)*

Συνεργαστείτε σε ομάδες και προσπαθήστε να μεταφράσετε τις παρακάτω καθημερινές εκφράσεις στη μαθηματική γλώσσα. Χρησιμοποιείστε τα σύμβολα $<, \leq, >, \geq$.

Α) Στο Λούνα Παρκ,

Παιχνίδι 1	**Παιχνίδι 2**	**Παιχνίδι 3**	**Παιχνίδι 4**
Μόνο για παιδιά **πάνω από** 1,40 m.	**Τουλάχιστον** 3 άτομα.	Δωρεάν για παιδιά **μέχρι** 3 χρονών.	Απαγορεύεται για παιδιά **κάτω από** 6 χρονών.

Β) Στο δρόμο,

Parking δωρεάν μέχρι 15 λεπτά.

Ταχύτητα

Ταχύτητα

- Στον παρακάτω πίνακα, είναι κάποιες εκφράσεις στην Ελληνική γλώσσα και η μετάφρασή τους σε σύμβολα. Γράψε αυτές τις εκφράσεις στη γλώσσα σου. Μπορείς να γράψεις στον πίνακα και άλλες εκφράσεις που ξέρεις.

Μικρότερο από Λιγότερο από Μέχρι Κάτω από	$<$
Μικρότερο ή ίσο με Μέχρι και Το πολύ	$\leq$
Μεγαλύτερο από Περισσότερο από Πάνω από	$>$
Μεγαλύτερο ή ίσο με Τουλάχιστον	$\geq$

Δραστηριότητα 5.2 *(Επίλυση ενός προβλήματος με ανίσωση)*

Έχουμε το παρακάτω πρόβλημα.

Πρόβλημα 1

Ο κύριος Μαχμούντ πουλάει μπακλαβά. Κάθε εβδομάδα φτιάχνει 30 κιλά. Πληρώνει 80€ για να τα φτιάξει. Πουλάει το ένα κιλό 10€. Ο κύριος Μαχμούτ θέλει να κερδίσει **περισσότερα από** 100€ την εβδομάδα.

- Πόσα κιλά μπακλαβά θα πρέπει να πουλήσει την εβδομάδα;

Ας το λύσουμε μαζί. Τα βήματα είναι ίδια με αυτά που κάναμε όταν λύναμε προβλήματα με εξισώσεις.

Βήμα 1: Καθορίζω τον άγνωστο και εκφράζω συμβολικά όλες τις σχέσεις	- Διαβάζω πολύ καλά το πρόβλημα. Εντοπίζω τις πληροφορίες που έχω και την ποσότητα που ψάχνω. Ζητάνε τον αριθμό για τα κιλά που θα πρέπει να πουλήσει την εβδομάδα. Τότε, ονομάζω x αυτόν τον αριθμό.
Βήμα 2: Γράφω μία ανίσωση που μεταφράζει το πρόβλημα	- Γράφω το πρόβλημα στη μαθηματική γλώσσα χρησιμοποιώντας τον άγνωστο x. Την εβδομάδα πουλάει x κιλά και έτσι παίρνει $10x$€ . Την εβδομάδα πληρώνει 80€. Άρα κερδίζει $10x$ - 80. Θέλει να κερδίσει πάνω από 100€ την εβδομάδα. Άρα, ψάχνουμε τον x έτσι ώστε: $10x – 80 > 100$. Αυτή είναι η ανίσωση που εκφράζει το πρόβλημα.
Βήμα 3: **Λύνω την ανίσωση**	- Λύνω την ανίσωση 1^{ου} βαθμού με άγνωστο τον x όπως έμαθα προηγουμένως. $10x – 80 > 100$ $10x – 80 +80 > 100 +80$ $10x > 180$ $\frac{10x}{10} > \frac{180}{10}$ $x > 18$. Άρα κάθε αριθμός μεγαλύτερος από το 18 είναι λύση της ανίσωσης.

Βήμα 4: **Επαληθεύω τη λύση στο πρόβλημα και γράφω το συμπέρασμα**	<u>- Βλέπω αν οι τιμές του αγνώστου x έχουν νόημα στο πρόβλημα.</u> $x > 18$ σημαίνει ότι, θα πρέπει να φτιάξει περισσότερο από 18 κιλά την εβδομάδα. Ξέρουμε ότι κάθε εβδομάδα φτιάχνει 30 κιλά. Άρα, το να φτιάξει περισσότερο από 18 κιλά ‘βγάζει νόημα’ στο πρόβλημα. <u>- Γράφω το συμπέρασμα για το ερώτημα του προβλήματος.</u> Για να κερδίσει ο κύριος Μαχμούντ περισσότερο από 100€ την εβδομάδα, θα πρέπει να πουλήσει περισσότερο από 18 κιλά.

- Συζήτησε με την ομάδα σου, τι αλλάζει στην ανίσωση αν ο κύριος Μαχμούτ θέλει να κερδίσει **τουλάχιστον** 100€ την εβδομάδα; ……………………………………………………………………………………….
Τι αλλάζει στο συμπέρασμα; ……………………………………………………………………………………………

Πρόβλημα 2

Ο Αμίρ θέλει να μεταφέρει κουτιά με το ασανσέρ. Το ασανσέρ αντέχει **μέχρι και** 250 kg. Ο Αμίρ είναι 40 kg. Το κάθε κουτί ζυγίζει 5 kg. Ο Αμίρ βιάζεται. Μέχρι πόσα κουτιά μπορεί να μεταφέρει κάθε φορά με το ασανσέρ;

Πρόβλημα 3

Ο Εχσάν παίζει συχνά video games. Θέλει να κάνει εγγραφή σ’ ένα Internet café. Έχει 2 επιλογές:
<u>Επιλογή 1:</u> Πληρώνει για εγγραφή 12€ και κάθε φορά που πηγαίνει πληρώνει 1,6€.
<u>Επιλογή 2:</u> Πληρώνει για εγγραφή 10€ και κάθε φορά που πηγαίνει πληρώνει 2€.
Ο Εχσάν επέλεξε την επιλογή 1 και τελικά δεν το μετάνιωσε. Πόσες φορές πήγε;

Οι καινούριες μου λέξεις

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που συνάντησες σε αυτή την ενότητα.
……
……
……

Γράψε τις καινούριες μαθηματικές λέξεις που συνάντησες.
……
……

Ενότητα Α8

Συναρτήσεις

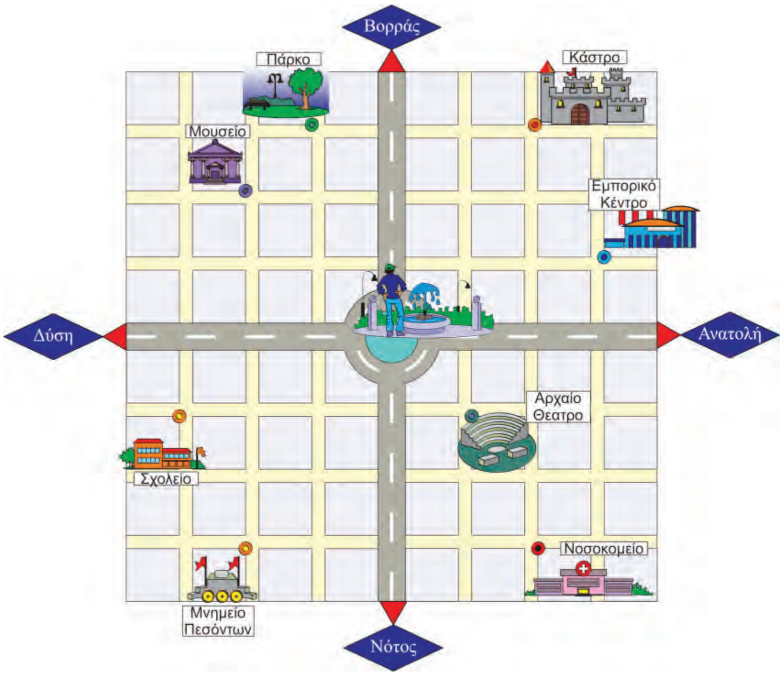
1. Σύστημα αξόνων

1.1 Διερεύνηση (δραστηριότητα προσανατολισμού)

α) Ο Αλί βρίσκεται στην κεντρική πλατεία μιας πόλης. Θέλει να πάει στο εμπορικό κέντρο. Πώς θα του πείτε να πάει;

β) *Οδηγίες κατεύθυνσης: η Ανατολή-Δύση είναι το δεξιά-αριστερά και βορράς-νότος είναι το πάνω-κάτω.*
Έτσι για παράδειγμα, για να πάει από το κέντρο της πόλης στο εμπορικό κέντρο, θα κινηθεί **δεξιά** **3** τετράγωνα και **πάνω** **1**.

Ο Αλί ξεκινά πάντα από το κέντρο της πόλης. Συμπληρώστε τα κενά όπως στο πάνω παράδειγμα:



- Για να πάει στο μνημείο πεσόντων θα πάει αριστερά ___ τετράγωνα και κάτω ___.
- Για να πάει στο αρχαίο θέατρο θα πάει _______ ___ τετράγωνα και ______ ___.
- Για να πάει στο πάρκο θα πάει _______ ___ τετράγωνα και ______ ___.
- Για να πάει στο μουσείο θα πάει _______ ___ τετράγωνα και ______ ___.
- Για να πάει στο κάστρο θα πάει _______ ___ τετράγωνα και ______ ___.

Η δραστηριότητα μπορεί να γίνει και με το μικροπείραμα (από το Φωτόδεντρο): http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2022

1.2 Ορισμός – Εφαρμογή *(οι συντεταγμένες στο σύστημα αξόνων)*

α) Θέλουμε να πούμε με ακρίβεια πού είναι ένα σημείο πάνω σε ένα επίπεδο. Γι' αυτό, σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες x΄x και y΄y με σημείο τομής ένα σημείο Ο. Ο οριζόντιος x΄x λέγεται **άξονας του x**. Ο κατακόρυφος y΄y λέγεται **άξονας του y.** Όπως στη διπλανή εικόνα.

β) Πως θα πούμε σε κάποιον που είναι στο Ο να πάει στο σημείο Ζ;
(Θα λέμε δεξιά, για να κινηθεί στον Οx, αριστερά για τον Οx΄, πάνω για τον Οy και κάτω για τον Οy΄).

Θα πούμε, πήγαινε **δεξιά 3 μονάδες** και **κάτω 2 μονάδες**.
Το σημείο Ζ, θα το λέμε (3,-2).

Πως θα πούμε σε κάποιον να πάει στο σημείο Τ; Πήγαινε **3 μονάδες** ___________ και **4 μονάδες** _______. Το σημείο Τ είναι το (-3,4).	Πως θα πούμε σε κάποιον πάει στο σημείο Φ; Πήγαινε ____ **μονάδες** _______ και ____ **μονάδες** _______. Το σημείο Τ είναι το (__ , __).	Πως θα πούμε σε κάποιον πάει στο σημείο Ρ; Πήγαινε ____ **μονάδες** _______ και ____ **μονάδες** _______. Το σημείο Τ είναι το (__ , __).
		

γ) Γενικά, συμβολίζουμε ένα τυχαίο σημείο Μ με Μ(α,β). Τους αριθμούς (α,β) θα τους λέμε **συντεταγμένες** του Μ. Το α θα το λέμε x-συντεταγμένη, ενώ το β y-συντεταγμένη.

Συμπληρώστε τα κενά του πίνακα, όπως στα σημεία Α και Β:

Σημεία	x-συντεταγμένη	y-συντεταγμένη
Α	1	5
Β	-3	2
Γ		
Δ		
Ε		
Ζ		

Κάντε παρόμοια δραστηριότητα με το μικροπείραμα: https://www.geogebra.org/m/zpk9eajf

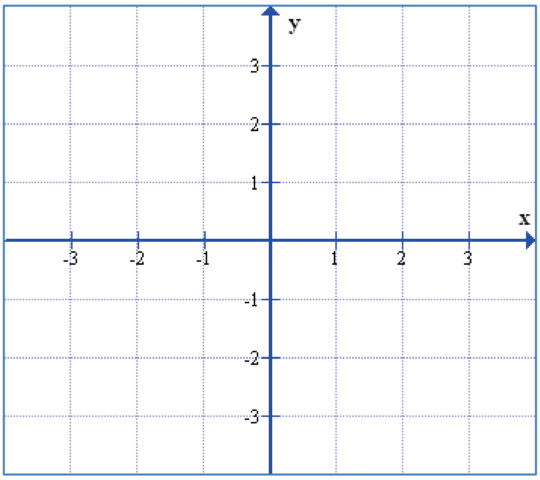
Θυμάμαι για τις συντεταγμένες : (↔ , ↕)

1.3 Άσκηση *(τοποθέτηση σημείων στο σύστημα αξόνων)*

Τοποθετήστε στη σωστή τους θέση τα παρακάτω σημεία: Α (-1,2) Β(3,-3) Γ(0,-2), Δ(2,0) Ε(-2,2) Ζ(1,0) Η(0,-3) Θ(3,3) Ι(0,2)

Τι είναι ίδιο σε όλα τα σημεία που είναι πάνω στον άξονα των x;

Τι είναι ίδιο σε όλα τα σημεία που είναι πάνω στον άξονα των y;



Η δραστηριότητα μπορεί να γίνει και με τα μικροπειράματα:
https://www.geogebra.org/m/c9mak8kg , https://www.geogebra.org/m/ywvpchvu

1.4 Άσκηση *(αναγνώριση σημείων στο σύστημα αξόνων)*

Γράψτε δίπλα από κάθε σημείο, τις συντεταγμένες του.

2. Ποσά ανάλογα και ποσά αντιστρόφως ανάλογα

2.1 Διερεύνηση *(ποσά ανάλογα)*

α) Η Ερντέμ αγόρασε ντομάτες που έχουν 2 € το Kg. Αν αγοράσει δύο κιλά θα πληρώσει …… €. Αν αγοράσει 3 κιλά θα πληρώσει …… €. Αν αγοράσει 4 κιλά θα πληρώσει …… €.

Συμβολίζουμε με χτην ποσότητα που αγόρασε (σε kg). Συμβολίζουμε με ψ τα χρήματα (σε €) που θα πληρώσει. Μπορείτε να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα;

Κιλά (x)	Χρήματα (y)
1	2
2	4
3	….
4	….
8	….
….	20

Η Ερντέμ λέει ότι αν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές του x με έναν αριθμό (π.χ το 1 με 2) τότε και η αντίστοιχη τιμή του y πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό (2 ·2 =4). Είναι σωστό αυτό που λέει η Ερντέμ;

Συμπληρώστε τα κενά για τους λόγους $\frac{y}{x}$

$\frac{2}{1}=$ …. , $\frac{4}{2}=$ …. , $\frac{\dots}{3}=$ …. , $\frac{\dots}{4}=$ …. , $\frac{\dots}{8}=$ …. , $\frac{20}{\dots}=$ ….

Τι παρατηρείτε;

β) Ένα λεωφορείο ταξιδεύει με ταχύτητα 100 Km την ώρα (h). Σε 2 ώρες θα κάνει ….. Km. Σε 3 ώρες θα κάνει ….. Km. Σε 4ώρες θα κάνει ….. Km.

Συμβολίζουμε το χρόνο με t και την απόσταση με s. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

t (σε h)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s (σε Km)	100	….	….	….	….	….	….	….	….	….

Συμπληρώστε τα κενά για τους λόγους $\frac{s}{t}$

$\frac{100}{1}=$ …. , $\frac{\dots}{2}=$ …. , $\frac{\dots}{3}=$ …. , $\frac{\dots}{4}=$ …. , $\frac{\dots}{5}=$ …. , $\frac{\dots}{6}=$ …. , $\frac{\dots}{7}=$ …. , $\frac{\dots}{8}=$ …. , $\frac{\dots}{9}=$ …. , $\frac{\dots}{10}=$ ….

Τι παρατηρείτε;

Ορισμός

*Δύο ποσά x και y είναι **ανάλογα**, όταν οι τιμές για το ένα ποσό πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό τότε και οι αντίστοιχες τιμές για το άλλο ποσό, πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.*

*Στα ανάλογα ποσά, οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα το ίδιο λόγο, δηλαδή $\frac{y}{x}=\alpha$. Ο σταθερός λόγος α λέγεται **συντελεστής αναλογίας**. Η παραπάνω σχέση γράφεται πολλές φορές y=αx.*

Παρατήρηση: Μόνο σε ανάλογα ποσά οι αντίστοιχες τιμές δίνουν πάντα τον ίδιο λόγο.

- Τα ποσά «Ποσότητα ντομάτες-Χρήματα» είναι ποσά ανάλογα; Αν ναι, ποιος είναι ο συντελεστής αναλογίας;
- Τα ποσά «Χρόνος-Απόσταση» είναι ποσά ανάλογα; Αν ναι, ποιος είναι ο συντελεστής αναλογίας;
- Μπορείτε να γράψετε και άλλα παραδείγματα με ποσά που είναι ανάλογα;

2.2 Άσκηση *(πίνακας τιμών ανάλογων ποσών)*

Συμπληρώστε τους πίνακες, ώστε τα x και y να είναι ποσά ανάλογα. Δίπλα σε κάθε πίνακα, συμπληρώστε τη σχέση που συνδέει τα ποσά x και y, όπως στο πρώτο παράδειγμα:

α) Παρατηρούμε ότι 2 x 3 = 8. Άρα 3 x 3 = ...

x	y
3	2
....	6
24	....

X3

Όμοια 3 x 8 = 24. Άρα 2 x 8 = ...

x 8

x	y
3	2
....	6
24	....

Παρατηρούμε ότι: $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$, άρα y= $\frac{2}{3}$ x είναι η σχέση του y με το x.

Συμπληρώστε τα κενά όπως στο προηγούμενο παράδειγμα

(β)

x	y
2	4
3	6
...	10

$\frac{y}{x} =$ ___ ή y=___ x

(γ)

x	y
1	5
20	....
....	45

$\frac{y}{x} =$ ___ ή y=___ x

(δ)

X	y
15	11
45	....
....	99

$\frac{y}{x} =$ ___ ή y=___ x

Πολλές φορές είναι πιο εύκολο να βλέπουμε με ποιον αριθμό πολλαπλασιάζεται ο x και δίνει y. Σε ποιους από τους 3 πίνακες γίνεται εύκολα κι έτσι;

Η δραστηριότητα μπορεί να γίνει και με το μικροπείραμα (από το Φωτόδεντρο):
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2341

2.3 Διερεύνηση *(πίνακας τιμών ανάλογων ποσών)*

Η Αζάρ είναι 12 χρονών και ο αδελφός της Εχσάν, είναι 6 χρονών. Η Αζάρ λέει ότι οι ηλικίες τους είναι ποσά ανάλογα, αφού όσα χρόνια μεγαλώνει αυτή, τόσα θα μεγαλώνει και ο αδελφός της.

Ηλικία Αζάρ	12	13	14	15	16
Ηλικία Εχσάν	6	7	8	9	10

Έχει δίκιο η Αζάρ;

Προσοχή: *Αν σε ένα λόγο προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό σε αριθμητή και παρονομαστή, τότε ο λόγος δεν παραμένει ο ίδιος, για παράδειγμα* $\frac{1}{2} \neq \frac{1+6}{2+6} = \frac{7}{8}$

2.4 Διερεύνηση *(γραφική παράσταση δύο ανάλογων ποσών)*

Η Μίριαμ αγοράζει λεμόνια. Το κάθε κιλό έχει 1,5 €.

α) Συμπληρώστε τον διπλανό πίνακα τιμών με τα χρήματα σε € που θα πληρώσει η Μίριαμ.

x (κιλά λεμόνια)	1	2	3	4	5	6
y (χρήματα σε €)						

Η ποσότητα από λεμόνια και τα χρήματα που θα πληρώσει, είναι ποσά ανάλογα; Γιατί;

β) Βάλτε τα σημεία από τον παραπάνω πίνακα στο διπλανό σύστημα ημιαξόνων.

γ) Τι παρατηρείτε για τα σημεία αυτά;

Η δραστηριότητα μπορεί να γίνει και με το μικροπείραμα (από το Φωτόδεντρο): http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2344

2.5 Διερεύνηση *(εισαγωγή στην κλίση ευθείας)*

Ο Άχμαντ αγόρασε ροδάκινα με 2 € το κιλό. Η Ελένη τα αγόρασε με 2,5 € το κιλό. Ο Γκεόργκι τα αγόρασε με 3 € το κιλό. Συμβολίζουμε με x την ποσότητα που αγόρασαν (σε κιλά) και με y τα χρήματα που πλήρωσαν (σε €).

α) Ο τύπος για τη σχέση που έχουν τα χρήματα που πλήρωσε το κάθε παιδί, για τα ροδάκινα που αγόρασε, είναι: Άχμαντ: y=_____ , Ελένη: y=_____ , Γκεόργκι: y=_____

(i) (ii) (iii)

β) Μπορείτε να βρείτε ποια γραφική παράσταση αντιστοιχεί στη σχέση αναλογίας «ποσότητα-χρήματα» για κάθε παιδί;

γ) Παρατηρήστε πόσο αυξάνεται το y όταν το x αυξάνεται κατά 1.

Τι παρατηρείτε;

2.6 Ασκήσεις *(επίλυση προβλημάτων με ποσά ανάλογα)*

α) Ένα μαγαζί κάνει έκπτωση 20% σε όλα τα είδη του. Ο πίνακας δείχνει την τιμή ή την έκπτωση για κάποια είδη. Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα; (έκπτωση είναι τα χρήματα που αφαιρούνται από την αρχική τιμή).

Αρχική τιμή	Έ
100	
50	
200	
…	
…	100

*Το **ποσοστό** είναι ένας αριθμός που γράφεται ως ένα κλάσμα με παρονομαστή το 100. Χρησιμοποιούμε για το ποσοστό, το σύμβολο % και το διαβάζουμε «τοις εκατό», π.χ. 20% = $\frac{20}{100}$ = 0,20*

β) Ένα κινητό κοστίζει 240 € και πωλείται σε έκπτωση. Υπάρχουν μαγαζιά που πουλάνε το κινητό με έκπτωση 10%, άλλα που το πουλάνε με έκπτωση 30% κ.λπ. Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα; (έκπτωση είναι τα χρήματα που αφαιρούνται από την αρχική τιμή).

Ποσοστό έκπτωσης (%)	Έκπτωση
10	24
30	….
55	….
….	12
….	42

β) Η Μπαράν θέλει να αγοράσει παπούτσια με τιμή 20 €. Το μαγαζί κάνει έκπτωση 30%. Πόσα χρήματα θα πληρώσει, για να το αγοράσει; Η τιμή πριν την έκπτωση και μετά την έκπτωση είναι ανάλογα.

Σε μία αναλογία τα χιαστί γινόμενα είναι ίσα, δηλ: αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε α·δ=β·γ

- Η Μαρία έκανε τον πίνακα και έγραψε την αναλογία

Τιμή πριν την έκπτωση	Τιμή μετά την έκπτωση
100	70
20	x

$\frac{100}{70} = \frac{20}{x}$ και έλυσε το πρόβλημα 100·x=20·70 ή 100·x=1400 ή x= $\frac{1400}{100}$ ή x=14 €

- Η Νικολίνα έκανε τον ίδιο πίνακα αλλά έγραψε την αναλογία $\frac{100}{20} = \frac{70}{x}$.

Θα βρει το ίδιο αποτέλεσμα με τη Μαρία; Βρείτε και σεις το x και εξηγήστε γιατί το αποτέλεσμα είναι το ίδιο ή γιατί είναι διαφορετικό.

γ) Από ένα μαγαζί, η Σάλμα αγόρασε 3 κονσέρβες και ο Αντώνης 4 κονσέρβες και πλήρωσε η Σάλμα 28 € και για τους δύο. Έχασαν την απόδειξη και θέλουν να βρουν πόσα χρήματα χρωστάει ο Αντώνης στη Σάλμα. Συμπληρώστε τα κενά στον πίνακα και λύστε το πρόβλημα:

	Χρήματα	Κονσέρβες
Και οι δύο	….	….
Αντώνης	….	….

2.7 Διερεύνηση *(ποσά αντιστρόφως ανάλογα)*

Οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου θέλουν να φτιάξουν ένα ορθογώνιο κήπο με ένα συγκεκριμένο εμβαδόν, όπως στο διπλανό σχήμα.

α) Ποιο είναι το εμβαδόν του κήπου (σε m^2);

β) Ο Αλί είπε ότι μπορούμε να φτιάξουμε και άλλα ορθογώνια με αυτό το εμβαδό.

Μπορείτε να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα;

Μήκος (σε m)	15	1	2			
Πλάτος (σε m)	4			20	12	10
Εμβαδόν (σε m^2)	60	60	60	60	60	60

γ) Παρατηρήστε τις τιμές του παραπάνω πίνακα. Όταν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε τι συμβαίνει στις τιμές του άλλου ποσού;

Η δραστηριότητα μπορεί να γίνει και με το μικροπείραμα (από το Φωτόδεντρο):
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1963

Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, όταν πολλαπλασιάζουμε την τιμή από το ένα ποσόν, με έναν αριθμό, τότε διαιρούμε με τον ίδιο αριθμό, την τιμή από το άλλο ποσόν.

Μαθαίνω

*Δύο ποσά x και y είναι **αντιστρόφως ανάλογα**, όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα ίδιο γινόμενο, δηλαδή x·y= α.*

2.8 Άσκηση *(ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα)*

i) Συμπληρώστε τον πίνακα ώστε τα ποσά x και y να είναι αντιστρόφως ανάλογα

X	1	2	3	4	6	12	1,5
Y	12						

Η δραστηριότητα μπορεί να γίνει και με το μικροπείραμα (από το Φωτόδεντρο):
http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2042

ii) Τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα;

α) _______________

x	4	2	2,5
y	5	10	8

β) ____________________

x	2	5	8
y	4	10	16

γ) ________________

x	3	2	1
y	5/3	5/2	5

Εξηγήστε γιατί:

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

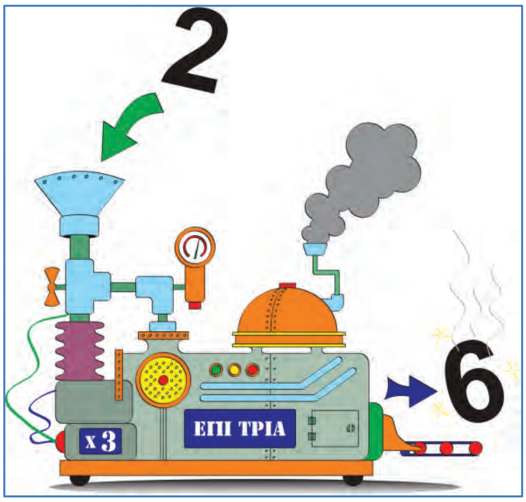
Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

………

………

3. Η έννοια της συνάρτησης

3.1 – Διερεύνηση *(η συνάρτηση ως μηχανή)*



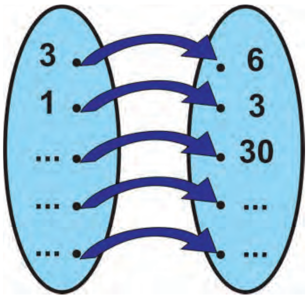
Σε μια μηχανή μπορούμε να βάζουμε τιμές και να μας βγάζει άλλες τιμές, σύμφωνα με έναν κανόνα.

1. Στη διπλανή εικόνα έχουμε μια μηχανή που πολλαπλασιάζει με 3 τον αριθμό που βάζουμε. Έτσι αν βάλουμε το 2 η μηχανή βγάζει 6 (γιατί 2·3=6).

α) Τι αποτέλεσμα θα έχουμε όταν βάζουμε το 3;

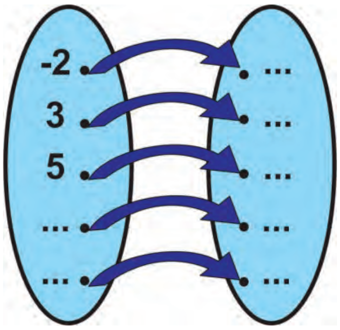
β) Για να έχουμε αποτέλεσμα 27, ποιός αριθμός μπήκε στη μηχανή;

2. Τους αριθμούς που βάζουμε στη μηχανή και τους αριθμούς που βγάζουμε, μπορούμε να τους γράψουμε και σε ένα διάγραμμα. Για το διπλανό διάγραμμα, βρείτε τον κανόνα και συμπληρώστε τα κενά (βάλτε και δικούς σας αριθμούς).

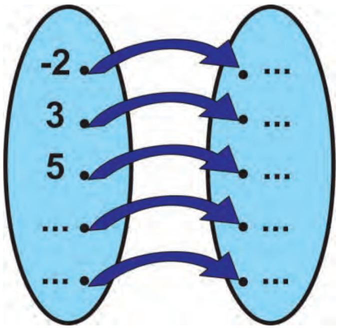


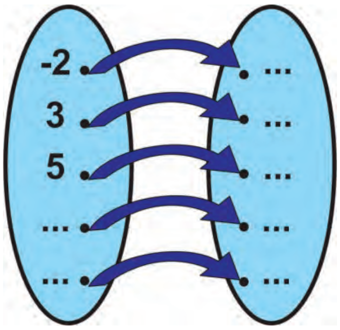
3. Συμπληρώστε τα κενά στα διαγράμματα (βάλτε και δικούς σας αριθμούς). Τι συμβαίνει στους αριθμούς -2, 3, 5 όταν χρησιμοποιούμε:

α) μια μηχανή με κανόνα: «διπλασίασε»;

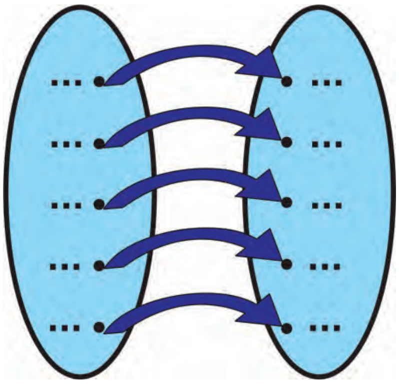


β) μια μηχανή με κανόνα: «αφαίρεσε 3;





γ) μια μηχανή με κανόνα: «πολλαπλασίασε με το 2 και μετά πρόσθεσε 3»;



δ) Βρείτε μια δική σας μηχανή με κανόνα: « ……………………………
…………………………» και συμπληρώστε τα κενά.

Μαθαίνω

Μία **σχέση** δύο μεταβλητών x (όπως η τιμή που βάζουμε στη μηχανή) και y (όπως η τιμή που βγάζει η μηχανή) την ονομάζουμε **συνάρτηση,** όταν **κάθε τιμή** της μεταβλητής x αντιστοιχεί σε **μία μόνο τιμή** της μεταβλητής y.

3.2 Διερεύνηση *(ο τύπος μιας συνάρτησης)*

α) Στην προηγούμενη μηχανή, θα συμβολίσουμε με x τον αριθμό που βάζουμε και y τον αριθμό που βγάζει η μηχανή.

Τον κανόνα «διπλασίασε» μπορούμε να τον γράψουμε με τον τύπο: $y=2\cdot x$

Συμπλήρωσε τον τύπο για τους υπόλοιπους κανόνες:

- «αφαίρεσε 3»: τύπος: y=………
- «πολλαπλασίασε με το 2 και μετά πρόσθεσε 3»: τύπος: y=………
- Δικός σου κανόνας: «………………………………………………………………………»: τύπος: y=………

β) Ένα διάγραμμα μπορούμε να το γράψουμε και σε ένα πίνακα.

- Παρατηρήστε τον διπλανό πίνακα.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-12	-8	-4	0	4	8	12

Ο καθηγητής ζήτησε απ τους μαθητές να βρουν τον τύπο της συνάρτησης του y με το x.

- Η Δήμητρα είπε «αφού το y ανεβαίνει κατά 4, ο τύπος είναι y=x+4». Συμφωνείτε με την άποψη της Δήμητρας;

- Ο Γιώργος είπε ότι ο τύπος είναι y=x-9 αφού στο -3 θα πρέπει να προσθέσουμε -9 για να βρούμε -12. Συμφωνείτε με την άποψη του Γιώργου;

Αν όχι, γράψτε το τύπο με την ομάδα σας και εξηγήστε στην τάξη τον τρόπο που το βρήκατε. y=_______

- Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης του y με το x στους παρακάτω πίνακες:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6

y=________

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	6	3	0	-3	-6	-9

y=_______

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	0	1	2	3	4	5

y=_______

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4

y=_______

γ) Ένα κιλό πορτοκάλια έχει 1,2 €. Αν αγοράσουμε x κιλά θα πληρώσουμε y €. Να γράψετε έναν τύπο που να περιγράφει την σχέση που έχει το ψ με το χ; y= ……………………..

δ) Ο Ιβάν κάθε μέρα που πηγαίνει στη δουλειά του πληρώνει 2,8 € στο λεωφορείο. Κάθε μήνα πληρώνει 40 € για να φάει στη δουλειά. Συμβολίζουμε με x πόσες φορές χρησιμοποιεί λεωφορείο κάθε μήνα. Συμβολίζουμε με y τα συνολικά χρήματα που ξοδεύει κάθε μήνα, για τη δουλειά (λεωφορείο + φαγητό). Συμπλήρωσε τον τύπο του y με το x: y=…………………………

3.3 Διερευνήσεις *(οι τρόποι αναπαράστασης μιας συνάρτησης)*

1η διερεύνηση

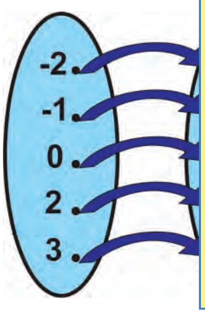
Η θερμοκρασία μία ημέρα στην Αθήνα (θα το πούμε y) ήταν 2 °C περισσότερο από τη θερμοκρασία στη Θεσσαλονίκη (θα το πούμε x). Εκείνη την ημέρα μέτρησε ο Μαχμούντ 5 φορές τη θερμοκρασία στη Θεσσαλονίκη και ήταν -2, -1, 0, 2, 3. Θα δούμε διάφορους τρόπους, για να εκφράσουμε τη συνάρτηση της θερμοκρασίας της Αθήνας, ως προς τη θερμοκρασία της Θεσσαλονίκης. Συμπληρώστε τα κενά.

α) με πίνακα τιμών. Το -2 γίνεται -2+2=0. Το 0 γίνεται …. + 2 = …. Το 2 γίνεται …. + 2 = …..

ωΤο 3 γίνεται …. + 2 = …..

x	-2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

β) με [illegible] **διάγραμμα.**



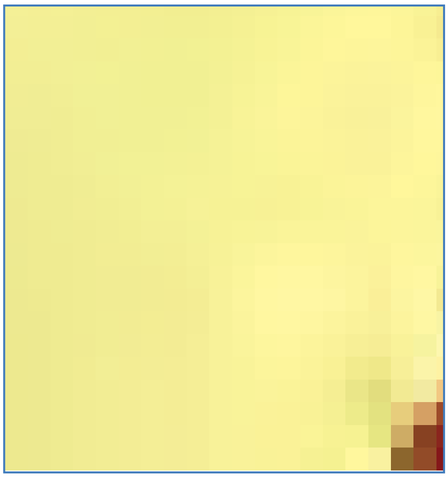
γ) με γραφική παράσταση

(βάλτε τα ζεύγη (χ,ψ) στο σύστημα αξόνων)

δ) Με τύπο y=________

ε) Ο Μαχμούντ αναρωτήθηκε ποια θα είναι η θερμοκρασία στην Αθήνα όταν στη Θεσσαλονίκη είναι 1,

-1,5, 0,5 κ.κλ.; Έκανε αυτή τη γραφική παράσταση και εξήγησε ότι ένωσε τα σημεία γιατί η θερμοκρασία π.χ. δεν μπορεί να φτάσει από -2 στο 3 χωρίς να πάρει όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



Είναι σωστό που ένωσε τα σημεία;

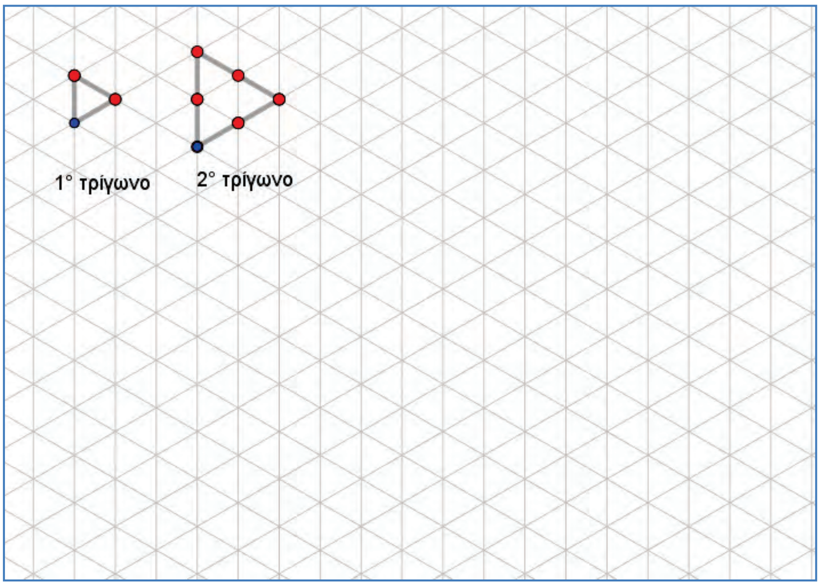
Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας στην τάξη.

<u>2η διερεύνηση</u>

Ο καθηγητής των μαθηματικών έβαλε ένα πρόβλημα στους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου. «Με σπίρτα φτιάχνουμε τρίγωνα όπως στο σχήμα. Πόσα σπίρτα θα χρειαστούμε για να φτιάξουμε το 85ο τρίγωνο; Με 456 σπίρτα μπορούμε να φτιάξουμε ένα τρίγωνο;»

Η Σαλιχά σκέφτεται ότι δεν μπορεί να φτιάξει με σπίρτα τόσο μεγάλα τρίγωνα, για να λύσει το πρόβλημα. Μπορείτε να τη βοηθήσετε;

Τα επόμενα ερωτήματα θα σας βοηθήσουν να βρείτε ένα άλλον τρόπο να λύνετε τέτοια προβλήματα.



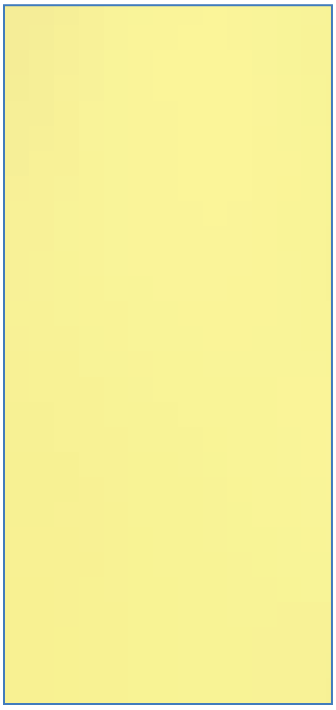
α) Σχεδιάστε το 3ο και 4ο τρίγωνο.

β) Συμπληρώστε τον πίνακα με τον αριθμό των σπίρτων που έχει το κάθε τρίγωνο. Ας συμβολίσουμε τον αριθμό από το τρίγωνο με x και από το τρίγωνο με y.

Συζητήστε με την ομάδα σας και σκεφτείτε έναν τρόπο για να συμπληρώσετε τα σπίρτα για το 30ο τρίγωνο.

Αριθμός τριγώνου (x)	1	2	3	4	…	30
Σπίρτα (y)	3	6	….	….	…	….

Μπορείς να περιγράψεις με λόγια πως θα βρεις τον αριθμό των σπίρτων όταν ξέρεις τον αριθμό από το τρίγωνο;



γ) Μπορείτε να συμπληρώσετε τον τύπο της συνάρτησης του y με το x;

y=______

δ) - Πόσα σπίρτα θα χρειαστούμε για να φτιάξουμε το $85^{ο}$ τρίγωνο;

- Με 456 σπίρτα μπορούμε να φτιάξουμε ένα τρίγωνο;

ε) Ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να φτιάξουν τη γραφική παράσταση για τη συνάρτηση «τρίγωνο-σπίρτα».

Η Σελιχά τοποθέτησε κάποια σημεία και τα ένωσε όπως στο διπλανό σχήμα.

Τοποθέτησε σωστά τα σημεία;

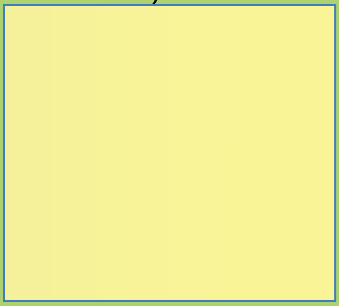
Είναι σωστό που ένωσε τα σημεία;

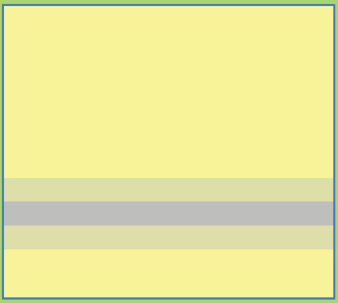
Συζητήστε στην ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης στο σύστημα αξόνων μπορεί να είναι:

(α) ***σημεία*** *όταν το x παίρνει κάποιες τιμές, όπως στο σχήμα (I) που το x παίρνει τις τιμές -2, -1, 0, 1 και 2.*

(β) ***συνεχόμενη γραμμή*** *όταν το x παίρνει όλες τις τιμές από τον άξονα x΄x, όπως στο σχήμα (II) ή από ένα κομμάτι του, όπως στο σχήμα (III) που το x παίρνει όλες τις τιμές από -1 έως 2.*





3.4 Διερεύνηση *(αντλώντας πληροφορίες από τη γραφική παράσταση)*

Η γραφική παράσταση δείχνει τη θερμοκρασία Τ (σε ˚C) σε ένα χωριό για 24 ώρες (από τα μεσάνυχτα της μίας μέρας ως τα μεσάνυχτα της άλλης). Συμπληρώστε τα κενά.

α) Η θερμοκρασία την ώρα 0 (τα μεσάνυχτα) ήταν ____ °C.

Στη 1 (το πρωί) ήταν ____ °C.

Στις 6 (το πρωί) ήταν ____ °C.

Στις 14 (2 το μεσημέρι) ήταν ____ °C.

Στις 24 (τα μεσάνυχτα) ήταν ____ °C.

β) Η μικρότερη θερμοκρασία ήταν ____ °C την ώρα ____ .

Η μεγαλύτερη θερμοκρασία ήταν ____ °C την ώρα ____

γ) Η θερμοκρασία ήταν 3 °C τις ώρες: ____ και ____

Η θερμοκρασία ήταν 0^{o} C τις ώρες: ____ και ____

δ) Πόσες φορές κατά τη διάρκεια του 24ώρου η θερμοκρασία ήταν -3^{o} C;

Πόσες φορές κατά τη διάρκεια του 24ώρου η θερμοκρασία ήταν 6^{o} C;

ε) Από τι ώρα η θερμοκρασία άρχισε να ανεβαίνει και μέχρι ποιά ώρα έγινε αυτό;

ζ) Μπορείτε να βρείτε και άλλες πληροφορίες που μπορούμε να πάρουμε από αυτή τη γραφική παράσταση;

4. Η συνάρτηση y=αχ

4.1 Διερεύνηση *(η συνάρτηση ανάλογων ποσών)*

Η Αζάρ λέει έναν αριθμό (θα τον πούμε x) και ο Δημήτρης τον πολλαπλασιάζει με 3 (θα τον πούμε y).

Ο τύπος της συνάρτησης είναι y=…. x

α) Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί οι αριθμοί y και x είναι ποσά ανάλογα;

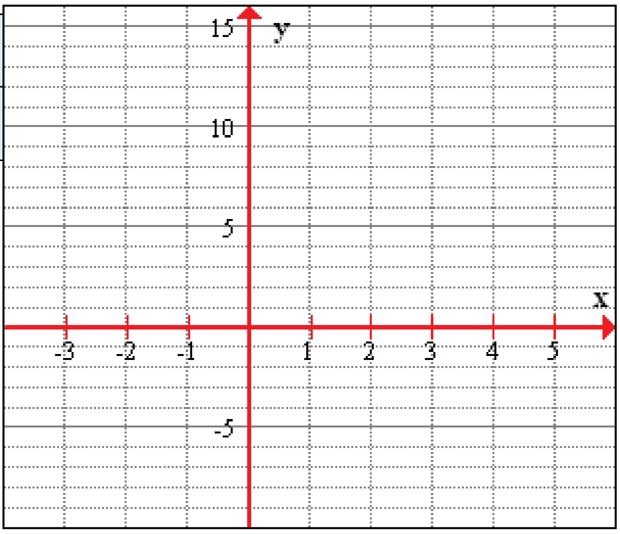
Δύο ποσά είναι ανάλογα όταν ο λόγος τους είναι σταθερός.

β) Η Αζάρ είπε τους αριθμούς που φαίνονται στον πίνακα. Τι απάντησε ο Δημήτρης;

Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών

X	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Y								

γ) Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, όπου x πραγματικός αριθμός.



4.2 Διερεύνηση *(η συνάρτηση y=αx)*

Δίνεται η συνάρτηση y=αx με α≠0.

α) Τα ποσά y και x είναι ποσά ανάλογα; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

β) Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί η γραφική της παράσταση περνάει πάντα από το σημείο (0,0);

Στη συνάρτηση y=αx :

- Τα x και y είναι ποσά ____________
- Η συνάρτηση περνάει πάντα από το σημείο ______________
- Η γραφική της παράσταση είναι ____________
- Για να γίνει η γραφική της παράσταση αρκούν ______ σημεία.
- Το α ονομάζεται **κλίση** της ευθείας και δείχνει πόσο αλλάζει το ____ όταν το x ____________ κατά ___.

*Το **α** στην y=**α**x που ονομάζεται **κλίση**, στα ανάλογα ποσά το λέγαμε **συντελεστή αναλογίας**.*

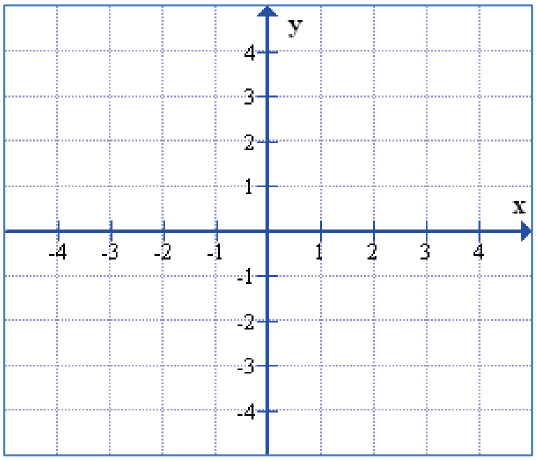
4.3 Άσκηση *(η γραφική παράσταση της y=αx)*

Χαράξτε τις γραφικές παραστάσεις για τις συναρτήσεις y=2x, y=-3x. Συμπληρώστε πρώτα τον πίνακα τιμών τους.

α) Για x=0 έχω y=…… Για x=1 έχω y=……

y=2x		
x	0	1
ψ		

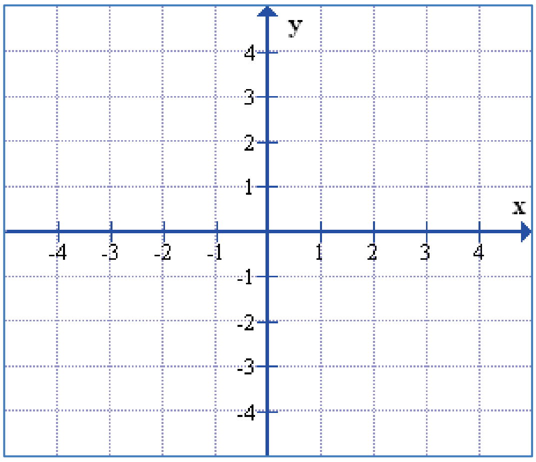
Η y=2x περνάει από τα σημεία (0,___) και (1,___)



β) Για x=0 έχω y=…… Για x=1 έχω y=……

y=-3x		
x	0	1
y		

Η y=-3x περνάει από τα σημεία (0,___) και (1,___)



4.4 Διερεύνηση *(από τη γραφική παράσταση στον τύπο)*

α) Ο καθηγητής σχεδίασε τη διπλανή γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και ζήτησε από τους μαθητές να βρουν τον τύπο της.

Ο Αφράν είπε ότι αφού είναι μια ευθεία που περνά από το (0,0) θα έχει τη μορφή y=αx. Έχει δίκιο ο Αφράν; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

β) Συμπληρώστε τον πίνακα με συντεταγμένες από σημεία της ευθείας που έχουν ακέραιες συντεταγμένες

x					
y					

γ) Μπορείτε να βρείτε τον τύπο της ευθείας;

Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε στην τάξη με ποιον τρόπο λύσατε το πρόβλημα.

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

5. Η συνάρτηση y=αχ+β

5.1 – Διερεύνηση *(η γραφική παράσταση της y=αx)*

Η Ερίνα αγοράζει ελιές. Το ένα κιλό (kg) ελιές κοστίζει 1,2 €. Θα συμβολίσουμε x την ποσότητα σε ελιές που αγόρασε και y τα χρήματα που πλήρωσε.

α) Ο τύπος του y με το x είναι y=_____

Αφού συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών, χαράξτε τη γραφική της παράσταση.

x		
y		

β) Αν θέλει τις ελιές σε ένα κουτί, πληρώνει 0,6 €.

Ο τύπος του y με το χ είναι: **y=**_________

Συμπληρώστε τον διπλανό πίνακα και χαράξτε στο προηγούμενο σύστημα αξόνων τη γραφική της παράσταση.

x	0	1	2	3	4	5
Χωρίς συσκευασία y =……	0					
Προσθέτουμε 0,6	+0,6	+0,6	+0,6	+0,6	+0,6	+0,6
Με συσκευασία y =…………	0,6					

Τι σχέση έχουν οι δύο προηγούμενες γραφικές παραστάσεις; Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε την γνώμη σας σε όλη την τάξη.

5.2 Άσκηση *(η γραφική παράσταση της y=αx+β όταν γνωρίζουμε την y=αx)*

α) Δίνουμε τη γραφική παράσταση της y=2x. Σύμφωνα με τα προηγούμενα συμπεράσματα, χαράξτε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- y=2x+1 που τέμνει τον y΄y στο σημείο (0, 1)
- y=2x+2 που τέμνει τον y΄y στο σημείο (0,__)
- y=2χ-3 που τέμνει τον y΄y στο σημείο (0,__)

Όλες αυτές οι ευθείες είναι μεταξύ τους ____________

β) Συμπληρώστε τα κενά:

i) Η y = -2x-5 είναι παράλληλη με την y=-2x άρα και με τις ευθείες: y=-2x+3 ή y=______ ή y=______

ii) Η y= 4x+13 είναι παράλληλη με την y=___x άρα και με τις ευθείες y=_______ ή y=_______

γ) Πού τέμνει η y=αx+β τον y΄y; Μπορείτε να το αποδείξετε;

Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.

Η δραστηριότητα μπορεί να γίνει και με το μικροπείραμα (από το Φωτόδεντρο): http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2128

5.3 Διερεύνηση *(ο ρόλος των α και β στην y=αx+β)*

Παρατηρήστε τις γραφικές παραστάσεις και συμπληρώστε τα κενά:

α) Στην y=-2x+1 όταν το x αυξάνεται κατά 1, το y μεταβάλλεται κατά ____.

Τέμνει τον y΄y στο σημείο (0,___)

β) Στην y=3x-2 όταν το x αυξάνεται κατά 1, το y μεταβάλλεται κατά ____.

Τέμνει τον y΄y στο σημείο (0,___)

γ) Ποιος είναι ο ρόλος των α και β στη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx+β;

Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.

Συμπληρώστε τα κενά:

1. Η γραφική παράσταση της y=αx+β είναι ευθεία ________________ στη γραφική παράσταση της y=αx.

2. Για να είναι δύο ευθείες παράλληλες πρέπει να έχουν ίδια **κλίση**.

3. Στην y=αx+β, το α δείχνει πόσο ________________ το y όταν το x ________________________ και το β δείχνει _______________________________________.

5.4 Άσκηση (χαράσσοντας τη γραφική παράσταση της *y=αx+β)*

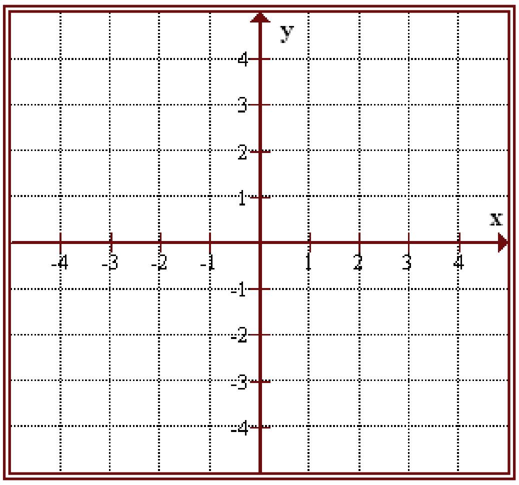
Χαράξτε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, αφού πρώτα συμπληρώσετε τους πίνακες τιμών τους. Γιατί ο πίνακας τιμών έχει δύο μόνο ζεύγη (x,y);

α) y=x-2

για x=___ έχω y= ________

για x=___ έχω y= ________

x		
y		



Επαληθεύστε τη γραφική παράσταση γνωρίζοντας το ρόλο των α και β.

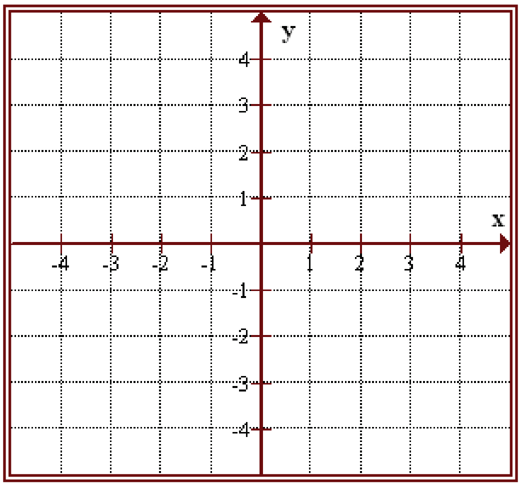
β) y=3x-4

για x=___ έχω y= _________

για x=___ έχω y= _________

x		
y		

Επαληθεύστε τη γραφική παράσταση γνωρίζοντας το ρόλο των α και β.



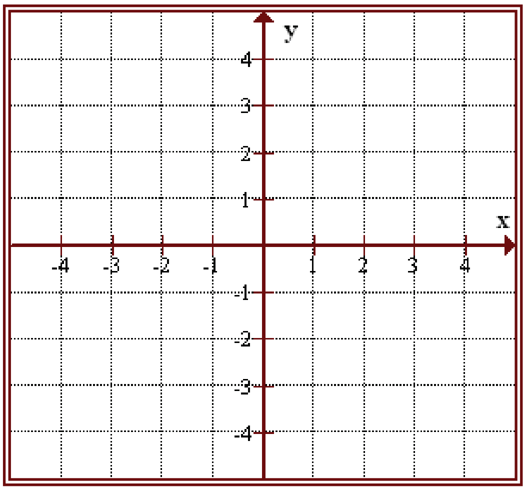
γ) y=-4x+3

για x=___ έχω y= _________

για x=___ έχω y= _________

x		
y		

Επαληθεύστε τη γραφική παράσταση γνωρίζοντας το ρόλο των α και β.



5.5 Διερεύνηση *(από τη γραφική παράσταση στον τύπο γνωρίζοντας τον ρόλο του α και του β)*

Μπορείτε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση;

α) **y=_________**

β) **y=_________**

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις γνώσεις σας για το ρόλο του α και β στην y=αx+β)

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

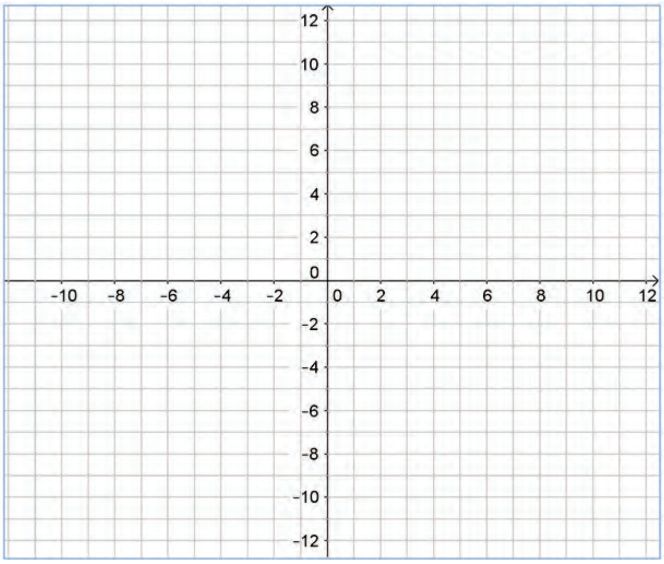
6. Η συνάρτηση y=α/χ

6.1 Διερεύνηση *(γραφική παράσταση αντιστρόφως ανάλογων ποσών)*

Δύο αριθμοί x και y έχουν γινόμενο 6. Άρα xy=_____   ή αλλιώς y=_______

α) Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών και χαράξτε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y								



β) Από τη γραφική παράσταση να εκτιμήσετε:

Αν το y είναι 4, το x είναι : _____

Αν το x είναι –1,5, το y είναι: ____

Βρείτε με πράξεις την τιμή του x όταν y=4 και την τιμή του y όταν χ=-1,5.

Συμφωνούν με αυτές που βρήκατε από τη γραφική παράσταση;

- Αν τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα τότε xy=α ή αλλιώς y=____ . Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης ονομάζεται **υπερβολή.**
- Η γραφική της παράσταση αποτελείται από δύο **σκέλη** τα οποία πλησιάζουν συνεχώς τους άξονες x΄xκαι y΄y, χωρίς να τους τέμνουν ποτέ.

Μορφές υπερβολής *Η υπερβολή έχει δύο μορφές, ανάλογα την τιμή του α:*

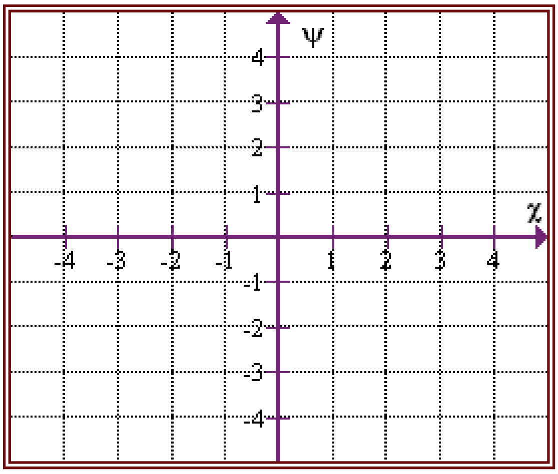
6.2 Άσκηση *(γραφική παράσταση μιας υπερβολής)*

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση δύο υπερβολών. Αφού γνωρίζουμε τη μορφή της γραφικής της παράστασης, μπορούμε να βρίσκουμε 4 σημεία, δύο σε κάθε σκέλος της υπερβολής

α)

$$y = \frac{3}{x}$$

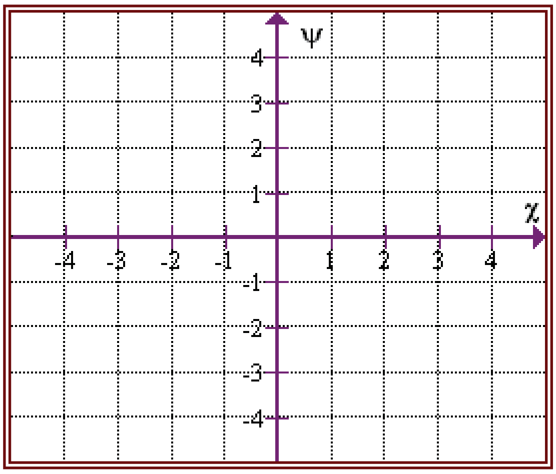
x				
y				



β)

$$y = -\frac{2}{x}$$

x				
y				



Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

………

………

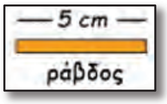
………

Ενότητα Α9

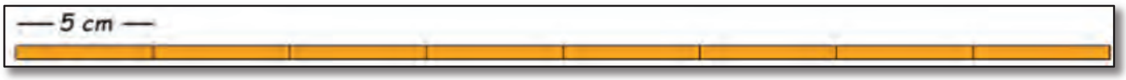
Αλγεβρικές παραστάσεις

1. Εισαγωγή

Το διπλανό είναι μια ράβδος με μήκος 5 cm.

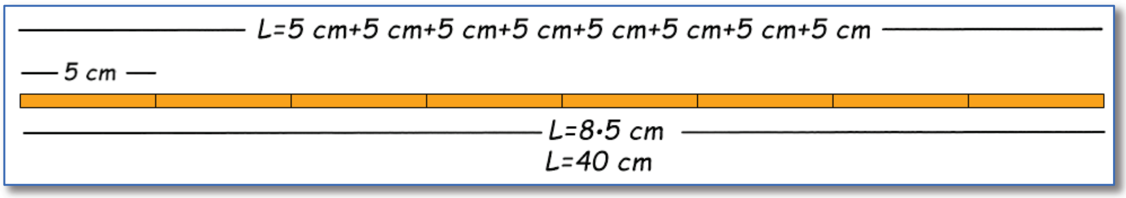


Το επόμενο δείχνει 8 τέτοιες ράβδους ενωμένες.



Το συνολικό μήκος L το γράφουμε **αναλυτικά**:
$L = 5\,cm + 5\,cm + 5\,cm + 5\,cm + 5\,cm + 5\,cm + 5\,cm + 5\,cm$. Κάποιες φορές θα το γράφουμε: $L = \underbrace{5\,cm + \cdots + 5\,cm}_{8\ όροι\ ίσοι\ με\ 5\ cm}$

Το παραπάνω άθροισμα **έχει 8 όρους ίσους με** 5 cm. Το συμβολίζουμε πιο **σύντομα** ως **γινόμενο με δύο παράγοντες**: $L = \underbrace{\quad 8 \cdot 5 \quad}_{2\ παράγοντες}\ cm.$

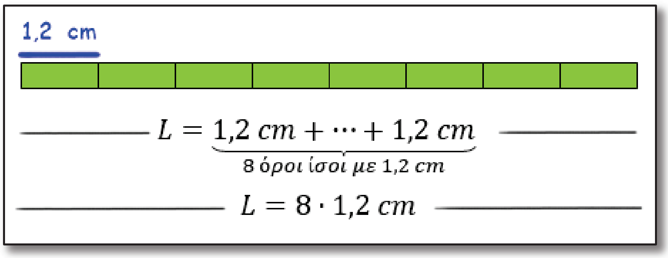


Αν κάνουμε τον πολλαπλασιασμό βρίσκουμε με γρήγορο τρόπο το συνολικό μήκος, δηλαδή $L = 40\ cm$.

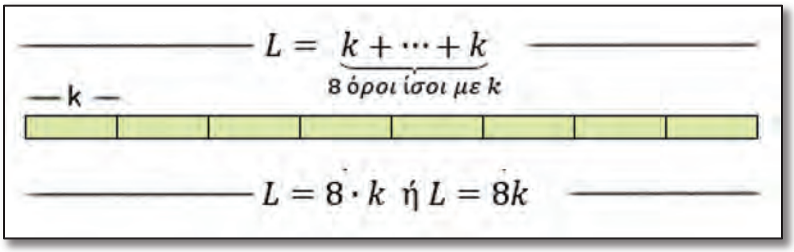
Στο επόμενο υπάρχουν 8 ίδιες ράβδοι. Η κάθε ράβδος έχει μήκος 1,2 cm.

Το συνολικό μήκος L το γράφουμε:

- Αναλυτικά $L = \underbrace{1{,}2\,cm + \cdots + 1{,}2\,cm}_{8\ όροι\ ίσοι\ με\ 1{,}2\ cm}$
- Σύντομα $L = 8 \cdot 1{,}2\ cm$



Στο επόμενο υπάρχουν 8 ίσες ράβδοι. Η κάθε ράβδος έχει μήκος k $(σε\ cm)$.



Το συνολικό μήκος L το γράφουμε **αναλυτικά**: $L = \underbrace{k+\cdots+k}_{8\ όροι\ ίσοι\ με\ k}$.

Το παραπάνω άθροισμα το γράφουμε **σύντομα ως γινόμενο:** $L = 8\cdot k$ ή $L = 8k$.

Μπορούμε να μην βάζουμε το σύμβολο · ανάμεσα σε αριθμό και μεταβλητή π.χ.

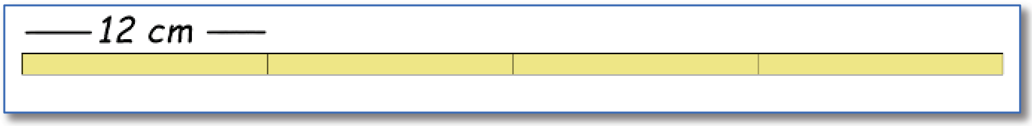
$8\cdot k = 8k$

Στα μαθηματικά πολλές φορές αντί για συγκεκριμένους αριθμούς, χρησιμοποιούμε γράμματα. Τα γράμματα αυτά τα λέμε **μεταβλητές**. Στο παράδειγμά μας το k είναι μεταβλητή.

Δραστηριότητα 1.1

Συμπληρώστε όπου χρειάζεται:

- Το επόμενο δείχνει ….. ίδιες ράβδους ενωμένες. Η κάθε ράβδος έχει μήκος $12\ cm$.



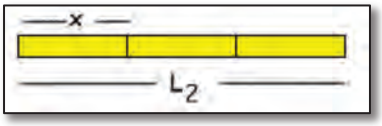
Το συνολικό μήκος L το γράφουμε **αναλυτικά**:

$L =$……………………………………………………………………………………………………

Μπορούμε να το γράψουμε **σύντομα** $L = \underbrace{\ldots\cdot\ldots}_{2\ παράγοντες}$ cm = …….. cm.

- Ενώσαμε 2 ίδιες ράβδους. Κάθε ράβδος έχει μήκος x.
  Το συνολικό μήκος είναι $L_1 =$ ….

Ενώσαμε 3 ίδιες ράβδους. Το συνολικό μήκος είναι $L_2 =$ ….



Μετά τις ενώσαμε όλες μαζί.
Το νέο συνολικό μήκος είναι
$L = L_1 + L_2 = .\ldots\ldots + .\ldots =$ …. .

Αν το μήκος x είναι ίσο με $2\ cm$, να

υπολογίσετε πόσο είναι το συνολικό μήκος L ……………………………………
Πόσο είναι το συνολικό μήκος L όταν $x = 5\ cm$; ……………………………………

- Γράψτε με 4 διαφορετικούς τρόπους τα επόμενα, όπως στο παράδειγμα:
  - $6x = x + 5x =$. … … . … … . =. … … … . … … . . =. … … … . … ….
  - $10x =$. … … … … … . =. … … … … … . =. … … … … … . . =. … … … … ….
  - Συζητήστε στην τάξη τις απαντήσεις σας.

Στα μαθηματικά ονομάζουμε **αλγεβρικές παραστάσεις**: τις πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές**.**

Για παράδειγμα: $10x, 3q, x + 5x, 2x + 3\ ,\ \frac{3}{4}\alpha, x - y, \alpha + \beta^3$.
Τα επόμενα είναι αλγεβρικές παραστάσεις:

x , *γιατί μπορούμε να το γράψουμε* $1 \cdot x$ ή $x + 0$

$-x$, *γιατί μπορούμε να το γράψουμε* $-1 \cdot x$

$\frac{3}{4}a = \frac{3}{4} \cdot a$

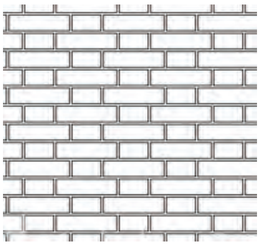
$x = 1x$
$-x = -1x$

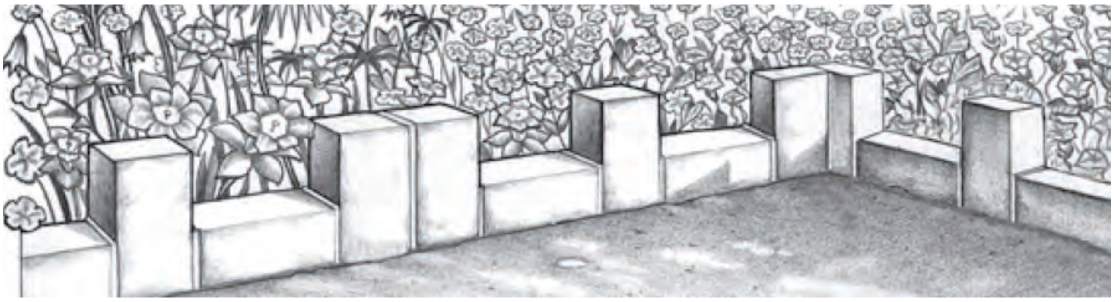
Όταν σε μια αλγεβρική παράσταση, **στη θέση των μεταβλητών βάζουμε έναν αριθμό** και **κάνουμε τις πράξεις**, λέμε ότι **βρίσκουμε την αριθμητική τιμή της παράστασης**.

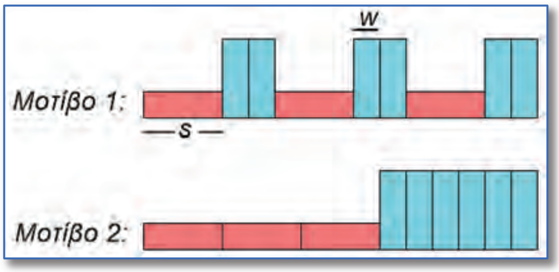
Για παράδειγμα στην αλγεβρική παράσταση $3\kappa + 2$ βάζουμε το κ ίσο με 5, άρα: $3\kappa + 2 = 3 \cdot 5 + 2$=15+2=17 .
Λέμε ότι το 17 είναι η **αριθμητική τιμή της παράστασης** $3\kappa + 2$, όταν $\kappa = 5$.

Δραστηριότητα 1.2 ***(ίσες αλγεβρικές παραστάσεις)***

Αρκετά κτίρια ή δρόμοι είναι φτιαγμένα με τούβλα. Τα τούβλα τα βάζουν με διαφορετικούς τρόπους και σχηματίζουν μοτίβα. Κάποιοι άνθρωποι χρησιμοποιούν μοτίβα με τούβλα στον κήπο τους.







Η διπλανή εικόνα δείχνει δύο μοτίβα με τούβλα. Τα τούβλα είναι ίδια μεταξύ τους. Κάποια τούβλα είναι οριζόντια στην μεγάλη διάσταση s (μήκος). Κάποια είναι όρθια στην μικρή διάσταση w (πλάτος). Γράψτε το συνολικό μήκος (αναλυτικά) που έχει το κάθε μοτίβο. Να χρησιμοποιήσετε τις μεταβλητές $s\ και\ w$:

$Μοτίβο\ 1: συνολικό\ μήκος =$. … ..

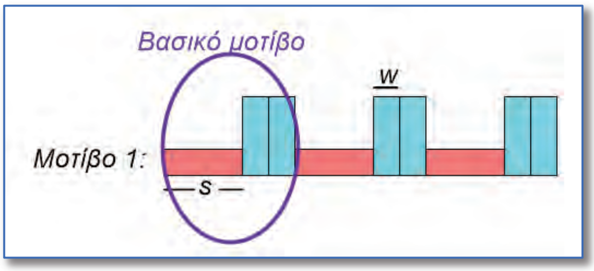
$Μοτίβο\ 2: συνολικό\ μήκος =$. … ..

Εξηγήστε γιατί το συνολικό μήκος είναι το ίδιο για τα δυο μοτίβα:

………

………

Γράψτε το συνολικό μήκος με σύντομο τρόπο: $συνολικό\ μήκος =$. … … … … … … … …



Ο Αλί παρατήρησε ότι το μοτίβο 1 είναι φτιαγμένο από ένα μικρότερο μοτίβο (βασικό μοτίβο). Το μήκος του βασικού μοτίβου είναι: ………………. .

Ο Αλί σκέφτηκε έναν άλλο τρόπο για να γράψει το συνολικό μήκος. Έγραψε: $συνολικό\ μήκος = 3 \cdot μήκος\ βασικού\ μοτίβου.$

Μετά το έγραψε συμβολικά: $συνολικό\ μήκος = 3 \cdot s + 2 \cdot w$ ή $συνολικό\ μήκος = 3s + 2w,$ όμως δεν ήταν σίγουρος αν ήταν σωστό.

Ζήτησε βοήθεια από τον καθηγητή της τάξης.

Εκείνος έγραψε: $συνολικό\ μήκος = 3 \cdot (s + 2w)$

ή $συνολικό\ μήκος = 3(s + 2w).$

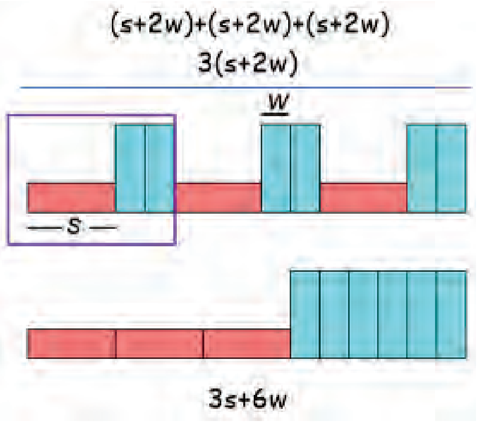
Προσπαθήστε να εξηγήσετε γιατί αυτό που έγραψε ο Αλί είναι λάθος. Επίσης εξηγήστε γιατί χρειάζονται οι παρενθέσεις.

Μπορούμε να μην γράφουμε το · ανάμεσα σε αριθμό και σε παρένθεση

………

………

………



Οι αλγεβρικές παραστάσεις: $(s+2w)+(s+2w)+(s+2w)$, $3(s+2w)$ και $3s+6w$ εκφράζουν το ίδιο (συνολικό) μήκος.
Λέμε ότι είναι **ίσες** (ή ισοδύναμες) **αλγεβρικές παραστάσεις**.
Γράφουμε: $(s+2w)+(s+2w)+(s+2w)=3(s+2w)=3s+6w$**.**

Όταν στις 3 παραπάνω αλγεβρικές παραστάσεις, βάλουμε αριθμούς στη θέση της μεταβλητής s και της μεταβλητής w, θα έχουμε ίδιες αριθμητικές τιμές. Για παράδειγμα:

α. Για $s=5, w=2$, υπολογίστε τις αριθμητικές τιμές από τις παραστάσεις:
  - $3(s+2w)=$ ....
  - $3s+6w=$ ....
  - $(s+2w)+(s+2w)+(s+2w)=$ ....

β. Το ίδιο με πριν για $s=10, w=3$.
  - $3(s+2w)=$ ....
  - $3s+6w=$ ....
  - $(s+2w)+(s+2w)+(s+2w)=$ ....

γ. Υπολογίστε την αριθμητική τιμή της παράστασης $3s+2w$, που είχε γράψει ο Αλί,
  - για $s=5, w=2$ ....
    Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις απαντήσεις στο ερώτημα α;
    ....
  - για $s=10, w=3$ ....
    Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις απαντήσεις στο ερώτημα β;
    ....

Ο Αλί και η Μαρία εξετάζουν αν οι παραστάσεις $2x+1$ και $3x$ είναι ίσες.
Η Μαρία λέει: *«Έβαλα στη θέση του x το 1 και βρήκα:* $2x+1=2\cdot1+1=3$ *και* $3x=3\cdot1=3$. *Άρα οι παραστάσεις είναι ίσες.»*
Ο Αλί λέει: *«Έβαλα στη θέση του x το 2 και βρήκα:* $2x+1=2\cdot2+1=5$ *και* $3x=3\cdot5=15$. *Άρα οι παραστάσεις **δεν** είναι ίσες.»*

α) Δοκιμάστε να βάλετε στην θέση του x κάποιον άλλο αριθμό (εκτός από το 1 ή το 2) και βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $2x+1$ *και της* $3x$.
....

β) Γράψτε ποιο παιδί νομίζεται ότι έχει δίκιο και μετά συζητήστε με τα υπόλοιπα παιδιά και τον καθηγητή την απάντησή σας.

………

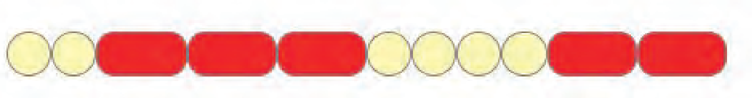
………

………

> Αν υπάρχει τιμή της μεταβλητής για τις οποίες δύο αλγεβρικές παραστάσεις **δεν έχουν ίσα αριθμητικά αποτελέσματα**, τότε **οι αλγβερικές παραστάσεις δεν είναι ίσες.**

Δραστηριότητα 1.3

Η Λέιλα έφτιαξε ένα κολιέ. Κάθε κίτρινη χάντρα έχει μήκος y και κάθε κόκκινη έχει μήκος r. Το συνολικό μήκος του κολιέ είναι $2y + 3r + 4y + 2r$.



Το $2y + 3r + 4y + 2r$ είναι ένα άθροισμα 4 όρων.
Οι όροι $2y$ και $4y$ είναι **όμοιοι όροι** (μεταξύ τους), γιατί έχουν την ίδια μεταβλητή. Οι αριθμοί 2 και 4 ονομάζονται **συντελεστές**.
Επίσης οι όροι $3r$ και $2r$ είναι όμοιοι όροι μεταξύ τους.

Η Λέιλα αφαίρεσε μία κίτρινη χάντρα από το κολιέ.

Το νέο συνολικό μήκος είναι: $2y + 3r + 4y + 2r - 1y$ (ή $2y + 3r + 4y + 2r - y$).
Μπορούμε να το γράψουμε πιο απλά (να το **απλοποιήσουμε**) ως εξής:

$$2y + 3r + 4y + 2r - 1y = 2y + 4y - 1y + 3r + 2r =$$
$$(2 + 4 - 1)y + (3 + 2)r = 5y + 5r$$

Γράψτε σε πιο απλή μορφή (**απλοποιήστε**) τις επόμενες παραστάσεις:

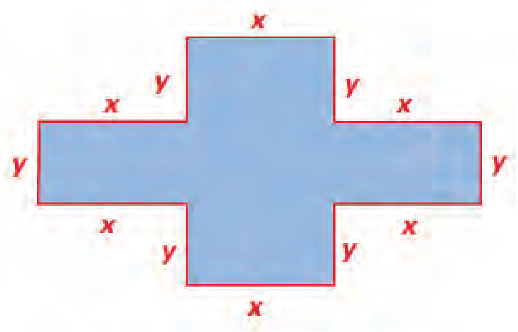
- $2x + 3x - x =$ ……………………….
- $5x + 3y - 2x + y =$ ……………………….
- $x + 3y - x =$ ……………………….
- $10x + y - 4x + 2y - x =$ ……………………….

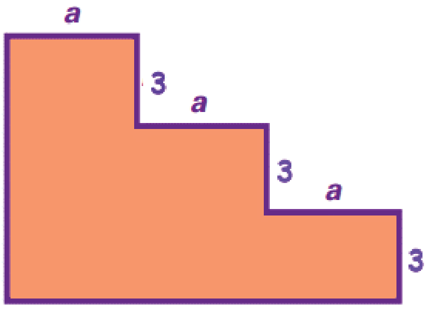
$x = 1x$

$-x = -1x$

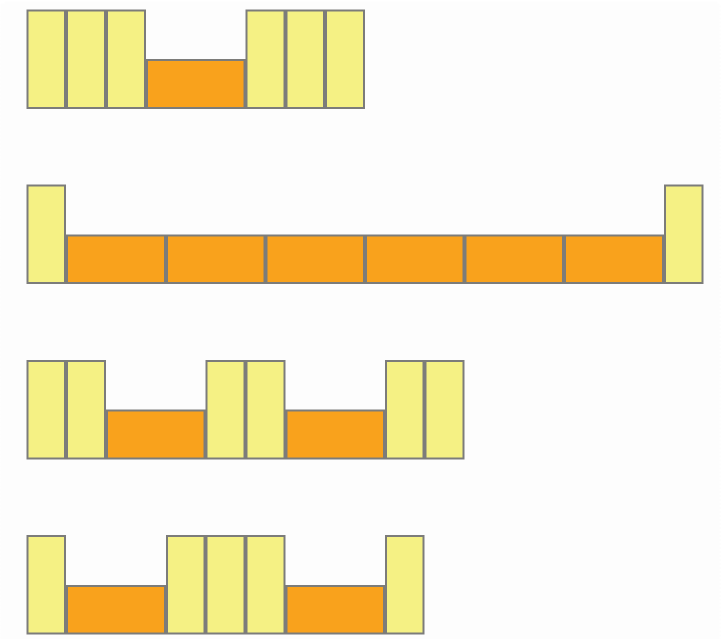
Άσκηση 1.1

1. Γράψτε με δύο διαφορετικούς τρόπους την περίμετρο του κάθε παρακάτω σχήματος.





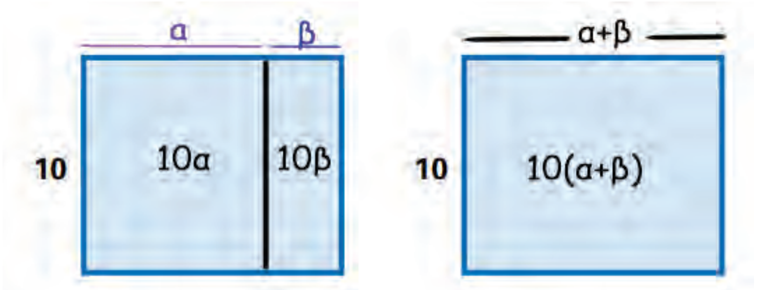
2. Γράψτε αναλυτικά και μετά με σύντομο τρόπο το συνολικό μήκος L σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις με τις σειρές τούβλων.
Χρησιμοποιήστε ότι γράμματα θέλετε για τις μεταβλητές (τη μικρή διάσταση και τη μεγάλη διάσταση σε κάθε τούβλο).



3. Γράψτε με πιο σύντομο τρόπο (απλοποιήστε) τις επόμενες αλγεβρικές παραστάσεις:
   - α. $x + x + x + x$
   - β. $x + y + x + x + y$
   - γ. $x + 3x + 2x$
   - δ. $\alpha + 2\beta + 3\alpha + 5\alpha$
   - ε. $x + 3 + 2x + 5 + x + 1$
   - στ. $2\alpha + 3x - \alpha - x$
   - ζ. $3g + 4k - 2g - 4k$
   - η. $10x + 3y - 9x - x - 2y$

Δραστηριότητα 1.4 *(επιμεριστική ιδιότητα)*

Τα δύο επόμενα σχήματα είναι ίσα μεταξύ τους.



Να εξηγήσετε τι δείχνουν γεωμετρικά οι παραστάσεις $10\alpha, 10\beta$ $\kappa\alpha\iota$ $10(\alpha+\beta)$.

……

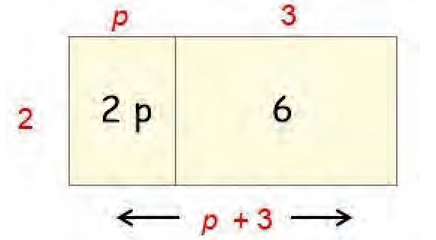
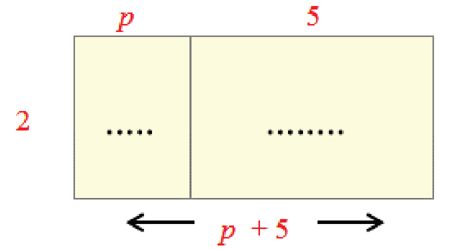
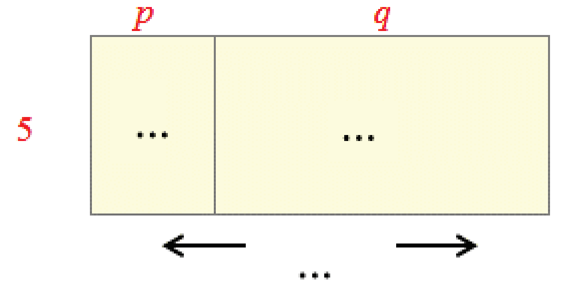
……

Να εξηγήσετε με βάση την εικόνα, γιατί οι αλγεβρικές παραστάσεις $10\alpha+10\beta$, $10(\alpha+\beta)$ είναι ίσες.

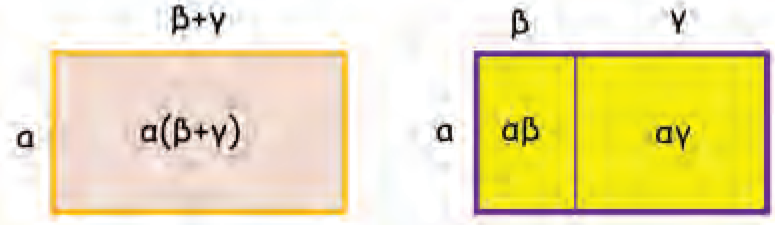
……

……

Συμπληρώστε τα κενά, όπως στο παράδειγμα, και γράψτε τις ίσες (ισοδύναμες) αλγεβρικές παραστάσεις.

 	$2(p+3)=2p+6$
 	
 	$5(p+q)=$………

Τα προηγούμενα εκφράζουν την **επιμεριστική ιδιότητα:** $\boldsymbol{\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma}$.



Η παράσταση $\alpha\beta+\alpha\gamma$ λέγεται **ανάπτυγμα του γινομένου** $\alpha(\beta+\gamma)$

Επειδή τα α, β, και γ μπορεί να είναι και αρνητικοί αριθμοί (όχι μόνο θετικοί όπως είναι στα γεωμετρικά παραδείγματα) παρουσιάζουμε την επιμεριστική με την μορφή ενός πίνακα.

$\beta+\gamma$

$\cdot$	β	γ
α	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$

Δραστηριότητα 1.5

Συμπληρώστε τον πίνακα και γράψτε τα αναπτύγματα για τα γινόμενα, όπως στο παράδειγμα.

1. $-3(x-1)$

$x-1=x+(-1)$

$\cdot$	x	-1
-3		

⬇

$\cdot$	x	-1
-3	$-3x$	3

$-3\cdot x=-3x$

$-3\cdot(-1)=3$

Άρα: $-3(x-1)=-3x+3$

2. $2(x-5)$

$\cdot$		

Άρα $2(x-5)=$……………………………………

3. $-7(x+y)$

·		

Άρα $-7(x+y)=$……………………………………

4. $-1(x-y)$

·		

Άρα $-1(x-y)=$……………………………………

5. $x(x-1)$

·		

Άρα $x(x-1)=$……………………………………

Άσκηση 1.2

1. Βρείτε το ανάπτυγμα των γινομένων
   - α. $3(x+1)$
   - β. $2(3x+y)$
   - γ. $5(x-1)$
   - δ. $-2(x-10)$
   - ε. $\frac{1}{2}(x+3)$
   - στ. $-4(p+q)$
2. Υπολογίστε το $\alpha\beta+\alpha\gamma$, όταν $\alpha=10$ και $\beta+\gamma=12$.
3. Διορθώστε όσα από τα επόμενα είναι λάθος.
   - α. $2(3x+1)=6x+2$
   - β. $3(x+5)=3x+5$
   - γ. $-3(x-2)=-3x-6$
   - δ. $x(x+2)=x^2+2x$
   - ε. $-5(2x-1)=-10x-5$

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

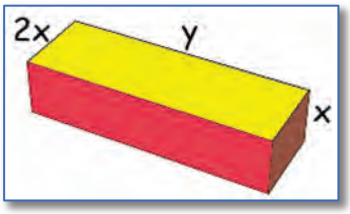
……………………………………

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

……

……

2. Μονώνυμα - πολυώνυμα



Στο διπλανό σχήμα είναι ένα κουτί. Οι διαστάσεις του κουτιού είναι $x, 2x \; και \; y$.
Ο όγκος V του κουτιού βρίσκεται από το γινόμενο:

$$μήκος \cdot πλάτος \cdot ύψος$$

Δηλαδή $V = y \cdot 2x \cdot x$.

Την παράσταση $y \cdot 2x \cdot x$ μπορούμε να την γράψουμε πιο απλή, ως εξής: $y \cdot 2x \cdot x = 2 \cdot x \cdot x \cdot y = 2x^2y$

Η παράσταση $2x^2y$, που προέκυψε από το γινόμενο $2 \cdot x \cdot x \cdot y$, λέγεται **μονώνυμο**.
Παραδείγματα από μονώνυμα είναι τα:

$$-2x, 3x^2 , -31xy , \frac{1}{3}x^4y^3, x , -x, 5x^0.$$

Δεν είναι μονώνυμα τα: $x + 2, 3x^2 + x, \frac{2}{x} , x^{-3}$

$$x = 1x$$

$$-x = -1x$$

$$5x^0 = 5 \cdot 1 = 5 \; (x \neq 0)$$

Σε κάθε μονώνυμο ο αριθμός που πολλαπλασιάζεται με τις μεταβλητές λέγεται **συντελεστής** και το κομμάτι με τις μεταβλητές λέγεται **κύριο μέρος**.

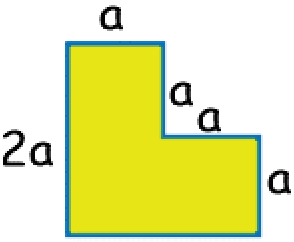
Τα μονώνυμα που έχουν το **ίδιο κύριο μέρος**, λέγονται **όμοια** (μεταξύ τους).
Για παράδειγμα τα: $2α^2β , -α^2β , \frac{1}{2}α^2β$ είναι όμοια μονώνυμα , ενώ το $3αβ^2$ δεν είναι όμοιο με τα προηγούμενα.

Το **άθροισμα από δύο ή περισσότερα μονώνυμα που δεν είναι όμοια** θα το λέμε **πολυώνυμο**. Για παράδειγμα τα: $3x^2 - 5x \; και \; -7x + 2y$ είναι πολυώνυμα.

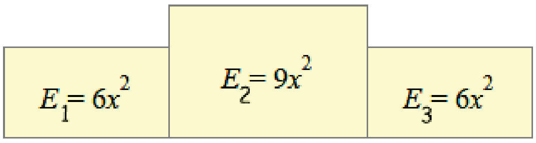
2.1 Πράξεις

__Δραστηριότητα 2.1__ ***(πρόσθεση – αφαίρεση όμοιων μονωνύμων)***

1. Βρείτε με αναλυτικό και με σύντομο τρόπο την περίμετρο του σχήματος.



2. Στο διπλανό σχήμα είναι τρία ορθογώνια και τα εμβαδά τους. Το συνολικό εμβαδό από τα 3 σχήματα είναι:



$E = E_1 + E_2 + E_3 = . \ldots + . \ldots + . \ldots = . \ldots$

3. Σε κάθε μια από τις περιπτώσεις 1 και 2 προσθέσατε όμοια μονώνυμα. Περιγράψτε έναν κανόνα για το άθροισμα δύο ή περισσότερων όμοιων μονωνύμων.
………
………
………
………
4. Βρείτε το άθροισμα $3x^2y + 5x^2y - 2x^2y =$ ……………………………………

Για να προσθέσουμε - αφαιρέσουμε όμοια μονώνυμα, προσθέτουμε - αφαιρούμε τους συντελεστές και αφήνουμε το κύριο μέρος όπως είναι.

$$2\alpha^2\beta + 10\alpha^2\beta - 4\alpha^2\beta = (2 + 10 - 4)\alpha^2\beta = 8\alpha^2\beta$$

Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται **αναγωγή όμοιων όρων**.

Δραστηριότητα 2.2 *(πρόσθεση – αφαίρεση πολυωνύμων)*

Βρίσκουμε το άθροισμα των πολυωνύμων $2x^2 - 5x + 6$ και $x^3 + 3x^2 + 4x - 7$.

$(2x^2 - 5x + 6) + (x^3 + 3x^2 + 4x - 7) =$	*Απαλοιφή παρενθέσεων (δεν αλλάζουν τα πρόσημα, γιατί οι παρενθέσεις έχουν πρόσημο + μπροστά ή δεν έχουν πρόσημο)*
$2x^2 - 5x + 6 + x^3 + 3x^2 + 4x - 7 =$	*Προσθέτω τους όμοιους όρους*
$5x^2 - x - 1 + x^3 =$	*Συνήθως γράφω σε σειρά από την μεγαλύτερη δύναμη προς την μικρότερη*
$x^3 + 5x^2 - x - 1$	

Βρίσκουμε τη διαφορά των πολυωνύμων $2x^2 - 5x + 6$ και $x^3 + 3x^2 + 4x - 7$.

$(2x^2 - 5x + 6) - (x^3 + 3x^2 + 4x - 7) =$	*Απαλοιφή παρενθέσεων (αλλάζουν τα πρόσημα των όρων της δεύτερης παρένθεσης, γιατί έχει - μπροστά)*
$2x^2 - 5x + 6 - x^3 - 3x^2 - 4x + 7 =$	*Προσθέτω τους όμοιους όρους και γράφω σε σειρά από την μεγαλύτερη δύναμη προς την μικρότερη*
$-x^3 - x^2 - 9x - 13$	

Να κάνετε τις πράξεις:

1. $-2x^2 - 3x + 1 - x^2 + x - 4 =$
   ………
   ………
2. $2x^2 + x - 4 - 2x^2 - 3x + 4 =$
   ………
   ………
3. $(-5x^2 + 2x - 1) + (3x^3 - 2x^2 + 10x - 6) =$
   ………
   ………
4. $(-5x^2 + 2x - 1) - (3x^3 - 2x^2 + 10x - 6) =$
   ………
   ………
5. $(2x^3 - 5x^2 + 2x) - (10x - 3) - (x^3 - 2x^2) + 10x - 6 =$
   ………
   ………

Δραστηριότητα 2.3 *(πολλαπλασιασμός μονωνύμων)*

Να βρείτε τα γινόμενα όπως στο παράδειγμα:

1. $3\alpha^2\beta \cdot 5\alpha\beta^3\kappa = 3 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \beta \cdot 5 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \kappa =$
   $3 \cdot 5 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \kappa = 15\alpha^3\beta^4\kappa$

   ή με ιδιότητες των δυνάμεων:

   $3\alpha^2\beta \cdot 5\alpha\beta^3\kappa = 3 \cdot 5 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \beta^3 \cdot \kappa = 15\alpha^{2+1}\beta^{1+3}\kappa =$
   $= 15\alpha^3\beta^4\kappa$

   $x = x^1$
   $x^5 \cdot x^2 = x^7$
2. $-3x^2y \cdot 2x =$…………………………………………………………………
3. $5x^3 \cdot 2ax^2 =$ …………………………………………………………………
4. $-2a^3x \cdot 3ax \cdot (-ay^2) =$ ……………………………………………………

Άσκηση 2.1

1. Απλοποιήστε τα επόμενα:
   α. $-5x^2 + 3x^2 + 7x^2$
   β. $2\alpha x^2 + 5\alpha x^2 - 7\alpha x^2$
   γ. $4x^2y - 7x^2y + x^2y$
   δ. $3y^3 - y^3 - 5y^3$
2. Να κάνετε τις πράξεις:
   α. $(2x + 3y) + (5x - y)$
   β. $7x^2 - 3x + 1 - (x^2 - 6x) + x^2$
   γ. $(3xy - 4x^2) - (x^2 - 5xy) + (-2x^2 + xy)$
   δ. $3(2x + 1) + 4(5x + 2)$
   ε. $-4(x^2 - 5x) + 2(-3x^2 + 4)$
3. Βρείτε τα γινόμενα:
   α. $-5y^3 \cdot 4y^2$
   β. $2x \cdot 3x^2$
   γ. $-x^2y \cdot (-3x^2y^3)$
   δ. $4xy \cdot (-3x^2) \cdot 4y^3$
   ε. $2x^2y \cdot 3xy^2 \cdot x^2 \cdot (-4\alpha x)$

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

………………………………………

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

………

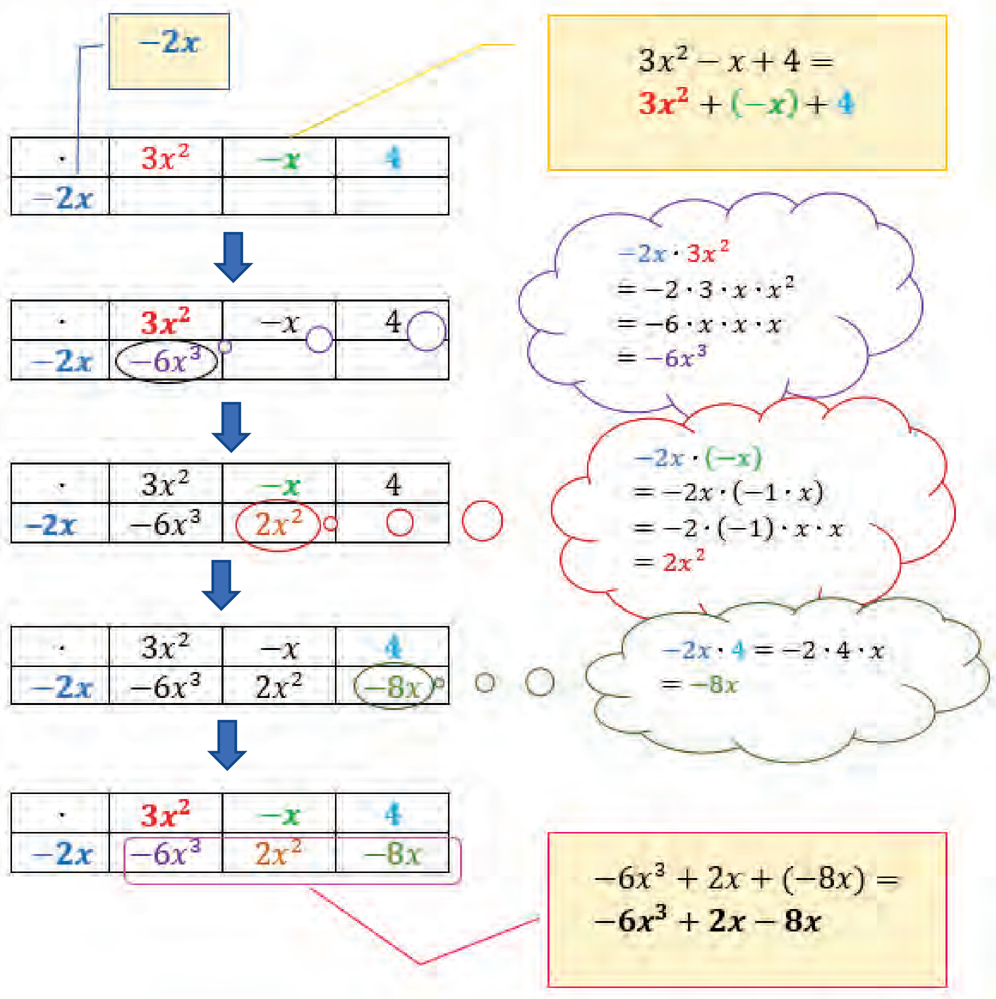
………

Πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυώνυμο

Βρίσκω το ανάπτυγμα του γινομένου: $-2x(3x^2 - x + 4)$

Με τη μέθοδο του πίνακα:

Κάνω τα επόμενα διαδοχικά βήματα.



$-2x$

$$3x^2 - x + 4 =$$
$$3x^2 + (-x) + 4$$

$\cdot$	$3x^2$	$-x$	4
$-2x$			

$\cdot$	$3x^2$	$-x$	4
$-2x$	$-6x^3$		

$$-2x \cdot 3x^2$$
$$= -2 \cdot 3 \cdot x \cdot x^2$$
$$= -6 \cdot x \cdot x \cdot x$$
$$= -6x^3$$

$\cdot$	$3x^2$	$-x$	4
$-2x$	$-6x^3$	$2x^2$	

$$-2x \cdot (-x)$$
$$= -2x \cdot (-1 \cdot x)$$
$$= -2 \cdot (-1) \cdot x \cdot x$$
$$= 2x^2$$

$\cdot$	$3x^2$	$-x$	4
$-2x$	$-6x^3$	$2x^2$	$-8x$

$$-2x \cdot 4 = -2 \cdot 4 \cdot x$$
$$= -8x$$

$\cdot$	$3x^2$	$-x$	4
$-2x$	$-6x^3$	$2x^2$	$-8x$

$$-6x^3 + 2x + (-8x) =$$
$$\mathbf{-6x^3 + 2x - 8x}$$

Άρα: $-2x(3x^2 - x + 4) = -6x^3 + 2x^2 - 8x$

Με την επιμεριστική ιδιότητα:

$$\mathbf{-2x(3x^2 - x + 4) =}$$
$$\mathbf{-2x \cdot 3x^2 + (-2x) \cdot (-x) + (-2x) \cdot 4 =}$$
$$\mathbf{-2x \cdot 3x^2 + (-2x) \cdot (-1 \cdot x) + (-2x) \cdot 4 =}$$
$$\mathbf{-2 \cdot 3 \cdot x \cdot x^2 + (-2) \cdot (-1) \cdot x \cdot x + (-2) \cdot 4 \cdot x =}$$
$$\mathbf{-6x^3 + 2x^2 + (-8)x =}$$
$$\mathbf{-6x^3 + 2x^2 - 8x}$$

Άρα: $-2x(3x^2 - x + 4) = -6x^3 + 2x^2 - 8x$

Άσκηση 2.2

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του πίνακα. Συμπληρώσετε τα κενά και υπολογίσετε τα αναπτύγματα, όπως στα παραδείγματα.

1. $x(x+1)$

$\cdot$	x	1
x	x^2	x

Βρίσκω το $x \cdot x$

Βρίσκω το $x \cdot 1$

Άρα: $x \cdot (x+1) = x^2 + x$

2. $2a(3b-1)$

Σκέφτομαι: $3b - 1 = 3b + (-1)$

$\cdot$	$3b$	-1
$2a$	$6ab$	$-2a$

Βρίσκω το $2a \cdot 3b$

Βρίσκω το $2a \cdot (-1)$

Άρα: $2a \cdot (3b-1) = 3ab + (-2a) = 6ab - 2a$

3. $2x(x-1)$

$\cdot$	x	……
$2x$	……	……

Άρα: $2x(x-1) =$……………………..

4. $-3a(2a+5)$

$\cdot$	$2a$	……
……	……	……

Άρα: $-3a(2a+5) =$……………………..

5. $-5x^2(3x+2)$

$\cdot$	….	2
……	……	……

Άρα: $-5x^2(3x+2)=$ ……………………..

6. $2a^2(3x + \_\_)$

$\cdot$	$\boldsymbol{3x}$	……
……	……	$\boldsymbol{2a^2}$

Άρα: $2a^2(3x + \_\_)$= ………………………

7. $-2y(-7y^2 - 3y + 2)$

$\cdot$	… ….	$\boldsymbol{-3y}$	**2**
……	……	……	……

Άρα: $-2y(-7y^2 - 3y + 2)$ =…………………….…………….

8. $3x\ (x^3 + 2x^2 - x + 4)$

$\cdot$	$\boldsymbol{x^3}$	………	…….	**4**
……	……	$\boldsymbol{6x^3}$	……	……..

Άρα: $3x\ (x^3 + 2x^2 - x + 4)$ =……………………………….…………

Άσκηση 2.3

Χρησιμοποιήστε την μέθοδο του πίνακα ή την επιμεριστική ιδιότητα και βρείτε το ανάπτυγμα των γινομένων.

1. $3x(x - 4) =$
2. $-x(-4x - 6) =$
3. $-5x^2(4x + 3) =$
4. $ab(a + b) =$
5. $3x(x^2 + 3x + 2) =$
6. $4x^2(-3x^3 + 5x - 10) =$
7. $3xy^2(x + y + 1) =$
8. $2ab(-3a + 2b - ab + 6) =$

Δραστηριότητα 2.4 *(Παραγοντοποίηση – Μέθοδος του κοινού παράγοντα)*

Παραγοντοποιώ την παράσταση $3x^2 - 5x$.

Αυτό σημαίνει από το ανάπτυγμα βρίσκω τους παράγοντες του γινομένου.

Σχηματίζω τον πίνακα:

·		
	$3x^2$	$-5x$

Τι κοινό έχουν οι δύο όροι; Τους αναλύω:

$$3x^2 = 3 \cdot x \cdot x$$
$$-5x = -5 \cdot x$$

Έχουν κοινό (ίδιο) παράγοντα το x

Κάνω τα επόμενα διαδοχικά βήματα:

·		
x	$3x^2$	$-5x$

Γράφω τον κοινό παράγοντα

·	$3x$	
x	$3x^2$	$-5x$

$x \cdot \boxed{?} = 3x^2$

$(x \cdot 3x = 3x^2)$

·	$3x$	-5
x	$3x^2$	$-5x$

$x \cdot \boxed{?} = -5x$

$(x \cdot (-5) = -5x)$

Οπότε: $3x^2 - 5x = x\,(3x - 5)$

Να συμπληρώσετε τους επόμενους πίνακες και να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις.

·	…….	….
……	$3ax$	a

$3ax + a =$……………………………

·	…….	….
……	$5x^3$	$-3x$

$5x^3 - 3x =$……………………………

·	…….	….
x	x^5	$3x^2$

$x^5 + 3x^2 = x\,($……………………$)$

·	…….	….
x^2	x^5	$3x^2$

$x^5 + 3x^2 = x^2\,($……………………$)$

Παρατήρηση: *Στις 2 τελευταίες περιπτώσεις οι παραστάσεις $x^5 + 3x^2$ είναι ίδιες, όμως οι παραγοντοποιήσεις είναι διαφορετικές. Λέμε ότι* ***η παραγοντοποίηση είναι «πλήρης»*** *όταν έχουμε βγάλει όλους τους κοινούς παράγοντες που έχουν οι όροι. Επίσης από τους συντελεστές βγάζουμε τον μεγαλύτερο κοινό διαιρέτη τους.*

Για παράδειγμα επειδή

$\mathbf{6x^4y^3} = 2\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y$ *και*

$\mathbf{8x^2y} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot x\cdot x\cdot y$

ο μεγαλύτερος κοινός παράγοντας είναι ο $\mathbf{2x^2y}$

Είναι: $2\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y =$
$2\cdot x\cdot x\cdot y\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y =$
$2x^2y\cdot 3x^2y^2$

και $2\cdot 2\cdot 2\cdot x\cdot x\cdot y =$
$2\cdot x\cdot x\cdot y\cdot 2\cdot 2 =$
$2x^2y\cdot 4$

άρα: $6x^4y^3 + 8x^3y = 2x^2y\cdot 3x^2y^2 + 2x^2y\cdot 4 = 2x^2y\,(3x^2y^2 + 4)$.

Άσκηση 2.4

Συμπληρώστε τα κενά στους πίνακες και γράψτε τις («πλήρεις») παραγοντοποιήσεις, όπως στο παράδειγμα.

1. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $8x^2 + 4x$

·		
	$8x^2$	$4x$

ΜΚΔ(8,4)=4
$8x^2 = 4\cdot 2\cdot x\cdot x$
$4x = 4\cdot x$
Κοινός παράγοντας: $4x$

$8 = 2\cdot 2\cdot 2$
$4 = 2\cdot 2$
$ΜΚΔ(8{,}4) = 2\cdot 2 = 4$

·	$\mathbf{2x}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{4x}$	$8x^2$	$4x$

Γράφω: $4x$

$4x\cdot\boxed{?} = 8x^2$

$4x\cdot\boxed{?} = 4x$

·	$\mathbf{2x}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{4x}$	$8x^2$	$4x$

Άρα: $\mathbf{8x^2} + \mathbf{4x} = \mathbf{4x}\,(\mathbf{2x} + \mathbf{1})$

2. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $3x^2 - 4x$

·	………	………
………	$3x^2$	$-4x$

Άρα: $\mathbf{3x^2} - \mathbf{4x}$ =……………………….

3. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $6x^3 + 8x$

·	………	………
………	………	………

Άρα: $6x^3 + 8x$ =……………………….

4. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $a^3 + a^2 - a$

·	....	....	....
....	a^3	....	$-a$

Άρα: $a^3 + a^2 - a$ =...........................

5. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $8a^3 - 6a^2 - 4a$

·	....	....	....
....	....	....	....

Άρα: $8a^3 - 6a^2 - 4a$ =...........................

6. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $2a^3b + a^2 - a$

·	....	....	....
....	a^3	....	$-a$

Άρα: $a^3 + a^2 - a$ =...........................

7. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $3(\alpha + \beta) + x\,(\alpha + \beta)$

·	....	....
....	$3(\alpha + \beta)$	$x\,(\alpha + \beta)$

Άρα: $3(\alpha + \beta) + x\,(\alpha + \beta)$ =...........................

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου με πολυώνυμο

Βρίσκω το ανάπτυγμα του γινομένου $(2x - 3)(5x - 1)$.

Με τη μέθοδο του πίνακα.

$2x - 3 =$
$\mathbf{2x} + (\mathbf{-3})$

$5x - 1 =$
$\mathbf{5x} + (\mathbf{-1})$

$\cdot$	$\mathbf{5x}$	$\mathbf{-1}$
$\mathbf{2x}$		
$\mathbf{-3}$		

$\cdot$	$\mathbf{5x}$	-1
$\mathbf{2x}$	$10x^2$	
-3		

$2x \cdot 5x$
$= 2 \cdot 5 \cdot x \cdot x$
$= 10x^2$

$\cdot$	$5x$	$\mathbf{-1}$
$\mathbf{2x}$	$10x^2$	$-2x$
-3		

$2x \cdot (-1)$
$= 2 \cdot (-1) \cdot x$
$= -2x$

$\cdot$	$\mathbf{5x}$	-1
$2x$	$10x^2$	$-2x$
$\mathbf{-3}$	$\mathbf{-15x}$	

$-3 \cdot 5x = -3 \cdot 5 \cdot x$
$= -15x$

$\cdot$	$5x$	$\mathbf{-1}$
$2x$	$10x^2$	$-2x$
$\mathbf{-3}$	$-15x$	3

$-3 \cdot -1 = 3$

$\cdot$	$\mathbf{5x}$	$\mathbf{-1}$
$\mathbf{2x}$	$10x^2$	$-2x$
$\mathbf{-3}$	$\mathbf{-15x}$	$\mathbf{3}$

$10x^2 + (-2x) + (-15x) + 3 =$
$10x^2 + (-17x) + 3 =$
$\mathbf{10x^2 - 17x + 3}$

Όμοιοι όροι.

Άρα: $(2x - 3)(5x - 1) = 10x^2 - 17x + 3$

Με την επιμεριστική ιδιότητα.

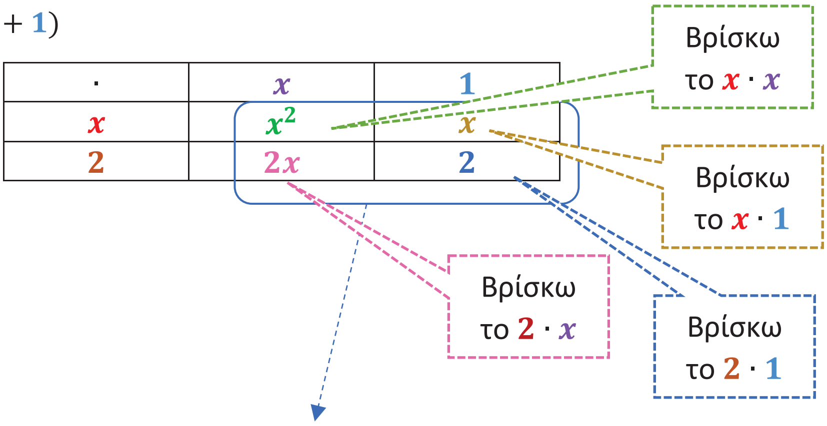
$$(2x-3)(5x-1)=$$

$$2x\cdot 5x+2x\cdot(-1)+(-3)\cdot 5x+(-3)\cdot(-1)=$$
$$10x^2+(-2x)+(-15x)+3=$$
$$10x^2+(-17x)+3=$$
$$10x^2-17x+3$$

Δραστηριότητα 2.5

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του πίνακα. Συμπληρώστε τα κενά και υπολογίστε το ανάπτυγμα, όπως στο παράδειγμα.

1. $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})$



$\cdot$	$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{1}$
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x^2}$	$\boldsymbol{x}$
$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}\boldsymbol{x}$	$\mathbf{2}$

Άρα: $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})=\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}=\boldsymbol{x^2}+\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}$

Αναγωγή όμοιων όρων

2. $(2x-1)\,(x-1)$

$\cdot$	$\boldsymbol{x}$	……
$\mathbf{2}\boldsymbol{x}$	……	……
………	………	……

Άρα: $(2x-1)\,(x-1)=$…………………………

3. $(3\alpha-1)\,(5\alpha+2)$

$\cdot$	$\mathbf{5}\boldsymbol{\alpha}$	……
$\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha}$	……	……
………	………	……

Άρα: $(3\alpha-1)\,(5\alpha+2)=$…………………………

4. $(\alpha+\beta)\,(\alpha+3\beta)$

·	… … ..	……
…….	α^2	……
………	………	$3\beta^2$

Άρα: $(\alpha+\beta)\,(\alpha+3\beta)=$..............................

5. $(5x-3)\,(5x+3)$

·	… … ..	……
…….	……	$15x$
………	$-15x$	……

Άρα: $(5x-3)\,(5x+3)=$..............................

6. $(\ldots\ldots+\ldots\ldots)\,(3x-4)$

$\boxed{?}\cdot 3x = 9x^2$

$\boxed{?}\cdot(-4) = -16$

·	$3x$	-4
…….	$9x^2$	……
………	………	-16

Άρα: $(\ldots\ldots+\ldots\ldots)\,(3x-4)=$..............................

7. $(x-y)\,(x+y)$

·	… … ..	……
…….	……	……
………	………	……

Άρα: $(x-y)\,(x+y)=$..............................

8. $(x+y)\,(x+y)$

·	… … ..	……
…….	……	……
………	………	……

Άρα: $(x+y)\,(x+y)=$..............................

9. $(\ldots\ldots\ldots\ldots)\,(5x+4)$

·	$5x$	4
…….	……	$20x$
………	$20x$	……

Άρα: $(\ldots\ldots\ldots\ldots)\,(5x+4)=$..............................

10. $(3x + 10)\ (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

·	… … ..	……
$\mathbf{3x}$	$\mathbf{9x^2}$	$\mathbf{30x}$
10	…….	……

Άρα: $(3x + 10)\ (\ldots\ldots\ldots\ldots) =$…………………………

11. $(x - y)\ (x - y)$

·	… … ..	……
…….	……	……
………	………	……

Άρα: $(x - y)\ (x - y) =$…………………………

12. $(5x - 3)\ (5x - 3)$

·	… … ..	……
…….	$\mathbf{25x^2}$	……
………	………	**9**

Άρα: $(5x - 3)\ (5x - 3) =$…………………………

13. $(\ldots\ldots\ldots)\ (3x - 4)$

$\boxed{?}\cdot(-4) = -12x$

$\boxed{?}\cdot\ 3x = -12x$

·	$\mathbf{3x}$	$\mathbf{-4}$
…….	……	$\mathbf{-12x}$
………	$\mathbf{-12x}$	……

Άρα: $(\ldots\ldots\ldots)\ (3x - 4) =$…………………………

14. $(2x + 1)\ (5x^2 - 4x - 1)$

·	… … ..	……	……
…….	……	……	……
………	………	……	……

Άρα: $(2x + 1)\ (5x^2 - 4x - 1) =$…………………………

Άσκηση 2.5

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του πίνακα ή την επιμεριστική ιδιότητα και βρείτε το ανάπτυγμα των γινομένων.

1. $(x + 3)(x - 5) =$
2. $(x + 7)(x - 2) =$
3. $(3x + 10)\ (x - 4) =$

4. $(2-x)\,(-4x-3)=$
5. $(-5x^2+1)\,(4x+3)=$
6. $(2a+3b)(2a-3b)=$
7. $(5x-6y)(5x+6y)=$
8. $(10x-5y)(10x-5y)=$
9. $(2x-7y)(2x-7y)=$
10. $(3y+x)(x+3y)=$
11. $(5+3x)(5+3x)=$
12. $(3x-4)\,(x^2+3x+2)=$
13. $(4x^2+10)\,(-3x^3+5x-10)=$
14. $(3xy^2+2)\,(-x-y+1)=$

Δραστηριότητα 2.6 *(παραγοντοποίηση 4 όρων με τη μέθοδο της ομαδοποίησης)*

Παραγοντοποιούμε την παράσταση $\kappa\alpha+\lambda\alpha+\kappa\beta+\lambda\beta$. Η παράσταση έχει 4 όρους.

1^{ος} τρόπος (με πίνακα).

·		
	$\kappa\alpha$	
		$\lambda\beta$

Συνήθως βρίσκω δύο όρους που δεν έχουν τίποτα κοινό π.χ. $\kappa\alpha$, $\lambda\beta$ και τους γράφω σε διαγώνιες θέσεις.

·		
	$\kappa\alpha$	$\lambda\alpha$
	$\kappa\beta$	$\lambda\beta$

Συμπληρώνω τις άλλες δύο θέσεις με τους άλλους 2 όρους ($\lambda\alpha$ *και* $\kappa\beta$). *Η σειρά των όρων δεν παίζει ρόλο.*

Τι κοινό έχουν οι 2 όροι, που είναι στην ίδια στήλη;

Οι $\kappa\alpha, \kappa\beta$ *έχουν το* κ, *οι* $\lambda\alpha, \lambda\beta$ *έχουν το* λ.

·	κ	λ
	$\kappa\alpha$	$\lambda\alpha$
	$\kappa\beta$	$\lambda\beta$

Τι κοινό έχουν οι 2 όροι, που είναι στην ίδια γραμμή;

Οι $\kappa\alpha, \lambda\alpha$ *έχουν το* α,

οι $\kappa\beta$, $\lambda\beta$ *έχουν το* β.

·	κ	λ
α	$\kappa\alpha$	$\lambda\alpha$
β	$\kappa\beta$	$\lambda\beta$

·	κ	λ
α	$\alpha(\kappa+\lambda)$	
β	$\beta(\kappa+\lambda)$	

$\kappa+\lambda$

·	κ	λ
α	$(\alpha+\beta)(\kappa+\lambda)$	
β		

$\alpha+\beta$

Άρα: $\kappa\alpha + \lambda\alpha + \kappa\beta + \lambda\beta = (\alpha + \beta)(\kappa + \lambda)$.

2^{ος} τρόπος (αναλυτικά).

$\kappa\alpha + \lambda\alpha + \kappa\beta + \lambda\beta =$	Χωρίζω σε 2 ομάδες. Μία ομάδα τουλάχιστον πρέπει να έχει κοινό παράγοντα. [1]
$(\kappa\alpha + \kappa\beta) + (\lambda\alpha + \lambda\beta) =$	Βγάζω κοινό παράγοντα στην κάθε ομάδα.
$\kappa(\alpha + \beta) + \lambda(\alpha + \beta) =$	Οι όροι από 4 που ήταν στην αρχή τώρα έγιναν 2. Είναι οι: $\kappa(\alpha + \beta)$, $\lambda(\alpha + \beta)$ και έχουν κοινό παράγοντα το $(\alpha + \beta)$
$= (\alpha + \beta)(\kappa + \lambda)$	Βγάζω κοινό παράγοντα το $(\alpha + \beta)$.

Άρα: $\kappa\alpha + \lambda\alpha + \kappa\beta + \lambda\beta = (\alpha + \beta)(\kappa + \lambda)$.

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις με την μέθοδο του πίνακα (ή αναλυτικά), όπως στα παραδείγματα.

1. $\alpha\beta - 5\alpha - 5\beta + 25$

$\cdot$		
	$\alpha\beta$	
		25

Δύο όροι που δεν έχουν κάτι κοινό είναι οι: $\alpha\beta$, 25

$\cdot$		
	$\alpha\beta$	-5α
	-5β	25

Γράφω τους υπόλοιπους όρους.

$\cdot$	β	
	$\alpha\beta$	-5α
	-5β	25

Κοινός παράγοντας το β. (ή θα μπορούσε να είναι το $-\beta$)

$\cdot$	β	5
	$\alpha\beta$	-5α
	-5β	25

Κοινός παράγοντας το 5. (ή θα μπορούσε να είναι το -5)

$\boxed{?} \cdot \beta = \alpha\beta$

$\cdot$	β	5
α	$\alpha\beta$	-5α
	-5β	25

Υπάρχει πρόβλημα γιατί $\alpha \cdot 5 \neq -5\alpha$. Διορθώνω το 5 σε -5

$\cdot$	β	-5
α	$\alpha\beta$	-5α
	-5β	25

____

---

[1] Θα μπορούσα να είχα πάρει ως ομάδες: $(\kappa\alpha + \lambda\alpha) + (\kappa\beta + \lambda\beta)$

$\cdot$	β	-5
α	$\alpha\beta$	-5α
-5	-5β	25

$\boxed{?}\cdot\beta=-5\beta$

Έλεγχος: $-5\cdot(-5)=25$ ✓

Άρα: $\alpha\beta-5\alpha-5\beta+25=(\alpha-5)(\beta-5)$.

$2^{ος}$ τρόπος (αναλυτική μέθοδος)

$\alpha\beta - 5\alpha - 5\beta + 25 =$	Χωρίζω σε δύο ομάδες.
$(\alpha\beta - 5\alpha) + (-5\beta + 25) =$	Βγάζω κοινό παράγοντα σε κάθε ομάδα.
$\alpha(\beta - 5) + 5(-\beta + 5) =$	Οι παραστάσεις $\beta - 5\, \kappa\alpha\iota - \beta + 5$ είναι αντίθετες, δηλαδή: $-\beta + 5 = -1 \cdot (\beta - 5)$
$\alpha(\beta - 5) + 5 \cdot (-1) \cdot (\beta - 5) =$	Βρίσκω το γινόμενο $+5 \cdot (-1)$
$\alpha(\beta - 5) - 5(\beta - 5) =$	Το $(\beta - 5)$ είναι κοινός παράγοντας.
$(\beta - 5)(\alpha - 5)$	

2. $y^3 - y^2 + y - 1$

Άρα: $y^3 - y^2 + y - 1 =$

3. $5x^3 + 20x^2 + 2x + 8$

Άρα: $5x^3 + 20x^2 + 2x + 8 =$

4. $6xy + 10x - 3y - 5$

Άρα: $6xy + 10x - 3y - 5 =$

Άσκηση 2.6

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις.

1. $\alpha\beta + \alpha + \beta + 1$
2. $\alpha\beta - \alpha + \beta - 1$
3. $\kappa\lambda + 5\kappa + 2\lambda + 10$
4. $xy + 3y + x + 3$
5. $xy - 7y - x + 7$
6. $8x^2 - 12xy - 10x + 15y$

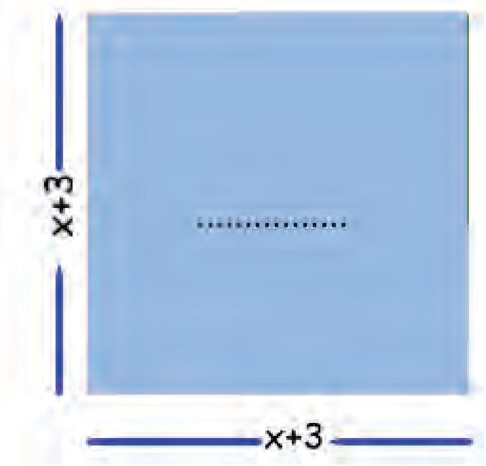
3 Αξιοσημείωτες ταυτότητες (Ειδικά γινόμενα)

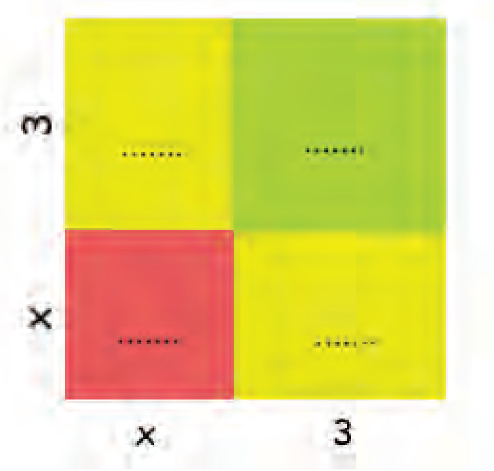
Ανάπτυγμα τετραγώνου αθροίσματος – διαφοράς δύο όρων.

Δραστηριότητα 3.1

1. Ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να εξετάσουν αν είναι ίσες οι παραστάσεις $(x+3)^2$ και x^2+3^2 .

- Ο Ραμίν σκέφτηκε να βάλει κάποιον αριθμό στη θέση του x.
  Δοκιμάστε και εσείς την μέθοδο του Ραμίν.
  ………
  ………
  Τι συμπέρασμα βγάζετε; ………………………………………………………
- Ο Αλί χρησιμοποίησε τα επόμενα σχήματα:





Α) Συμπληρώστε με κατάλληλες αλγεβρικές παραστάσεις τα εμβαδά στο εσωτερικό των παραπάνω σχημάτων.

Β) Από ποια μικρότερα σχήματα αποτελείται το δεξί σχήμα;

……

Γ) Γράψτε μια αλγεβρική παράσταση για το συνολικό εμβαδόν για το δεξί σχήμα: ……………………………………………………………………………………………

Δ) Με βάση τα προηγούμενα συμπληρώστε τη σχέση:

$(x+3)^2 =$……………………………

2. Επειδή $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$, βρείτε το ανάπτυγμα για το γινόμενο με την μέθοδο του πίνακα ή με την επιμεριστική ιδιότητα.

   Άρα: $(\alpha+\beta)^2 =$…………………………………………………

3. Βρείτε το ανάπτυγμα του $(\alpha-\beta)^2$ με πίνακα ή με την επιμεριστική ιδιότητα.

   Άρα: $(\alpha-\beta)^2 =$ …………………………………

Γράψτε ομοιότητες – διαφορές που έχουν οι σχέσεις που βρήκατε στα ερωτήματα 2 και 3.

………

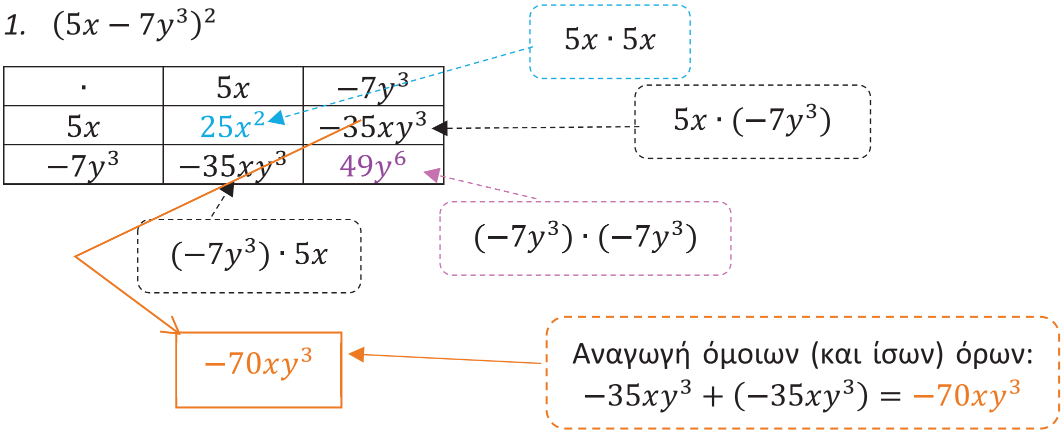
………

………

Άσκηση 3.1

Βρείτε τα αναπτύγματα των επόμενων παραστάσεων με την μέθοδο του πίνακα, όπως στο παράδειγμα.

1. $(5x-7y^3)^2$



$\cdot$	$5x$	$-7y^3$
$5x$	$25x^2$	$-35xy^3$
$-7y^3$	$-35xy^3$	$49y^6$

$5x\cdot 5x$

$5x\cdot(-7y^3)$

$(-7y^3)\cdot 5x$

$(-7y^3)\cdot(-7y^3)$

$-70xy^3$

Αναγωγή όμοιων (και ίσων) όρων:
$-35xy^3+(-35xy^3)=-70xy^3$

Άρα: $(5x-7y^3)^2=25x^2-70xy^3+49y^6$

2. $(x+10)^2$

$\cdot$		

Άρα: $(x+10)^2=$ ……………………………………

3. $(3x-1)^2$

$\cdot$		

Άρα: $(3x-1)^2=$ ……………………………………

4. $(4x + 2y)^2$

$\cdot$		

Άρα: $(4x + 2y)^2 =$ ....

5. $(a - 2a^2)^2$

$\cdot$		

Άρα: $(a - 2a^2)^2 =$ ....

Δραστηριότητα 3.2 *(παραγοντοποίηση αναπτύγματος τετραγώνου)*

Παραγοντοποιώ την παράσταση $9\kappa^2 - 6\kappa + 1$.

Υπάρχουν 3 όροι.
Δύο απ' αυτούς είναι τέλεια τετράγωνα[2]: $9\kappa^2$ *και* 1.
Τα βάζω σε διαγώνιες θέσεις.

$\cdot$		
	$9\kappa^2$	
		1

$\cdot$	3κ	1
3κ	$9\kappa^2$	
1		1

$\cdot$	3κ	1
3κ	$9\kappa^2$	3κ
1	3κ	1

$3\kappa \cdot 1$

$\cdot$	3κ	1
3κ	$9\kappa^2$	3κ
1	3κ	1

Έλεγχος:

$3\kappa + 3\kappa =? -6\kappa$ (όχι)

$\cdot$	3κ	-1
3κ	$9\kappa^2$	-3κ

Αλλάζω σε -1
και σε $3\kappa \cdot (-1)$

---

[2] Τέλειο τετράγωνο: είναι αυτό που προκύπτει όταν κάτι πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του. Για παράδειγμα επειδή $5y \cdot 5y = (5y)^2 = 25y^2$, το $25y^2$ λέγεται τέλειο τετράγωνο.

-1	-3κ	1

·	3κ	-1
3κ	$9\kappa^2$	-3κ
-1	-3κ	1

Έλεγχος:

$-3\kappa + (-3\kappa) =? -6\kappa$ (ναι)

Άρα: $9\kappa^2 - 6\kappa + 1 = (3\kappa - 1)^2$

Παραγοντοποιήστε τις επόμενες παραστάσεις:

1. $x^2 + 2x + 1$

·		

Άρα: $x^2 + 2x + 1 =$ ……………………………………………………………

2. $x^2 - 4x + 4$

·		

Άρα: $x^2 - 4x + 4 =$ ……………………………………………………………

3. $36x^2 + 18xy + y^2$

·		

Άρα: $36x^2 + 18xy + y^2 =$ ……………………………………………………………

4. $x^6 - 2x^3 + 1$

·		

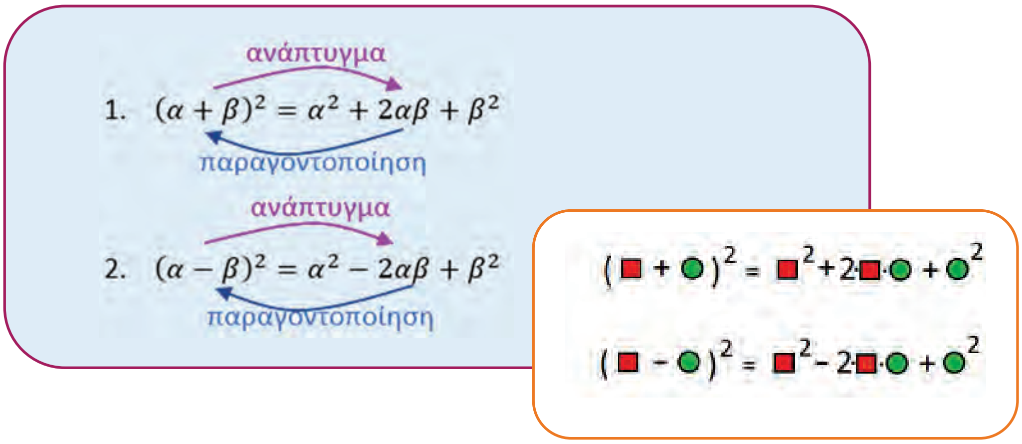
Άρα: $x^6 - 2x^3 + 1 =$ ……………………………………………………………

5. $4x^2 + 12xy + 9y^2$

·		

Άρα: $4x^2 + 12xy + 9y^2 =$ ……………………………………………………

Μαθαίνω

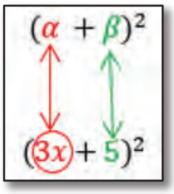


1. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
2. $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

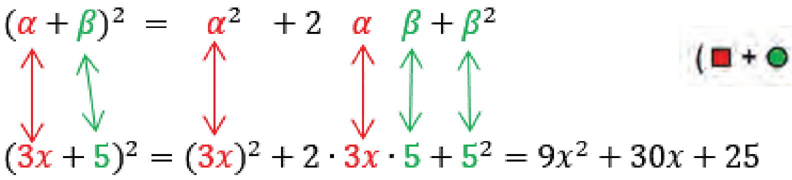
Μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις παραπάνω σχέσεις για να βρούμε το ανάπτυγμα ή για παραγοντοποίηση, όπως στα επόμενα παραδείγματα.

- Βρίσκουμε το ανάπτυγμα για την παράσταση: $(3x+5)^2$

Συγκρίνω την μορφή της παράστασης $(\alpha+\beta)^2$ με την μορφή της παράστασης $(3x+5)^2$. Στη θέση του α είναι το $3x$ και στην θέση του β είναι το 5.



Οπότε:



$$(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

- Παραγοντοποιώ την παράσταση: $4x^2 + 9 + 12x$

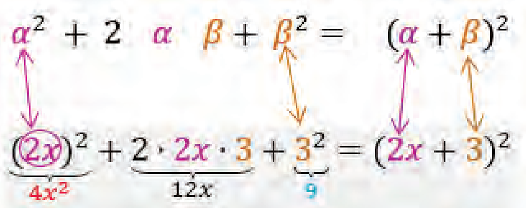
Βρίσκω τα 2 τέλεια τετράγωνα. Είναι το $4x^2$ και το 9.

Είναι:
$4x^2 = 2x\cdot 2x = (2x)^2$
και $9 = 3\cdot 3 = 3^2$.

Αλλάζω την $4x^2 + 9 + 12x$ σε: $\underbrace{(2x)^2}_{4x^2} + \underbrace{2\cdot 2x\cdot 3}_{12x} + \underbrace{3^2}_{9}$ και την συγκρίνω με την μορφή της παράστασης $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Στην θέση του α είναι το $2x$ και του β είναι το 3.

Άρα:



Δραστηριότητα 3.3

Χρησιμοποιήστε τις ταυτότητες για να βρείτε το ανάπτυγμα ή να παραγοντοποιήσετε.

1. $(\alpha + 10)^2 =$ ……………………………
2. $x^2 - 10x + 25 =$ ………………………
3. $(3x - 1)^2 =$ …………………………
4. $36y^2 + 12y + 1 =$……………………
5. $(5\alpha + 3\beta)^2 =$……………………………
6. $x^6 + 4 + 4x^3 =$ …………………………

Δραστηριότητα 3.4

Κάντε τις πράξεις, όπως στα παραδείγματα.

1. $(x + 3)^2 + (x - 5)^2 =$

$= (x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) + (x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2) =$

$= x^2 + 6x + 9 + x^2 - 10x + 25 =$

$= 2x^2 - 4x + 34$

2. $(2x - 3)^2 - (3x - 2)^2 =$

$= [(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2] - [(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2] =$

$= (4x^2 - 12x + 9) - (9x^2 - 12x + 4) =$

$= 4x^2 - 12x + 9 - 9x^2 + 12x - 4 =$

$= -5x^2 + 5$

3. $(x - 4)^2 - (2x - 1)^2 =$

………

………

………

………

………

4. $(\alpha - 3\beta)^2 + (5\alpha + 2\beta)^2 =$

………

………

………

………

………

Άσκηση 3.2

1. Βρείτε τα αναπτύγματα ή παραγοντοποιήστε :
   - α. $(2\alpha+3)^2=$
   - β. $(3x-y)^2$=
   - γ. $4+4y+y^2=$
   - δ. $16x^2+8x+1=$
   - ε. $(5x-3y)^2=$
   - στ. $100-20x+x^2=$
   - ζ. $a^8-4a^4+4=$
   - η. $(5x^2-3x)^2=$
   - ϑ. $16x^4+8x^2+1=$
   - ι. $(8x^5-10y^2)^2=$

2. Βρείτε ποιες από τις επόμενες σχέσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος. Όσες είναι λάθος να τις διορθώσετε.
   - α. $(x+3)^2=x^2+3x+9$
   - β. $(x+5)^2=x^2+10x+25$
   - γ. $(2x+1)^2=2x^2+4x+1$
   - δ. $(3y+2)^2=9y^2+12y+4$
   - ε. $(5x-3)^2=25x^2-9+30x$
   - στ. $(x^3+x^2)^2=x^5+2x^5+x^4$
   - ζ. $4x^2-4x+1=(4x-1)^2$
   - η. $x^6-2x^3+1=(x^3+1)^2$
   - ϑ. $9x^2-12x+4=(3x-2)^2$
   - ι. $25y^2+9x^2+30xy=(5y+3x)^2$

3. Κάντε τις πράξεις:
   - α. $(x-4)^2+(x+10)^2$
   - β. $(x+6)^2-(x-2)^2$
   - γ. $(2x+5)^2-(2x-5)^2$
   - δ. $(3y-2x)^2-(2y-3x)^2$
   - ε. $(2\omega-3)^2+(5\omega+2)^2-(3+7\omega)^2$

Ανάπτυγμα γινομένου αθροίσματος επί διαφοράς

Δραστηριότητα 3.5

1. Υπολογίστε τα επόμενα:
   α. $(5+3)(5-3) =$ …………………………………
   β. $5^2 - 3^2 =$ ……………………………………….
   γ. $(8-3)(8+3) =$……………………………….
   δ. $8^2 - 3^2 =$………………………………………….
   ε. $(15+5)(15-5) =$ …………………………………
   στ. $15^2 - 5^2 =$ ……………………………………………
2. *Γράψτε τι παρατηρείτε από τα αποτελέσματα που βρήκατε πριν.*
   ……
3. Βρείτε το ανάπτυγμα της παράστασης $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ με την μέθοδο του πίνακα ή με την επιμεριστική ιδιότητα.

Άρα: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) =$ ……………………………………………………

Μαθαίνω

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

Η Μαρία θέλει να βρει το ανάπτυγμα $(x-5y)(x+5y)$ και έγραψε:

$(x-5y)(x+5y) = x^2 - 5y^2$, *όμως δεν είναι σίγουρη αν είναι σωστό.*

Ο φίλος της ο Αμίρ, είπε να χρησιμοποιήσουν την μέθοδο του πίνακα *(συμπληρώστε και βρείτε το ανάπτυγμα)*:

$$(x-5y)(x+5y)$$

·		

Άρα: $(x-5y)(x+5y) =$ ………………………………………………

Δραστηριότητα 3.6

Βρείτε τα αναπτύγματα με την ταυτότητα (ή με πίνακα).

1. $(3-y)(3+y)$

   Άρα: $(3-y)(3+y) =$ ……………………………………………………

2. $(3x-5y)(3x+5y)$

   Άρα: $(3x-5y)(3x+5y) =$ ……………………………………………………

3. $(4x+7y)(4x-7y)$

   Άρα: $(4x+7y)(4x-7y) =$ ……………………………………………………

Δραστηριότητα 3.7

Κάντε τις πράξεις όπως στο παράδειγμα.

1. $(2\alpha-5)(2\alpha+5)-(3\alpha+2)(3\alpha-2) =$
   $= [(2\alpha)^2-5^2]-[(3\alpha)^2-2^2] =$
   $= (4\alpha^2-25)-(9\alpha^2-4) =$
   $= 4\alpha^2-25-9\alpha^2+4 =$
   $= -5\alpha^2-21$

2. $(3x-y)(3x+y)+(y-2x)(y+2x) =$
   ……
   ……
   ……

3. $(\alpha-5\beta)(\alpha+5\beta)-(10\alpha+\beta)(10\alpha-\beta) =$
   ……
   ……
   ……

Παραγοντοποίηση (διαφορά τετραγώνων)

/Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $16x^2-25$.

Η παράσταση είναι διαφορά με 2 όρους. Κάθε όρος (χωρίς το πρόσημο) είναι τέλειο τετράγωνο.

$1^{ος}$ τρόπος (με πίνακα)

	$16x^2$	
		-25

$\cdot$	$4x$	-5
$4x$	$16x^2$	
5		-25

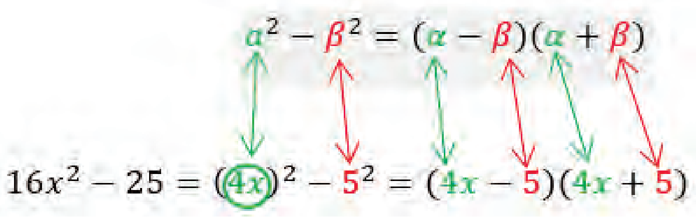
$\cdot$	$4x$	-5
$4x$	$16x^2$	$-20x$
5	$20x$	-25

Έλεγχος:
$20x + (-20x) = 0$ ✓

Άρα: $16x^2 - 25 = (4x+5)(4x-5)$

2^{ος} τρόπος (αναλυτικά).

Είναι $16x^2 = (4x)^2$ και $25 = 5^2$. Οπότε για $\alpha = 4x$ και $\beta = 5$



$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

$$16x^2 - 25 = (4x)^2 - 5^2 = (4x - 5)(4x + 5)$$

Δραστηριότητα 3.8

Παραγοντοποιήστε τις επόμενες παραστάσεις:

α. $16 - \omega^2$
β. $\alpha^2 - 25$
γ. $9x^2 - 100$
δ. $81y^2 - 16x^2$

Άσκηση 3.3

1. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα και βρείτε το ανάπτυγμα του κάθε γινομένου.
   α. $(a+9)(a-9)$
   β. $(x-12)(x+12)$
   γ. $(3y+11)(3y-11)$
   δ. $(2x+9y)(2x-9y)$
   ε. $(ax-y)(ax+y)$
   στ. $(5y^2+3x)(5y^2-3x)$
   ζ. $(x^2-10y^3)(x^2+10y^3)$
2. Παραγοντοποιήστε τις επόμενες παραστάσεις.
   α. $x^2 - 4$
   β. $25 - \alpha^2$
   γ. $\omega^2 - 49$
   δ. $9y^2 - 1$
   ε. $25\alpha^2 - \beta^2$
   στ. $16\alpha^2 - 9\beta^2$
   ζ. $36x^2 - 49y^2$
   η. $\alpha^{10} - 1$

3. Βρείτε ποιες από τις επόμενες σχέσεις είναι λάθος και να τις διορθώσετε.
   - α. $(x+2y)(x-2y)=x^2-2y^2$
   - β. $(3x-2y)(2y+3x)=9x^2-4y^2$
   - γ. $(5x+\alpha)(\alpha-5x)=\alpha^2-25x^2$
   - δ. $4y^2-1=(4y-1)(4y+1)$
   - ε. $9x^2-25=(3x-5)(3x+5)$
   - στ. $16y^2-49x^2=(16y+7x)(16y-7x)$

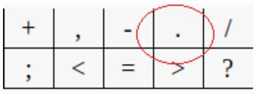
4. Κάντε τις πράξεις
   - α. $(x-y)(x+y)+(x-y)(x+y)$
   - β. $(x-y)(x+y)-(x-y)(x+y)$
   - γ. $(3a-x)(3a+x)-(2x+a)(a-2x)$
   - δ. $(5x+7y)(5x-7y)+(2y-4x)(4x+2y)$

Ενότητα Β1

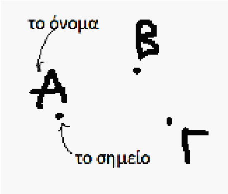
Βασικές γεωμετρικές έννοιες

1. Η ευθεία

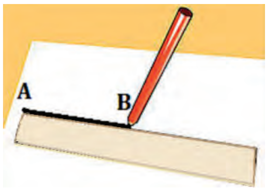
Το σημείο: η τομή δύο γραμμών, το ίχνος από το μολύβι μας σ' ένα χαρτί, μια τελεία, μας δίνουν μία εικόνα για το σημείο**.**



Το σημείο δεν έχει ούτε **μήκος**, ούτε **πλάτος**.



Στη γεωμετρία κάποιες φορές δίνουμε στα σημεία ονόματα. Το όνομα ενός σημείου είναι πάντα **ένα κεφαλαίο γράμμα, π.χ. Α, Β, Γ, κ.λπ.**



Ο πιο σύντομος δρόμος ανάμεσα σε δύο σημεία π.χ. τα Α και Β είναι ένα ***ευθύγραμμο τμήμα*** (μία τεντωμένη κλωστή με δύο άκρα Α και Β). Για να το σχεδιάσουμε χρειαζόμαστε έναν χάρακα (κανόνας[1]). Το ευθύγραμμο τμήμα παίρνει το όνομα από τα άκρα του, λέμε δηλαδή ***«το τμήμα ΑΒ».*** Η σειρά των γραμμάτων δεν έχει σημασία. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι το ίδιο με το ΒΑ.

Το ευθύγραμμο τμήμα έχει μόνο μήκος και δεν έχει πλάτος

Η ευθεία

Η ευθεία: ένα τεντωμένο σχοινί μας δίνει την εικόνα μιας ευθείας**.** Αν προεκτείνουμε με τη βοήθεια του κανόνα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ αριστερά του Α και δεξιά του Β όσο θέλουμε, τότε έχουμε μία ευθεία. Η ευθεία δεν έχει άκρα.

Το όνομα μιας ευθείας μπορεί να είναι…

ένα μικρό γράμμα, π.χ.
η ευθεία ε.

ή δύο ίδια μικρά γράμματα (το ένα με τόνο) π.χ. **η ευθεία χ'χ.**

ή το όνομα δύο σημείων πάνω στην ευθεία, π.χ. **η ευθεία ΑΒ.**

---

[1] Ένας χάρακας χωρίς μονάδες μέτρησης.

Δραστηριότητα 1.2

Έστω ένα σημείο Ο.

- Σχεδίασε μία ευθεία που να περνάει από το Ο.
- Μπορείς να σχεδιάσεις κι άλλη μία;
- Πόσες ευθείες νομίζεις ότι μπορούν να υπάρχουν που να περνάνε από το Ο;

Έστω τώρα δύο σημεία Α και Β.

- Σχεδίασε μία ευθεία που να περνάει από τα Α και Β.
- Μπορείς να σχεδιάσεις κι άλλη μία;
- Πόσες ευθείες νομίζεις μπορούν να υπάρχουν που να περνάνε από τα δύο αυτά σημεία;

Συμπληρώνω
Μαθαίνω

Από δύο σημεία περνάει ……………………………………………………………

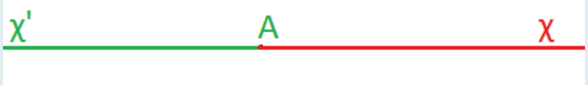
Από ένα σημείο περνάνε ……………………………………………………………

Η ημιευθεία

Προεκτείνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μόνο προς τη μία μεριά. Το νέο σχήμα λέγεται **ημιευθεία.** Η ημιευθεία έχει αρχή αλλά δεν έχει τέλος. **Το όνομα μιας ημιευθείας** είναι: ένα κεφαλαίο γράμμα (η αρχή της) κι ένα μικρό γράμμα (από τα τελευταία του ελληνικού αλφαβήτου π.χ. χ, ψ).

Λέμε για παράδειγμα **η ημιευθεία Αχ.** Το γράμμα χ δεν συμβολίζει τη θέση ενός σημείου.

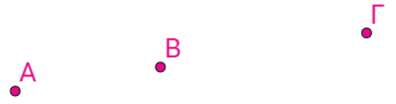
Ένα σημείο Α πάνω σε μία ευθεία χ’χ ορίζει δύο ημιευθείες, την Αχ’ και την Αχ.

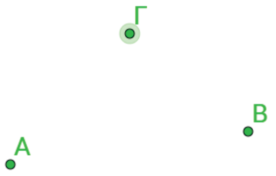


Δραστηριότητα 1.3 (Διατάξεις σημείων)

Α. α) Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα τρία ***σημεία Α, Β*** και ***Γ σε κάθε περίπτωση;***

β) Πόσες ευθείες ορίζουν τα τρία σημεία Α, Β, και Γ σε κάθε περίπτωση;





Β. Σχεδίασε τώρα ***τέσσερα σημεία Α, Β***, ***Γ*** και ***Δ***. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείς να το κάνεις; (ανάλογα με το πόσα σημεία βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία)

Η μέτρηση μήκους

Η μέτρηση ενός μήκους, μιας απόστασης, ήταν ένα από τα πρώτα πράγματα που θέλησε να κάνει ο άνθρωπος.

Μέτρηση = Σύγκριση

Μετράω ένα μήκος σημαίνει ότι το ***συγκρίνω με ένα άλλο γνωστό και σταθερό μήκος*** και υπολογίζω **πόσες φορές ακριβώς είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από αυτό.** Αυτό το γνωστό και σταθερό μήκος το λέμε **μονάδα μέτρησης.**

Πολύ παλιά, οι άνθρωποι χρησιμοποιούσαν ως μονάδα μέτρησης μέρη από το σώμα τους. Για μικρά μήκη χρησιμοποίησαν τα δάχτυλα, την παλάμη ή την πιθαμή. (Μία παλάμη □ 4 δάχτυλα, μία πιθαμή □2 παλάμες)

Για λίγο μεγαλύτερα μήκη, χρησιμοποιούσαν και το μέρος του μπράτσου, από τον αγκώνα ως τα δάχτυλα και το έλεγαν **πήχη** (1 πήχης□ 4 παλάμες).

Χρησιμοποίησαν ακόμη το **πόδι** **και τα** **βήματα.**

Δραστηριότητα (Ομαδική)

Α) Προσπαθήστε να μετρήσετε το μήκος του θρανίου σας με μονάδα μέτρησης την παλάμη σας. Πόσες παλάμες είναι; Άρα πόσα δάχτυλα;
Β) Μετρήστε το πλάτος του τετραδίου σας με μονάδα μέτρησης το δάχτυλό σας. Πόσα δάχτυλα είναι; Άρα, πόσες παλάμες;
Γ) Μετρήστε το πλάτος της αίθουσας που βρίσκεστε με μονάδα μέτρησης το πόδι σας. Πόσα πόδια είναι; Άρα, πόσες παλάμες;
Συγκρίνετε τα αποτελέσματα που βρήκατε. Πόσο διαφέρουν; Γιατί;

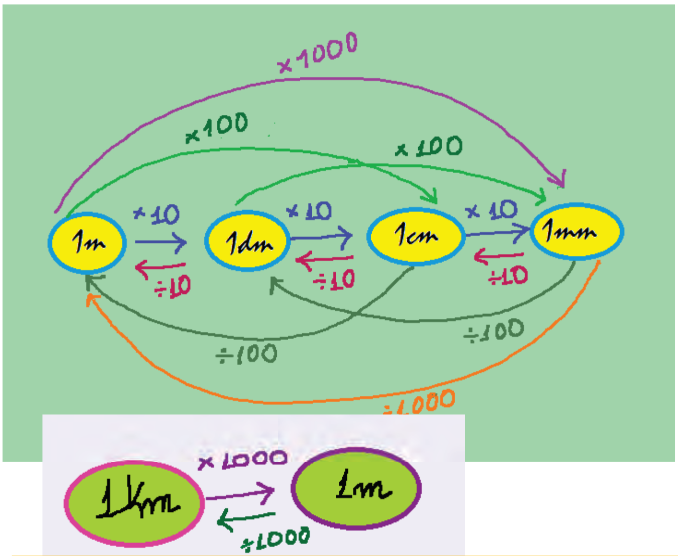
Η μέτρηση με αυτές τις μονάδες δεν ήταν πάντα η ίδια. Η παλάμη για παράδειγμα διαφέρει από άνθρωπο σε άνθρωπο. Έτσι, οι περισσότερες χώρες, το 1791 στη Γαλλία, συμφώνησαν να χρησιμοποιούν **την ίδια μονάδα μέτρησης για το μήκος.** Ως μονάδα μέτρησης, πήραν το $\frac{1}{10.000.000}$ της απόστασης του Ισημερινού από το Βόρειο πόλο. Την απόσταση αυτή την ονόμασαν **μέτρο.**
Κάθε μονάδα μέτρησης χωρίζεται σε μικρότερες. Έτσι χωρίσαμε το 1 μέτρο σε 10 κομμάτια (dm), κάθε ένα από αυτά σε άλλα 10 (cm) και κάθε ένα από αυτά σε άλλα 10 (mm).

1m = 10 dm = 100cm = 1000mm
1dm = 10cm = 100 mm
1cm = 10mm

dm = decimeter = δέκατο.
cm = centimeter = εκατοστό.
mm = millimeter = χιλιοστό.

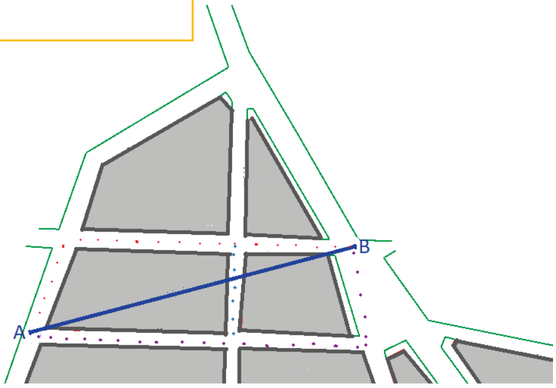
Για μεγάλες αποστάσεις χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης το **χιλιόμετρο (Km)**.
1km = 1000m

Τα παρακάτω σχήματα μας δείχνουν τη μετάβαση από μία μονάδα σε μία άλλη.
Για παράδειγμα:
3**cm** = (3 x 10) = 30**mm**
12**dm** = (12 x 100) = 1200**mm**
3,2**m** = (3,2 x 100) = 320**cm**
2,1km = (2,1 x 1000) = 2100**m**
200**cm** = (200 :100) = 2**m**
120**mm** = (120 : 100) = 1,2**dm**



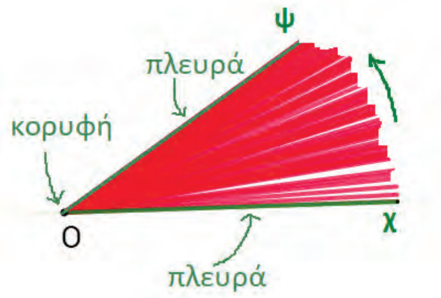
Άσκηση 1
Να συμπληρώσετε τις ισότητες:
i. 320cm = ……………… dm = …………………m
ii. 5,2 km = …………………… m = ………………………… mm
iii. 45000 mm = ………………. m
iv. 20dm = ……………. mm
v. 780 cm = …………..m = ………………km

Άσκηση 2
Να βρείτε και να σχεδιάσετε τη συντομότερη διαδρομή από τη θέση Α στη θέση Β (Οι γκρι περιοχές είναι κτίρια και δεν μπορείτε να περπατήσετε εκεί).

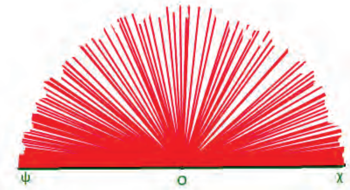


2. Η γωνία

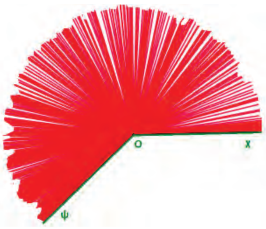
Στροφή – στρίβω- γυρίζω γύρω από…



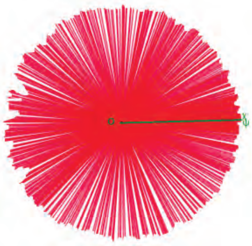
Έχουμε δύο ημιευθείες Οχ, Οψ με την ίδια αρχή Ο. ***Στρίβουμε την Οψ γύρω από το Ο*** *με τη φορά που βλέπετε.* Τότε ***η Οψ*** διαγράφει *(«χρωματίζει») την κόκκινη περιοχή.* Η περιοχή αυτή μαζί με τις ημιευθείες Οχ, Οψ και το σημείο Ο λέγεται **γωνία. Οι** ημιευθείες Οχ, Οψ λέγονται **πλευρές της γωνίας** και το σημείο Ο, **κορυφή της γωνίας**. Οι πλευρές της γωνίας μπορούν να προεκταθούν όσο θέλουμε.



Όταν η ημιευθεία Οψ με την ημιευθεία Οχ γίνουν ευθεία, τότε λέμε ότι σχηματίζεται μία **ευθεία γωνία.** Μέχρι να φτάσει την ευθεία γωνία κάθε γωνία λέγεται **κυρτή.**



Εάν η Οψ συνεχίσει να στρίβει τότε διαγράφει **μη κυρτή γωνία**.



Η ημιευθεία Οψ κάνει μία ολόκληρη στροφή και «πέφτει» πάνω στην Οχ. Τότε η γωνία που έχει διαγράψει λέγεται **πλήρης γωνία**.

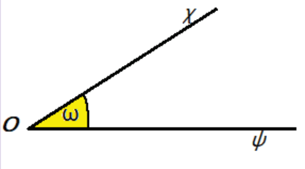
Πριν ξεκινήσει να στρίβει η ημιευθεία Οψ βρίσκεται πάνω στην Οχ. Τότε η γωνία που σχηματίζεται είναι η **μηδενική γωνία**.

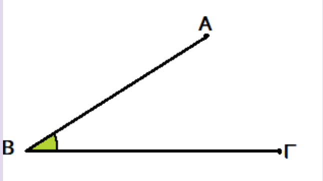
Το όνομα μιας γωνίας

ένα μικρό γράμμα, π.χ. γωνία $\widehat{\omega}$

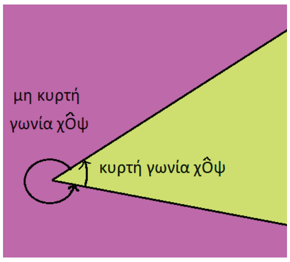
ή ένα κεφαλαίο (εάν δεν υπάρχει άλλη γωνία στο σχήμα με την ίδια κορυφή) π.χ. γωνία $\widehat{\mathbf{B}}$

ή 3 γράμματα. Η κορυφή είναι πάντα στη μέση! π.χ. γωνία $\widehat{\mathbf{AB\Gamma}}$ ή $\widehat{\mathbf{\Gamma BA}}$ ή γωνία $\widehat{\chi O\psi}$ ή $\widehat{\psi O\chi}$

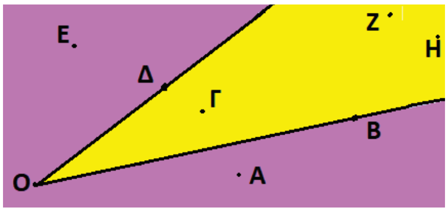




Δύο ημιευθείες Οχ, Οψ με την ίδια αρχή Ο, σχηματίζουν πάντα <u>2 γωνίες</u>, μία κυρτή και μία μη κυρτή.



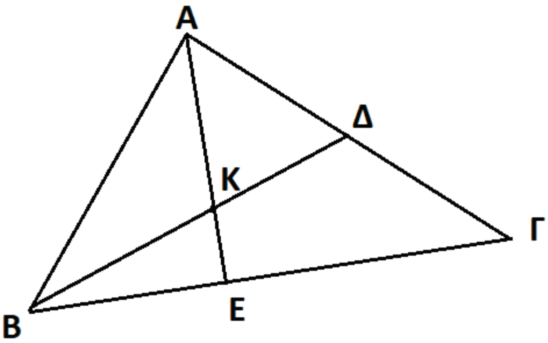
Όταν λέμε γωνία $\widehat{\chi O \psi}$, εννοούμε την κυρτή γωνία. Εάν θέλουμε να πούμε για την μη κυρτή γωνία τότε λέμε: ***«η μη κυρτή γωνία*** $\widehat{\chi O \psi}$*»*.



Μια γωνία έχει: **κορυφή, πλευρές και εσωτερικά σημεία.** Ποια από τα σημεία που βλέπεις σημειωμένα ανήκουν στην γωνία $\hat{O}$;

……
………………

Άσκηση 2.1: Ας ζωγραφίσουμε!



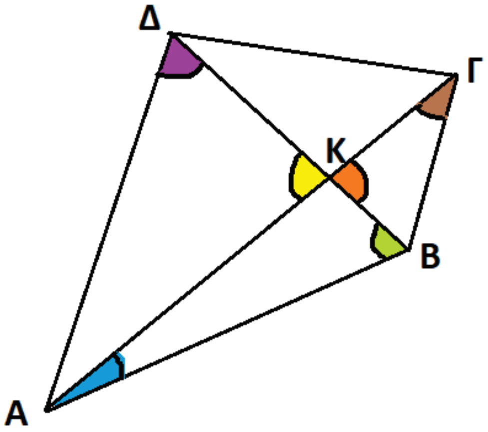
Χρωμάτισε με ***μπλε*** χρώμα τις γωνίες:

α) $\widehat{BKE}$ β) $\widehat{AB\Delta}$ γ) $\widehat{B\Delta\Gamma}$

Χρωμάτισε με ***κόκκινο*** χρώμα τις γωνίες:

β) $\widehat{KBE}$ β) $\widehat{A\Delta B}$ γ) $\widehat{KE\Gamma}$

Άσκηση 2.2: Γράψε το όνομα της γωνίας



Γράψε (με τρία γράμματα) *το όνομα της γωνίας* που έχει χρώμα:

α) **πορτοκαλί:** …………………………

β) **Πράσινο**: ……………………………

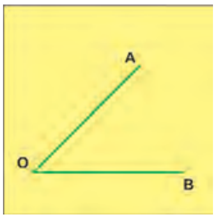
γ) **Μπλε**: ………………………………

δ) **Κίτρινο**: ……………………………

ε) **Καφέ**: ………………………………

στ) **Μωβ**: ………………………………

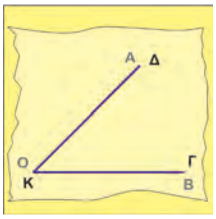
Δραστηριότητα 2.1: Σύγκριση γωνιών

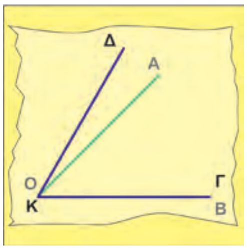


Θέλουμε να συγκρίνουμε τη γωνία $\widehat{BOA}$ με μία γωνία $\widehat{\Gamma K\Delta}$. Τότε σκεφτόμαστε σαν να μεταφέρουμε τη γωνία $\widehat{K}$ πάνω στην $\hat{O}$. Με τρόπο ώστε οι κορυφές Ο, Κ και οι πλευρές τους ΚΓ, ΟΑ να *είναι η μία πάνω στην άλλη*. Τι μπορεί να συμβεί τότε με τις άλλες πλευρές ΚΔ και ΟΒ;

Συμπληρώστε τα κενά με την κατάλληλη λέξη *(ίσες, μικρότερη, μεγαλύτερη)* ή το κατάλληλο σύμβολο *(<, >, =)*

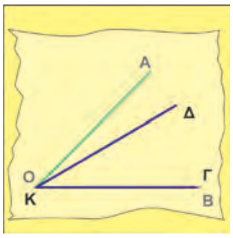
Α) Ή θα συμπέσει[2] και η άλλη πλευρά και τότε οι γωνίες θα είναι …………………. και γράφουμε $\widehat{AOB}$ … $\widehat{\Gamma K\Delta}$



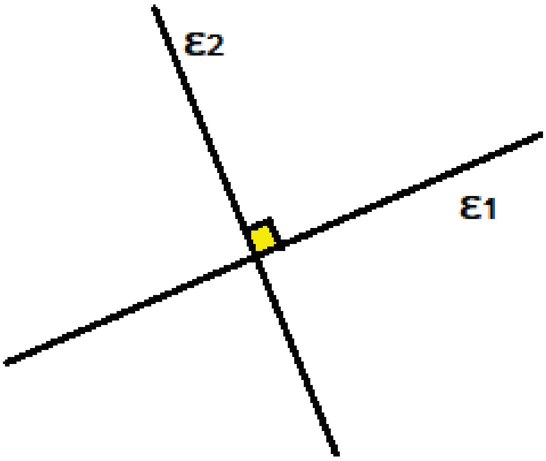


Β) Ή θα «πέσει» στο εσωτερικό της $\hat{O}$ και τότε η $\widehat{K}$ θα είναι ……………………………….. της $\hat{O}$ (μικρότερο «άνοιγμα») και γράφουμε $\widehat{AOB}$ … $\widehat{\Gamma K\Delta}$

Γ) Ή θα «πέσει» στο εξωτερικό της $\hat{O}$ και τότε η $\widehat{K}$ θα είναι ……………………… της $\hat{O}$ (μεγαλύτερο «άνοιγμα») και γράφουμε $\widehat{AOB}$ … $\widehat{\Gamma K\Delta}$



Όταν δύο ευθείες τέμνονται και σχηματίζουν **4 ίσες γωνίες,** οι ευθείες λέγονται **κάθετες.** Η γωνία που σχηματίζεται λέγεται **ορθή γωνία.**



Οι καινούριες μου λέξεις

………

………

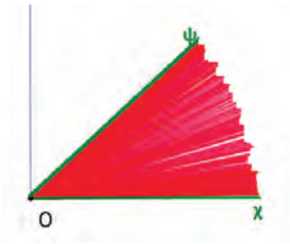
………

---

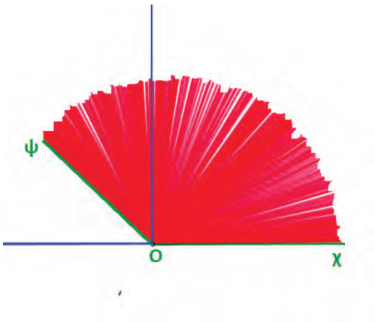
[2] Συμπέσει = να πέσει η μία πάνω στην άλλη.

……

……



Κάθε γωνία μικρότερη από την ορθή λέγεται οξεία γωνία.



Κάθε γωνία μεγαλύτερη από την ορθής & μικρότερη από την ευθεία λέγεται αμβλεία γωνία .

Άσκηση 2.3: Τα είδη των γωνιών

Σχεδιάστε μία γωνία από κάθε είδος.

Μηδενική γωνία

Οξεία γωνία

Ορθή γωνία

Αμβλεία γωνία

Ευθεία γωνία

Μη-κυρτή γωνία

Πλήρης γωνία

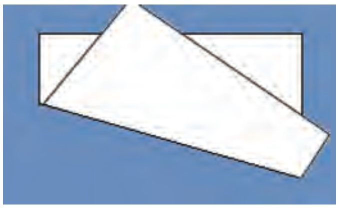
3. Η απόσταση

Κάθετη **από… προς….**

Για να σχεδιάσω σωστά μία ευθεία **κάθετη** σε μία άλλη χρησιμοποιώ ένα **ορθογώνιο τρίγωνο. Το ορθογώνιο τρίγωνο έχει δύο πλευρές κάθετες που σχηματίζουν ορθή γωνία.**

Αν δεν έχω, μπορώ να φτιάξω μία ορθή γωνία με ένα κομμάτι χαρτί.

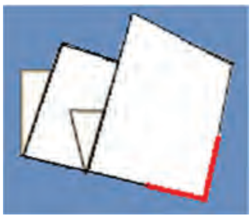
Βήμα 1: Διπλώνω το χαρτί μία φορά



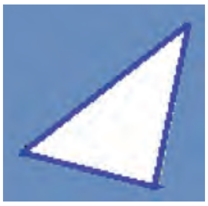
Βήμα 2:

Το ξαναδιπλώνω κατά μήκος της πρώτης τσάκισης. Η γωνία που έχει δημιουργεί είναι μία τέλεια ορθή γωνία.

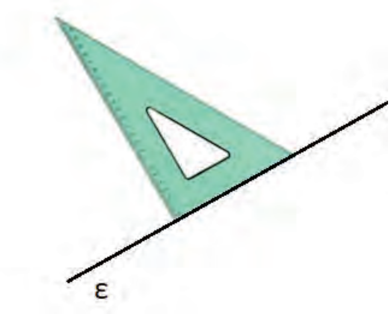
Αν ξεδιπλώσουμε το χαρτί θα δούμε δύο ευθείες κάθετες!



Βήμα 3: Αν θέλω, διπλώνω το υπόλοιπο χαρτί κατάλληλα ώστε να φτιάξω το σχήμα του τριγώνου.



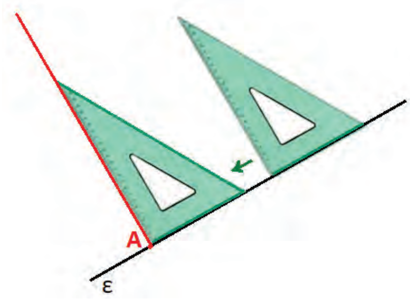
Κάθετη **σε** σημείο Α μιας ευθείας ε



Έστω μία ευθεία ε. Θέλω να σχεδιάσω μία άλλη ευθεία ζ κάθετη στην ε.
Παίρνω το ορθογώνιο τρίγωνο και το τοποθετώ έτσι, ώστε η μία κάθετη πλευρά του (η μικρότερη) να «πέσει» πάνω στην ευθεία ε.

Πρέπει να ξέρω όμως και κάτι ακόμα.

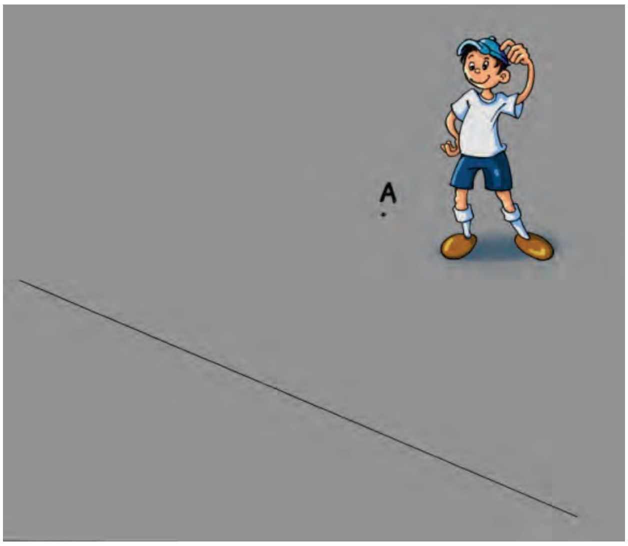
Έστω ότι θέλω **στο** πάνω στην ευθεία ε, συναντήσει το **την κάθετη στην ε**



Σε ποιο σημείο της ευθείας ε θέλω να φέρω την κάθετη;
σημείο Α. Σέρνω το τρίγωνο μέχρι η γωνία του να σημείο Α**.** **Τότε σχεδιάζω στο Α.**

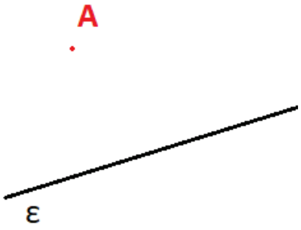
Δραστηριότητα 3.1 *(Απόσταση σημείου από ευθεία)*

Συχνά υπολογίζουμε την πιο σύντομη διαδρομή για να φτάσουμε κάπου. Μπορείς να σχεδιάσεις για το παιδί, την πιο σύντομη διαδρομή προς το πεζοδρόμιο;



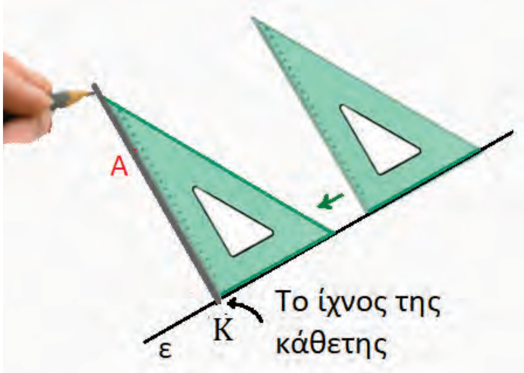
Το πρόβλημα είναι το ίδιο με το να βρούμε **την πιο μικρή απόσταση ενός σημείου από μία ευθεία.** Συζήτησε με την ομάδα σου και βρες τη λύση.

Κάθετη **από** σημείο Α έξω από την ευθεία ε



Έχουμε μία ευθεία ε κι ένα σημείο Α έξω από αυτήν.

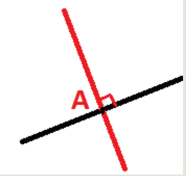
Τοποθετούμε τον γνώμονα με την μία κάθετη πλευρά του πάνω στην ευθεία ε. Τον σέρνουμε πάνω στην ευθεία. Σταματάμε όταν η άλλη κάθετη πλευρά «πέσει» πάνω στο σημείο Α. Σχεδιάζουμε την ευθεία στην άλλη κάθετη πλευρά του γνώμονα. Η κάθετη ευθεία τέμνει την ε στο Κ. **Το σημείο Κ** λέμε ότι είναι το ***ίχνος της κάθετης***.



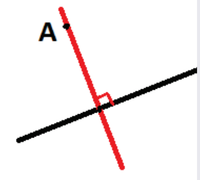
Από σημείο Α έξω από την ευθεία ε μπορούμε να φέρουμε **μόνο μία κάθετη προς αυτή.**
Το κάθετο τμήμα ΑΚ από το σημείο Α προς την ευθεία ε είναι η πιο σύντομος δρόμος προς αυτήν. ***Το μήκος του κάθετου τμήματος ΑΚ το λέμε απόσταση του σημείου από την ευθεία.***

Μία ευθεία δεν είναι κάθετη από μόνη της. Είναι πάντα κάθετη **προς μία άλλη ευθεία…**

… **κάθετη σε** κάποιο σημείο



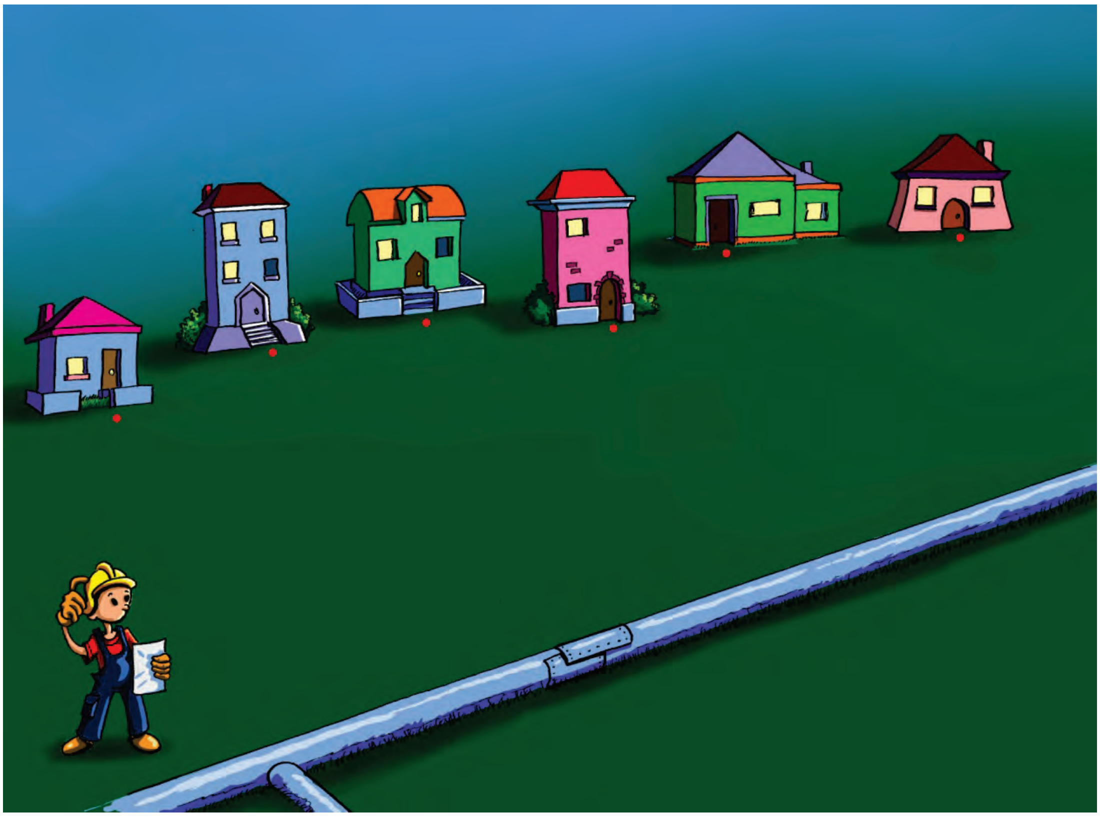
…ή **κάθετη από** κάποιο σημείο



Δραστηριότητα 3.2 (ομαδική): *Εξοικείωση με την κατασκευή κάθετης από σημείο*

Τα σπίτια στην εικόνα θα συνδεθούν με τον σωλήνα νερού. Κάθε ιδιοκτήτης θα πληρώσει κάποια χρήματα. Τα χρήματα θα είναι ανάλογα με την απόσταση κάθε σπιτιού από τον σωλήνα. Το κόστος είναι 57€/m (στην εικόνα το 1cm αντιστοιχεί σε 1m).

1. Ποιος ιδιοκτήτης θα πληρώσει τα περισσότερα χρήματα;
2. Ποιος ιδιοκτήτης θα πληρώσει τα λιγότερα χρήματα;
3. Θα πληρώσουν κάποιοι ιδιοκτήτες τα ίδια χρήματα;

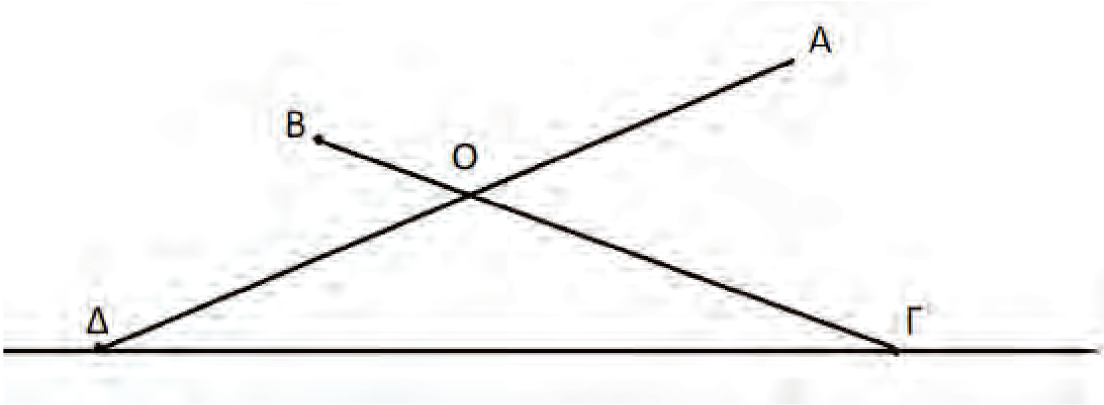


Σπίτι	Απόσταση από τον κεντρικό αγωγό	Κόστος σύνδεσης
Α		
Β		
Γ		
Δ		
Ε		
Ζ		

Για εξάσκηση

Στο παρακάτω σχήμα να φέρεις:

i. Κάθετη **από το Ο προς την ευθεία ΔΓ**
ii. Κάθετη **από το Α προς την ευθεία ΒΓ**
iii. Κάθετη **από το Α προς την ευθεία ΔΓ**
iv. Κάθετη **από το Β προς την ευθεία ΔΑ**
v. Κάθετη **από το Β προς την ευθεία ΔΓ**
vi. Κάθετη στην ΒΓ **στο** Β
vii. Κάθετη στην ΔΑ **στο** Α



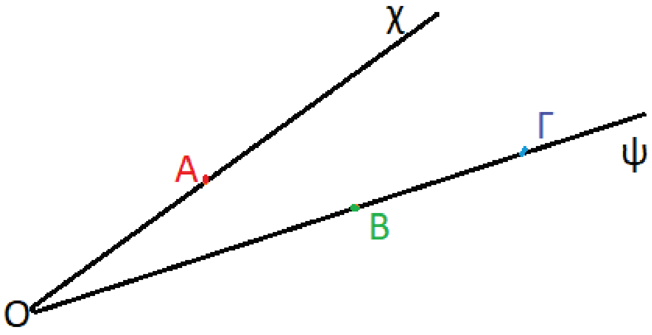
Κάθετη από… κάθετη στο…

Να σχεδιάσεις με τη βοήθεια του γνώμονα:

Α. Την κάθετη **από το Α προς την Οψ.**

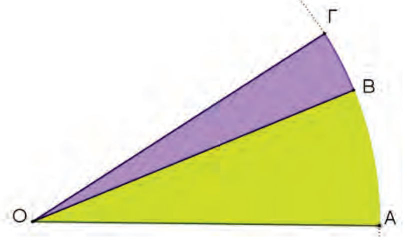
Β. Την κάθετη **από το Β προς την Οχ**.

Γ. Την κάθετη **στην** Οψ **στο Γ**.



4. Πρόσθεση, αφαίρεση γωνιών

Τι κοινό έχουν οι γωνίες $\widehat{AOB}\ και\ \widehat{BO\Gamma}$ στο διπλανό σχήμα;



………

……………………

Τις γωνίες αυτές τις λέμε ***εφεξής (διπλανές)*** .

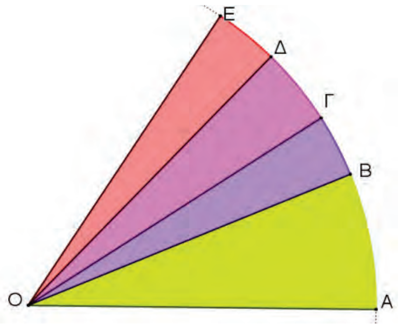
Τις διπλανές γωνίες μπορούμε να τις προσθέσουμε, δηλαδή:

$A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = A\hat{O}\Gamma$

Αυτό ταυτόχρονα σημαίνει ότι: $A\hat{O}\Gamma - A\hat{O}B = BO\Gamma$

Όλα τα σημεία της γωνίας $A\hat{O}B$ είναι και σημεία της $A\hat{O}\Gamma$. Η $A\hat{O}B$ είναι μέρος της $A\hat{O}\Gamma$.

Πρόσθεση και Αφαίρεση Γωνιών

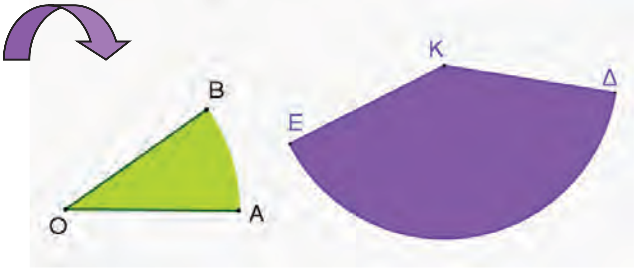


Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες με διαφορετικό χρώμα λέγονται ***διαδοχικές***.
Τις διαδοχικές γωνίες μπορούμε να τις προσθέτουμε.
Οι προσθέσεις αυτές μας δείχνουν και τις αντίστοιχες αφαιρέσεις.

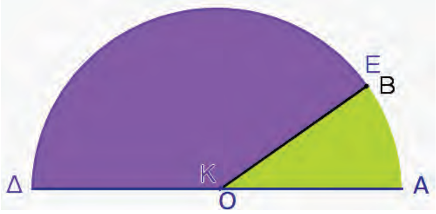
Συμπληρώστε τις ισότητες:

1. $B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta =$ ________
2. $B\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}E =$ ________
3. $B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}E =$ ________
4. $B\hat{O}\Delta - B\hat{O}\Gamma =$ ________
5. $B\hat{O}E - B\hat{O}\Delta =$ ________
6. $B\hat{O}E - \Gamma\hat{O}E =$ ________

Δύο γωνίες που το άθροισμά τους είναι ευθεία γωνία λέγονται παραπληρωματικές.

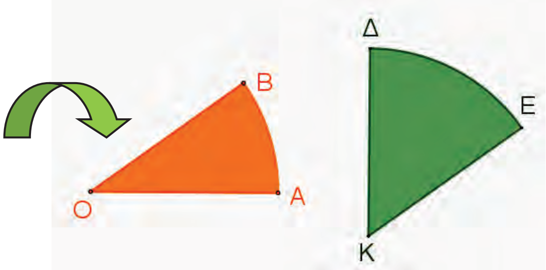


Παραπληρωματικές γωνίες

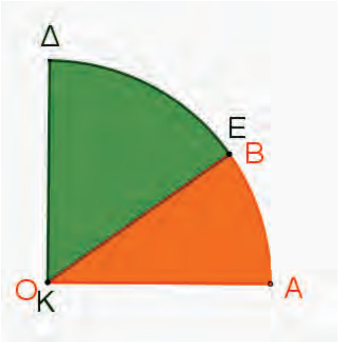


Εφεξής & Παραπληρωματικές

Δύο γωνίες που το άθροισμά τους είναι ορθή γωνία λέγονται συμπληρωματικές.



Συμπληρωματικές γωνίες



Εφεξής & Συμπληρωματικές γωνίες

Άσκηση :

Α) Να σχεδιάσετε i) μία οξεία γωνία και ii) μία αμβλεία γωνία και μετά να σχεδιάσετε τις παραπληρωματικές τους.

Β) Να σχεδιάσετε μία οξεία γωνία και μετά τη συμπληρωματική της.

Οι καινούριες μου λέξεις

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

5. Ο κύκλος

Ένα σχήμα που βλέπουμε συχνά γύρω μας είναι ο κύκλος.

Πώς σχεδιάζουμε έναν κύκλο; Με το εργαλείο που λέγεται ***διαβήτης.*** *Κρατάμε το ένα άκρο σταθερό και περιστρέφουμε το άλλο μέχρι να κάνουμε μία* ***πλήρη στροφή.*** Αυτό που κάνουμε λοιπόν όταν σχεδιάζουμε τη γραμμή, είναι ότι ***κρατάμε σταθερή απόσταση από ένα σημείο (το κέντρο).***

Επομένως κύκλος είναι το σχήμα που όλα τα σημεία του απέχουν το ίδιο από ένα σημείο που το λέμε κέντρο του κύκλου.

Δραστηριότητα Α5.1

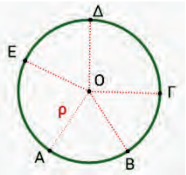
Σκεφτείτε και συζητήστε πώς θα σχεδιάζατε έναν κύκλο χωρίς διαβήτη
Α) Πάνω στο χώμα ή την άμμο
Β) Πάνω στον πίνακα με το χέρι σας
Γ) Με το σώμα σας
Δ) Με κάποιο άλλο αντικείμενο πάνω στο χαρτί.

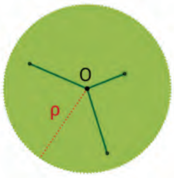
Η απόσταση κάθε σημείου από το κέντρο λέγεται ***ακτίνα*** *του κύκλου. Την ακτίνα τη συμβολίζουμε συνήθως με το γράμμα* ***ρ.***
Όταν θέλουμε να μιλήσουμε για έναν κύκλο που έχει κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ρ, γράφουμε: ***ο κύκλος (Ο, ρ).***

Οι κύκλοι που έχουν ίσες ακτίνες, είναι ίσοι.

Ο κύκλος (Ο, ρ) επομένως χωρίζει τα σημεία του επιπέδου σε τρεις ομάδες:

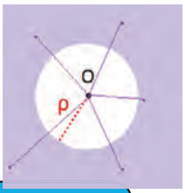
Α) Τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το Ο απόσταση ***ίση με ρ.*** Αυτά είναι τα σημεία του κύκλου.





Β) Τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το Ο απόσταση ***μικρότερη από ρ.***
Την επιφάνεια που έχει τα όλα τα σημεία της ομάδας Α) και της Β) τη λέμε **κυκλικό δίσκο.**

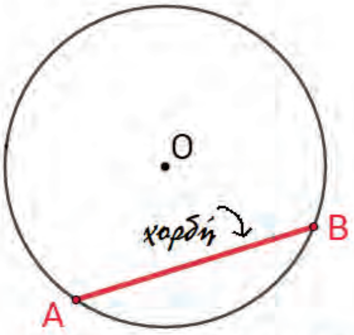
Γ) Τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το Ο απόσταση **μεγαλύτερη από ρ**. Αυτά είναι τα ***εξωτερικά σημεία του κύκλου.***



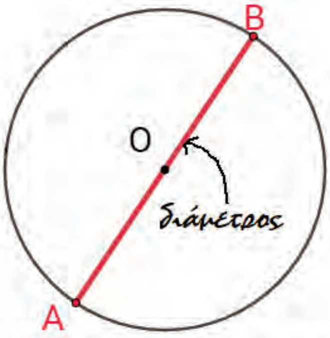
Δραστηριότητα 5.2 *(Οι τόποι των σημείων που απέχουν απόσταση μικρότερη, μεγαλύτερη ή ίση με δοσμένο μήκος)*

Στο σημείο Κ βρίσκεται μία κεραία κινητής τηλεφωνίας. Ο δήμος θέλει να χτίσει ένα σχολείο. Για την υγεία των παιδιών θα ήταν καλό να βρίσκεται σε απόσταση ***μεγαλύτερη των 300m*** από την κεραία. Για να έχει καλή σύνδεση θα ήταν καλύτερα να βρίσκεται σε απόσταση ***μικρότερη των 1500m*** από την κεραία. Σε ποια περιοχή μπορεί να χτιστεί το σχολείο;

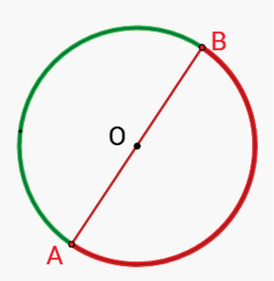
Ας γνωρίσουμε τον κύκλο λίγο καλύτερα



Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία πάνω στον κύκλο, το λέμε ***χορδή***

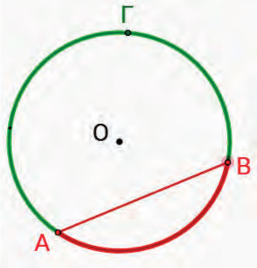


Τη χορδή που περνάει από το κέντρο του κύκλου, τη λέμε ***διάμετρο***

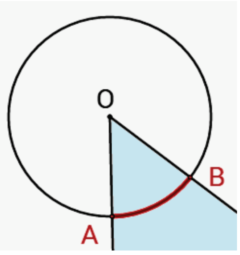


Τα άκρα Α και Β της διαμέτρου ΑΒ χωρίζουν τον κύκλο σε δύο ίσα κομμάτια. Κάθε ένα από αυτά το λέμε **ημικύκλιο**[3].

Γενικά, δύο σημεία του κύκλου, χωρίζουν τον κύκλο *σε δύο κομμάτια*. Κάθε ένα από αυτά λέγεται **τόξο**. Το τόξο συμβολίζεται με *ΑΒ*. Για να ξεχωρίσουμε το μεγαλύτερο από τα δύο, βάζουμε κι ένα τρίτο σημείο και λέμε τόξο ***ΑΓΒ*.**



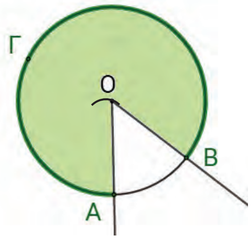
Επίκεντρη γωνία



Ας σχεδιάσουμε δύο ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ***με αρχή το κέντρο Ο*** ενός κύκλου. Η γωνία $A\hat{O}B$ που σχηματίζεται λέγεται **επίκεντρη γωνία**.

Οι πλευρές της επίκεντρης γωνίας $A\hat{O}B$ «κόβουν» ένα κομμάτι από τον κύκλο, το τόξο AB. Το τόξο AB το λέμε ***αντίστοιχο τόξο*** της επίκεντρης γωνίας $A\hat{O}B$.

Οι ίδιες ημιευθείες σχηματίζουν και την ***μη-κυρτή γωνία*** $A\hat{O}B$. Το αντίστοιχο τόξο της μη-κυρτής γωνίας $A\hat{O}B$ είναι το τόξο $AΓB$.



- ***Κάθε τόξο κύκλου έχει μία και μοναδική αντίστοιχη επίκεντρη γωνία.***
- ***Κάθε επίκεντρη γωνία ενός κύκλου έχει ένα και μοναδικό αντίστοιχο τόξο.***

---

[3] Ημικύκλιο: μισός κύκλος.

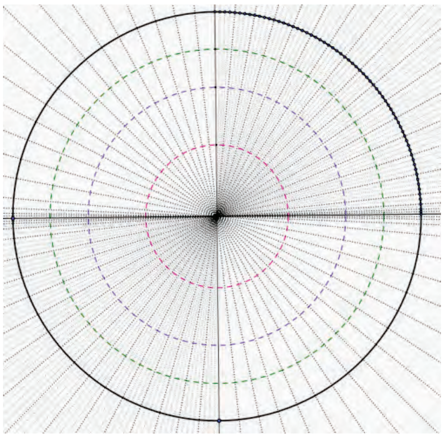
6. Μέτρηση γωνίας & τόξου

Για να μετρήσουμε μία γωνία χρειαζόμαστε μία μονάδα μέτρησης. Μονάδα μέτρησης της γωνίας είναι η ***μοίρα. Συμβολίζεται με*** ^{o}.

Χωρίζουμε έναν κύκλο σε 360 ίσα κομμάτια. Κάθε ένα από αυτά τα κομμάτια, αντιστοιχεί σε μία και μοναδική επίκεντρη γωνία μίας μοίρας ή **1^{o}** . Άρα ***κάθε κύκλος είναι*** **360^{o}** .

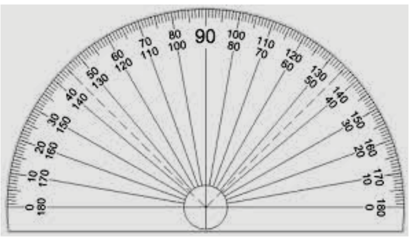
(η ακτίνα του κύκλου έχει σημασία; Συζητήστε στην τάξη).

Συμπληρώστε στον πίνακα, το μέτρο της γωνίας που βρίσκεται στην αριστερή στήλη.



Η γωνία	Το μέτρο
Ορθή γωνία	
Ευθεία γωνία	
1/6 του κύκλου	
1/3 του κύκλου	
1/8 του κύκλου	
1/12 του κύκλου	

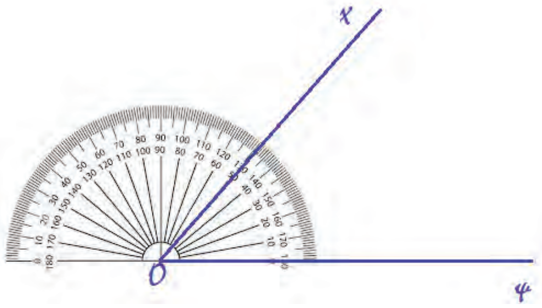
Το εργαλείο το οποίο χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε μία γωνία είναι το ***μοιρογνωμόνιο.*** Ένα ημικύκλιο χωρισμένο σε μοίρες.



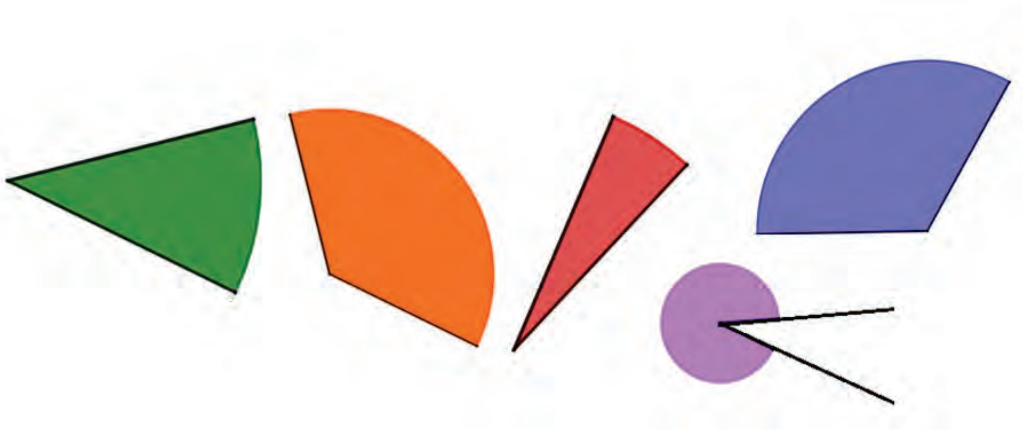
Πώς μετράμε μία γωνία;

Τοποθετούμε το μοιρογνωμόνιο με τέτοιο τρόπο ώστε:

1. Το κέντρο από το μοιρογνωμόνιο να είναι πάνω στην κορυφή της γωνίας.
2. Η μία πλευρά της γωνίας να είναι πάνω στην ευθεία που περνάει από το 0.
3. Ξεκινώντας από το 0, κοιτάμε τη μέτρηση που δείχνει η άλλη πλευρά της γωνίας.



ΑΣΚΗΣΗ: μπορείτε να μετρήσετε τις γωνίες στην παρακάτω εικόνα;

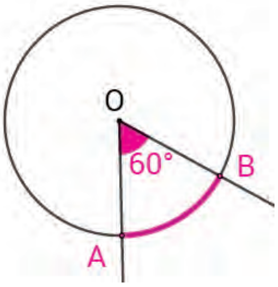


Μέτρηση τόξου

(Πώς *μετράμε* το τόξο ενός κύκλου;)

Κάθε τόξο έχει μία ***και μοναδική επίκεντρη γωνία.***

Το μέτρο μιας επίκεντρης γωνίας είναι το ίδιο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της.



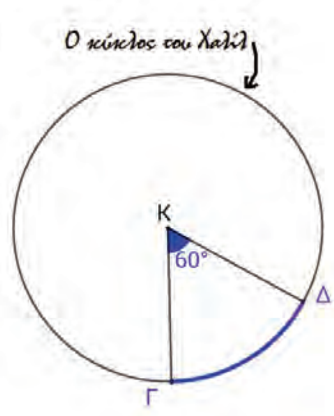
Άρα, μονάδα μέτρησης και του τόξου είναι οι μοίρες. Για παράδειγμα ένα τόξο που αντιστοιχεί σε μία γωνία 60^o , λέμε ότι είναι κι αυτό 60^o και γράφουμε $\overset{\frown}{AB} = 60^o$.

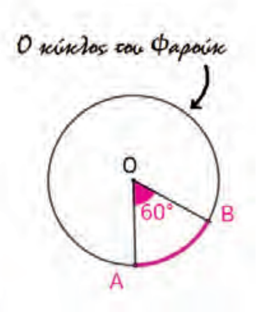
Δραστηριότητα 6.2 (Μία γνωστή παρανόηση μεταξύ μήκους και μέτρου τόξου)

Ο Χαλίλ και ο Φαρούκ σχεδίασαν έναν κύκλο και μία επίκεντρη γωνία 60^o. Γίνεται ο παρακάτω διάλογος:

— Χαλίλ: *Τα τόξα είναι ίσα!*
— Φαρούκ: *Όχι, δεν είναι ίσα! Πώς μπορεί να είναι ίσα; Δεν βλέπεις ότι το τόξο ΓΔ είναι μεγαλύτερο;*
— Χαλίλ: *Μα αφού και τα δύο είναι 60^o!*

Εσείς τι νομίζετε; Ποιος έχει δίκιο;





Το μέτρο ενός τόξου <u>δείχνει</u> *τι μέρος (κλάσμα) του κύκλου είναι. Γι' αυτό μπορούμε να συγκρίνουμε τόξα μόνο όταν βρίσκονται στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους.*

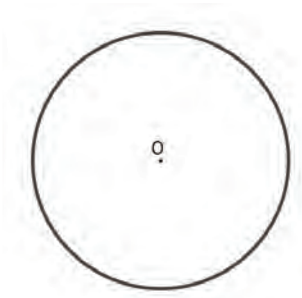
Ένας κύκλος είναι μία πλήρης γωνία. Μία πλήρης γωνία είναι 360° . Άρα ***μία γωνία 60° είναι το 1/6 του κύκλου*** $\left(\textit{σκέφτομαι:}\ 6\times60^\circ = 360^\circ \text{ άρα } \frac{60^o}{360^o}=\frac{1}{6}\right)$.

Γωνία σε μοίρες	Κλασματικό μέρος του κύκλου
90°	
180°	
30°	
45°	
120°	
270°	

Στον διπλανό πίνακα συμπλήρωσε τη δεξιά στήλη. Σε τι μέρος (κλάσμα) του κύκλου αντιστοιχεί η γωνία που βρίσκεται στην αριστερή στήλη;

Δραστηριότητα Α 6.1
(Διαμέριση κύκλου σε ίσα τόξα)

Να χωρίσετε τον παρακάτω κύκλο σε 4 ίσα κομμάτια
Α) <u>με</u> μοιρογνωμόνιο
Β) <u>χωρίς</u> μοιρογνωμόνιο.



Ασκήσεις

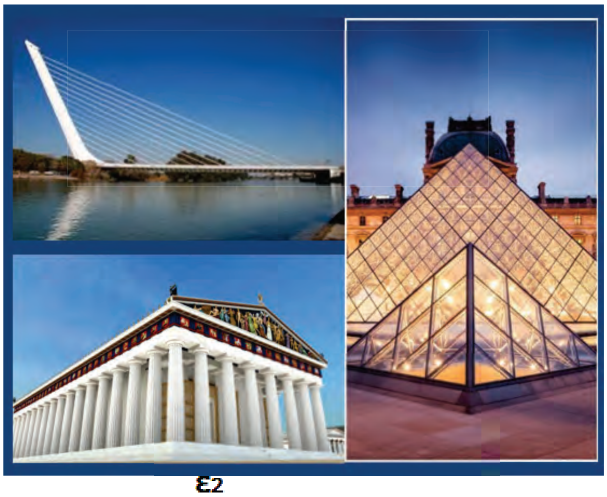
1. Να σχεδιάσετε μία γωνία 35^o . Μετά να σχεδιάσετε τη συμπληρωματική της.
2. Να σχεδιάσετε μία γωνία που είναι τα $\frac{2}{3}$ της ορθής.
3. Να σχεδιάσετε μία γωνία που είναι τα $\frac{4}{5}$ μιας ευθείας γωνίας.
4. Να σχεδιάσετε μία γωνία που είναι τα $\frac{3}{2}$ μιας ευθείας γωνίας.
5. Να σχεδιάσετε μία γωνία που είναι $\frac{5}{4}$ μιας ευθείας γωνίας.
6. Η γωνία $\hat{\alpha}$ είναι τριπλάσια μιας γωνίας $\hat{\beta}$. Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι και παραπληρωματικές. Μπορείτε να βρείτε ποιες είναι;

Δραστηριότητα 6.3

Α) Να σχεδιάσετε έναν κύκλο στο τετράδιό σας και να τον χωρίσετε **σε 6 ίσα τόξα**. Να συγκρίνετε την ακτίνα του κύκλου με τη χορδή από κάθε τόξο. Τι παρατηρείτε;

Β) Με βάση αυτό που βρήκατε στην ερώτηση Α σκεφτείτε: μπορούμε να χωρίσουμε έναν κύκλο σε 6 ίσα τόξα, **χωρίς** μοιρογνωμόνιο;

7. Ευθεία & ευθεία

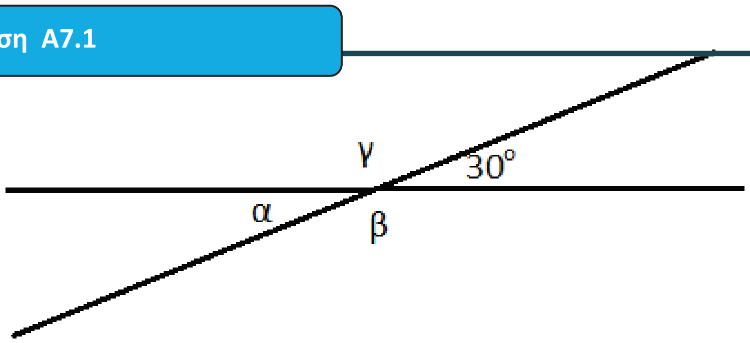


Δύο ευθείες στο επίπεδο ή **τέμνονται** και λέγονται **τεμνόμενες**

ή

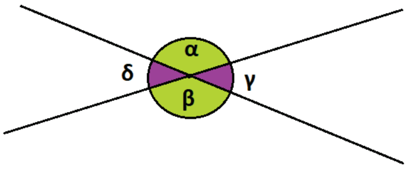
δεν τέμνονται όσο κι αν τις προεκτείνουμε και τότε λέγονται **παράλληλες** και γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Άσκηση Α7.1



1. Είναι $\hat{\gamma} + 30^0 =$ ……………., άρα $\hat{\gamma} =$ …………….
2. Είναι $\hat{\beta} + 30^0 =$ ……………., άρα $\hat{\beta} =$ ……………
3. Μπορείς να βρεις τη γωνία $\hat{\alpha}$;
4. Τι παρατηρείς;

Δύο ευθείες που τέμνονται σχηματίζουν πάντα 4 γωνίες.



- *Οι διπλανές (εφεξής), λέγονται ………………………………… γιατί σχηματίζουν ευθεία γωνία.*
- *Οι απέναντι,* δηλαδή οι: $\hat{\alpha}$ *με την* $\hat{\beta}$ *και οι* $\hat{\gamma}$ *με την* $\hat{\delta}$ *λέγονται* ***κατακορυφήν.***

Συμπληρώνω

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ λέγονται κατακορυφήν και είναι …………

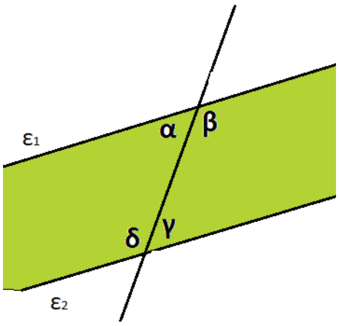
Οι γωνίες $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$ λέγονται ………………………… και είναι …………

Άσκηση Α7.2

Συμπλήρωσε τον πίνακα:

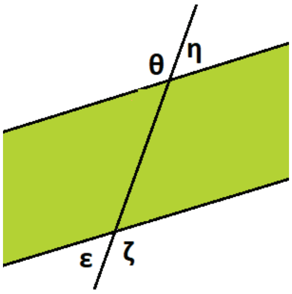
Γωνία $\widehat{\omega}$	Παραπληρωματική της $\widehat{\omega}$	Συμπληρωματική της $\widehat{\omega}$
45°		
120°		■
90°		
12°		
180°		■

Γωνίες που σχηματίζονται από δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη ευθεία



Οι ευθείες ε_1 και ε_1 είναι παράλληλες ($\varepsilon_1 // \varepsilon_2$) και η ευθεία ε τις τέμνει. Τότε σχηματίζονται 8 γωνίες.

Οι 4 γωνίες βρίσκονται *μέσα στη ζώνη* που σχηματίζουν οι δύο παράλληλες (πράσινη περιοχή) και λέγονται γωνίες **εντός**[4]. Είναι οι ***γωνίες*** $\boldsymbol{\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}}$ ***και*** $\boldsymbol{\widehat{\delta}}$.

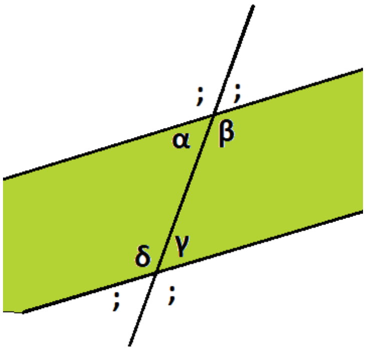


Οι άλλες 4 γωνίες βρίσκονται *έξω από τη ζώνη* (άσπρη περιοχή) και λέγονται γωνίες **εκτός**[5]. Είναι οι γωνίες $\hat{\varepsilon}, \hat{\zeta}, \hat{\eta}$ *και* $\hat{\theta}$.
Κάθε μία από αυτές όμως είναι *κατακορυφήν* με μία γωνία εντός (άρα και ίση).

---

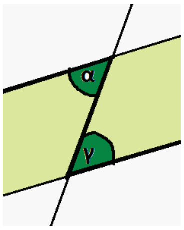
[4] Εντός = μέσα.

[5] Εκτός = έξω.



Δραστηριότητα 7.1

Για να δείξουμε πάνω στο σχήμα ότι δύο γωνίες είναι ίσες τους δίνουμε το ίδιο όνομα. Μπορείς να **συμπληρώσεις** το κατάλληλο όνομα στις γωνίες ***εκτός;*** (το όνομα θα πρέπει να είναι το ίδιο με το όνομα της ίσης γωνίας)

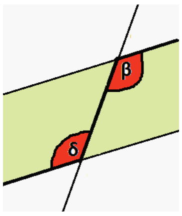


Οι γωνίες $\hat{\alpha}\ \kappa\alpha\iota\ \hat{\gamma}$ λέγονται **εντός** κι εναλλάξ και είναι **ίσες**.

$$\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$$

Οι γωνίες $\hat{\beta}\kappa\alpha\iota\ \hat{\delta}$ λέγονται **εντός** κι εναλλάξ και είναι **ίσες.**

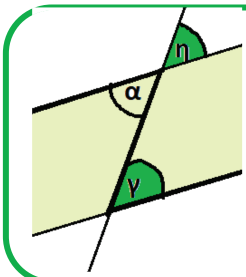
$$\hat{\beta} = \hat{\delta}$$



Οι γωνίες $\hat{\alpha}\ \kappa\alpha\iota\ \hat{\eta}$ είναι κατακορυφήν και είναι ίσες. $\hat{\alpha} = \hat{\eta}$

Οι γωνίες $\hat{\alpha}\ \kappa\alpha\iota\ \hat{\gamma}$ είναι **εντός** κι εναλλάξ και είναι ίσες. $\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$

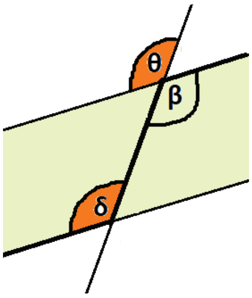
Επομένως θα είναι και $\hat{\gamma} = \hat{\eta}$



Οι γωνίες $\hat{\gamma}\ \kappa\alpha\iota\ \hat{\eta}$ λέγονται εντός-εκτός κι επί τα αυτά[6] και είναι ίσες.

$$\hat{\gamma} = \hat{\eta}$$

Άσκηση 7.2: Συμπλήρωσε τις παρακάτω προτάσεις.



Οι γωνίες $\hat{\delta}\ \kappa\alpha\iota\ \hat{\theta}$ λέγονται …………………………………………………………. και είναι ……………………………

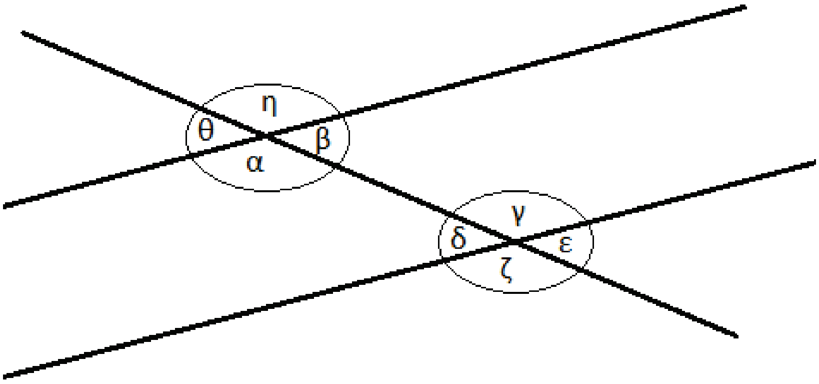
Οι γωνίες $\hat{\delta}\ \kappa\alpha\iota\ \hat{\beta}$ λέγονται ……………………………………………………………. και είναι …………………………..

Οι γωνίες $\hat{\theta}\ \kappa\alpha\iota\ \hat{\beta}$ λέγονται ………………………………………………………………… και είναι …………………………

---

[6] Εντός-εκτός κι επί τα’ αυτά: σημαίνει ότι η μία είναι ***εντός***, η άλλη είναι ***εκτός*** αλλά και οι δύο είναι ***από την ίδια μεριά***.

Δραστηριότητα 7.3: Ας χρωματίσουμε τις *ίσες γωνίες* ***με το ίδιο χρώμα.*** Πόσα χρώματα θα χρειαστείς;



Υπάρχουν 4 οξείες+ 4 αμβλείες = 8 γωνίες.

Όλες οι οξείες γωνίες στο σχήμα είναι ……………… και όλες οι αμβλείες γωνίες είναι επίσης …………….

Η οξεία γωνία και η αμβλεία γωνία σ' αυτό το σχήμα είναι …………………………………

Κατασκευή ευθείας παράλληλης σε άλλη ευθεία

Να σχεδιάσετε μία ευθεία ε. Μετά να σχεδιάσετε μία άλλη ευθεία **παράλληλη** στην ε. Πώς θα είστε σίγουροι ότι η ευθεία που σχεδιάσατε είναι πραγματικά παράλληλη; Η παρακάτω πρόταση θα σας βοηθήσει να βρείτε τον τρόπο.

Αν δύο ευθείες είναι κάθετες στην ίδια ευθεία, τότε είναι παράλληλες.

Οι καινούριες μου λέξεις

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

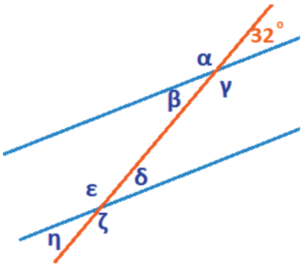
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

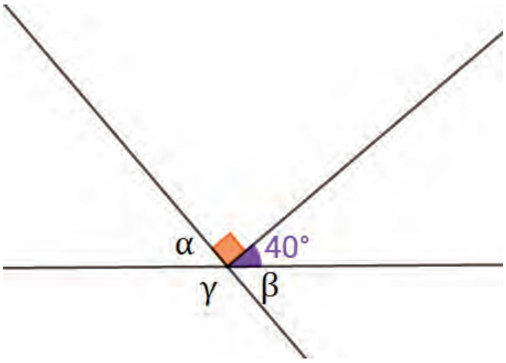
Άσκηση 7.4

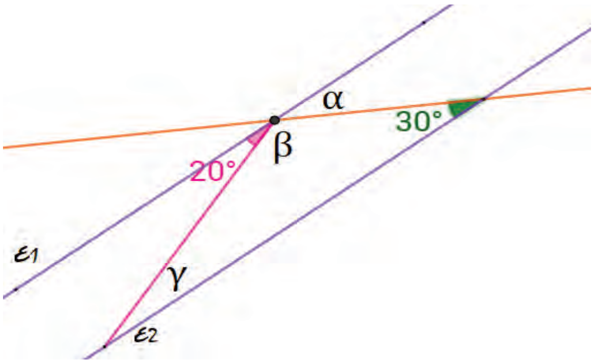
Βρες τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}, \hat{\varepsilon}, \hat{\zeta}$ και $\hat{\eta}$ στο διπλανό σχήμα.



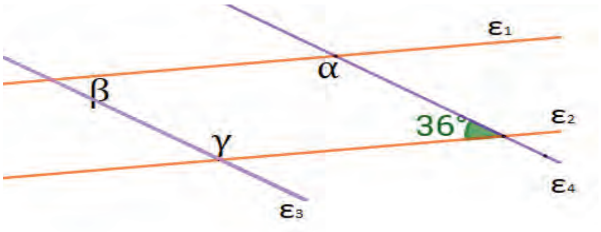
Ασκήσεις

Μπορείτε να βρείτε τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ και $\widehat{\gamma}$ στα παρακάτω σχήματα;





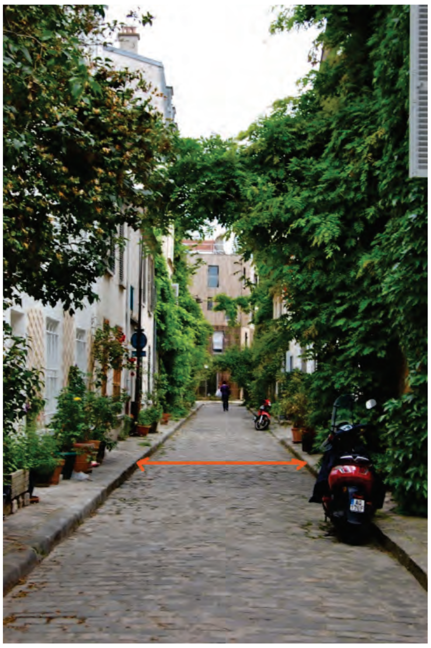
Οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες ($\varepsilon_1 // \varepsilon_2$)



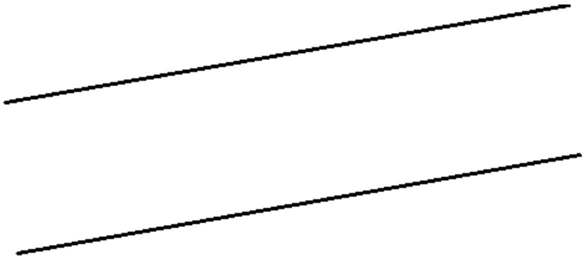
Ισχύει: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$

Απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών

Δραστηριότητα 7.5



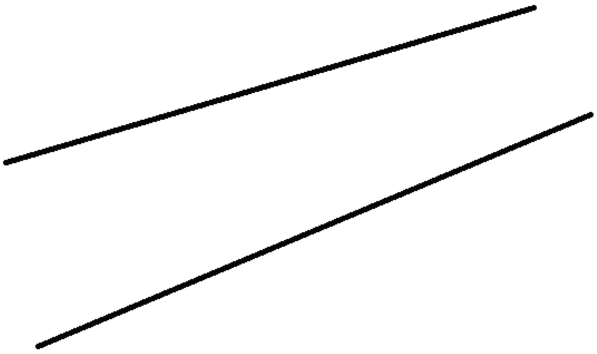
Ο Χαλίλ και η Μαρία μέτρησαν το πλάτος από το δρομάκι μπροστά στο σπίτι τους αλλά βρήκαν διαφορετικά αποτελέσματα. Το πρόβλημα είναι ίδιο με το να βρει κάποιος την απόσταση μεταξύ των δύο παράλληλων ευθειών.



Πώς θα βρίσκατε εσείς την απόσταση αυτών των παραλλήλων; Συζητήστε με την ομάδα σας. Η απόσταση αυτή θα αλλάξει εάν προεκτείνουμε κι άλλο τα τμήματα που βλέπετε;

Δραστηριότητα 7.6

Οι ευθείες στο διπλανό σχήμα είναι παράλληλες ή όχι; Πώς το σκεφτήκατε;



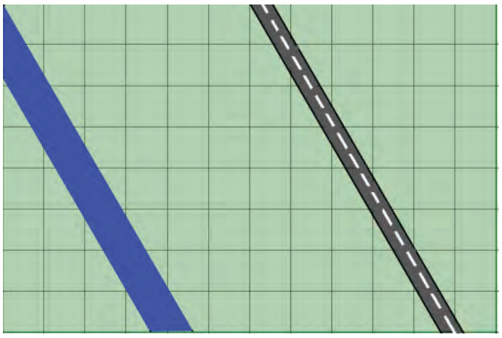
Όταν δύο ευθείες είναι παράλληλες, η απόστασή τους μένει ....

Για να βρούμε την απόσταση μεταξύ δύο παραλλήλων ευθειών μετράμε

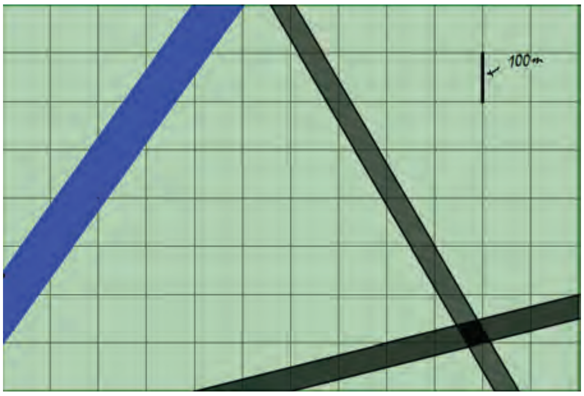
....

Δραστηριότητα 7.7 (η ιδέα της μεσοπαράλληλης)

Ο Φάνης θέλει να περπατήσει **παράλληλα** με το ποτάμι και με το δρόμο. Θέλει όμως να έχει την ίδια απόσταση και από τα δύο. Μπορείτε να σχεδιάσετε τη διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει;

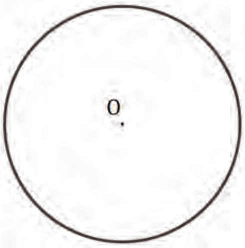


Δραστηριότητα 7.8

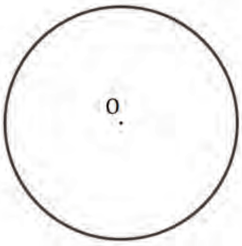


(Η παράλληλη ως γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν σταθερή απόσταση από δοσμένη ευθεία-Κατασκευή παράλληλης σε γνωστή απόσταση)

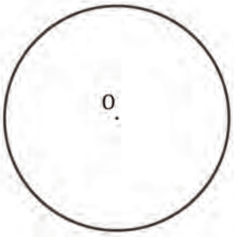
Ο Χαλίλ και η Μαριάμ θέλουν να στήσουν μία σκηνή που να απέχει πάνω από 200m από το ποτάμι και πάνω από 300m από κάθε δρόμο. Μπορείτε να τους δείξετε σε ποια περιοχή πρέπει να στήσουν τη σκηνή;



σχήμα 1



σχήμα 2



σχήμα 3

8. Ευθεία & κύκλος

Α) Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει μία ευθεία με έναν κύκλο; Μπορεί να έχει τρία κοινά σημεία;

Β) Σχεδιάστε μία ευθεία **ε** που να έχει **δύο κοινά σημεία** με τον κύκλο (σχήμα 1).

Γ) Σχεδιάστε μία ευθεία **ε** που **έχει ένα μόνο κοινό σημείο** με τον κύκλο (σχήμα 2).

Δ) Σχεδιάστε μία ευθεία **ε** που δεν έχει **κανένα κοινό σημείο** με τον κύκλο (σχήμα 3).

Ε) Σχεδιάστε σε κάθε περίπτωση την ***απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία ε d(Ο,ε).***

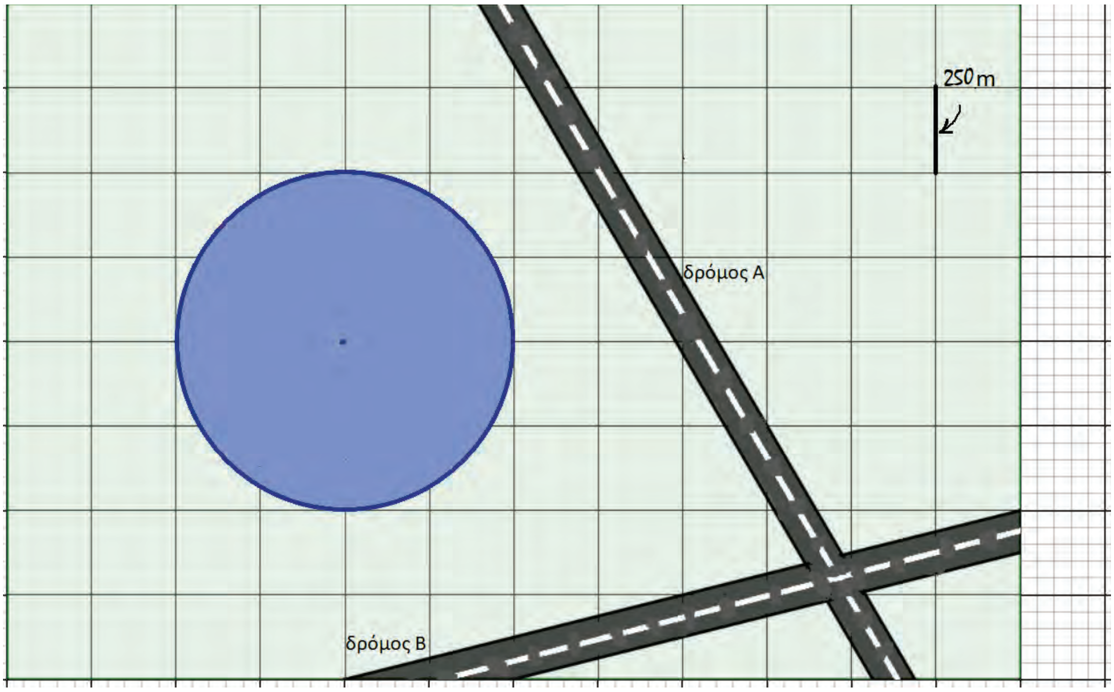
Η ευθεία στο σχήμα 1 λέγεται ***τέμνουσα*** και τότε d(Ο,ε) …….. ρ (<, > ή =)

Η ευθεία στο σχήμα 2 λέγεται ***εφαπτομένη*** και τότε d(Ο,ε) …….. ρ (<, > ή =)

Η ευθεία στο σχήμα 1 λέγεται ***εξωτερική*** και τότε d(Ο,ε) …….. ρ (<, > ή =)

Δραστηριότητα 8.1

(Αναγνώριση των ζητούμενων τόπων και των τομών τους)



Α. Ποια σημεία στην άκρη της λίμνης (μπλε κύκλος) απέχουν 1km από τον δρόμο Β;

Β. Ποιο σημείο της άκρης της λίμνης βρίσκεται ποιο κοντά α) στον δρόμο Α β) στον δρόμο Β;

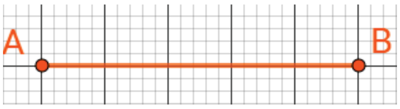
Γ. Σε ποια περιοχή της λίμνης πρέπει να βρίσκεται κάποιος, για να απέχει *περισσότερο από 750m* από τον δρόμο Α;

Δ. Η Νάντια θέλει να φτιάξει ένα μαγαζί που να απέχει:

- από τη λίμνη, περισσότερο από 400m και λιγότερο από 800m,
- από τον δρόμο Α, περισσότερα από 400m και
- από τον δρόμο Β, περισσότερο από 350m.

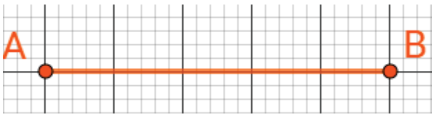
Μπορείτε να χρωματίσετε την κατάλληλη περιοχή;

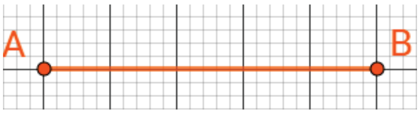
9. Κύκλος & κύκλος



Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει μήκος 5.
Α) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (Α, 4) και τον κύκλο (Β, 3).

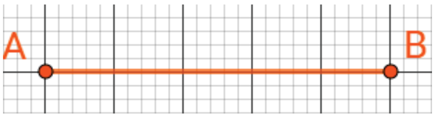
Β) Να σχεδιάσετε τον κύκλου (Α,3) και τον κύκλο (Β,2).

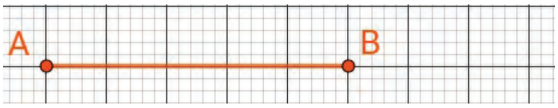




Γ) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (Α, 5) και (Β, 2).

Δ) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (Α,2) και (Β,1).





Ε) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (Α,8) και τον κύκλο (Β,2).

Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει ένας κύκλος με έναν άλλον κύκλο; Μπορεί να έχουν τρία κοινά σημεία;

Περίπτωση Α: οι δύο κύκλοι **τέμνονται** κι έχουν τότε ………. (πόσα;)κοινά σημεία.
Περίπτωση Β**:** οι δύο κύκλοι **εφάπτονται …………….** κι έχουν ……… κοινό σημείο.
Περίπτωση Γ: οι δύο κύκλοι **εφάπτονται ………………** κι έχουν ……….κοινό σημείο.
Περίπτωση Δ: ο ένας κύκλος είναι **έξω από τον άλλο** και **……** έχουν …………………
Περίπτωση Ε: ο ένας κύκλος είναι **μέσα στον άλλον** και **…….** έχουν …………………

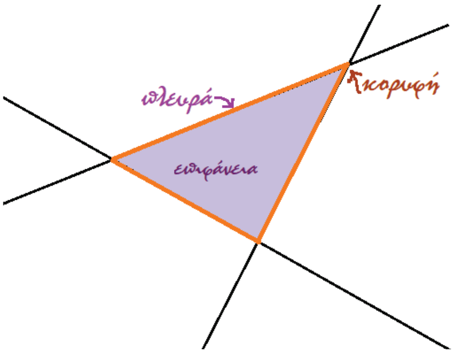
Σε κάθε περίπτωση, ***να συγκρίνετε*** το μήκος του ΑΒ (το τμήμα που ενώνει τα κέντρα των κύκλων) με το άθροισμα $ρ_1$+$ρ_2$ ή με τη διαφορά $ρ_1$-$ρ_2$. Μπορείτε να βρείτε **τι πρέπει να συμβαίνει ώστε: α) οι δύο κύκλου να τέμνονται; β) οι δύο κύκλοι να εφάπτονται εξωτερικά και γ) ο ένας να είναι έξω από τον άλλο;**

10. Τρίγωνα

Δραστηριότητα 10.1 (Ομαδική-Σχετική θέση 3 ευθειών)

Σχεδιάστε 3 ευθείες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείτε να το κάνετε; Ποια περίπτωση από αυτές βλέπετε πιο συχνά γύρω σας;

Στην περίπτωση που 3 ευθείες τέμνονται ανά δύο, δημιουργείται ένα σχήμα που λέγεται ***τρίγωνο.*** Το σχήμα αυτό έχει ***3 πλευρές***, ***3 γωνίες, 3 κορυφές*** και ***μία επιφάνεια*** (το μέρος του επιπέδου που περικλείεται από τις πλευρές του).



Το τρίγωνο είναι το πιο απλό ευθύγραμμο ***σχήμα***. *Ανήκει στη μεγάλη οικογένεια των* ***πολυγώνων***. Έχει τις λιγότερες πλευρές.

Δραστηριότητα 10.2 (Ομαδική – Διαισθητική προσέγγιση της τριγωνικής ανισότητας)

Μια μέρα ο Φάνης βρήκε κάποια ξυλάκια στο χώμα. Άρχισε να παίζει με αυτά και να φτιάχνει σχήματα. Στην αρχή έφτιαξε ένα τρίγωνο. Ήθελε όμως να έχει περισσότερα ξυλάκια κι έτσι έσπασε μερικά. Αλλά μετά, όταν πήγε να φτιάξει ένα καινούριο τρίγωνο… δεν μπορούσε! Και τότε άρχισε να σκέφτεται το γιατί…

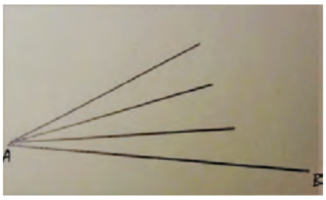
Μετά από λίγη ώρα έβγαλε ένα συμπέρασμα. ***Μπορείτε να βρείτε ποιο είναι το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε ο Φάνης;***

Αν δεν έχετε πρόχειρα κάποια ξυλάκια, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κάτι άλλο, καλαμάκια, μολύβια, κ.ά.

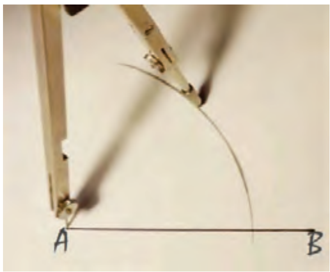
Μπορούμε όμως να το σκεφτούμε γεωμετρικά και να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία που έχουμε για τη γεωμετρία. Τον κανόνα και τον διαβήτη. Το πρόβλημα είναι το ίδιο με το παρακάτω:

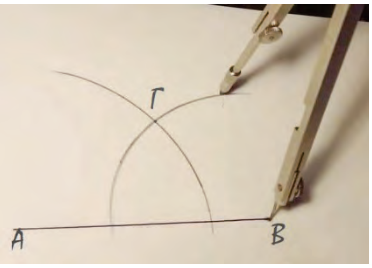
Δραστηριότητα 10.3 : Κατασκευή τριγώνου με πλευρές α, β και γ.

Ας πούμε ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε πάνω στο χαρτί ένα τρίγωνο που να έχει **μήκη πλευρών α = 5cm , β =6 cm και γ = 8cm**; Πώς θα το κάνουμε;

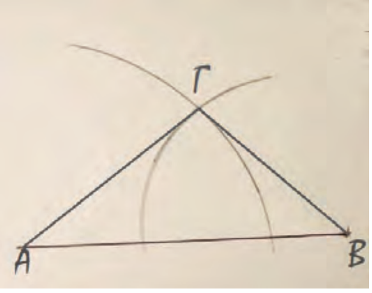


Εύκολα σχεδιάζουμε τη μία από τις πλευρές. Ας ξεκινήσουμε με τη μεγαλύτερη και ας την πούμε ΑΒ. Μετά θέλουμε να σχεδιάζουμε την επόμενη, την ΑΓ. Αλλά δεν ξέρουμε πού ακριβώς… Γι’ αυτό σχεδιάζουμε ***όλες τις δυνατές θέσεις που απέχουν από το Α απόσταση ίση με αυτή που θέλουμε.***





Σχεδιάζουμε επομένως **έναν κύκλο!** **Με κέντρο το Α και ακτίνα ίση με β = 6cm. Και μετά έναν κύκλο με κέντρο Β κι ακτίνα ίση με α = 5cm.** Το σημείο τομής τους είναι η τρίτη κορυφή του τριγώνου. Το σημείο αυτό απέχει απόσταση 6cm από την κορυφή Α και 5cm από τη κορυφή Β. Το ΑΒΓ είναι αυτό που θέλαμε.



Προσπαθήστε τώρα να φτιάξετε τρίγωνο που να έχει πλευρές:

Α) α = 8cm, β = 4cm και γ = 3cm.

Β) α = 8cm, β = 5cm και γ = 3cm.

Τι είδατε; Βγάλατε συμπέρασμα;

Άσκηση 10.4

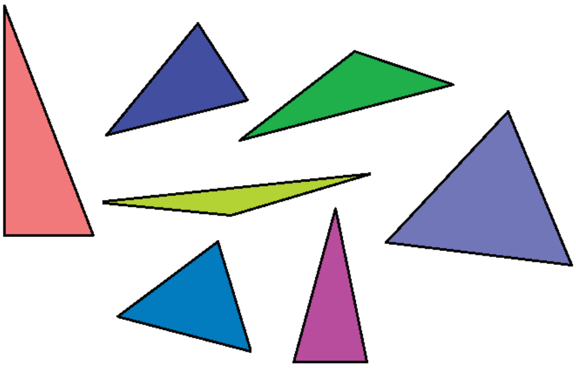
Να δείτε εάν υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών:

α) α = 5cm, β = 3cm και γ = 3cm β) α = 5cm, β = 5cm και γ = 5cm

γ) α = 7cm, β = 4cm και γ = 3cm δ) α = 6cm, β = 3cm και γ = 2cm

ε) α = 7cm, β = 4cm και γ = 4cm

κι εάν υπάρχει, να το κατασκευάσετε.



Ίσως να προσέξατε ότι υπάρχουν διαφορετικά είδη τριγώνων.

Οι μαθηματικοί ταξινόμησαν τα διαφορετικά είδη τριγώνων σε δύο ομάδες, με βάση:

α) τις πλευρές τους β) τις γωνίες τους.

Ταξινόμηση των τριγώνων με βάση τις πλευρές τους

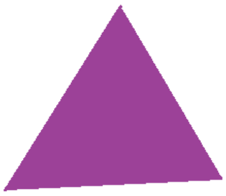
Ταξινόμηση των τριγώνων με βάση τις γωνίες τους

Αμβλυγώνιο

Έχει **μία αμβλεία γωνία**

Ορθογώνιο

Έχει μία ορθή γωνία



Οξυγώνιο

Όλες οι γωνίες είναι οξείες

Άσκηση 10.5: Κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου

Α) Σχεδιάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκος 3cm.
Β) Σχεδιάστε τον κύκλο (Α, 5cm) και τον (Β, 5cm).
Γ) Ονομάστε τα σημεία τομής των δύο κύκλων Γ και Δ.
Δ) Σχεδιάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΒΓ και ΑΔ, ΒΔ.

Τι τρίγωνο είναι το ΑΒΓ; Τι τρίγωνο είναι το ΑΒΔ;

Άσκηση 10.6: Κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου

Β) Να κατασκευάσετε **ένα ισόπλευρο τρίγωνο** με πλευρά α = 5cm.

Γ) Να κατασκευάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο τυχαίας πλευράς.

Απαντήστε στις ερωτήσεις

1. Υπάρχει τρίγωνο που να έχει **δύο** αμβλείες γωνίες;
   Αν ναι, να το σχεδιάσετε. Αν όχι να εξηγήσετε γιατί.

2. Υπάρχει τρίγωνο που να έχει **δύο** ορθές γωνίες;
   Αν ναι, να το σχεδιάσετε, αν όχι να εξηγήσετε γιατί.

Δραστηριότητα 10.7: Τα είδη των τριγώνων

— *Δεν μπορεί ένα τρίγωνο να ανήκει και στις δύο ομάδες ταυτόχρονα;* αναρωτήθηκε η Νάντια.

— *Δηλαδή;* Ρώτησε ο Χαλίλ.

— *Να, για παράδειγμα ένα τρίγωνο να είναι **και** ισοσκελές **και** ορθογώνιο.*

— *Χμ… σκέφτηκε για λίγο ο Χαλίλ. Γίνεται νομίζω. Αλλά δεν είμαι σίγουρος ότι γίνεται για όλους τους συνδυασμούς.*

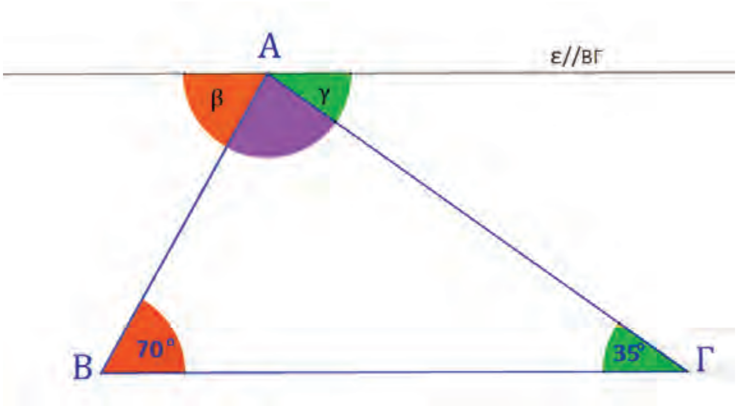
Τα παιδιά σκέφτηκαν όλους τους συνδυασμούς με τη βοήθεια ενός πίνακα. Και προσπάθησαν να τα κατασκευάσουν.

	Σκαληνό	Ισοσκελές	Ισόπλευρο
Οξυγώνιο			
Ορθογώνιο			
Αμβλυγώνιο			

Μετά από αρκετή ώρα κατέληξαν ότι κάποια από αυτά **δεν υπάρχουν.** Έτσι σημείωσαν με √ τα κουτάκια που αντιστοιχούν σε τρίγωνα που υπάρχουν και με **X** τα κουτάκια που αντιστοιχούν σε τρίγωνα που δεν υπάρχουν. Εσείς; Μπορείτε να βρείτε ποια υπάρχουν και ποια όχι; Σχεδιάστε ένα από κάθε είδος που υπάρχει.

11. Άθροισμα γωνιών Τριγώνου

Δραστηριότητα 11.1



Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε είναι παράλληλη στη βάση ΒΓ του τριγώνου. Ξέρουμε τις δύο γωνίες του τριγώνου, $\hat{B} = 70^o$ και $\hat{\Gamma}$ = 35^o.

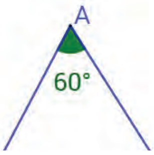
1. Τι σχέση έχει η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου με την $\hat{\beta}$; Μπορείς να βρεις τη γωνία $\hat{\beta}$;
2. Τι σχέση έχει η γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου με τη $\hat{\gamma}$; Μπορείς να βρεις τη γωνία $\hat{\gamma}$;
3. Είναι $\hat{A}$+ $\hat{\beta}$ + $\hat{\gamma}$ = ... Μπορείς να βρεις τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου;
4. Τι συμπέρασμα βγάζεις για το άθροισμα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma}$ των γωνιών του τριγώνου;

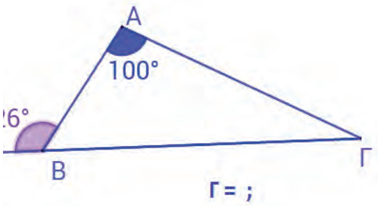
Σκέψου: Το άθροισμα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma}$ των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ θα άλλαζε αν ήταν διαφορετικές οι γωνίες Β και Γ;

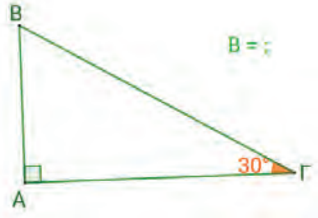
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ, είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma}$ = ...

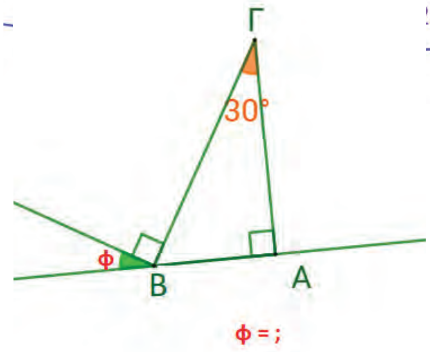
Άσκηση 11.1

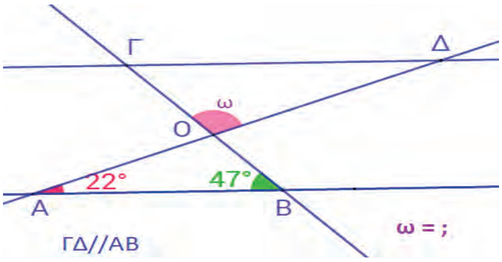
Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε τις γωνίες που σας ζητάει











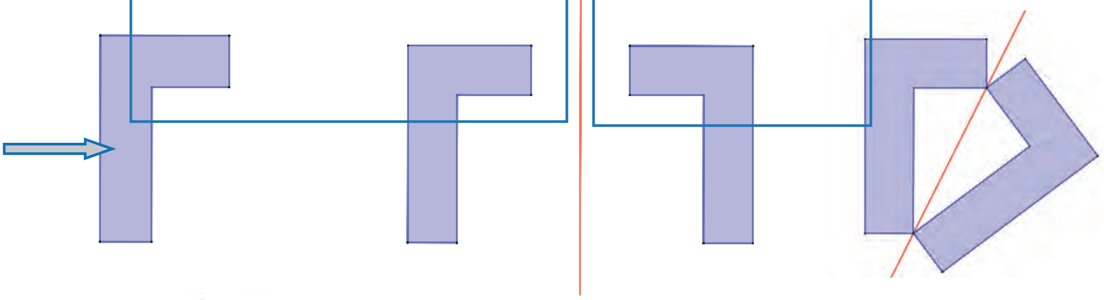
Ενότητα Β2
Συμμετρία

1. Ο καθρέφτης

Συμμετρία ως προς ευθεία (Αξονική συμμετρία)

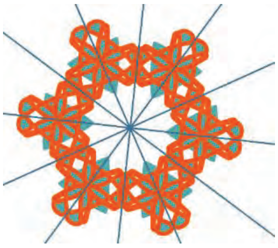
Όταν κοιταζόμαστε στον καθρέπτη βλέπουμε ένα αντίγραφο του εαυτού μας (είδωλο). Λέμε ότι ο εαυτός μας και το είδωλό του είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία του καθρέφτη. Το ίδιο συμβαίνει και με τη βάρκα που καθρεφτίζεται στην επιφάνεια της θάλασσας. Η βάρκα και το είδωλό της *είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία της επιφάνειας*. Η ευθεία αυτή ονομάζεται **άξονας συμμετρίας** και λέμε ότι έχουμε *αξονική συμμετρία*.

Το αρχικό σχήμα και το είδωλό του ως προς μία ευθεία, είναι ένα νέο σχήμα με *άξονα συμμετρίας* την ευθεία αυτή.



Όταν ένα σχήμα μπορούμε *να το χωρίσουμε με μια ευθεία σε δύο ίδια μέρη* (το ένα μισό είναι το ίδιο με το άλλο μισό), τότε αυτό το σχήμα είναι το συμμετρικό του εαυτού του ως προς αυτήν την ευθεία. Και αυτή η ευθεία είναι ένας άξονας συμμετρίας γι’ αυτό το σχήμα

Ένα σχήμα μπορεί να έχει περισσότερους από έναν άξονα συμμετρίας.



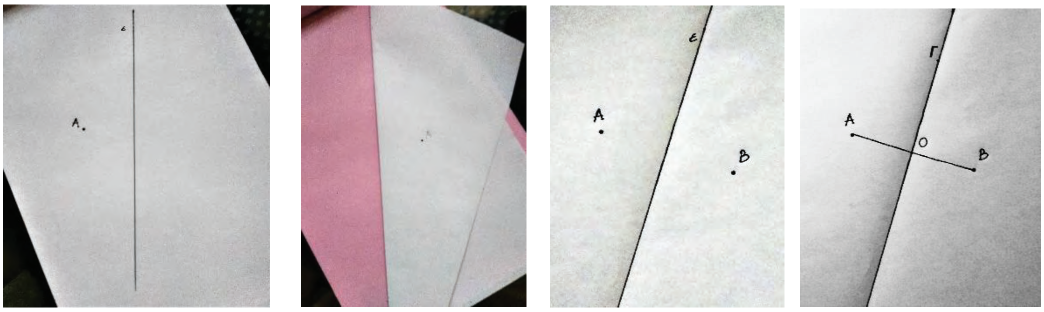
Ας δούμε πιο αναλυτικά τι συμβαίνει με τα συμμετρικά σχήματα από την πλευρά της γεωμετρίας.

Δραστηριότητα 1.1

Σχεδιάζουμε μία ευθεία ***ε*** πάνω σε ένα φύλλο χαρτί κι ένα σημείο Α έξω από αυτήν. Διπλώνουμε το χαρτί κατά μήκος αυτής ευθείας. Σημειώνουμε το ίχνος που αφήνει το Α από την άλλη πλευρά της ευθείας (σημείο Β).

Τα σημεία Α και Β τότε, είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ε

Ξεδιπλώνουμε το χαρτί και σχεδιάζουμε το τμήμα ΑΒ. Ονομάζουμε Ο το σημείο τομής του ΑΒ με την ευθεία. Σημειώνουμε κι ένα σημείο Γ πάνω στην ευθεία ε.



- Τι σχέση έχουν τα τμήματα ΟΑ, ΟΒ; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

  …….

- Τι θα είναι το Ο για το τμήμα ΑΒ;

  …….

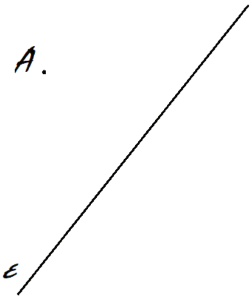
- Ποια σχέση έχουν οι γωνίες $\widehat{\Gamma O B}$ $και$ $\widehat{\Gamma O A}$ και τι είδους γωνίες είναι; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;…………………………………………………………………………..

  …….

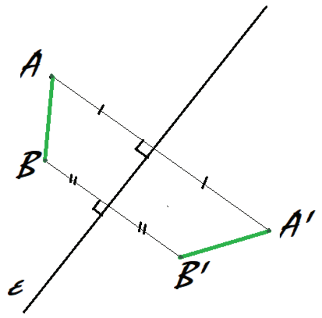
Συμπέρασμα

Όταν δύο σημεία Α και Β είναι συμμετρικά ως προς μία ευθεία ε, τότε η ευθεία ε (άξονας συμμετρίας) είναι κάθετη στο μέσον του ΑΒ.

Μπορείτε να σκεφτείτε πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε το συμμετρικό ενός σημείου Α, ως προς μία ευθεία ε, <u>χωρίς να διπλώσουμε το χαρτί;</u>



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

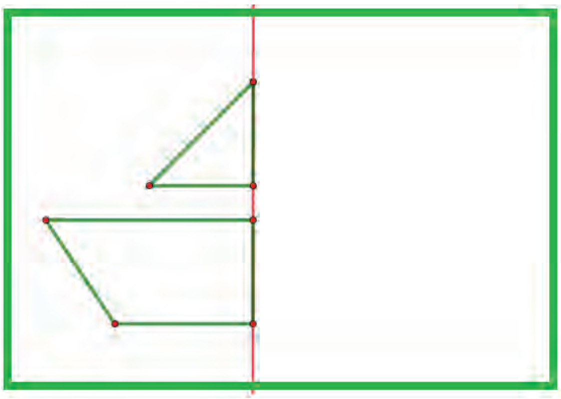


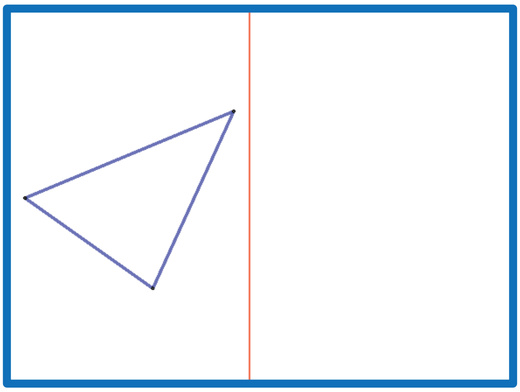
Τα συμμετρικά σχήματα είναι ίσα

Η Μαριάμ σκέφτηκε ότι αν σχεδιάσουμε τα συμμετρικά σημεία Α’ και Β’ δύο σημείων Α και Β τότε **ολόκληρο** το τμήμα Α’Β’ θα είναι συμμετρικό του ΑΒ και τα τμήματα ΑΒ και Α’Β’ θα είναι ίσα. (Γιατί;)

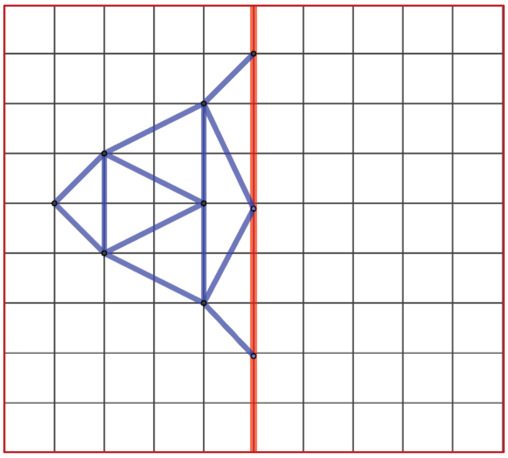
Συζητήστε με την ομάδα σας και τον δάσκαλο γι’ αυτό.

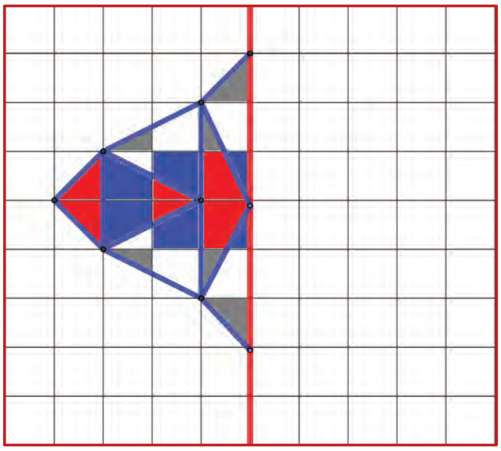
Ο Φαρούκ είπε τότε ότι έτσι, είναι πολύ εύκολο να σχεδιάσουμε το συμμετρικό από ένα *ευθύγραμμο σχήμα*[1]. Αρκεί να σχεδιάσουμε τα συμμετρικά σημεία από τις κορυφές του και να τα ενώσουμε. Μπορείτε να σχεδιάσετε τα συμμετρικά των παρακάτω σχημάτων;





Η συμμετρία σε ένα σχήμα που έχει χρώμα μπορεί να διατηρείται και στο χρώμα. Σχεδιάστε το συμμετρικό του παρακάτω σχήματος χωρίς χρώμα και μετά με χρώμα.



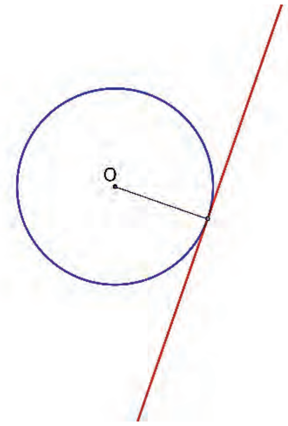


---

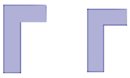
[1] Ευθύγραμμο σχήμα: Κλειστό σχήμα που αποτελείται από ευθείες, ημιευθείες ή ευθύγραμμα τμήματα.

Άσκηση 1.2

Ο Ερντέμ αναρωτήθηκε: πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε τον συμμετρικό ενός κύκλου αφού δεν είναι ευθύγραμμο σχήμα; Μπορείτε να τον βοηθήσετε;

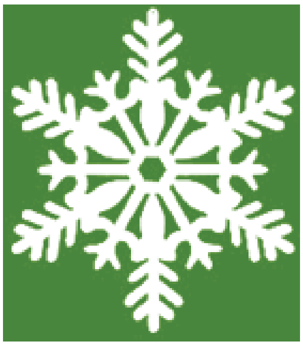


Δραστηριότητα 1.3

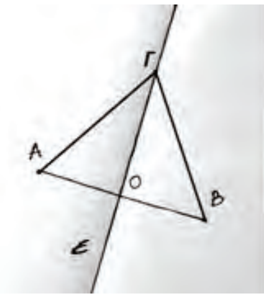
Κόψτε τα δύο αυτά σχήματα  που θα βρείτε στο πίσω μέρος του βιβλίου σας.

Δοκιμάστε να φτιάξετε με αυτά *τρία διαφορετικά σχήματα με άλλο* άξονα συμμετρίας κάθε φορά.

Άσκηση 1.4: Μπορείς να βρεις τον άξονα ή τους άξονες συμμετρίας στα παρακάτω σχήματα;



Δραστηριότητα 1.5



Ας γυρίσουμε πάλι στο χαρτί που είχαμε διπλώσει (Δραστηριότητα Β1.2). Τα σημεία Α και Β είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ε. Το σημείο Γ είναι ένα τυχαίο σημείο πάνω στην ευθεία ε.

- Αν σχεδιάσουμε τα τμήματα ΑΓ και ΓΒ, τι είδους τρίγωνο θα ήταν το τρίγωνο ΑΓΒ; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

  ……………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………
- Ποια σχέση νομίζετε ότι θα έχουν οι γωνίες $\widehat{\Gamma AB}$ $\textit{και}$ $\widehat{\Gamma BA}$ του τριγώνου ΓΑΒ; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

  ……..

  ……

Συμπέρασμα

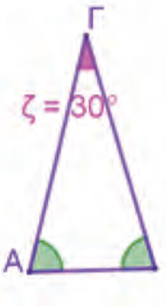
Οι δύο γωνίες που είναι στη βάση από ένα ισοσκελές τρίγωνο, είναι πάντα ίσες.

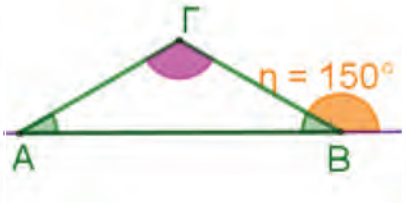
Στο ισοσκελές τρίγωνο, η μεσοκάθετος της βάσης είναι ο άξονας συμμετρίας του.

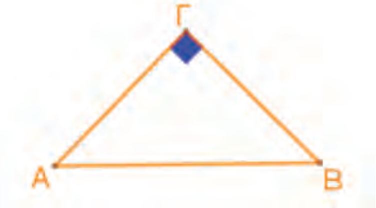
Θυμόμαστε
Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ,
ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$

Άσκηση 1.6

Να βρείτε τις γωνίες στα παρακάτω ***ισοσκελή*** τρίγωνα.





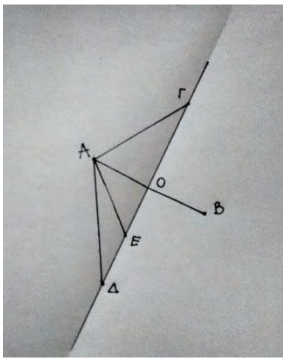


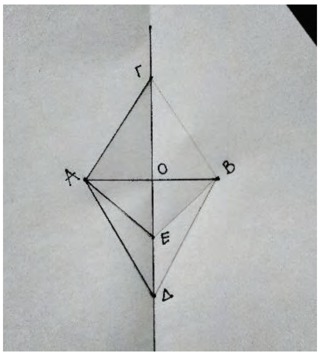
2. Η Μεσοκάθετος

Πάμε πάλι στο αρχικό χαρτί μας… (δραστηριότητα 1.1). Η ευθεία ε είναι ο άξονας συμμετρίας του ΑΒ. Όπως είχαμε βρει, η ε είναι μία **ευθεία κάθετη στο μέσον του τμήματος ΑΒ.** Η ευθεία αυτή είναι όπως λέμε, η:

Μεσοκάθετος από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ

Ας πάρουμε άλλα δύο σημεία Δ και Ε πάνω στην ευθεία ε. Σχεδιάζουμε τα τμήματα ΑΕ και ΑΔ. Διπλώνουμε τη σελίδα κατά μήκος της ευθείας ε, όπως πριν. Τότε:





- Το συμμετρικό του ΓΑ είναι το ………… Άρα ΓΑ = ……….
- Το συμμετρικό του ΕΑ είναι το ………… Άρα ΕΑ = ……….
- Το συμμετρικό του ΔΑ είναι το ……….. Άρα ΔΑ = ……….

Δηλαδή τα σημεία Γ, Ε και Δ απέχουν ………………….. από τα Α, Β. Αυτό συμβαίνει με κάθε σημείο πάνω στην ε. Άρα:

Μαθαίνω

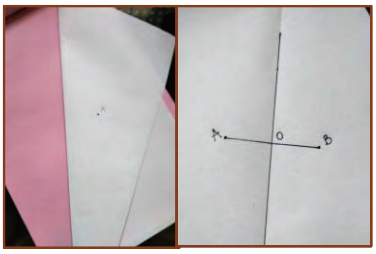
Κάθε σημείο που βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο του ΑΒ, έχει την ίδια απόσταση από τα σημεία Α, Β.

Κάθε σημείο που απέχει την ίδια απόσταση από τα Α, Β βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

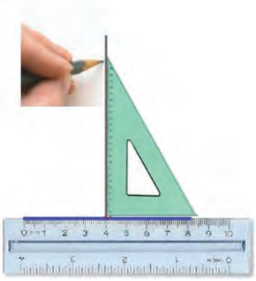
3. Κατασκευή μεσοκαθέτου

Το μέσον, η μέση, το μισό…

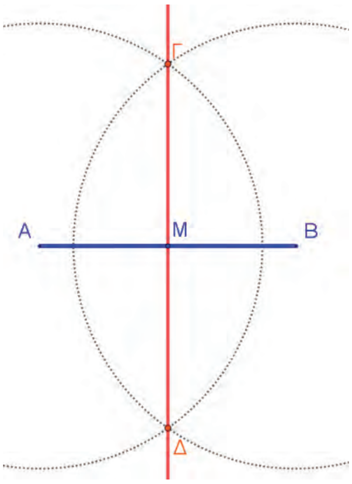
(Χωρίζω στη μέση)



Για να σχεδιάσουμε τη μεσοκάθετο από ένα τμήμα ΑΒ, μπορούμε να διπλώσουμε το χαρτί.



Ή να μετρήσουμε το τμήμα και να σχεδιάσουμε την κάθετη ευθεία στο μέσον.



Όμως η μέτρηση δεν είναι πολύ σωστή. Και αν το τμήμα είναι πάνω στον πίνακα, πώς θα βρούμε τη μεσοκάθετο;

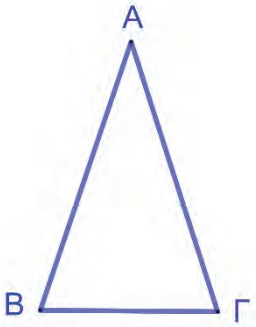
Μπορούμε να την κατασκευάσουμε με κανόνα και διαβήτη.

Σκεφτόμαστε: Για να σχεδιάσουμε μία ευθεία, χρειαζόμαστε μόνο δύο σημεία. Είπαμε ότι όλα τα σημεία από τη μεσοκάθετο του τμήματος έχουν την ίδια απόσταση από τα άκρα.

Άρα: Σχεδιάζουμε **δύο κύκλους με την ίδια ακτίνα**! **Έναν με κέντρο το Α κι έναν με κέντρο το Β.** Τότε η ευθεία που περνάει από τα σημεία που τέμνονται θα είναι η μεσοκάθετος.

Ασκήσεις 3.1, 3.2

3.1 Να χωρίσετε (χωρίς χάρακα) το διπλανό ευθύγραμμο τμήμα σε 4 ίσα κομμάτια.



3.2 Έχουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Να κατασκευάσετε γεωμετρικά:

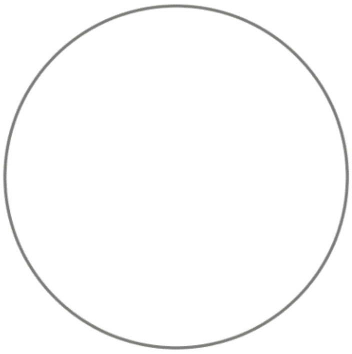
α) Τη μεσοκάθετο της πλευράς ΒΓ. Περνάει από το Α; Γιατί;

β) Τη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΓ. Περνάει από το Β; Γιατί;

Δραστηριότητα 3.3

- Μπορείτε να κατασκευάσετε έναν κύκλο που να περνάει από **δύο** σημεία Α και Β;
- Υπάρχει και άλλος κύκλος που να περνάει από τα Α, Β; (σκεφτείτε: εάν υπάρχει πού θα βρίσκεται το κέντρο του;)
- Πόσοι κύκλοι υπάρχουν τελικά που μπορούν να περάσουν από τα Α, Β; (να κατασκευάσετε τουλάχιστον 5)

Η Λίνα δεν είχε διαβήτη κι έφτιαξε έναν κύκλο με ένα ποτήρι. Τώρα όμως θέλει να βρει το κέντρο του για να τον χωρίσει στη μέση. Μπορείτε να τη βοηθήσετε να το βρει; **(***υπόδειξη: Σημειώστε τρία σημεία Α, Β και Γ πάνω στον κύκλο. Το κέντρο θα απέχει την ίδια απόσταση από τα Α και Β. Άρα* ***θα βρίσκεται πάνω στη****… Όμως θα πρέπει να απέχει και την ίδια απόσταση από τα Β και Γ. Άρα θα πρέπει να βρίσκεται* ***και στη*** *…***)**



Δραστηριότητα 3.4

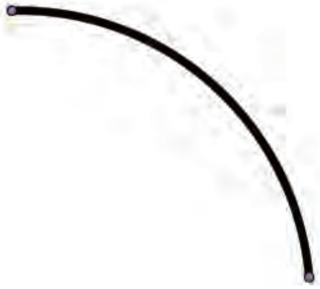
Ο Στέφαν κι η Αζάρ βρήκαν στην αυλή ένα κομμάτι από σπασμένη πήλινη γλάστρα.

—*«Μεγάλη ήταν»*, είπε ο Στέφαν.

—«*Που το ξέρεις;»*, ρώτησε η Αζάρ.

—*«Έτσι νομίζω»*, απάντησε ο Στέφαν.

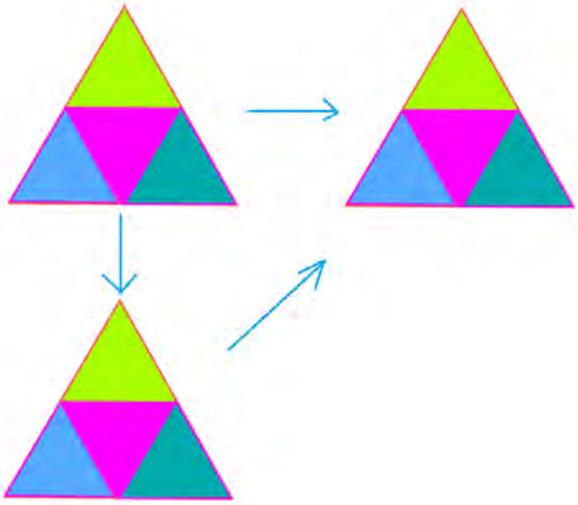
Και οι δύο όμως συμφώνησαν ότι πρέπει να υπάρχει ένας τρόπος να το βρούνε στα σίγουρα. Έτσι κάνουν και οι αρχαιολόγοι. Βρίσκουν ένα κομμάτι από ένα αρχαίο αγγείο και μπορούν να καταλάβουν πόσο μεγάλο ήταν. Το πρόβλημα σε πιο απλή μορφή: Μπορείτε να βρείτε τον κύκλο στον οποίο ανήκει το παρακάτω τόξο;



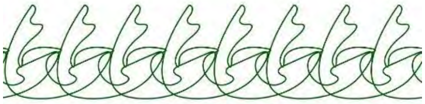
5. Άλλες συμμετρίες

Εκτός από τη συμμετρία του καθρέφτη (αξονική συμμετρία), υπάρχουν και άλλα δύο είδη συμμετρίας. Το ένα είναι η μεταφορά. Στη μεταφορά μετακινούμε απλά το αρχικό σχήμα.

Η μεταφορά

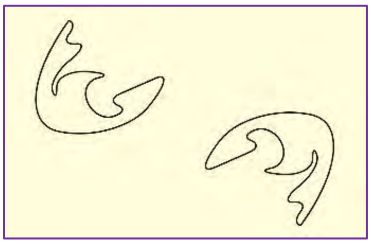


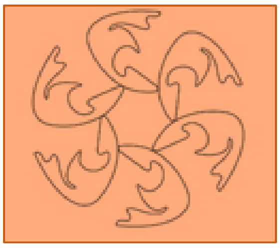
Η επανάληψη ενός σχήματος με μεταφορά χρησιμοποιείται συχνά για να φτιάξουμε ένα διακοσμητικό μοτίβο.



5.1 Η στροφή

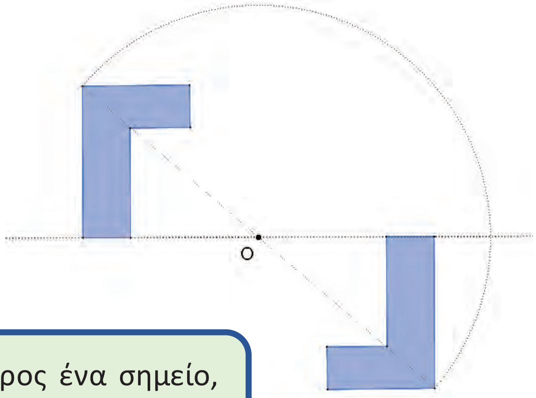
Μπορούμε ακόμα να *στρίψουμε* ένα σχήμα. Σαν να είναι δεμένο με μία αόρατη κλωστή από ένα σημείο κι εμείς το γυρνάμε ***γύρω από αυτό το σημείο.*** Στις παρακάτω εικόνες, μπορείτε να υπολογίσετε πού είναι περίπου αυτό το σημείο και πόσες μοίρες στρίψαμε το σχήμα;





Στροφή 180^o

Στρίβουμε ένα σχήμα γύρω από ένα σημείο Ο, κατά 180^o . Το αντίγραφο λέμε ότι είναι το συμμετρικό από το αρχικό σχήμα ως προς το σημείο Ο. Αυτή η συμμετρία λέγεται ***κεντρική συμμετρία.***



Το αρχικό σχήμα με το συμμετρικό του ως προς ένα σημείο, είναι ένα νέο σχήμα με *κέντρο συμμετρίας* το σημείο αυτό.

Με τα γνωστά δύο ίδια σχήματα φτιάξτε τρία διαφορετικά σχήματα με διαφορετικό κέντρο συμμετρίας κάθε φορά.

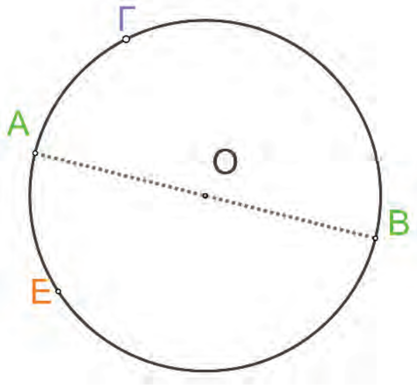
Δραστηριότητα 5.1

Στο διπλανό σχήμα «στρίβουμε» το σημείο Α, γύρω από το κέντρο του κύκλου Ο μέχρι να «πέσει πάνω στο Β. Πόσες μοίρες είναι η στροφή;

……………………………………………………

Το Β είναι επομένως **το συμμετρικό του Α, ως προς το Ο.**

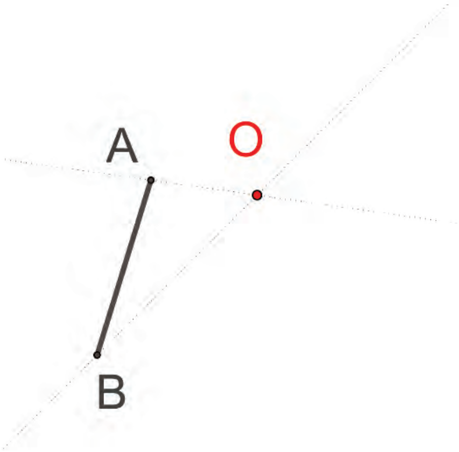
Μπορείτε να βρείτε τα συμμετρικά σημεία από τα σημεία Γ και Ε ως προς το κέντρο Ο;



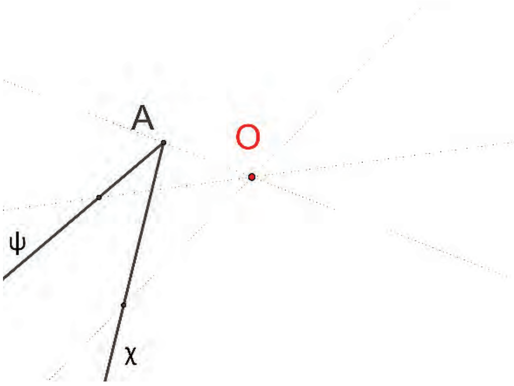
Με κέντρο συμμετρίας το Ο, βρείτε τα συμμετρικά σημεία από τα Α και Β. Ονομάστε τα Α’ και Β’, αντίστοιχα. Τι πρέπει να κάνετε;

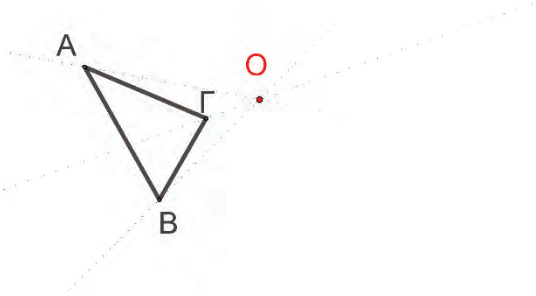
Σχεδιάζουμε το τμήμα ΑΒ. Πώς θα σχεδιάσουμε το συμμετρικό του με κέντρο το Ο;

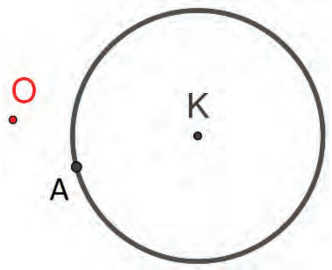
Σχεδιάζουμε μόνο τα συμμετρικά σημεία από τα άκρα Α και Β.
Τα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα αυτά τα συμμετρικά αυτά σημεία είναι το συμμετρικό του τμήματος.



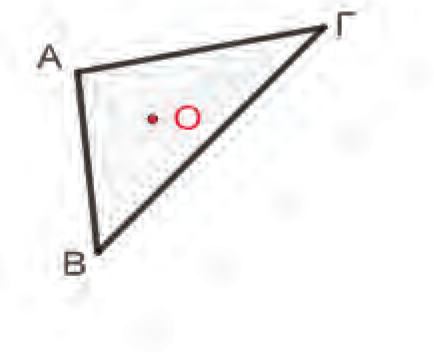
Άσκηση 5.2: Βρείτε τα συμμετρικά ως προς το σημείο Ο από τα παρακάτω σχήματα.

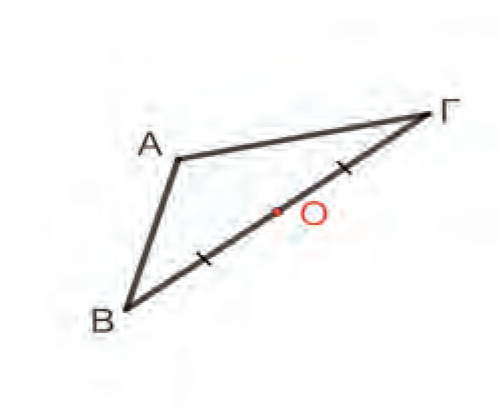


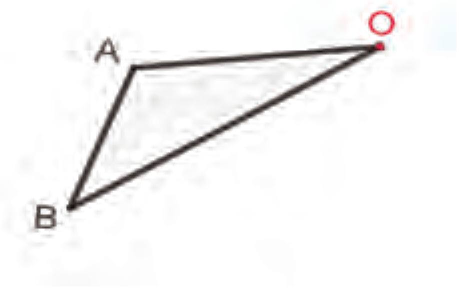




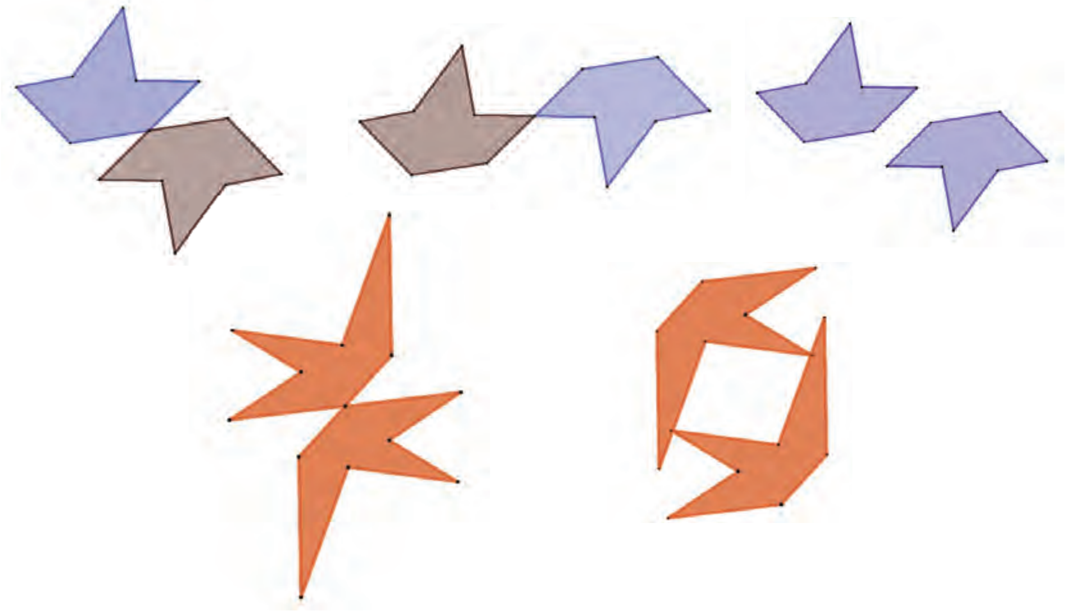
Άσκηση 5.3: Βρείτε το συμμετρικό από το πιο κάτω σχήματα, με κέντρο συμμετρίας το κόκκινο σημείο Ο.







Άσκηση 5.4: Μπορείτε να βρείτε το κέντρο συμμετρίας στα παρακάτω σχήματα;

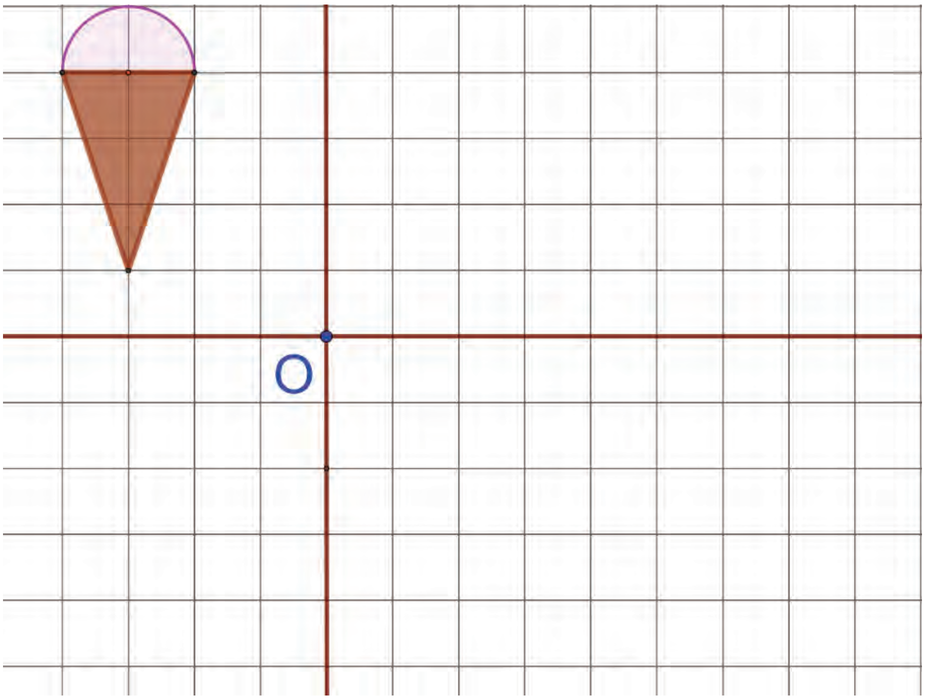


Άσκηση 5.5: Να σχεδιάσετε το συμμετρικό από το χωνάκι παγωτό,

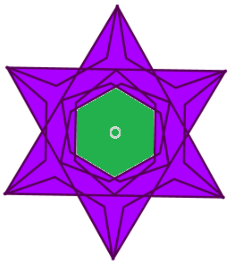
A) με άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία.

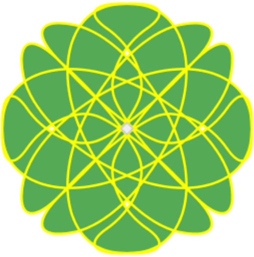
B) με κέντρο Συμμετρίας το Ο.

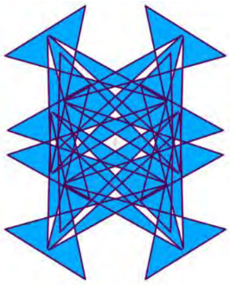
Τι παρατηρείτε;

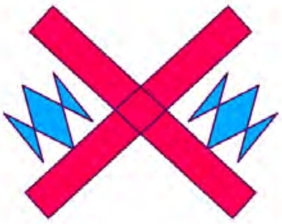


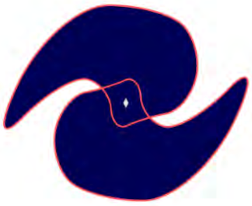
Άσκηση 5.6: Μπορείς να βρεις στα παρακάτω σχήματα εάν έχουν κέντρο ή/και άξονα/άξονες συμμετρίας;











Άσκηση 5.7

Ποιο σχήμα από τα Β και Γ είναι το είδωλο του Α και ποιο η μεταφορά;

Α

Β

Γ

Άσκηση 5.8

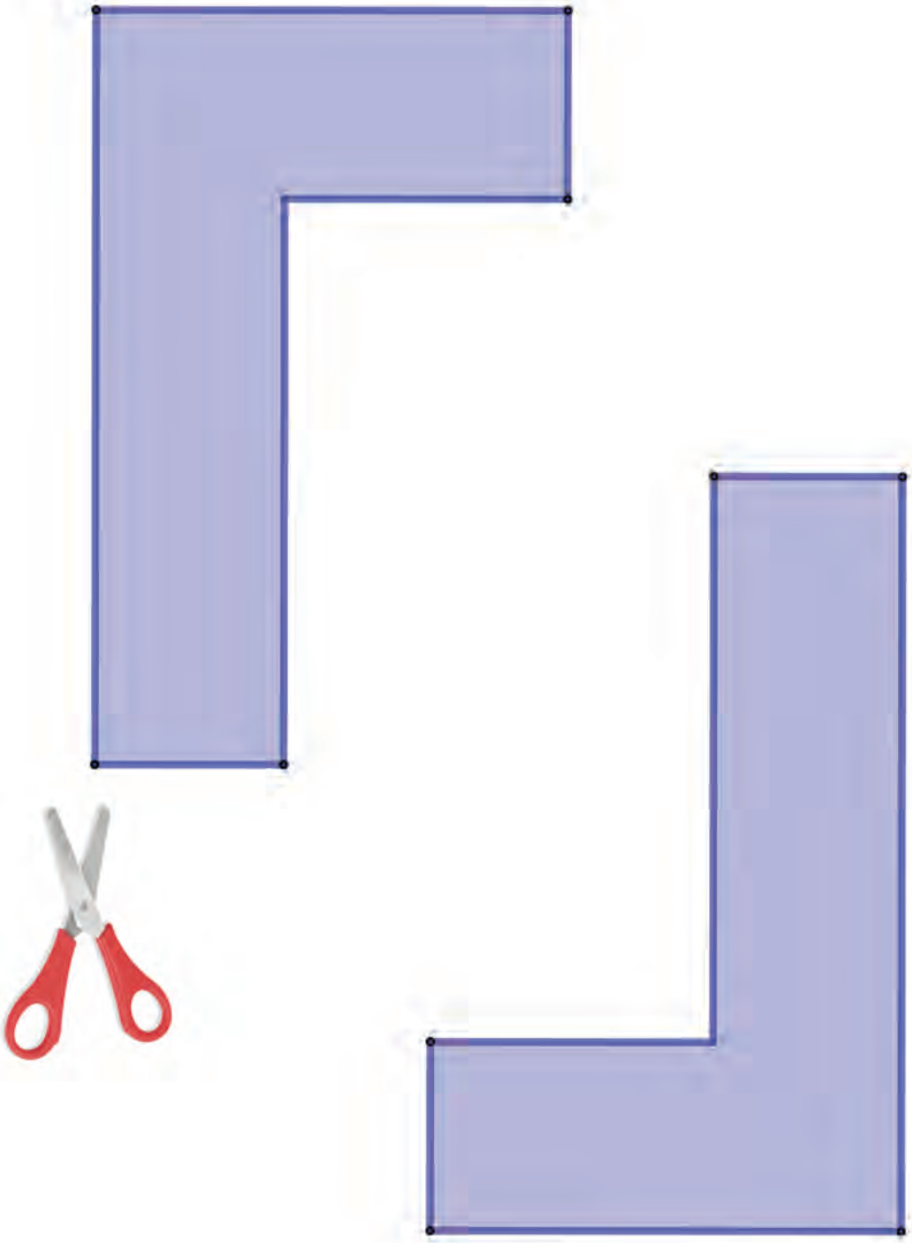
Α) Βρείτε ποια γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου έχουν συμμετρία και ποιο είναι το είδος της (αξονική ή κεντρική).

Β) Παρουσιάστε το δικό σας αλφάβητο στην τάξη και βρείτε όλοι μαζί τη συμμετρία (εάν υπάρχει) σε αυτά τα γράμματα.

Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ

Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω

Άσκηση 5.9 Κάντε με την ομάδα σας το δικό σας έργο που να έχει κάποιο είδος συμμετρίας.



Ενότητα Β3

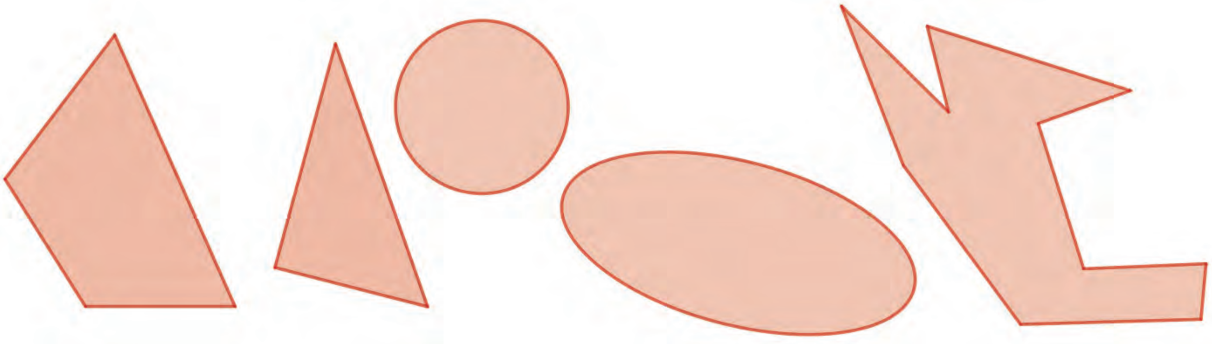
Εμβαδόν επιφάνειας – Πυθαγόρειο Θεώρημα

1. Η έννοια του εμβαδού - Εμβαδόν ορθογωνίου -Μονάδες μέτρησης

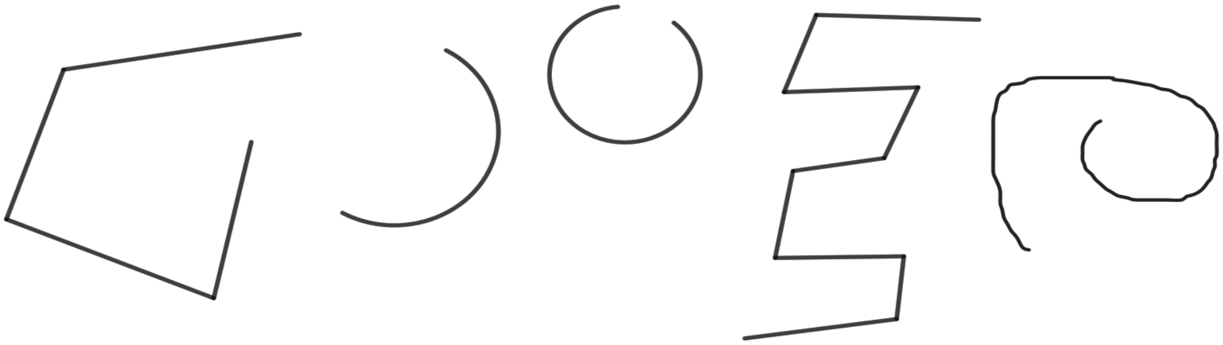
1.1 Διερεύνηση *(μέτρηση επιφάνειας με άτυπες μονάδες)*

1.1.A Ο καθηγητής είπε: «Θα δούμε τώρα πως μετράμε επιφάνειες που είναι πάνω σε ένα επίπεδο. Όμως, τι είναι επιφάνεια;»

Ο Αμίρ λέει: «η επιφάνεια σε ένα σχήμα, είναι η περιοχή όπως αυτές που έχω με ροζ».



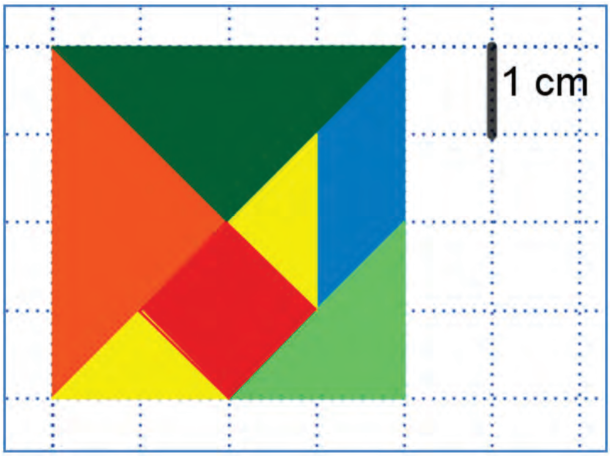
Και μετά λέει: «Τα παρακάτω σχήματα, δεν είναι κλειστά και δεν ορίζουν κάποια επιφάνεια».



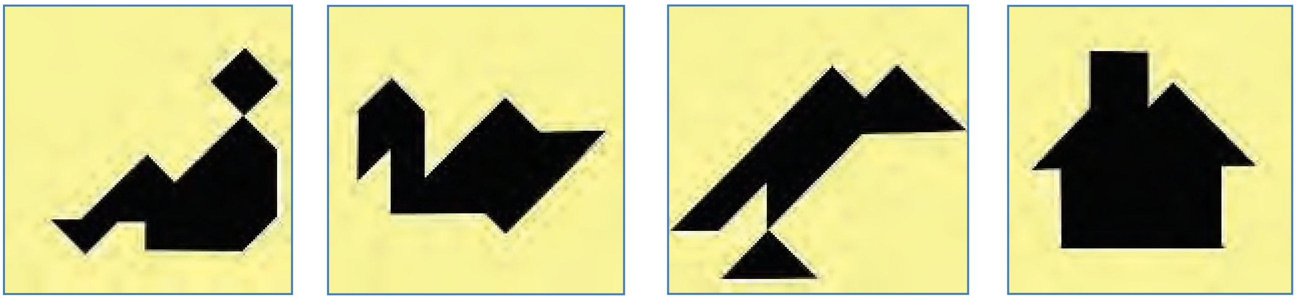
Έχει δίκιο ο Αμίρ;

Στα μαθηματικά, η **επιφάνεια** για ένα επίπεδο ***κλειστό σχήμα***, είναι το μέρος από το επίπεδο που είναι μέσα σε αυτό το σχήμα.

1.1.Β) Το τάνγκραμ είναι ένα αρχαίο κινέζικο παιχνίδι που αποτελείται από 7 σχήματα. Αν τα συνδυάσουμε μπορούμε να σχηματίσουμε μέχρι και 1600 σχήματα με ίσο εμβαδόν.

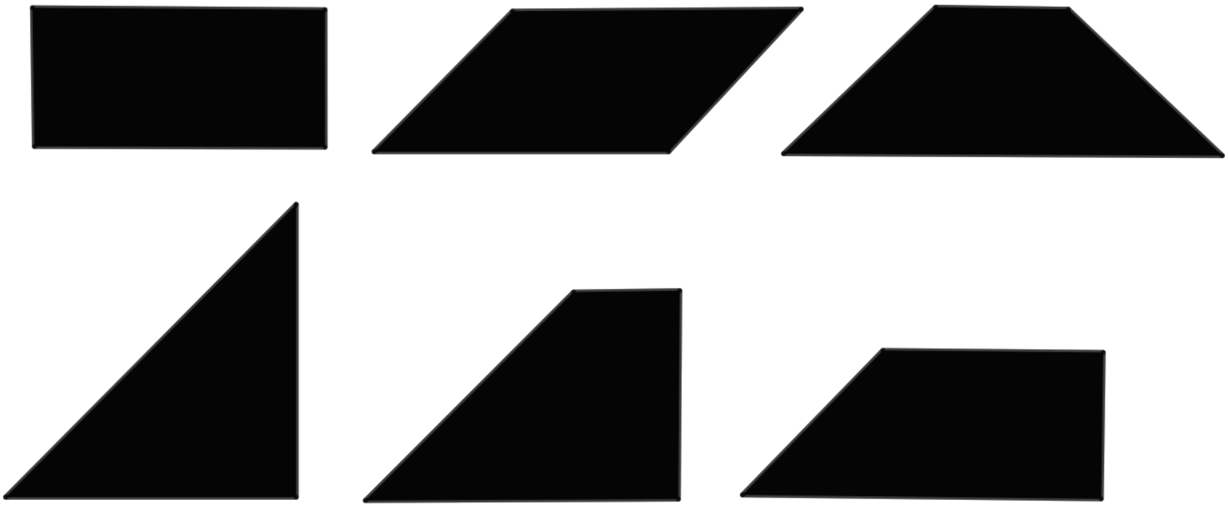


α) Στην τελευταία σελίδα θα βρείτε ένα τάνγκραμ σε μεγάλο μέγεθος. Κόψτε τα κομμάτια και φτιάξτε τα παρακάτω σχήματα:



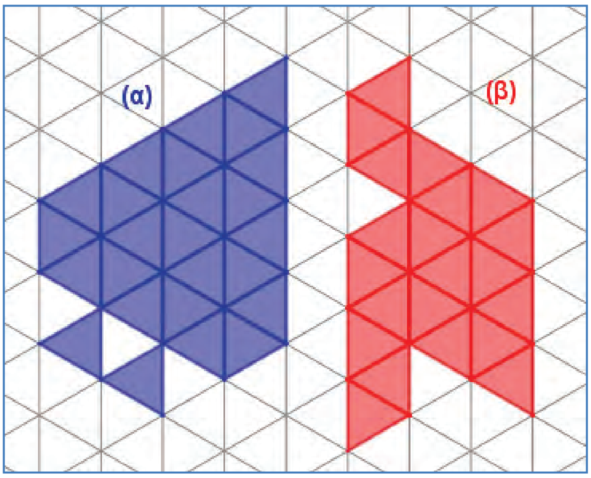
Μπορείτε να φτιάξετε κι άλλα δικά σας σχήματα;
Ποιο από αυτά τα σχήματα έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια;

β) Μπορείτε να κατασκευάσετε κάποιο από τα παρακάτω σχέδια;

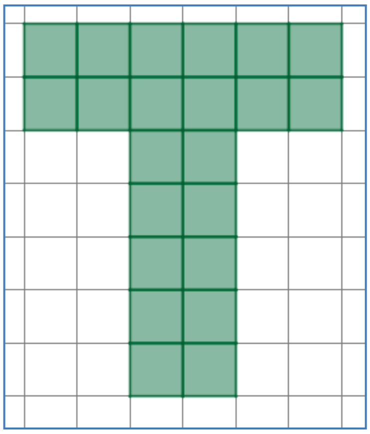


1.1.Γ) Για να «μετρήσουμε» μια επιφάνεια πρέπει να τη συγκρίνουμε με κάποια άλλη επιφάνεια που τη λέμε μονάδα μέτρησης. Καλύπτουμε την επιφάνεια με μονάδες μέτρησης και προσέχουμε να μην αφήνουμε κενά ή να μη σκεπάζει μια μονάδα κάποια διπλανή της. Το αποτέλεσμα από τη μέτρηση, το λέμε **εμβαδόν** της επιφάνειας του σχήματος.

α) Θέλουμε να μετρήσουμε την επιφάνεια από αυτά τα σχήματα. Μια βολική επιφάνεια για να μετρήσουμε τα εμβαδά από τα διπλανά σχήματα είναι το τρίγωνο: ◀



Το εμβαδόν του (α) είναι ………
Το εμβαδόν του (β) είναι ……….

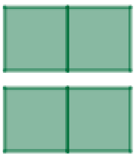


β) Μετρήστε την επιφάνεια του διπλανού σχήματος

- με μονάδα μέτρησης το τετράγωνο 

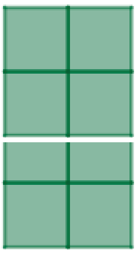
το εμβαδόν του είναι: ....

- με μονάδα μέτρησης το



το εμβαδόν του είναι: ....

- με μονάδα μέτρησης το



το εμβαδόν του είναι: ....

Πως υπολογίσατε τα δύο τελευταία εμβαδά; Μπορείτε να τα βρείτε χωρίς να μετρήσετε ξανά;

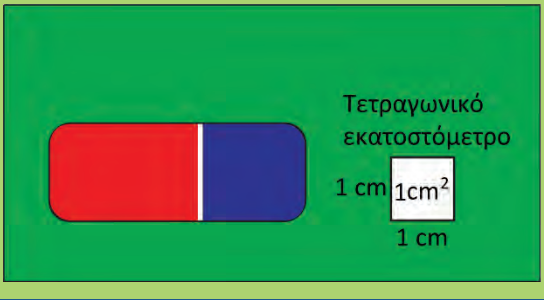
γ) Μπορείτε να σχεδιάσετε άλλα 3 σχήματα που να έχουν το ίδιο εμβαδόν με το πρώτο σχήμα;

δ) Είναι σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) οι παρακάτω προτάσεις;
Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη:
Το εμβαδόν μιας επιφάνειας:

είναι αρνητικός αριθμός	Σ	Λ
δείχνει πόση είναι η περιοχή που καλύπτει αυτή η επιφάνεια	Σ	Λ
εξαρτάται από τη μονάδα που χρησιμοποιούμε	Σ	Λ

ε) Πείτε με δικά σας λόγια τι είναι το εμβαδόν μιας επιφάνειας.

Για να μετρήσουμε μία επιφάνεια χρησιμοποιούμε κάποιες τυπικές μονάδες μέτρησης. Όπως για παράδειγμα ένα μικρό τετράγωνο με πλευρά 1cm. Αυτό το λέμε: ***τετραγωνικό εκατοστό** και το συμβολίζουμε με **cm^2**.* Τη χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε μικρές επιφάνειες, όπως μια γόμα.

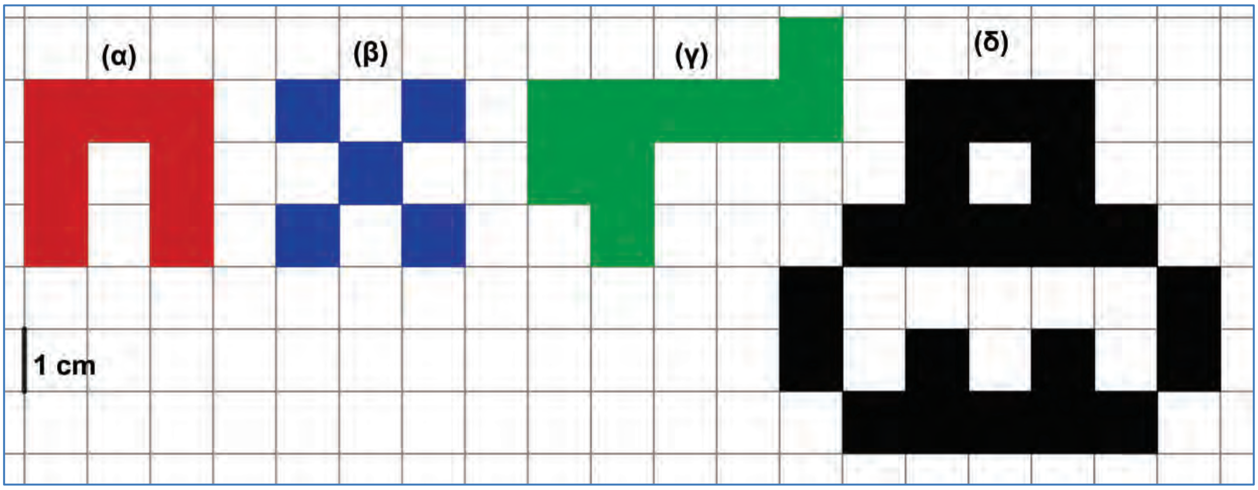


1.2 Διερεύνηση *(μέτρηση επιφάνειας με τυπικές μονάδες)*

Βρείτε το εμβαδόν για τα παρακάτω σχήματα:

Το (α) έχει εμβαδόν ………. cm^2. Το (β) έχει εμβαδόν ………. cm^2.

Το (γ) έχει εμβαδόν ………. cm^2. Το (δ) έχει εμβαδόν ………. cm^2



1.3 Διερεύνηση *(εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου)*

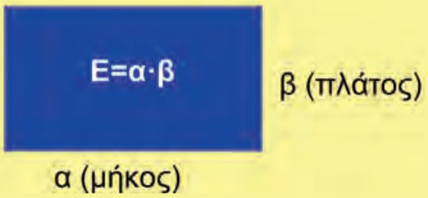
Ο Μπαράν θέλει να υπολογίσει το εμβαδόν από αυτό το ***ορθογώνιο*** αλλά έχουν σβήσει κάποιες γραμμές μέσα του. Βρήκε όμως έναν τρόπο να το υπολογίσει. Μπορείτε και εσείς να υπολογίσετε αυτό το εμβαδόν;

(Κάθε 🟥 είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 1cm).

__Ορθογώνιο,__ είναι το τετράπλευρο που έχει 4 γωνίες ορθές.

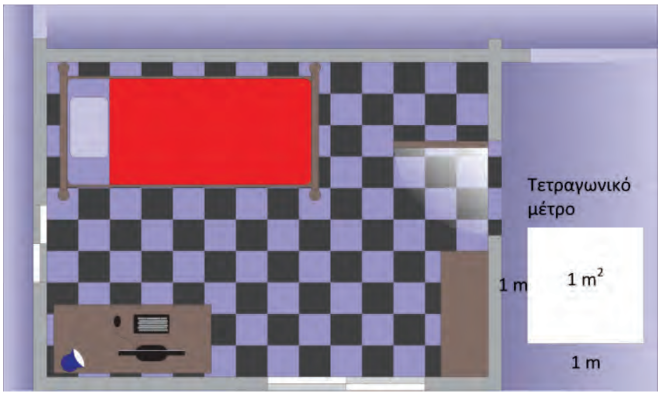
Μαθαίνω

Το **εμβαδόν ενός ορθογωνίου** είναι (μήκος) x (πλάτος).



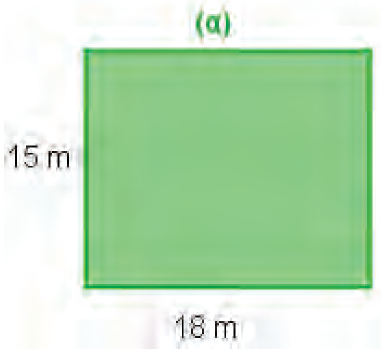
1.4 Άσκηση *(εφαρμογή του τύπου εμβαδού ορθογωνίου)*

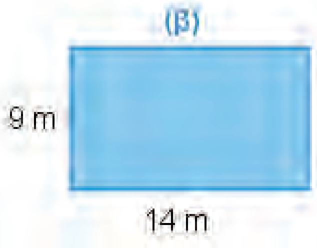
*1 **τετραγωνικό μέτρο** (m^2), είναι το εμβαδόν που έχει ένα τετράγωνο με πλευρά 1 m.*
Στη διπλανή εικόνα φαίνεται ένα τετραγωνικό μέτρο σε σχέση με το πάτωμα ενός δωματίου.



Στα παρακάτω σχέδια υπάρχουν οι διαστάσεις από τρία οικόπεδα.
Υπολόγισε το εμβαδόν τους σε ***τετραγωνικά μέτρα*** (m^2)

Εμβαδόν (α): ………………… m^2 Εμβαδόν (β): ………………… m^2 Εμβαδόν (γ): ………………… m^2

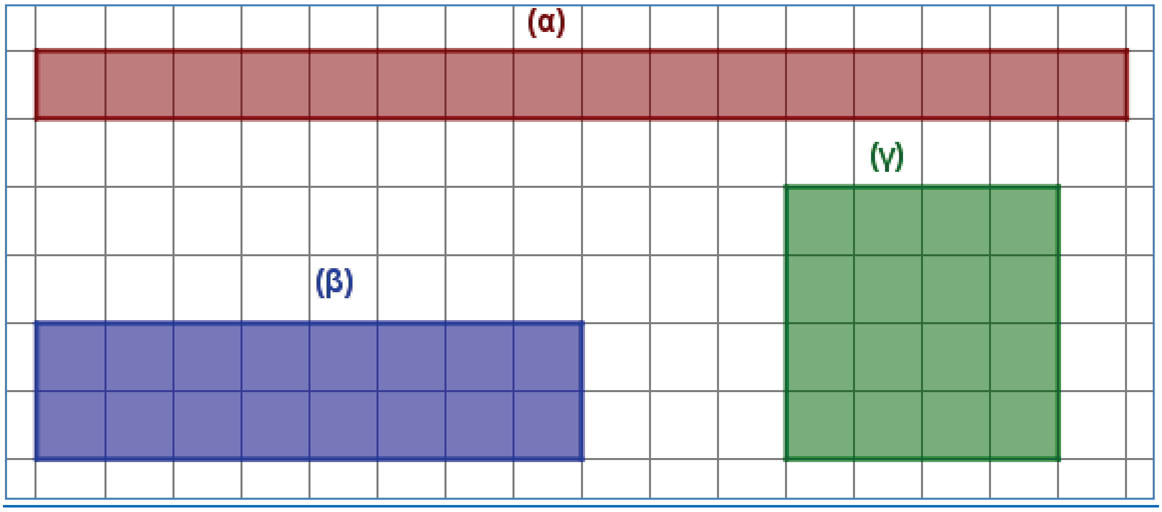




1.5 Διερεύνηση *(ορθογώνια με το ίδιο εμβαδόν)*

Ο καθηγητής ρώτησε τους μαθητές του: «υπάρχει σχέση ανάμεσα στο εμβαδόν και στην ***περίμετρο*** ενός ορθογωνίου;». Η Σάρα είπε ότι όσο μεγαλώνει η περίμετρος τόσο μεγαλώνει και το εμβαδόν.
Παρατηρήστε τα παρακάτω σχήματα και συμπληρώστε τον πίνακα.

*Η **περίμετρος** ενός ορθογωνίου, είναι το άθροισμα όλων των πλευρών του. $Π = α+β+α+β =$*
$= 2·α+2·β = 2·(α+β)$

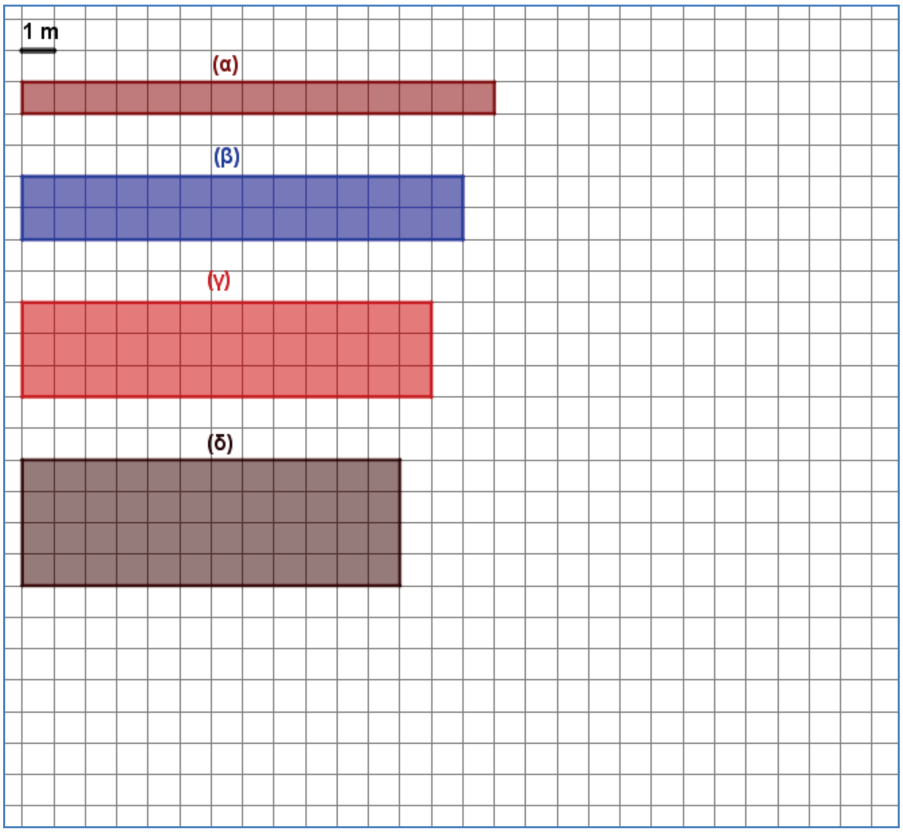


Σχήμα	Εμβαδόν	Περίμετρος
(α)		
(β)		
(γ)		

Συμφωνείτε με την άποψη της Σάρα; Ποιο από τα τρία σχήματα έχει τη μικρότερη περίμετρο;

1.6 Διερεύνηση *(ορθογώνια με την ίδια περίμετρο)*

1.6.Α) Ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές του: «με ένα σκοινί 32 m φτιάξτε ένα ορθογώνιο. Οι διαστάσεις του να είναι φυσικοί αριθμοί. Μετά φτιάξτε όσα περισσότερα μπορείτε. Βρείτε εκείνο με το μεγαλύτερο εμβαδόν». Ο Μαχμούντ έφτιαξε κάποια σχέδια. Είναι σωστά αυτά που έφτιαξε;



Φτιάξτε άλλα τέσσερα σχέδια και μετά συμπληρώστε τον πίνακα όπως στο παράδειγμα (α):
Τα ορθογώνια που θα φτιάξετε να έχουν μήκος μεγαλύτερο ή ίσο από το πλάτος.

Σχήμα	Μήκος	Πλάτος	Εμβαδόν	Περίμετρος
(α)	15 cm	1 cm	15 cm^2	32 cm
(β)				
(γ)				
(δ)				
(ε)				
(στ)				
(ζ)				
(η)				

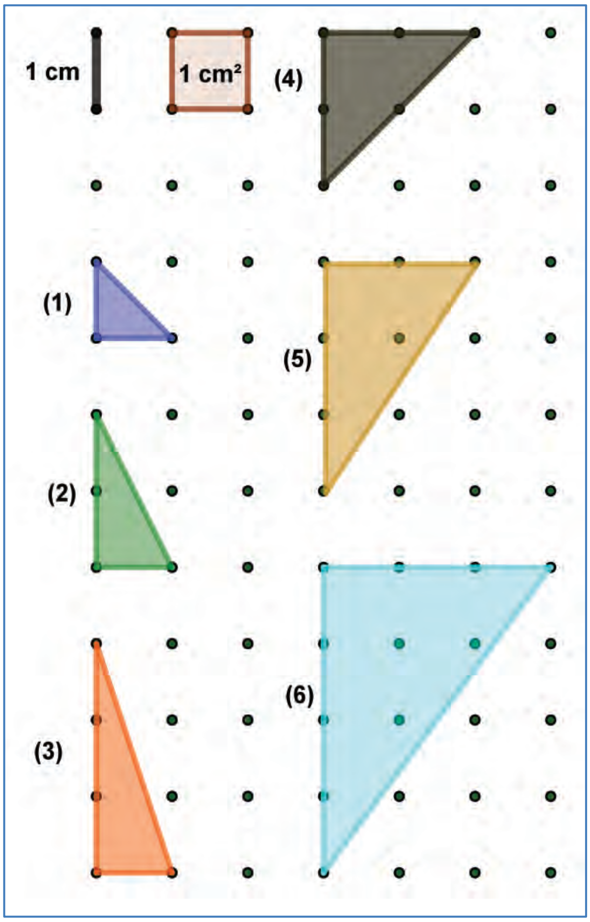
Ποιο είναι το ορθογώνιο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

1.6.Β) Ο κ. Μαχμούντ έχει ένα φράχτη με μήκος 100 m. Θέλει να το βάλει μέσα στο κτήμα του, για να φτιάξει έναν κήπο. Θέλει να καλύπτει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη επιφάνεια. Ποιο είναι το πλάτος και το μήκος του κήπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν;

1.7 Διερεύνηση *(εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου)*

1.7.Α) Το πλέγμα αντί για γραμμές μπορεί να έχει τελείες, όπως στο διπλανό σχήμα. Συμπληρώστε τα εμβαδά των σχημάτων:

- σχήμα (1): ………. cm^2
- σχήμα (2): ………. cm^2
- σχήμα (3): ………. cm^2
- σχήμα (4): ………. cm^2
- σχήμα (5): ………. cm^2
- σχήμα (6): ………. cm^2

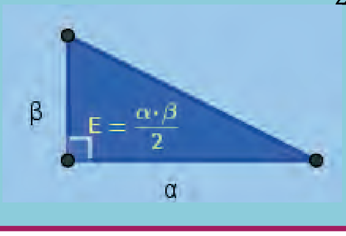


Τι σχέση έχει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου με το εμβαδόν του αντίστοιχου ορθογωνίου;

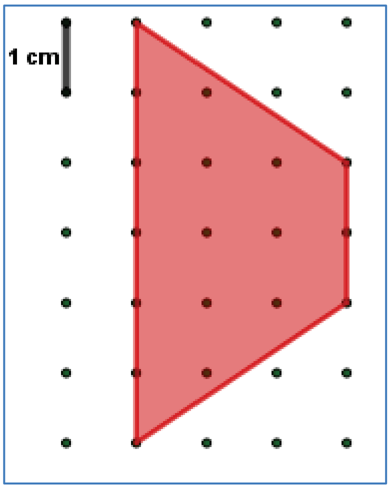
Μπορείτε να βρείτε έναν τύπο, για να βρίσκετε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου;

Μαθαίνω

Το **εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου** είναι $\frac{α \cdot β}{2}$

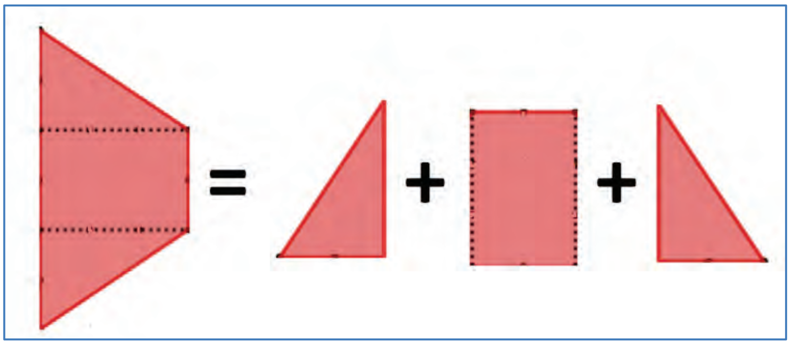


1.7.Β) Η καθηγήτρια ζήτησε από τους μαθητές να βρουν το εμβαδόν από το διπλανό κόκκινο σχήμα:



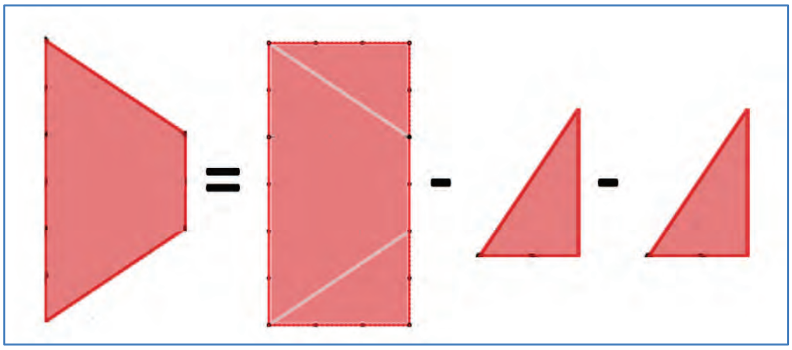
- Η Σελτζάν έδειξε με την παρακάτω εικόνα τον τρόπο που το βρήκε.

Βρείτε και εσείς το εμβαδόν με τον τρόπο της Σελτζάν.



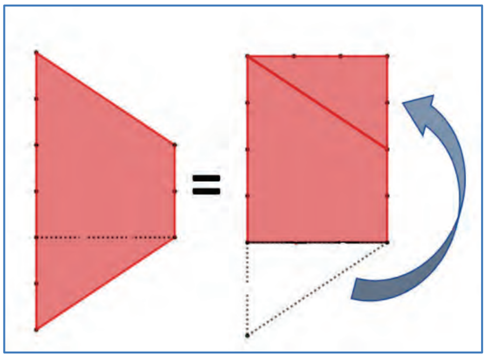
- Η Ντενίζ το έκανε όπως στην εικόνα.

Βρείτε και εσείς το εμβαδόν με τον τρόπο της Ντενίζ.



- Ο Απόστολος βρήκε άλλον τρόπο. Φαίνεται στη διπλανή εικόνα.

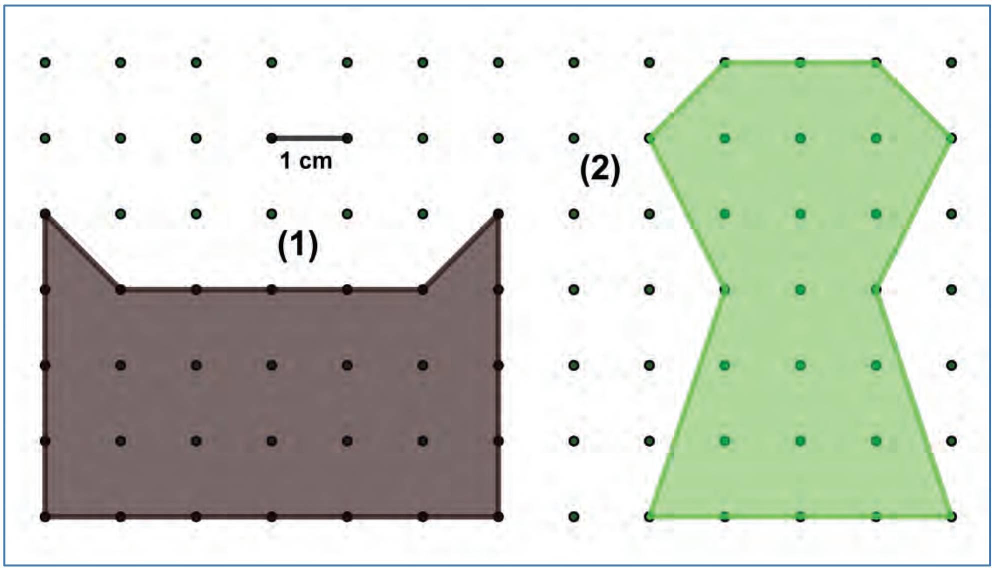
Βρείτε και εσείς το εμβαδόν με τον τρόπο του Απόστολου.



1.7.Γ) Υπολογίστε το εμβαδόν για τα υπόλοιπα δύο σχήματα και προσπαθήστε να τα βρείτε με διαφορετικούς τρόπους:

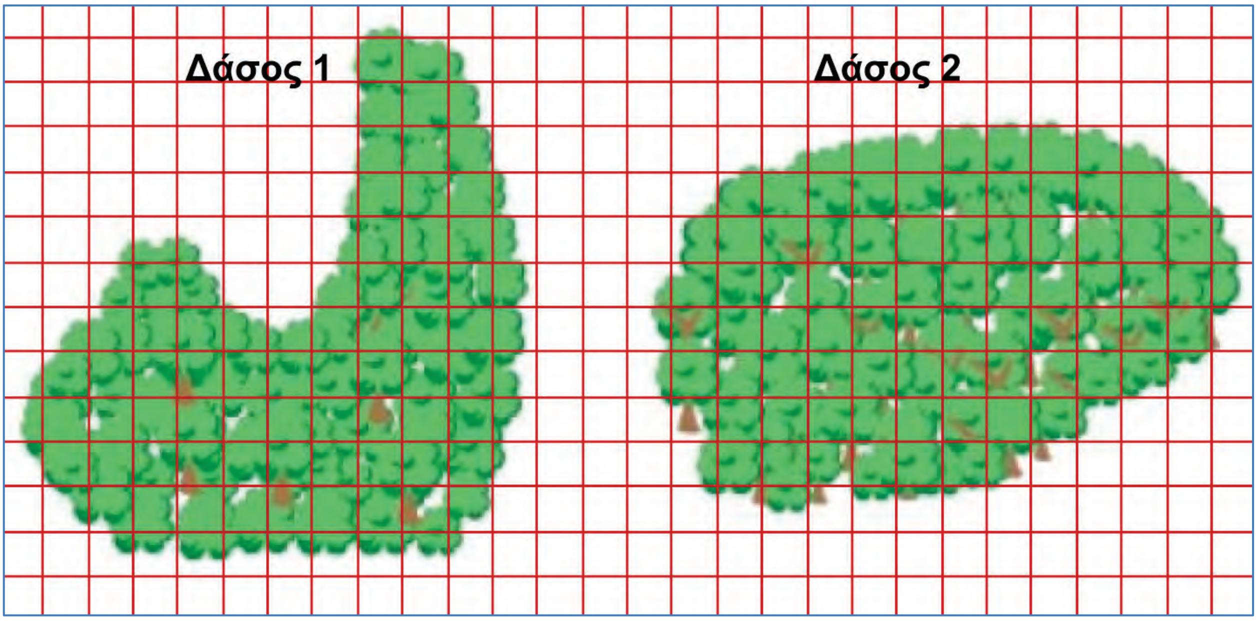
Το σχήμα (1) έχει εμβαδόν: ……… cm^2

Το σχήμα (2) έχει εμβαδόν: ……… cm^2



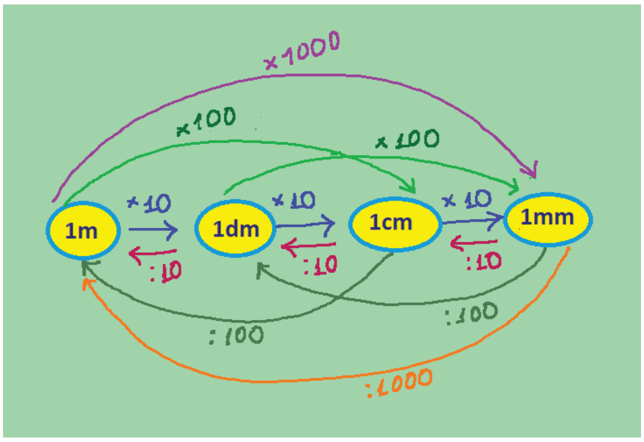
Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε σε όλη την τάξη, τον τρόπο που υπολογίσατε τα εμβαδά.

1.7.Δ) Παρακάτω έχουμε δύο δάση. Ποιο από τα δύο έχει την πιο μικρή έκταση;



Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε σε όλη την τάξη, τον τρόπο που υπολογίσατε το δάσος με τη μικρότερη έκταση.

1.8 Διερεύνηση *(μετατροπές μονάδων μέτρησης επιφάνειας)*



Θυμόμαστε: Το διπλανό σχήμα δείχνει πως αλλάζουμε τις μονάδες μήκους.

Για παράδειγμα:

5 m = 5 · 10 dm = 50 dm

4 dm = 4 · 10 cm = 40 cm

3 cm = 3 · 10 mm = 30 mm

17 m = 17 · 100 cm = 170 cm

12 dm = 12 · 100 mm = 1200 mm

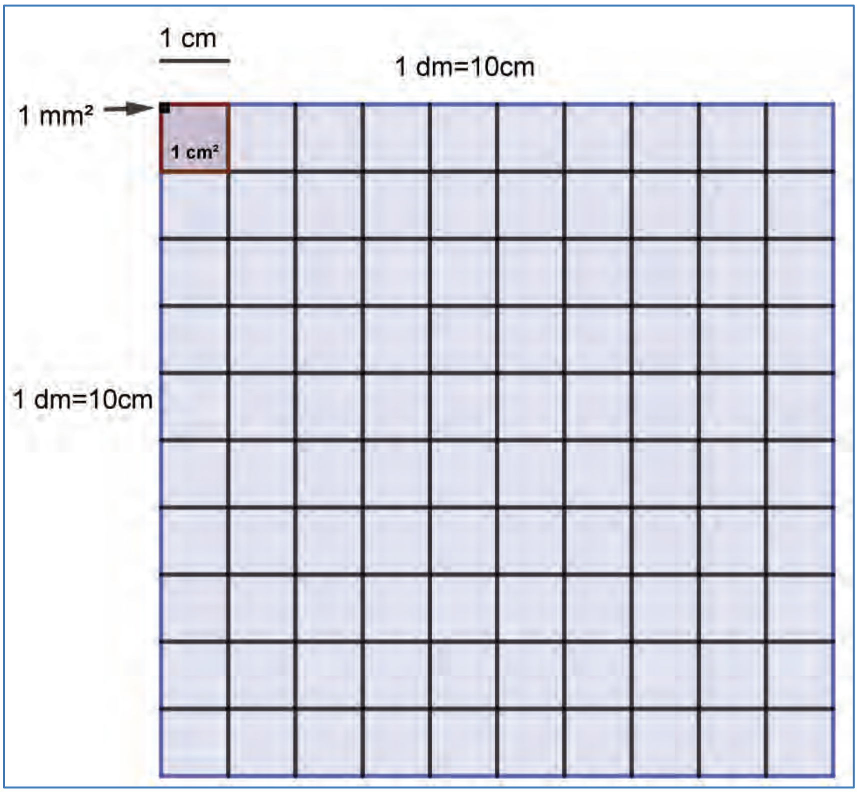
3 m = 3 · 1000 mm = 3000 mm

Συμπληρώστε τα κενά: 13 m = ……. dm = ……… cm =……….. mm, 7 dm = …… cm = ………. mm,
4000 mm = ………. cm = ………. dm = …….. m, 1700 cm= ………. dm = ………. m

1.8.Α) Έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά 1 dm. Αυτό έχει εμβαδόν 1 **τετραγωνικό δεκατόμετρο** (dm^2). Θέλουμε να βάλουμε τετράγωνα πλακάκια του 1 τετραγωνικού εκατοστόμετρου (1 cm^2, έχει πλευρά ένα εκατοστόμετρο). Πόσα πλακάκια θα χρειαστούμε;

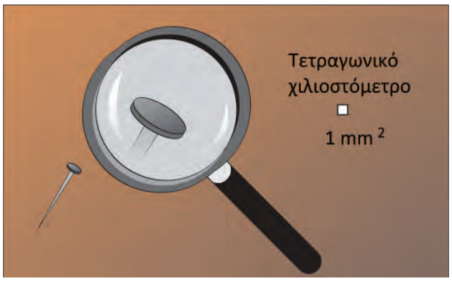
Μπορείτε να πείτε πως μετατρέπουμε τα dm^2 σε cm^2;

Τα m^2 σε dm^2;



Τα cm^2 σε mm^2; (με το τετραγωνικό χιλιοστόμετρο μπορούμε να μετρήσουμε πολύ μικρές επιφάνειες, όπως το κεφάλι μιας καρφίτσας)

Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε στην τάξη τις ιδέες σας.



Εργασία: *Ζωγραφίστε στην αυλή του σχολείου, ένα τετραγωνικό μέτρο.*

1 m^2 έχει 10 στήλες των 10 dm^2. Άρα **1 m^2=100 dm^2**
1 dm^2 έχει 10 στήλες των 10 cm^2. Άρα **1 dm^2=100 cm^2**
1 cm^2 έχει 10 στήλες των 10 mm^2. Άρα **1 cm^2=100 mm^2**

Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με 10, 100, 1000, … βάζουμε στο τέλος του αριθμού 1, 2, 3 , … μηδενικά, π.χ. 3·100=300.
Αν ο αριθμός είναι δεκαδικός, μεταφέρουμε την υποδιαστολή στα δεξιά μία, δύο, τρεις, … θέσεις, π.χ. 2,356·100=235,6

Συμπληρώστε τα κενά:

2 m^2 = 2 · 100 dm^2 = _______ dm^2

5 dm^2 = 5 · ____ cm^2 = _______ cm^2

17 cm^2 = ____· ____ mm^2 = _______ mm^2

4,25 m^2 = ____· _____ dm^2 = _______ cm^2 =____· _____ mm^2 = _____ mm^2

6,73 dm^2 = ____· _____ cm^2 = _______ mm^2

1.8.Β) Θέλετε να βάλετε τετράγωνα πλακάκια στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τα τετράγωνα πλακάκια θα έχουν πλευρά ένα εκατοστό (οι αποστάσεις των σημείων είναι 1 cm).

α) Πόσα πλακάκια χρειάζεστε;

β) Ποιό είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου σε cm^2;

γ) Σχεδιάστε πάνω στο σχήμα 1 dm^2. Ποιο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου σε dm^2;
Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε στην τάξη τις ιδέες σας.

δ) Πώς θα σκεφτούμε για να μετατρέψουμε: τα mm^2 σε cm^2, τα cm^2 σε dm^2, τα dm^2 σε m^2;

- 1 m^2=100 dm^2 άρα 1 dm^2= $\frac{1}{100}$ m^2 = 0,01 m^2
- 1 dm^2=100 cm^2 άρα 1 cm^2= $\frac{1}{100}$ dm^2 = 0,01 dm^2
- 1 cm^2=100 mm^2 άρα 1 mm^2= $\frac{1}{100}$ cm^2 = 0,01 cm^2

Συμπληρώστε τα κενά:

2 dm^2 = 2 : 100 m^2 = ________ m^2

52 cm^2 = 5 : _____ dm^2 = ________ dm^2

145 mm^2 = __: _____ cm^2 = ________ cm^2

1400000 mm^2 = ________ cm^2 = ________ dm^2 =________ m^2

Όταν διαιρούμε έναν αριθμό με 10, 100, 1000, … μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά 1, 2, 3, … θέσεις, π.χ.

- 132,5 :100=1,325
- 0,5 :1000=0,0005

ε) Συμπληρώστε τα κενά στην εικόνα. Βάλτε την πράξη που πρέπει να κάνουμε και τον αριθμό για κάθε μετατροπή(π.χ. x10 ή :10).

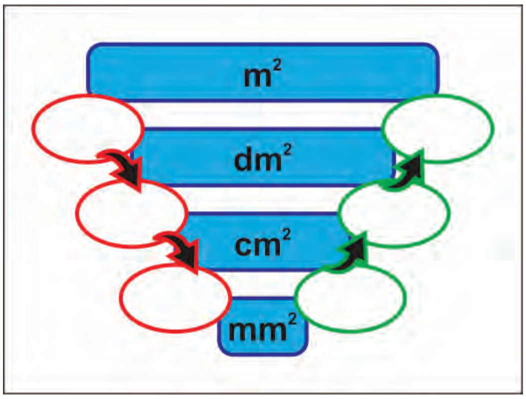
Κάντε δικά σας παραδείγματα μετατροπής από μία μονάδα μέτρησης εμβαδού σε άλλη, όπως στα παρακάτω παραδείγματα

1540 mm^2 = 0,154 dm^2 , 2,4 m^2 = 24000 cm^2

………………………………………… ……………………………………

………………………………………… ……………………………………

………………………………………… ……………………………………



στ) Με τη βοήθεια του χάρακα ή ενός μέτρου, να υπολογίσετε στην κατάλληλη μονάδα το εμβαδόν:

- από ένα τετράδιο:
- από το θρανίο που κάθεστε:
- από το πάτωμα της τάξης:

Στη συνέχεια μετατρέψτε αυτά που βρήκατε στις υπόλοιπες μονάδες.

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

………

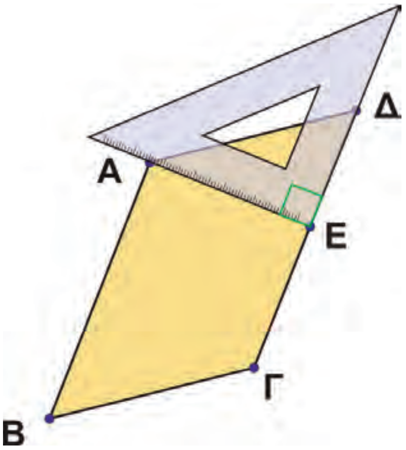
………

………

2. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

2.1- Διερεύνηση *(εμβαδόν παραλληλογράμμου)*

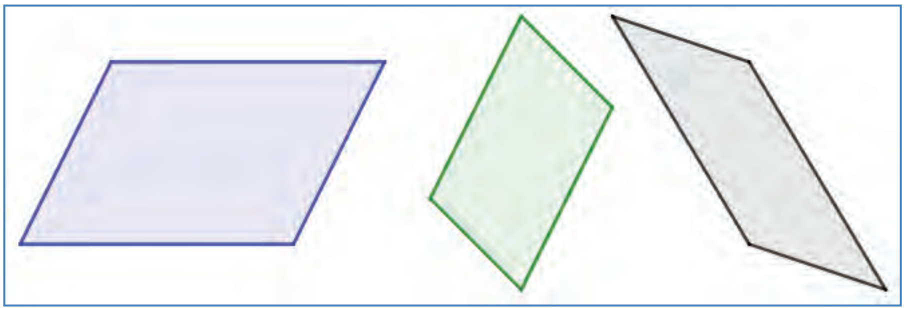
2.1.Α) Θέλουμε να βρούμε την απόσταση των δύο παραλλήλων ΑΒ-ΓΔ στο ***παραλληλόγραμμο*** ΑΒΓΔ. Θα σχεδιάσουμε το ύψος από το σημείο Α στην πλευρά ΓΔ. Τοποθετούμε τη μία κάθετη πλευρά του ορθογώνιου τριγώνου στην πλευρά ΓΔ. Η άλλη κάθετη πλευρά περνά από το σημείο Α. Το ΑΕ είναι το ένα ύψος από το παραλληλόγραμμο. Είναι η απόσταση των ΑΒ και ΓΔ.



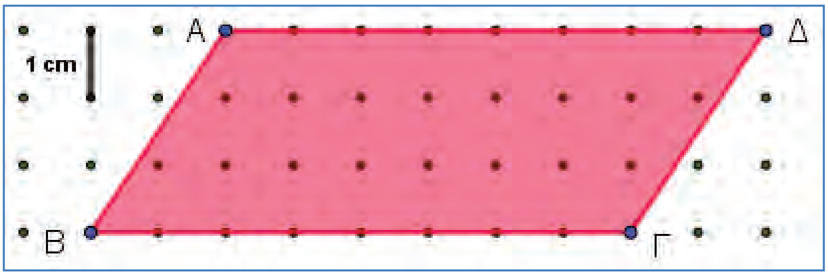
Μπορείτε να κατασκευάσετε το άλλο ύψος;
(Υπόδειξη: είναι η απόσταση των άλλων πλευρών, της ΑΔ με την ΒΓ. Φέρτε το ύψος από το Α προς την ΒΓ).

Παραλληλόγραμμο *είναι ένα τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες.*
Στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές και οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. Η κάθε μία από τις πλευρές, ονομάζεται ***βάση****.*
Κάθε παραλληλόγραμμο έχει δύο βάσεις και δύο αντίστοιχα ύψη.

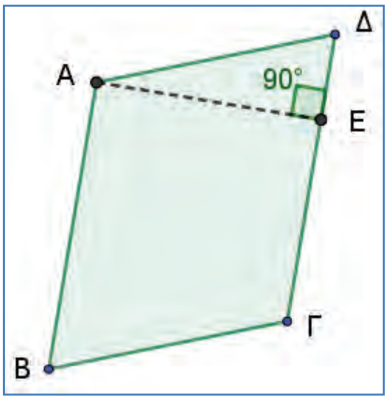
Σχεδιάστε τα δύο ύψη σε κάθε ένα από τα διπλανά παραλληλόγραμμα:

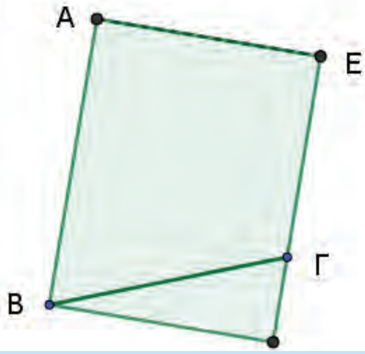


2.1.Β) Μπορείτε να βρείτε το εμβαδόν σε αυτό το παραλληλόγραμμο;
Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε στην τάξη με ποιον τρόπο το υπολογίσατε.



2.1.Γ) Η καθηγήτρια των μαθηματικών ζήτησε από τους μαθητές να βρουν έναν τύπο, για να υπολογίζουν το εμβαδόν από ένα παραλληλόγραμμο.

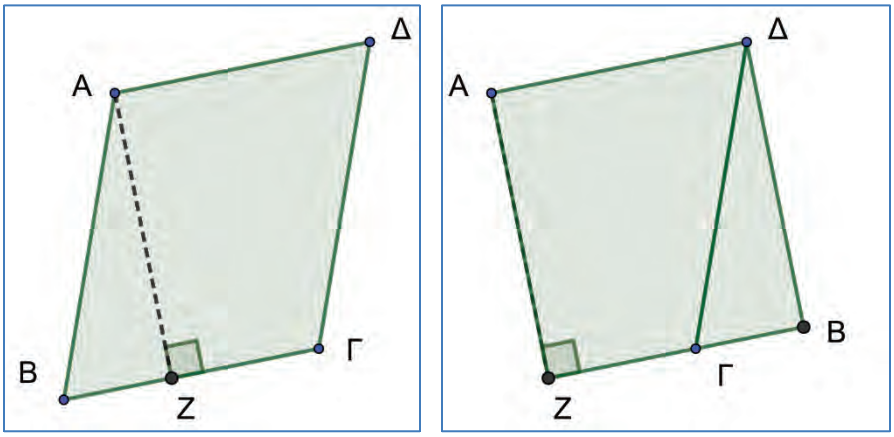




- Η Ρανά έφερε το ύψος ΑΕ. Με το ψαλίδι έκοψε το τρίγωνο ΑΔΕ και το μετέφερε στο κάτω μέρος του παραλληλογράμμου. Ένωσε την ΑΔ με την ΒΓ. Όπως στο αριστερό σχήμα.

Η Ρανά λέει: «Το σχήμα που έφτιαξα έχει το ίδιο εμβαδόν με το παραλληλόγραμμο». Έχει δίκιο;

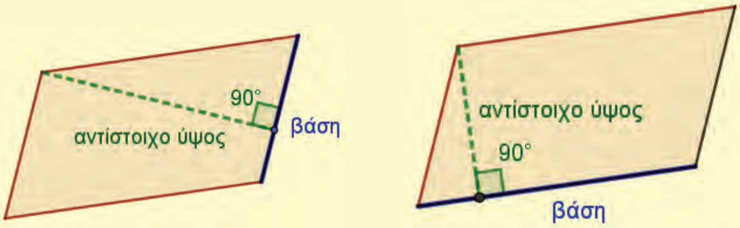
- Ο Αναστάσης έκανε κάτι άλλο. Έφερε το άλλο ύψος (ΑΖ). Έκοψε το τρίγωνο ΑΒΖ και το μετέφερε στο δεξιό μέρος του παραλληλογράμμου.



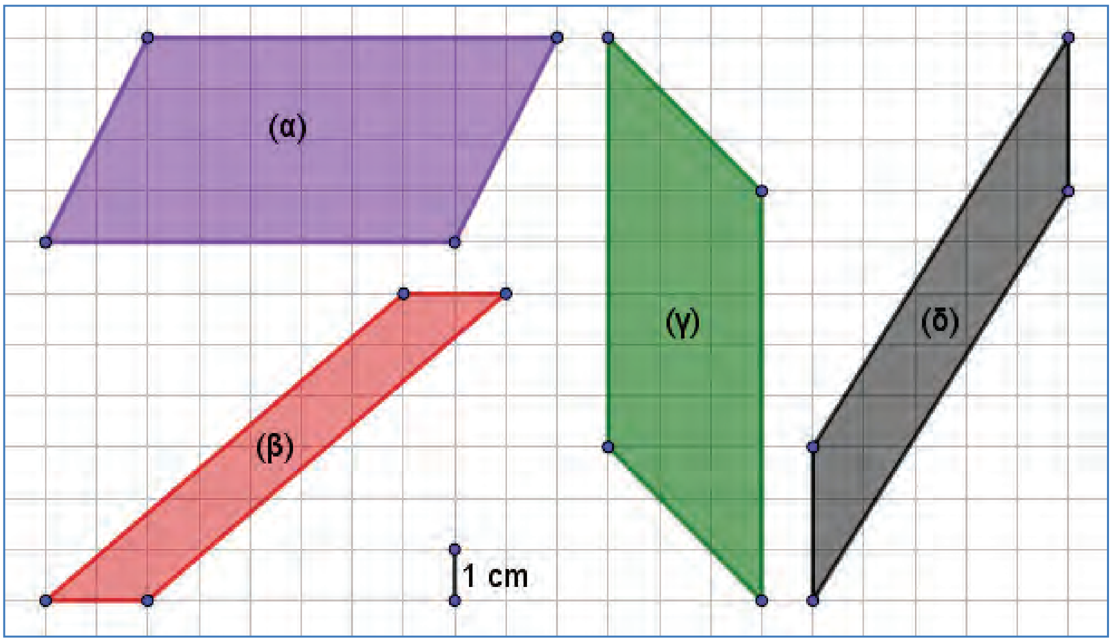
Μπορείτε να βρείτε έναν τύπο για να βρίσκετε το εμβαδόν από ένα παραλληλόγραμμο;

Μαθαίνω

Για να βρούμε το εμβαδόν από ένα παραλληλόγραμμο, πολλαπλασιάζουμε μία βάση του με το αντίστοιχο ύψος.



2.1.Δ) Βρείτε τα εμβαδά των παρακάτω παραλληλογράμμων (το πλέγμα έχει απόσταση 1 cm) με τον προηγούμενο τύπο:



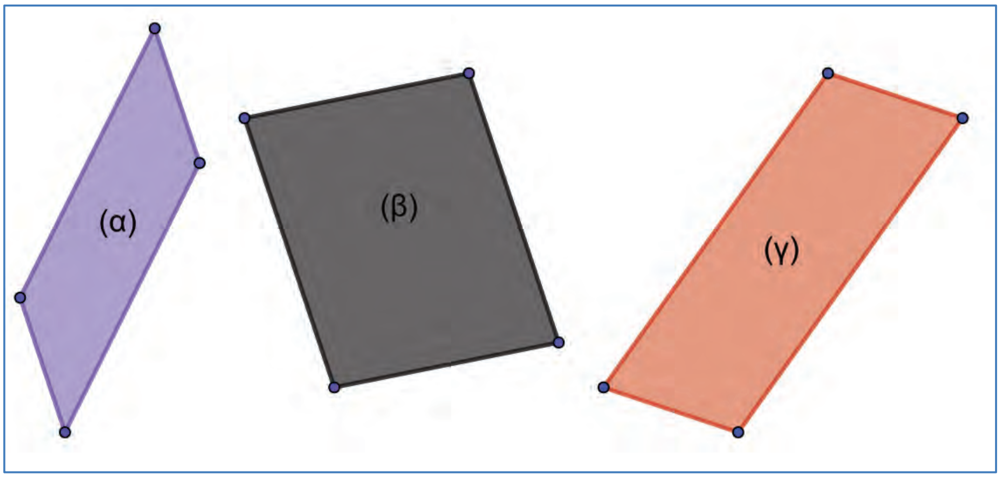
$E_α$= _____ cm^2 $E_β$= _____ ____ $E_γ$= _____ ____ $E_δ$= _____ ____

2.1.Ε) Με το χάρακα και το ορθογώνιο τρίγωνο βρείτε τα εμβαδά των παρακάτω παραλληλογράμμων.

$E_α$= ______ ____

$E_β$= ______ ____

$E_γ$= ______ ____

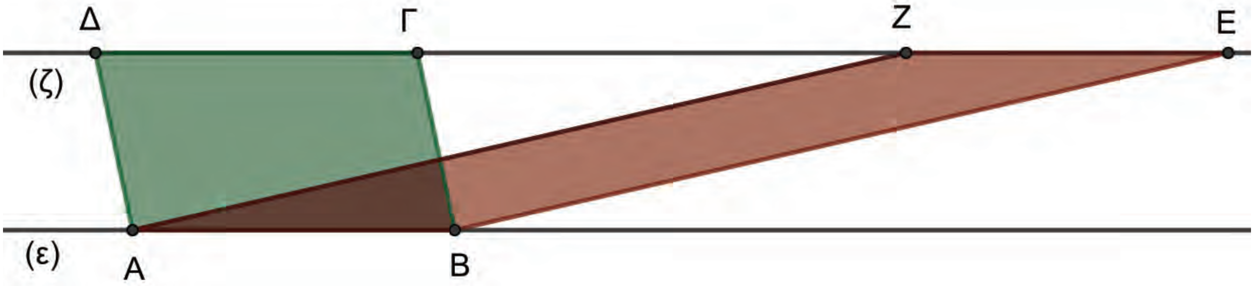


Υπολογίστε πάλι τα εμβαδά, με διαφορετική βάση αυτή τη φορά:

$E_α$= ______ ____ $E_β$= ______ ____ $E_γ$= ______ ____

2.2 Διερεύνηση *(παράδοξη ιδιότητα)*

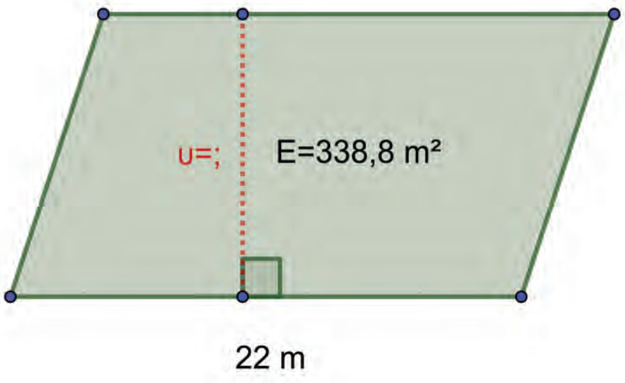
Ο παππούς του Θανάση που είναι μαθηματικός, είπε στους φίλους του Θανάση, ένα πρόβλημα: «σας δίνω δύο παραλληλόγραμμα. Ποιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;».
Ο Θανάσης είπε το ΑΒΓΔ και η Ντελαμάρ το ΑΒΕΖ. Η Ντελαμάρ είπε: «όσο πιο μακριά είναι τα Ε και Ζ, τόσο μεγαλύτερο θα είναι το εμβαδόν».



Εσείς τι λέτε; Ποιο από το δύο παραλληλόγραμμα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;
Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε την γνώμη σας σε όλη την τάξη.

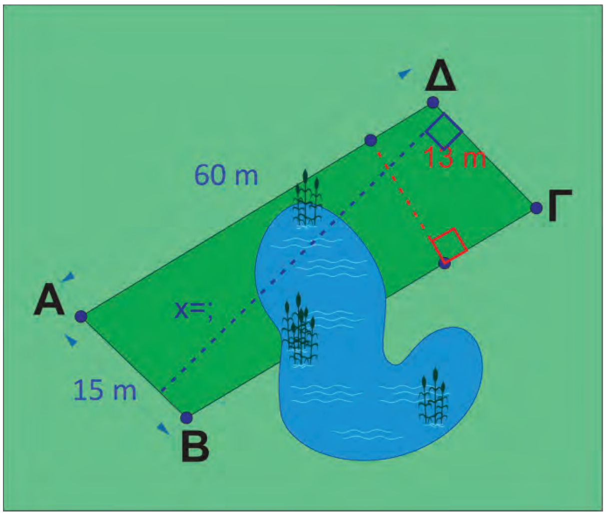
2.3 Διερεύνηση: *Επίλυση προβλημάτων*

2.3.Α) Ο Ομάρ θέλει να βρει το ύψος σε ένα οικόπεδο. Αυτό το οικόπεδο έχει σχήμα παραλληλόγραμμο. Γνωρίζει ότι η αντίστοιχη πλευρά είναι 22 m και το εμβαδόν του είναι 338,8 m^2.
Μπορείτε να τον βοηθήσετε;

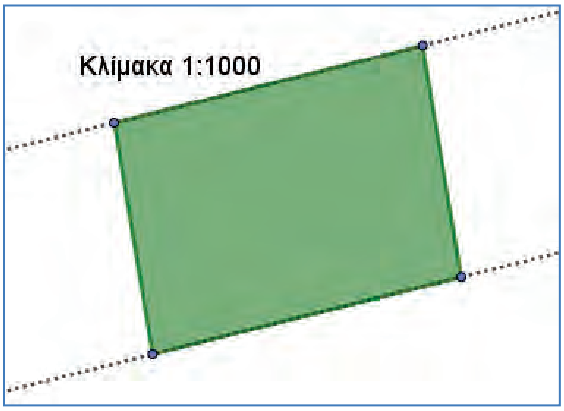


2.3.Β) Ο πατέρας του Κώστα έχει το κτήμα ΑΒΓΔ που είναι παραλληλόγραμμο. Έχει μετρήσει τις πλευρές ΑΒ=15 m, ΑΔ=60 m και μέτρησε το ένα ύψος που είναι 13 m. Δεν μπορεί να βρει το άλλο ύψος γιατί υπάρχει μία λίμνη.
Ο Κώστας βρήκε την απάντηση.

Μπορείτε να βρείτε και σεις το άλλο ύψος του παραλληλόγραμμου;



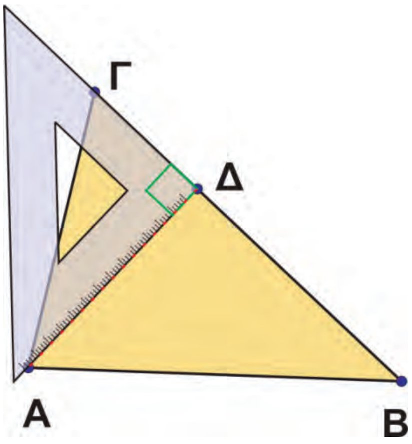
2.3.Γ) Ο Φαρούκ έχει έναν μεγάλο κήπο που είναι παραλληλόγραμμο και θέλει να τον στρώσει με φυσικό γκαζόν. Ξέρει ότι το σχέδιο έχει κλίμακα 1:1000. Κάθε m^2 γκαζόν κοστίζει 7 €. Πόσα χρήματα θα κοστίσει;



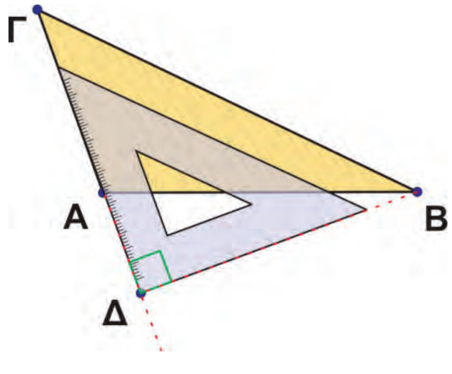
2.4 Διερεύνηση *(ύψη και εμβαδόν τριγώνου)*

2.4.Α) α) Θέλουμε να σχεδιάσουμε το ύψος από το σημείο Α στο τρίγωνο ΑΒΓ. Τοποθετούμε τη μία κάθετη πλευρά από το ορθογώνιο τρίγωνο στην πλευρά ΒΓ. Η άλλη πλευρά περνά από το σημείο Α. Το ΑΔ είναι το ένα ύψος από το τρίγωνο.

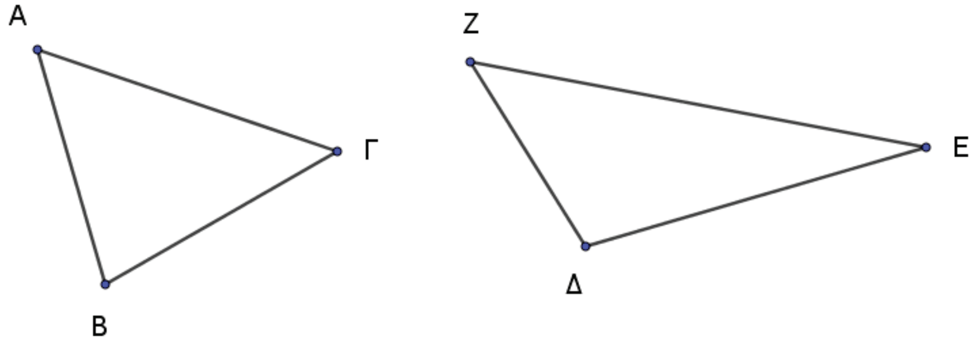
Μπορείτε να κατασκευάσετε τα άλλα δύο ύψη του τριγώνου;



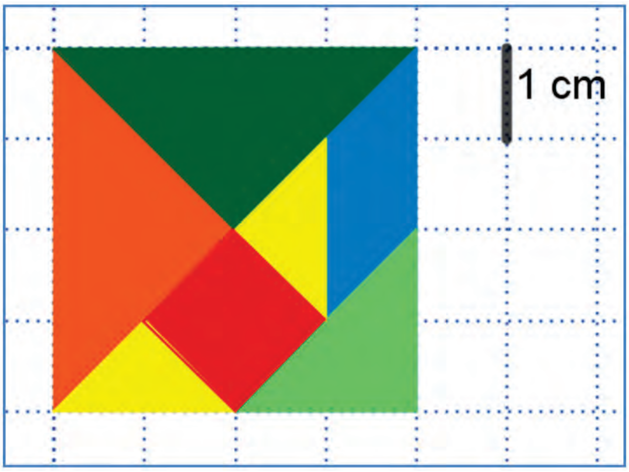
β) Αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο, τότε το ύψος είναι έξω από το τρίγωνο, όπως στο διπλανό σχήμα.
Μπορείτε να κατασκευάσετε τα άλλα δύο ύψη του τριγώνου;



γ) Σχεδιάστε τα τρία ύψη σε κάθε ένα από τα παρακάτω τρίγωνα.



2.4.Β) α) Η καθηγήτρια ζήτησε από τους μαθητές να βρουν τα εμβαδά από κάποια σχήματα του τάνγκραμ. Υπολογίστε και σεις το εμβαδόν στα σχήματα:



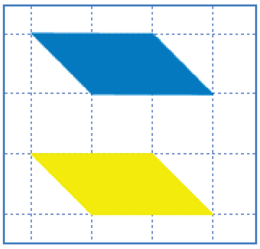
Κόκκινο τρίγωνο: _______ cm^2,
(Υπόδειξη: σκεφτείτε τι μέρος είναι αυτό το τρίγωνο από το μεγάλο τετράγωνο)

Πράσινο (ανοιχτό) τρίγωνο: _______ cm^2 ,

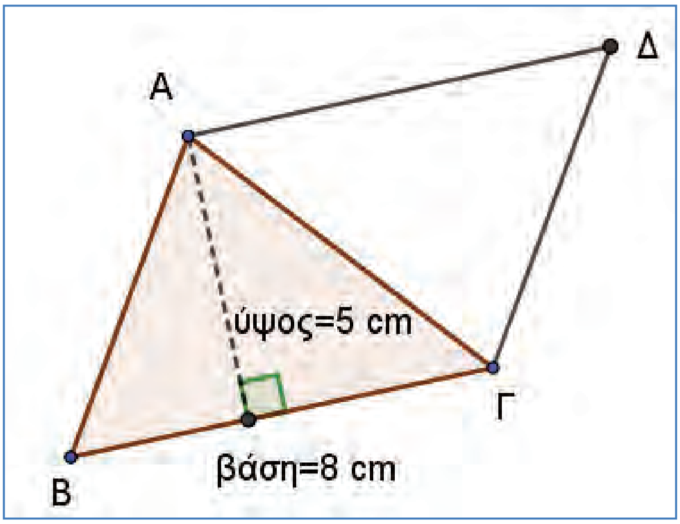
Μπλε παραλληλόγραμμο: _______ cm^2 ,

Μπορείτε να βρείτε το εμβαδά των κίτρινων τριγώνων;

Για να βρει το εμβαδόν για το κίτρινο τρίγωνο, ο Αμίρ ένωσε τα δύο κίτρινα τρίγωνα και έφτιαξε ένα παραλληλόγραμμο όπως το μπλε.
Σκέφτηκε ότι, ένα παραλληλόγραμμο μπορούμε να το χωρίσουμε με μια διαγώνιο και έχουμε δύο τρίγωνα ίδια. Άρα το εμβαδόν του ενός τριγώνου είναι το μισό του παραλληλογράμμου.
Είναι σωστός ο τρόπος που σκέφτηκε ο Αμίρ;



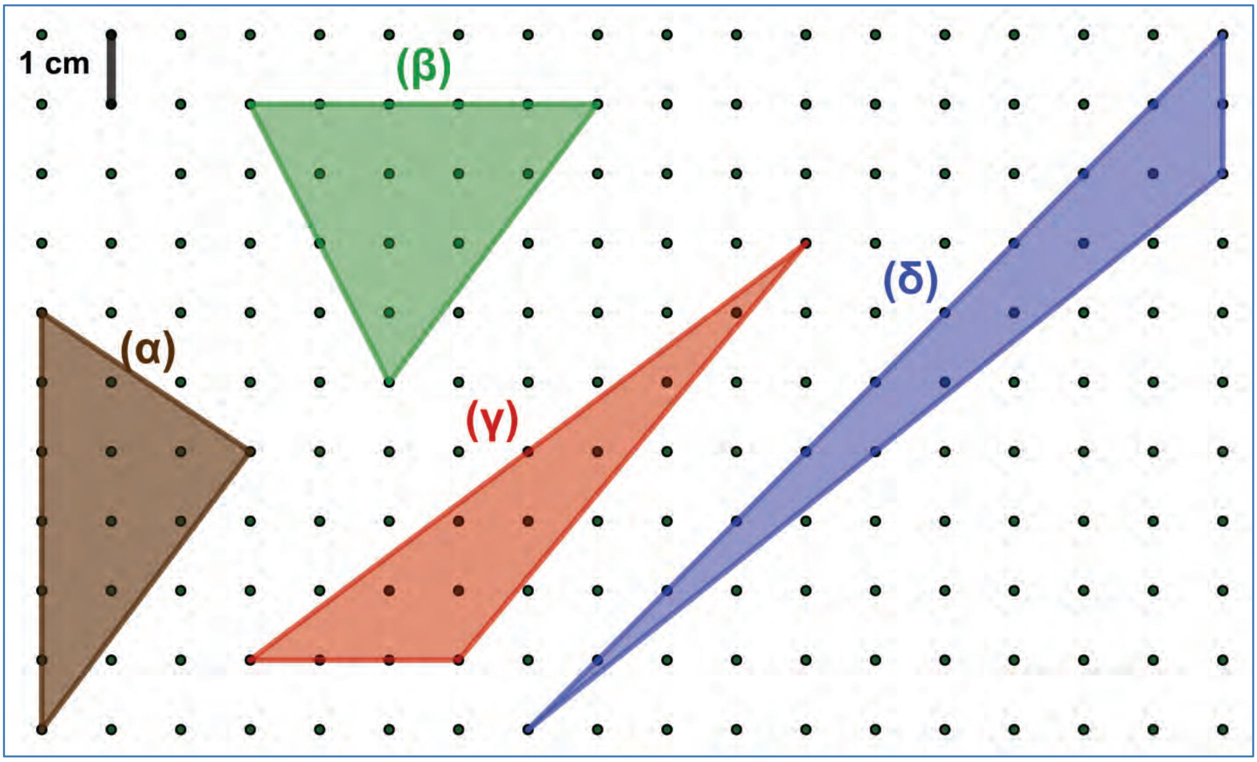
β) Μπορείτε να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ; (το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο).



Μαθαίνω

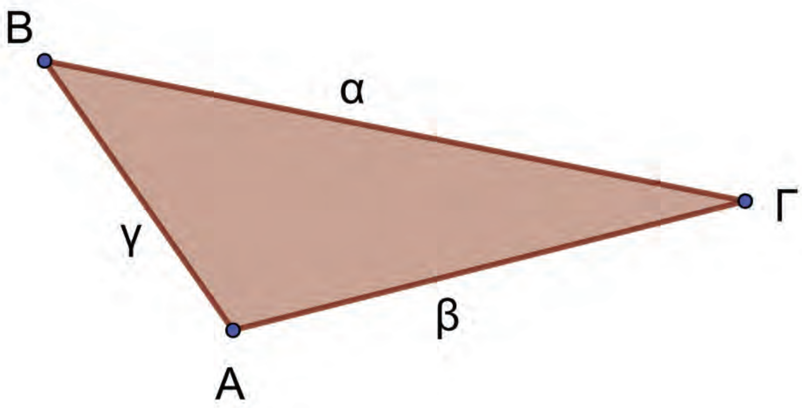
Το **εμβαδόν ενός τριγώνου** είναι $\frac{(\text{βάση})\ \text{x}\ (\text{αντίστοιχο ύψος})}{2}$

2.4.Γ) α) Ποιο τρίγωνο από τα παρακάτω φαίνεται «με το μάτι» να έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Βρείτε τα εμβαδά των παρακάτω τριγώνων (το πλέγμα έχει απόσταση 1 cm) με τον προηγούμενο τύπο. Αυτό που είπατε, είναι σωστό;



Eα= _____ cm^2 Eβ= _____ ____ Eγ= _____ ____ Eδ= _____ ____

β) Με το χάρακα και το ορθογώνιο τρίγωνο, βρείτε το εμβαδόν του παρακάτω τριγώνου. Μετρήστε και υπολογίστε το εμβαδόν με τρεις διαφορετικούς τρόπους.



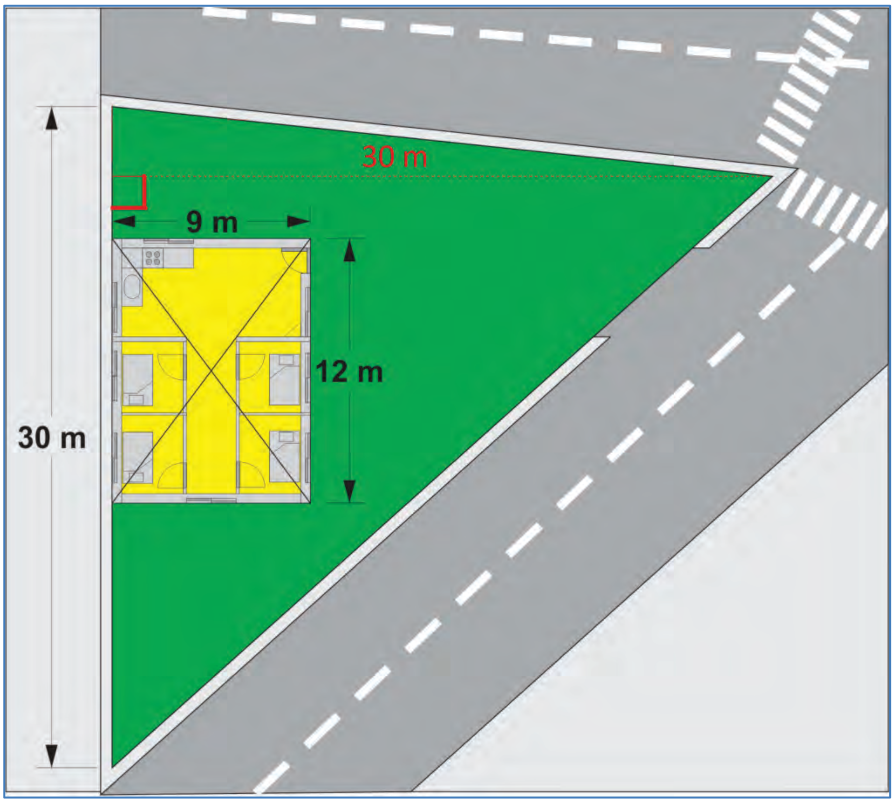
Eα= ______ ____

Eβ= ______ ____

Eγ= ______ ____

2.5 Ασκήσεις: *επίλυση προβλημάτων*

2.5.Α) Ο Χασάν έχει ένα οικόπεδο με βάση και αντίστοιχο ύψος 30 m. Έχει φτιάξει μέσα στο οικόπεδο ένα ορθογώνιο σπίτι:
9 m x 12 m.



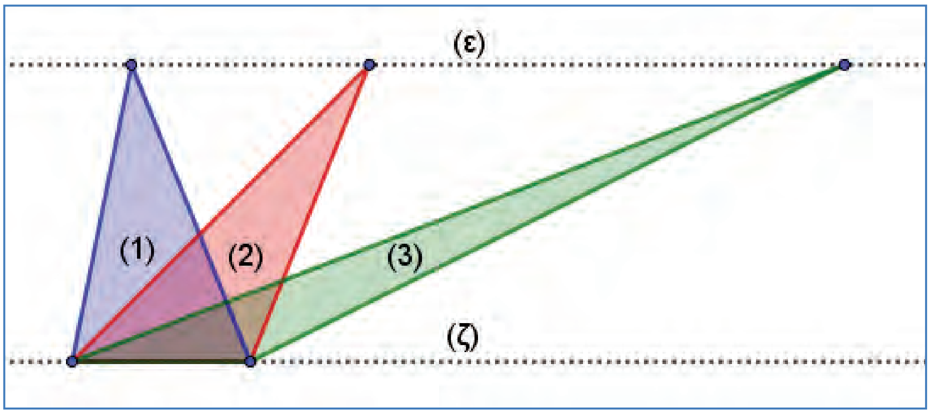
α) Πόσο είναι το εμβαδόν του οικοπέδου;

Πόσο είναι το εμβαδόν του σπιτιού;

β) Θέλει στο υπόλοιπο μέρος του οικοπέδου, να βάλει φυσικό γκαζόν που κοστίζει 7 € το m^2. Πόσο θα του κοστίσει;

2.5.Β) Οι ευθείες (ε) και (ζ) είναι παράλληλες.

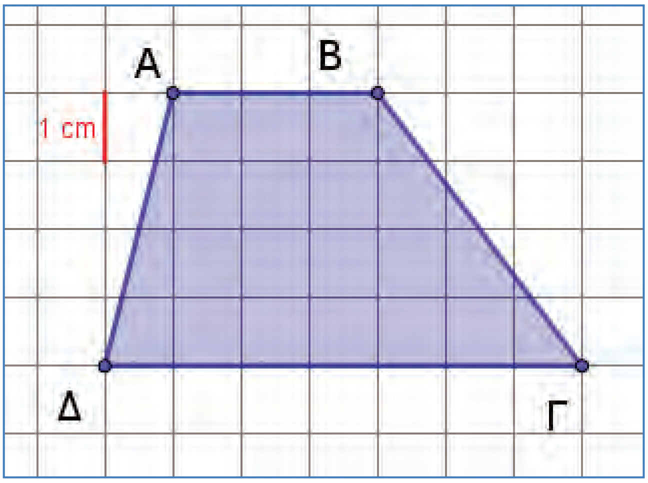
Ποιο από τα τρία τρίγωνα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;



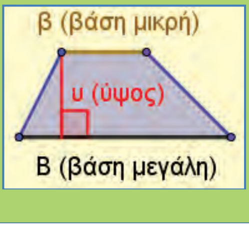
Συζητήστε με την ομάδα σας και πείτε τη γνώμη σας σε όλη την τάξη.

2.6 Διερεύνηση *(εμβαδόν τραπεζίου)*

2.6.Α) α) Ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να βρουν το εμβαδόν αυτού του **τραπεζίου** (το πλέγμα έχει απόσταση 1 cm).

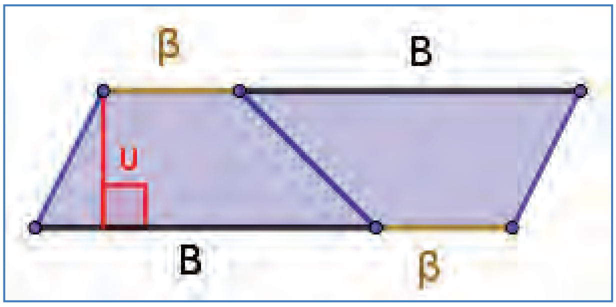


Τραπέζιο *είναι ένα τετράπλευρο που έχει δύο* ***μόνο*** *απέναντι πλευρές παράλληλες. Από τις παράλληλες πλευρές, τη μεγαλύτερη τη λέμε* ***βάση μεγάλη (Β),*** *τη μικρότερη* ***βάση μικρή (β)*** *και την απόσταση των δύο παράλληλων ευθειών τη λέμε* ***ύψος του τραπεζίου (υ).***



Μπορείτε να βρείτε και εσείς το εμβαδόν; *Συζητήστε με την ομάδα σας και εξηγήστε στην τάξη τον τρόπο που το βρήκατε.*

β) Ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να προσπαθήσουν να βρουν έναν τύπο, για το εμβαδόν ενός τραπεζίου. Η Ερίνα σκέφτηκε το εξής: «θα ενώσουμε δύο ίδια τραπέζια και θα φτιάξουμε ένα παραλληλόγραμμο, που ξέρουμε το εμβαδόν του».

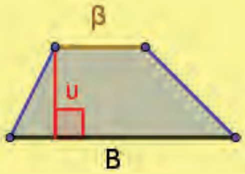


Συμφωνείτε με την Ερίνα;

Ποιος είναι ο τύπος για το εμβαδόν ενός τραπεζίου;

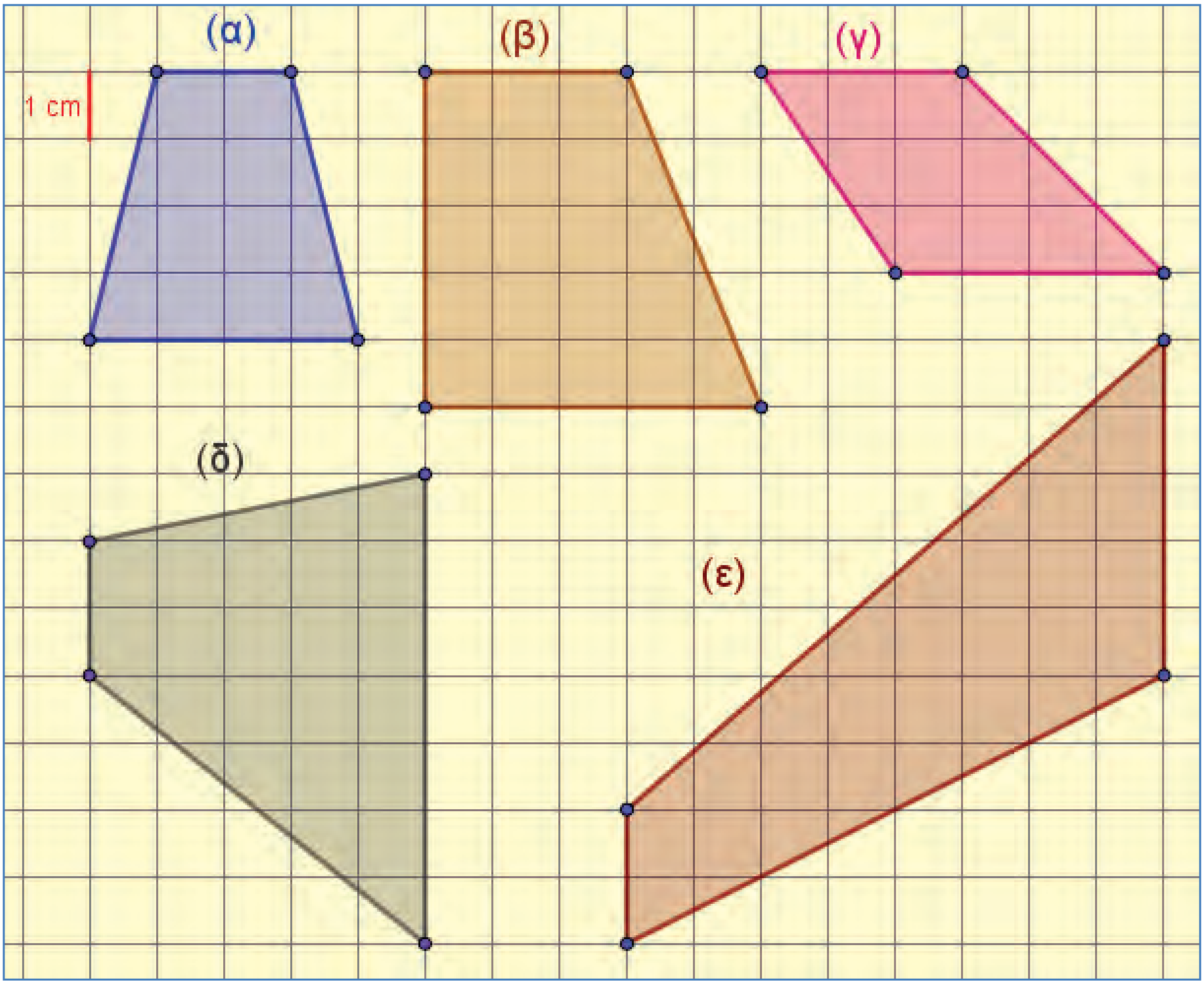
Μαθαίνω

Το **εμβαδόν ενός τραπεζίου** είναι $\frac{(B+\beta)\cdot\upsilon}{2}$



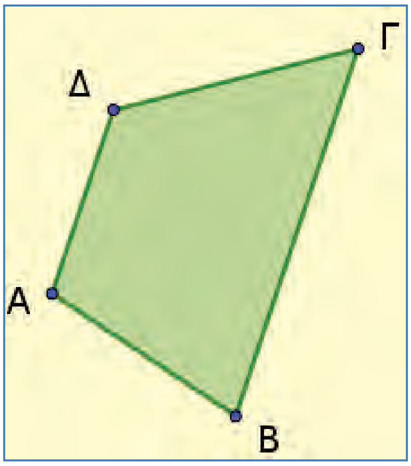
2.6.Β) Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι τραπέζια;

Βρείτε τα εμβαδά από τα σχήματα που είναι τραπέζια (το πλέγμα έχει απόσταση 1 cm), με τον προηγούμενο τύπο.



$E_α$= _____ ____ $E_β$= _____ ____ $E_γ$= _____ ____ $E_δ$= _____ ____ $E_ε$= _____ ____

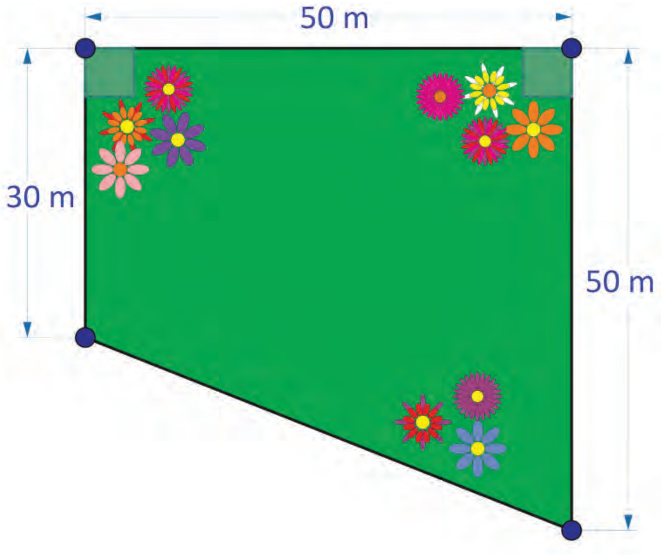
2.6.Γ) Βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ με το χάρακα και το ορθογώνιο τρίγωνο.



2.7 Ασκήσεις: *επίλυση προβλημάτων*

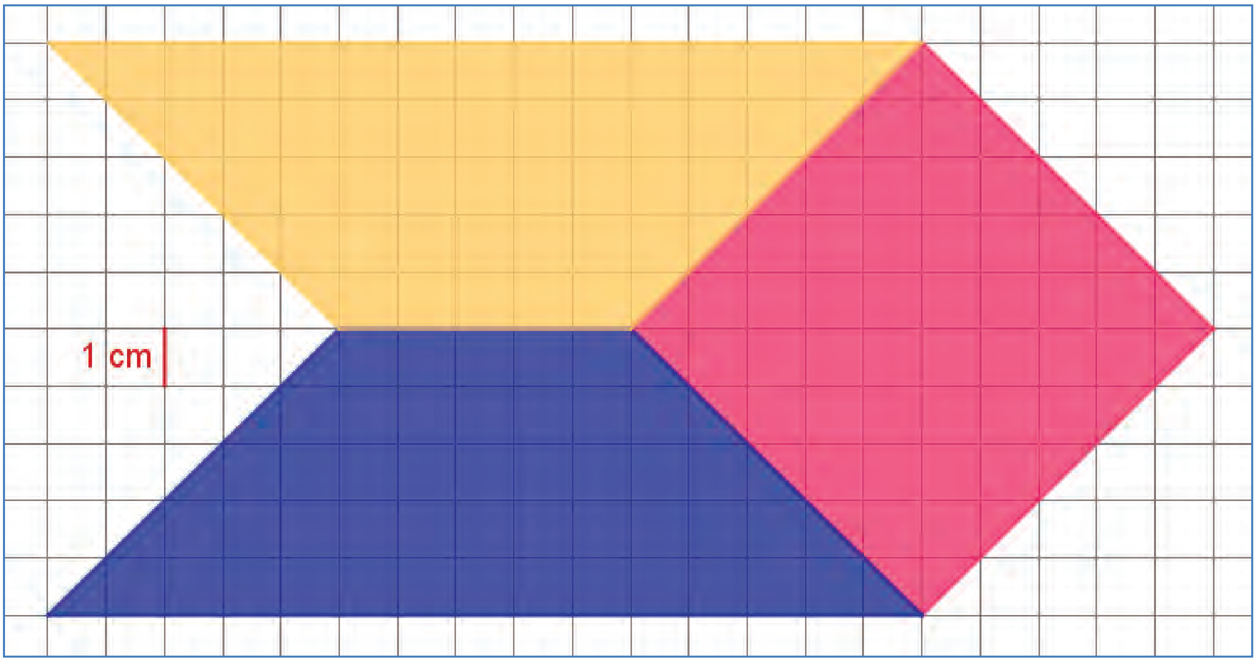
2.7.Α) Στο διπλανό κήπο ο Μουράτ θέλει να φυτέψει δένδρα.

Για κάθε δέντρο πρέπει να υπολογίσει τουλάχιστον 10 m^2.
Πόσα είναι τα περισσότερα δέντρα που μπορεί να βάλει;



2.7.Β) Ο κ. Αλέκος φτιάχνει ένα διακοσμητικό με πλακάκια, γύρω από το τζάκι του.

Το μοτίβο που χρησιμοποιεί είναι το μπλε, το πορτοκαλί και το κόκκινο πλακάκι, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα σε πλέγμα 1 cm.



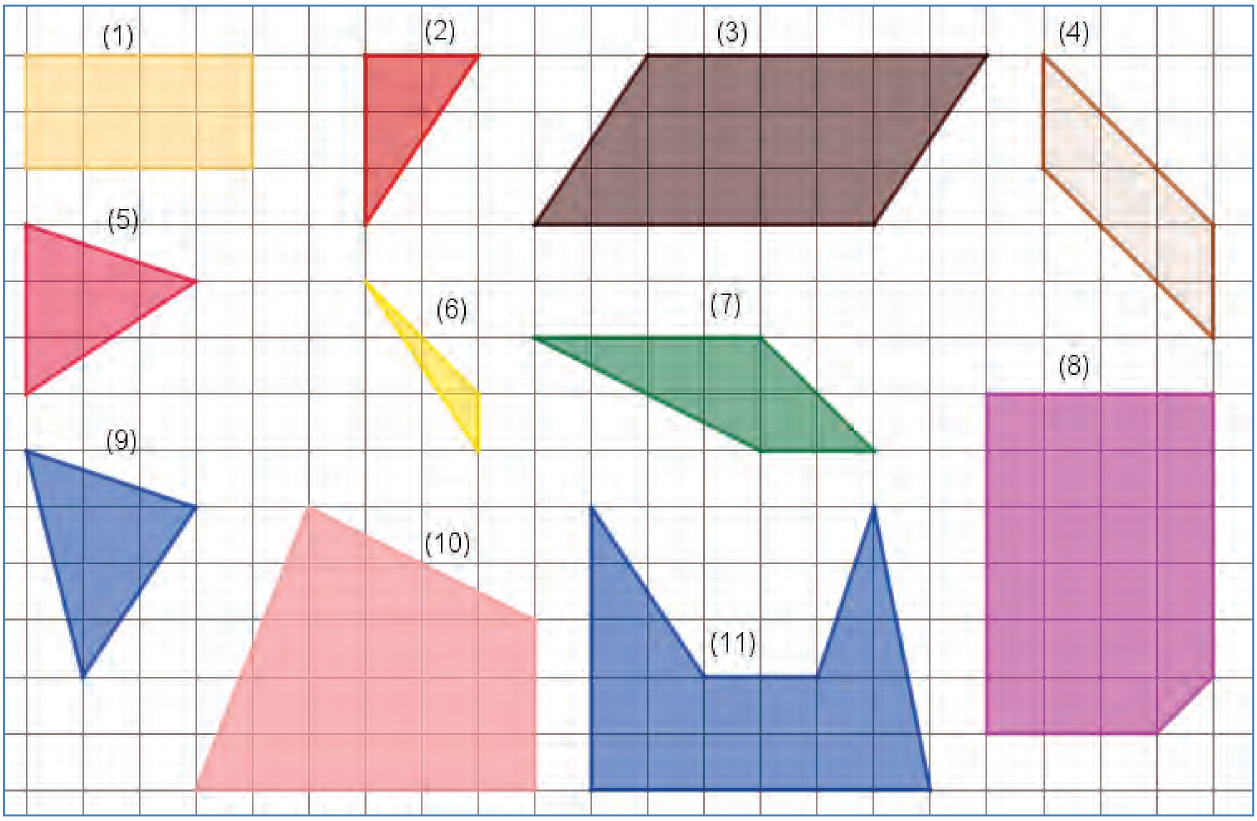
α) Πόσο είναι το εμβαδόν από το μπλε πλακάκι;

β) Πόσο είναι το εμβαδόν από το πορτοκαλί πλακάκι;

γ) Η Ελένη η κόρη του κ. Αλέκου λέει ότι το εμβαδόν από το κόκκινο πλακάκι είναι 25 cm^2. Συμφωνείτε;
Αν όχι, πόσο είναι το εμβαδόν και πώς το βρήκατε;

δ) Πόσο είναι το εμβαδόν από όλο το μοτίβο;

2.7.Γ) Βρείτε το εμβαδόν από τα παρακάτω σχήματα. Η απόσταση στο πλέγμα είναι 1 cm.



E_1=___ ___ E_2=___ ___ E_3=_____ ___ E_4=____ ___ E_5=____ ___ E_6=____ ___ E_7=____ ___

E_8=_____ ___ Πώς το βρήκατε;

E_9=_____ ___ Πώς το βρήκατε;

E_{10}=_____ ___ Πώς το βρήκατε;

E_{11}=_____ ___ Πώς το βρήκατε;

Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

………

………

………

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

………

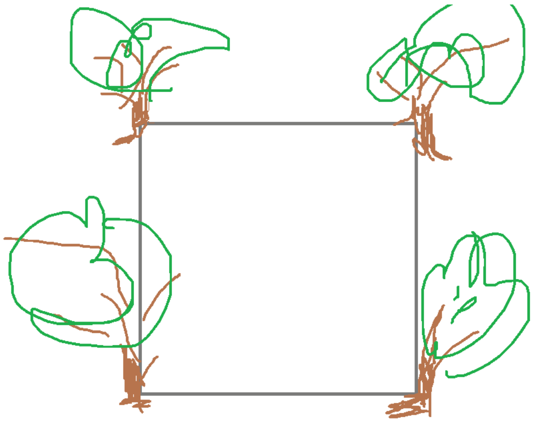
………

3. Πυθαγόρειο θεώρημα

3.1 Διερεύνηση *(Πυθαγόρειο θεώρημα)*

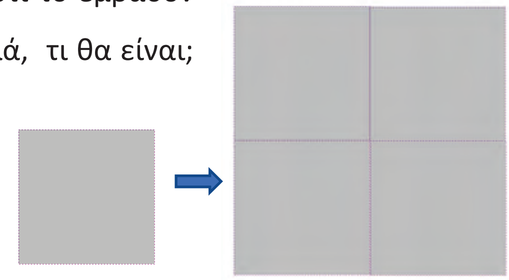
Η Λίνα δίπλωνε και ξεδίπλωνε μια χαρτοπετσέτα. Μέχρι που κάποια στιγμή πρόσεξε τα δύο τετράγωνα. Το ένα μέσα στο άλλο. Και τότε κατάλαβε… μπροστά της είχε τη λύση από το πρόβλημα που τους είπε το πρωί ο Δάσκαλος.

«Ο δήμαρχος ενός χωριού θέλει να διπλασιάσει το εμβαδόν μίας τετράγωνης πλατείας. Αλλά στις γωνίες υπάρχουν 4 μεγάλα δέντρα που δεν θέλει να τα κόψει. Πώς γίνεται να διπλασιάσει το εμβαδόν από το τετράγωνο χωρίς να κόψει τα δέντρα;»



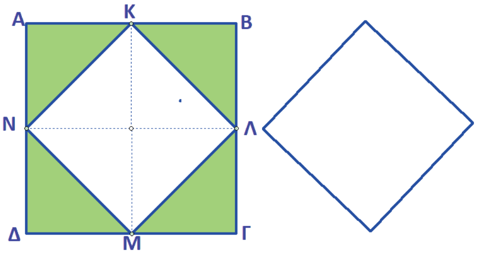
Τα παιδιά είπαν ότι πρέπει να διπλασιάσουν την πλευρά του τετραγώνου. Αλλά μετά κατάλαβαν ότι το εμβαδόν από το νέο τετράγωνο τότε **δεν** θα είναι διπλάσιο αλλά, τι θα είναι;

………………………………………………………………….

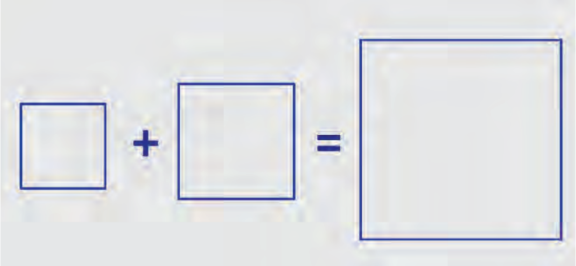


Και τότε πήρε χαρτί και μολύβια και ζωγράφισε τη λύση.

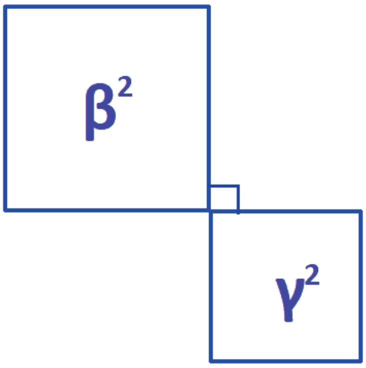
Εσείς; Τη βρήκατε;



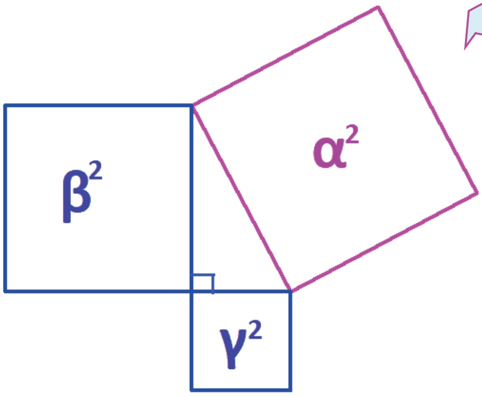
Ποια σχέση έχει το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου με το μικρότερο; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί **το μεγάλο τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι το άθροισμα από δύο ίδια τετράγωνα** με το ΚΛΜΝ;



Την άλλη μέρα η Λίνα πήγε στο σχολείο χαρούμενη που είχε βρει τη λύση. Τότε ο δάσκαλος τους είπε ότι αυτό μπορούμε να το κάνουμε και με διαφορετικά τετράγωνα.



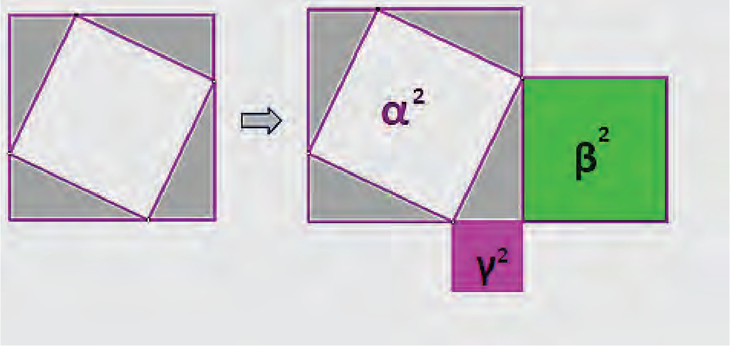
Μπορούμε δηλαδή να προσθέσουμε δύο τετράγωνα (γεωμετρικά) και να φτιάξουμε ένα νέο τετράγωνο που το εμβαδόν του θα είναι ίσο με το άθροισμα από τα δύο άλλα. Αρκεί να τοποθετήσουμε τα τετράγωνα έτσι, ώστε να είναι σε ορθή γωνία. ***Το τετράγωνο που είναι ίσο με το άθροισμα από τα δύο αρχικά τετράγωνα*** είναι τότε αυτό:



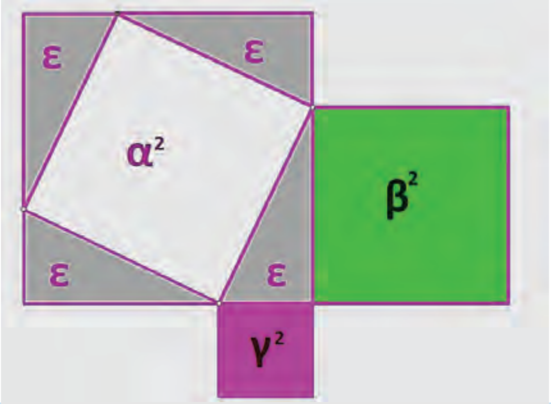
$$\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$$

Γιατί γίνεται αυτό; Ρώτησαν τα παιδιά.

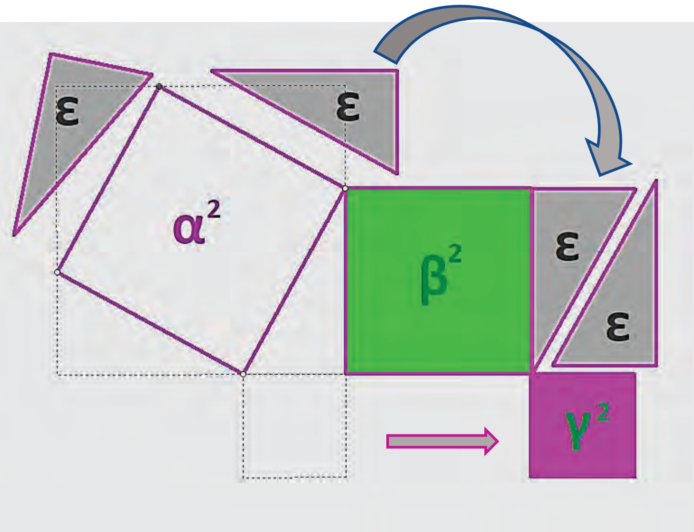
Δείτε γιατί, είπε ο Δάσκαλος. «*Σχεδιάζουμε ένα τετράγωνο μέσα σε ένα άλλο, όχι όμως το μισό. Τότε γύρω από αυτό σχηματίζονται 4 ίδια ορθογώνια τρίγωνα*». Μετά ζωγράφισε άλλα δύο τετράγωνα που βλέπετε στην εικόνα.



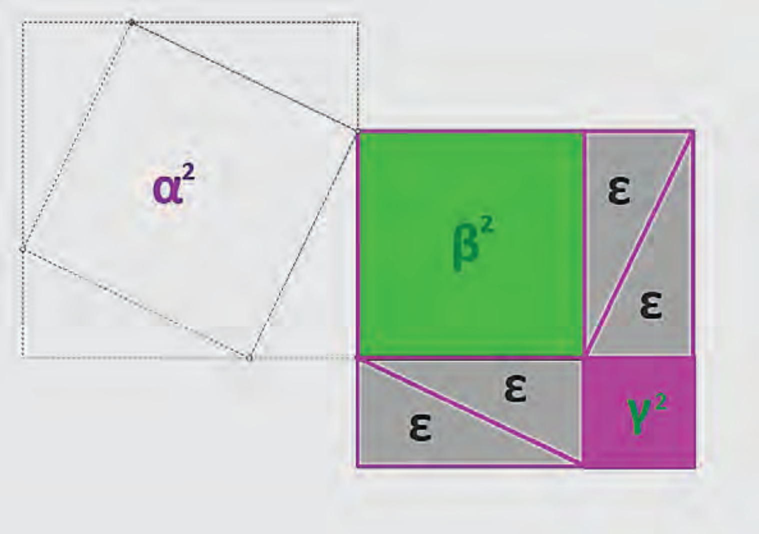
Θα πούμε **ε,** το εμβαδόν από κάθε ορθογώνιο τρίγωνο.Τότε το αρχικό μας τετράγωνο έχει εμβαδόν: **Αρχικό τετράγωνο =** $\alpha^2 + 4\varepsilon$



Μετακινούμε το μικρό τετράγωνο και τα ορθογώνια τρίγωνα, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα



Με τα 4 ορθογώνια τρίγωνα και τα δύο μικρότερα τετράγωνα σχηματίζεται ένα τετράγωνο, ίδιο με το αρχικό.



Είναι φανερό ότι:

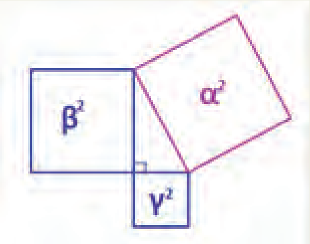
$$\alpha^2 + 4\varepsilon = \beta^2 + \gamma^2 + 4\varepsilon$$

Άρα: $\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$

Αυτό είναι γνωστό σε όλο τον κόσμο με το όνομα: ***Πυθαγόρειο Θεώρημα.*** Το όνομά του είναι από τον σπουδαίο αρχαίο Έλληνα μαθηματικό, τον Πυθαγόρα.

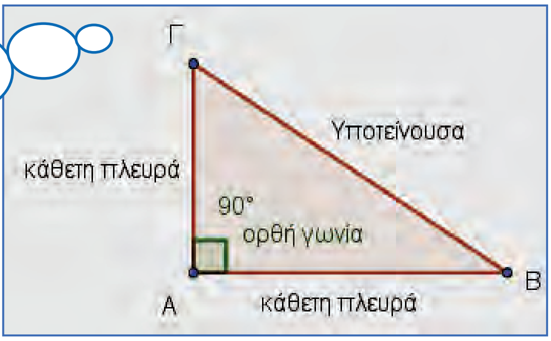
Πυθαγόρειο θεώρημα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο: το άθροισμα των εμβαδών από τα δύο τετράγωνα με πλευρές τις δύο κάθετες πλευρές είναι ίσο με το εμβαδόν από το τετράγωνο που έχει πλευρά την υποτείνουσα.



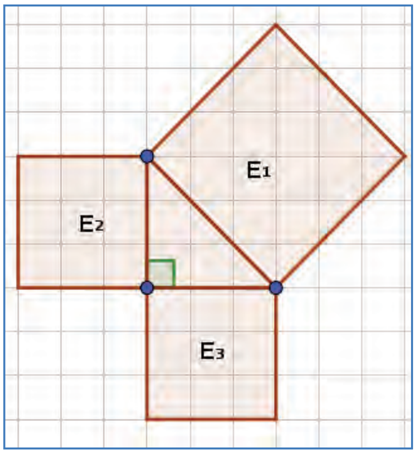
$\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$

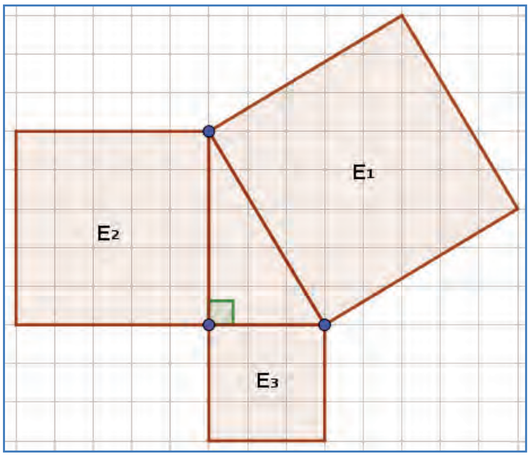
Θυμόμαστε: *Ένα ορθογώνιο τρίγωνο, έχει μία γωνία ορθή (90^o). Η πλευρά που είναι απέναντι από την ορθή γωνία, ονομάζεται* ***υποτείνουσα****. Οι άλλες δύο ονομάζονται* ***κάθετες πλευρές***



3.2 Ασκήσεις *(εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα)*

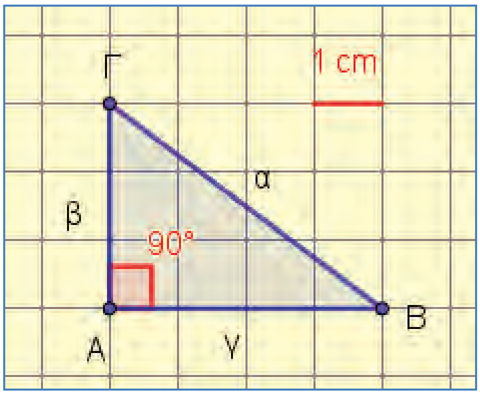
3.2.Α) Βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου E_1 σε κάθε περίπτωση:





3.2.Β) Θα εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα για να βρούμε την πλευρά α του διπλανού τριγώνου (το πλέγμα έχει απόσταση 1 cm). Από το πυθαγόρειο θεώρημα ξέρουμε ότι $α^2=β^2+γ^2$ άρα $α^2=3^2+4^2$. Βρείτε το α. Ξέρουμε ότι το α είναι θετικός αριθμός αφού είναι το μήκος ενός τμήματος.

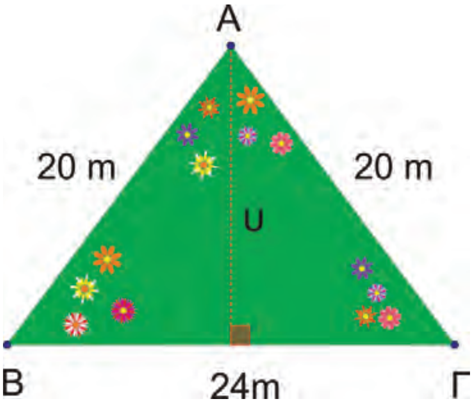
Άρα α=______ __

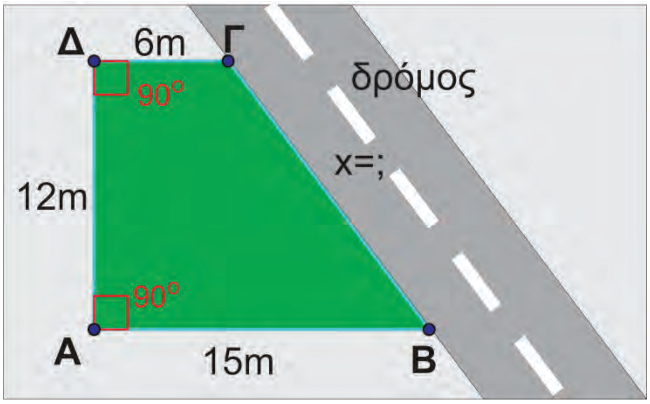


3.3 Ασκήσεις *(επίλυση προβλημάτων)*

3.3.Α) Η Μπαράν έχει ένα κήπο που είναι ισοσκελές τρίγωνο.

Θέλει να βρει το εμβαδόν του. Μπορείτε να τη βοηθήσετε;





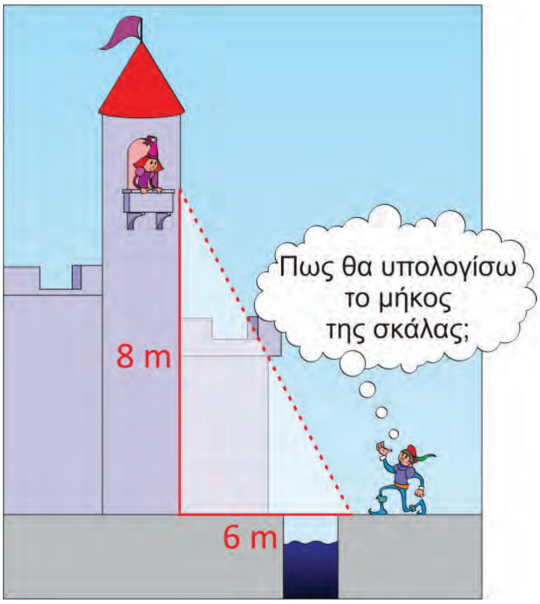
3.3.Β) Ο Δημοσθένης έχει ένα οικόπεδο. Το σχήμα του είναι στην διπλανή εικόνα.

Τι σχήμα έχει το οικόπεδο;

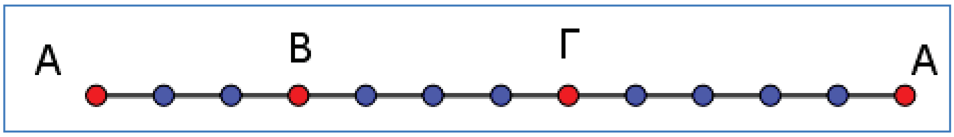
Ποιο είναι το εμβαδόν που έχει το οικόπεδο;

Ο Δημοσθένης θέλει να βρει την απόσταση ΒΓ που «βλέπει» στο δρόμο. Μπορείτε να τον βοηθήσετε;

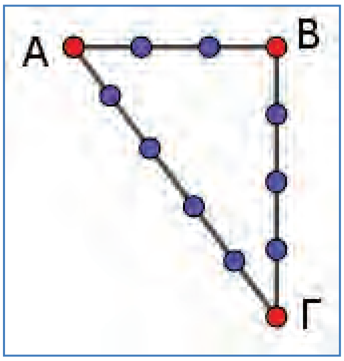
3.3.Γ) Ο Ρωμαίος θέλει να υπολογίσει το μήκος της σκάλας για να ανεβεί στην αγαπημένη του Ιουλιέττα. Πόσα μέτρα σκάλα θα χρειαστεί;



3.4 Διερεύνηση *(το αντίστροφο του πυθαγόρειου θεωρήματος)*



3.4.Α) Στην αρχαία Αίγυπτο, για να φτιάξουν μία ορθή γωνία χρησιμοποιούσαν ένα σκοινί που είχε 13 κόμπους. Τα διαστήματα ανάμεσα στους κόμπους ήταν ίσα.



Δίπλωναν το σκοινί στα σημεία Β και Γ και ένωναν τα δύο άκρα του. Το σκοινί ήταν τεντωμένο.

Παρατηρούμε ότι $3^2+4^2=9+16=25$ και $5^2=25$.

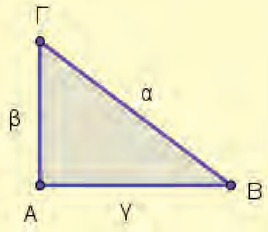
Με αυτό τον τρόπο η γωνία Β ήταν πάντα ορθή.

Δηλαδή, ισχύει και το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος.

Θυμάμαι

Αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος: Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που είναι απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

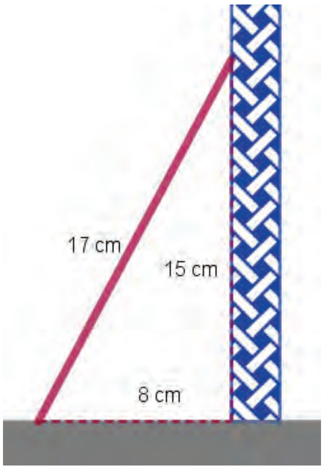
Δηλαδή, αν $α^2=β^2+γ^2$, τότε $\widehat{A}=90^o$.



3.4.Β) Ο Πέτρος έφτιαξε μία στήλη και θέλει να είναι κατακόρυφη (κάθετη στην οριζόντια).

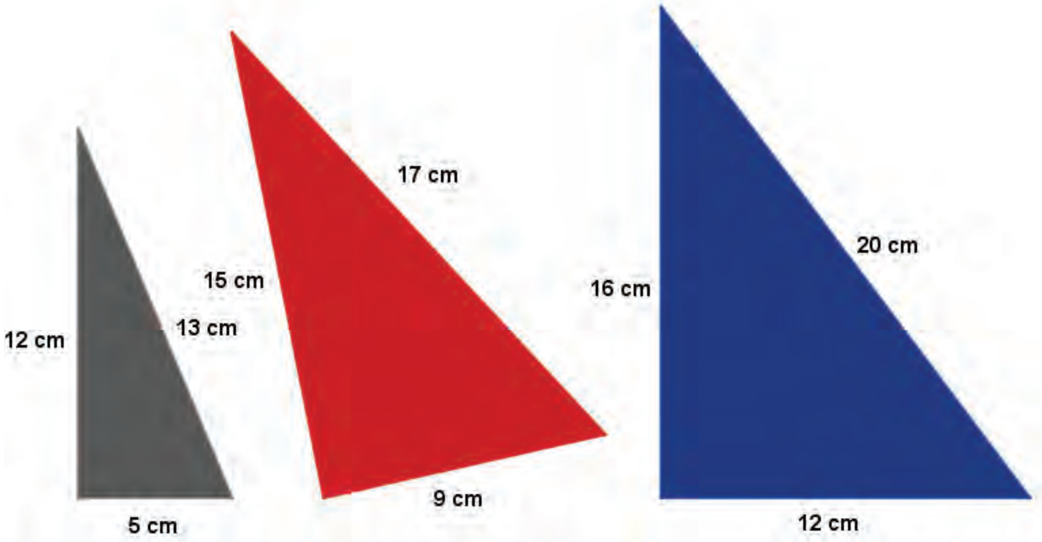
Έβαλε το κόκκινο στήριγμα όπως στην εικόνα.

Είναι κατακόρυφη η στήλη;



3.4.Γ) Ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να φτιάξουν με χαρτόνι ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Είναι ορθογώνια τα τρίγωνα που έφτιαξαν οι μαθητές;



Οι λέξεις που έμαθα

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που έμαθες.

……

……

……

……

Γράψε τις μαθηματικές λέξεις που έμαθες.

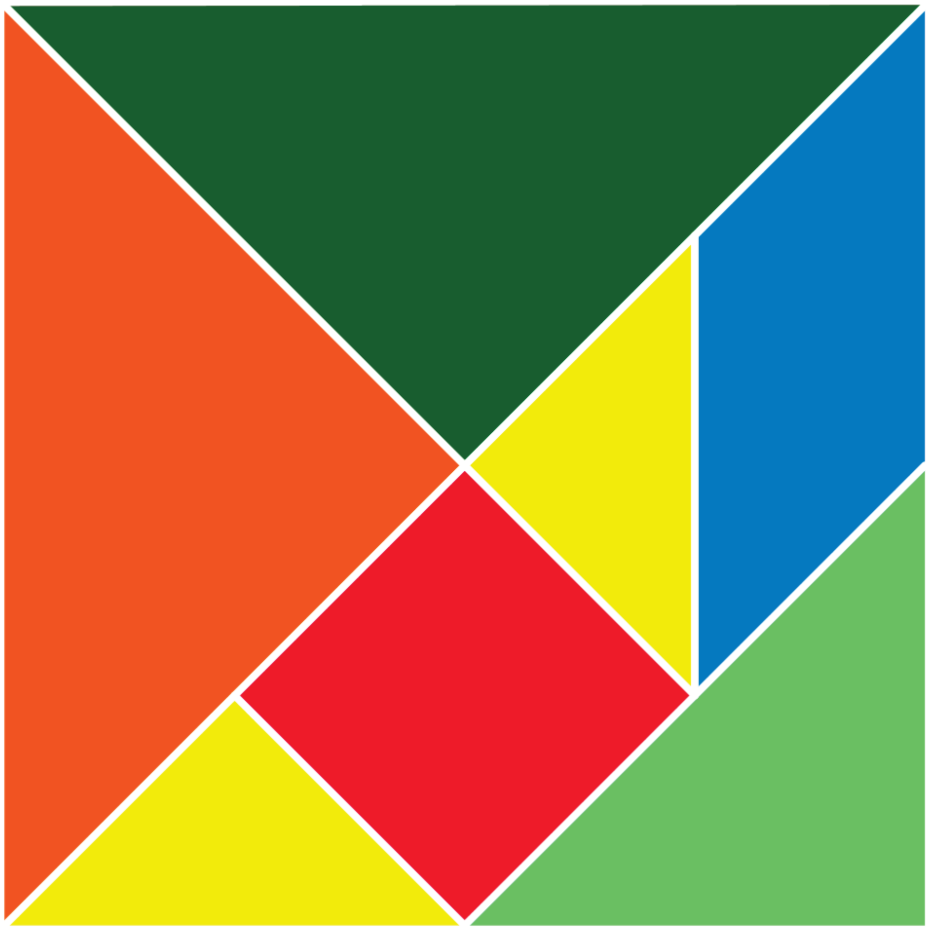
……

……

……

……

ΤΑΝΓΚΡΑΜ



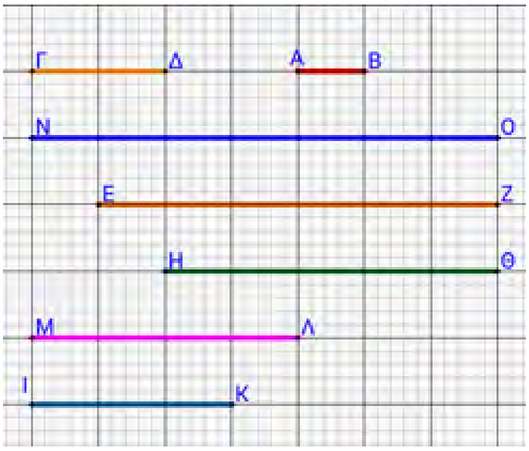
Ενότητα Β4

Αναλογίες – Ομοιότητα

1. Αναλογίες

<u>Δραστηριότητα 1.1</u> *(Ο λόγος ως έκφραση της σχέσης δύο ευθυγράμμων τμημάτων)*

Για να *μετρήσουμε* ένα μήκος, το συγκρίνουμε με κάποιο άλλο μικρότερο μήκος.



Στη διπλανή εικόνα υπάρχουν επτά ευθύγραμμα τμήματα. Ποιο διαλέγετε για ***μονάδα μέτρησης;***……………………………………

- Τα τμήματα ΑΒ και ΜΛ είναι: α. **ίσα** β. **άνισα** (επέλεξε το σωστό)

Δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν πάντα μία σχέση μεταξύ τους.

Αν δύο τμήματα <u>δεν είναι</u> ίσα θέλουμε να ξέρουμε *πόσο μεγαλύτερο είναι το ένα από το άλλο.*
Πόσο μεγαλύτερο ακριβώς είναι το ΜΛ από το ΓΔ; ……………………………………………
(μπορούμε να απαντήσουμε με δύο τρόπους)

- Ο ένας τρόπος είναι να περιγράψω τη **διαφορά τους.** Να πω για παράδειγμα:
  Τα τμήματα ΜΛ και ΓΔ **διαφέρουν κατά ……………………………………………**
- Ο άλλος τρόπος είναι να περιγράψω **πόσες φορές μεγαλύτερο** είναι το ένα από το άλλο. Για παράδειγμα:
  Τα ΜΛ είναι ……………………………………………… από το ΓΔ.

Συνήθως περιγράφουμε τη σχέση δύο τμημάτων με το δεύτερο τρόπο. Μπορείς να σκεφτείς γιατί; (Συζήτησε με την ομάδα σου και τον καθηγητή)

Τη ***σχέση*** που έχουν δύο ευθύγραμμα τμήματα μας την δείχνει ο ***λόγος* τους.** ***Όταν ο λόγος είναι ένας ρητός αριθμός*** μας λέει πόσες φορές μεγαλύτερο ή πόσες φορές μικρότερο <u>ακριβώς</u> είναι το ένα από το άλλο.

Για παράδειγμα:

- *Στην κοινή γλώσσα* λέμε ότι: ***το τμήμα ΓΔ είναι διπλάσιο από το ΑΒ.***
- *Στη μαθηματική γλώσσα* λέμε ότι: ***ο λόγος ΓΔ προς ΑΒ είναι 2 και γράφουμε*** $\frac{\Gamma\Delta}{AB}=2$.
- Λέμε ότι το ***ΙΚ είναι τα τρία τέταρτα του ΜΛ*** και τότε γράφουμε $\frac{IK}{M\Lambda}=\frac{3}{4}$.

Μπορείς κι εσύ να περιγράψεις **τη σχέση** που έχουν τα παρακάτω ευθύγραμμα τμήματα και να γράψεις τους λόγους τους;

❖ Το ΓΔ είναι ………………………………………………… του ΝΟ, δηλαδή $\frac{\Gamma\Delta}{NO}=$

❖ Το ΜΛ είναι ………………………………………………… του ΗΘ, δηλαδή $\frac{M\Lambda}{H\Theta}=$

❖ Το ΕΖ είναι ………………………………………………… του ΙΚ, δηλαδή $\frac{EZ}{IK}=$

❖ Το ΜΛ είναι ………………………………………………… του ΑΒ, δηλαδή $\frac{M\Lambda}{AB}=$

Δραστηριότητα 1.2 *(Αναγνώριση και αποτύπωση της σχέσης από τα μήκη των ράβδων)*

Στη διπλανή εικόνα βλέπετε ξυλάκια με 10 διαφορετικά χρώματα και μήκη. Μπορείτε να βρείτε με την ομάδα σας τη σχέση που έχουν μεταξύ τους τα διαφορετικά μήκη; Εξηγήστε τον τρόπο με τον οποίο σκεφτήκατε.

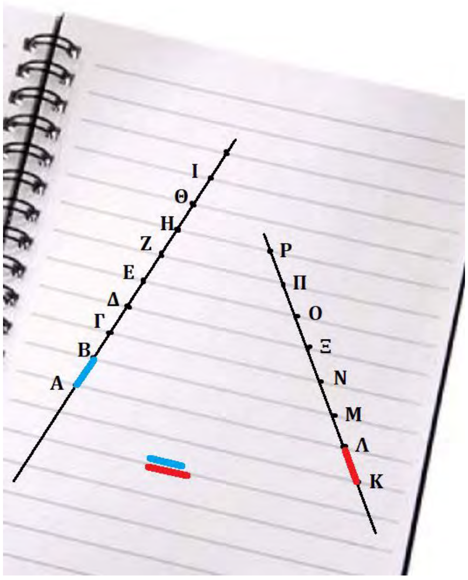
Δραστηριότητα 1.3 *(Το νόημα της αναλογίας)*

Ο Ιβάν μια μέρα σχεδίαζε ευθείες στο τετράδιό του. Πρόσεξε ότι οι **γραμμές του τετραδίου** τις «κόβουν» **σε ίσα τμήματα.** Τότε, ρώτησε τον καθηγητή γιατί συμβαίνει αυτό.

«Αυτό συμβαίνει επειδή οι παράλληλες ευθείες του τετραδίου έχουν την ίδια απόσταση μεταξύ τους»

Ο καθηγητής μετά, σχεδίασε μερικά σημεία πάνω στις ευθείες και ρώτησε τον Ιβάν:

«ποιος είναι ο λόγος $\frac{A\Gamma}{A\Delta}$ ***;»***



-«*Εύκολο!*», είπε ο Ιβάν. «*Ο λόγος είναι* $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΔ}}=\frac{2}{3}$ ».

- «***Μπορείς να βρεις κι άλλους λόγους τμημάτων που να είναι ίσοι με αυτόν;***»

Ο Ιβάν βρήκε αρκετούς. Εσύ; Μπορείς να βρεις μερικούς;

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Μία παρεξήγηση

Ένας από τους λόγους που βρήκε ο Ιβάν ήταν ο λόγος $\frac{\text{ΚΜ}}{\text{ΚΝ}}=\frac{2}{3}$.

Τότε ο Φαρούκ είπε: «*Α! κοιτάξτε τι σκέφτηκα. Αφού οι δύο λόγοι* $\frac{\text{ΚΜ}}{\text{ΚΝ}}, \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΔ}}$ *είναι ίσοι, άρα είναι ίσα και τα τμήματα. Δηλαδή ΚΜ = ΑΓ = 2 και ΑΔ = ΚΝ =3*»

Όμως ο δάσκαλος του είπε ότι αυτό δεν ήταν σωστό! Μπορείτε να βρείτε με την ομάδα σας **τι δεν σκέφτηκε σωστά ο Φαρούκ;**

Σκέψου:

Το μήκος του ΑΓ είναι ……. με μονάδα μέτρησης το ………..

Το μήκος του ΚΜ είναι …… με μονάδα μέτρησης το …………

Οι δύο μονάδες μέτρησης είναι **α.** ίδιες **β.** διαφορετικές (επέλεξε το σωστό)

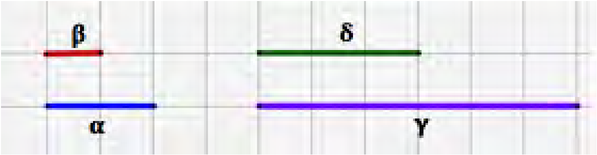
Επομένως τα δύο τμήματα είναι **α**. ίσα **β**. άνισα

Μαθαίνω

Η ισότητα δύο λόγων λέγεται **αναλογία.**

Λέμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα **α, β είναι ανάλογα προς τα γ, δ** όταν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$

Όταν δύο ευθύγραμμα τμήματα α, β είναι ανάλογα με δύο άλλα γ, δ σημαίνει ότι έχουν **τον ίδιο λόγο. Δηλαδή τα α και β έχουν μεταξύ τους ακριβώς την ίδια σχέση που έχουν μεταξύ τους τα γ και δ.**



Αν για παράδειγμα το α είναι διπλάσιο του β, τότε και το γ θα είναι διπλάσιο του δ. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι είναι ίσα μεταξύ τους.

Το 2 είναι διπλάσιο του 1 και το 6 είναι διπλάσιο του 3

Επομένως ισχύει $\frac{2}{1}=\frac{6}{3}$ όμως $2 \neq 6 \quad \kappa\alpha\iota \quad 1 \neq 3$

Δραστηριότητα 1.4 *(Σύνδεση με την πραγματικότητα και την απεικόνισή της στη ζωγραφική)*

Παρατήρησε τη διπλανή εικόνα.

α. Σύγκρινε το ύψος του δέντρου με το ύψος του ανθρώπου.

β. Σύγκρινε το ύψος των ανθρώπων με το ύψος του στάβλου.

γ. Σύγκρινε το ύψος των προβάτων με το ύψος των ανθρώπων.

Σου φαίνεται να μοιάζουν με την πραγματικότητα;

Τοιχογραφία του **Giotto** 14ος αι. – **Μεσαίωνας** (C.E. 14th –Middle Age)

Παρατήρησε τώρα τη δεύτερη εικόνα.

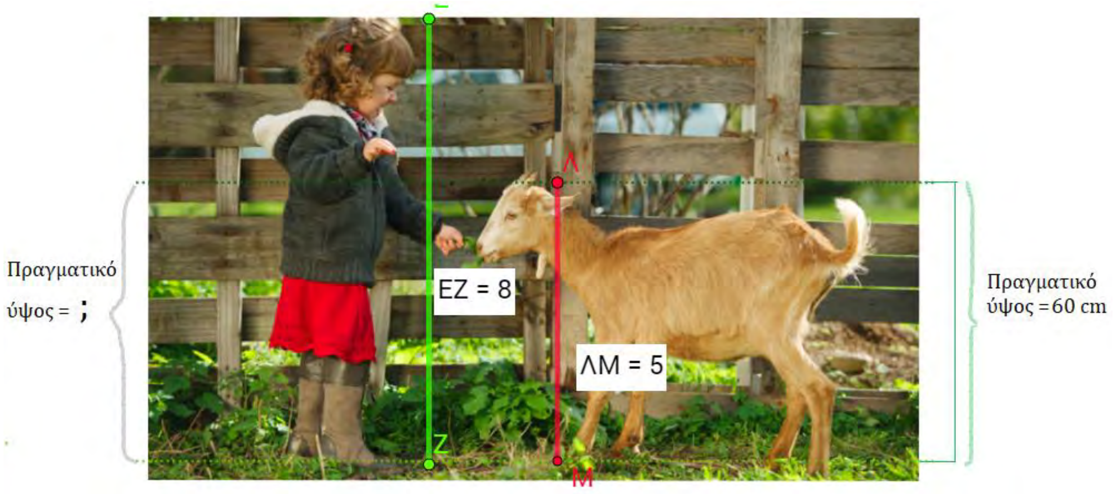
Οι σχέσεις που έχουν τα ύψη (δηλαδή οι λόγοι τους) σου φαίνεται να μοιάζουν περισσότερο στην πραγματικότητα;
Είναι δηλαδή σε αναλογία με τα πραγματικά ύψη;

Στις φωτογραφίες και στη ρεαλιστική ζωγραφική *οι διαστάσεις (μήκος, πλάτος, ύψος)* των αντικειμένων είναι ***ανάλογες*** με τις πραγματικές διαστάσεις.

Πίνακας (oil painting) του **Filippino Lippi.** Ιταλός ζωγράφος της **Αναγέννησης** (1496-1504 C.E.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δες την παρακάτω φωτογραφία. Γνωρίζουμε ότι το ύψος από το κατσικάκι είναι 60cm. Μπορούμε να βρούμε το ύψος από το κοριτσάκι με τη βοήθεια της φωτογραφίας;



Τα πραγματικά ύψη έχουν τον ίδιο λόγο με το λόγο από τα ύψη στη φωτογραφία[1].

Ισχύει επομένως η ***αναλογία***:

$$\frac{x\,\cancel{cm}}{60\,\cancel{cm}}=\frac{8\,\cancel{\mu}}{5\,\cancel{\mu}}$$

$$5\cdot x=8\cdot 60$$

$$5x=480$$

$$x=\frac{480}{5}\quad \acute{\alpha}\rho\alpha$$

$$x=96\ cm$$

$\boldsymbol{\mu}$: *μονάδες μήκους*

Ιδιότητες Αναλογιών

$$\alpha\nu\ \ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \alpha\delta=\beta\gamma$$

$$\varepsilon\acute{\alpha}\nu\ \ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\ \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$$

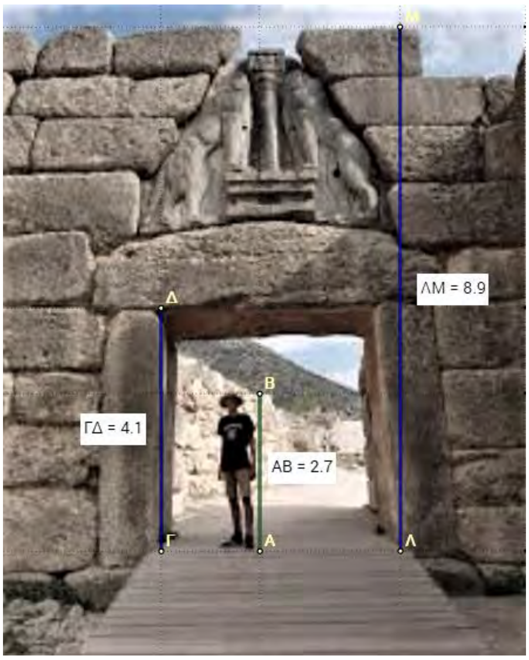
---

[1] Ο υπολογισμός γίνεται κατά προσέγγιση και μόνον όταν τα αντικείμενα βρίσκονται δίπλα - δίπλα (δηλαδή στο ίδιο επίπεδο βάθους της εικόνας).

Δραστηριότητα 1.5 *(Από τις αναλογίες μιας φωτογραφίας, στις πραγματικές διαστάσεις των αντικειμένων)*

Ο Χαλίλ ταξιδεύει συχνά και βγάζει φωτογραφίες από τα μέρη που επισκέπτεται. Η φωτογραφία που βλέπεις είναι από την Πελοπόννησο και δείχνει την ***Πύλη*[2] *των Λεόντων*** *στις Μυκήνες*. Η Πύλη των Λεόντων είναι ένα πέτρινο μνημείο που μπορεί να συγκριθεί με τις *πύλες της Χεττικής πόλης Χαττούσα*[3], στη Μικρά Ασία.

Το ύψος του Χαλίλ είναι 1,90m. Χρησιμοποίησε το πραγματικό ύψος του Χαλίλ και τους λόγους από τα ύψη στη φωτογραφία για να βρεις:



α. το ύψος του μνημείου ΛΜ

β. το ύψος της πύλης ΓΔ

	Χαλίλ	Πύλη	Μνημείο
Ύψος στην εικόνα			
	h	x	y
Πραγματικό ύψος			

Οι καινούριες μου λέξεις

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που συνάντησες σε αυτή την ενότητα.
………
………

Γράψε τις καινούριες μαθηματικές λέξεις που συνάντησες.
………
………
………

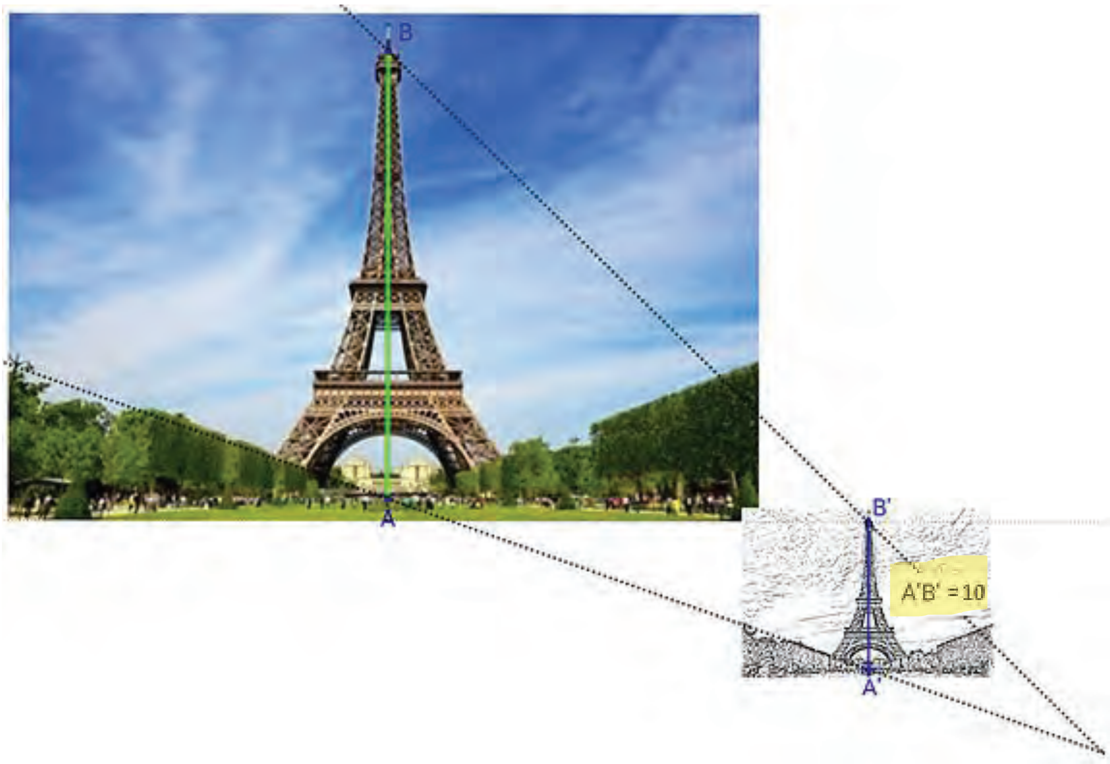
---

[2] Πύλη = μεγάλη πόρτα

3 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lion_Gate,_Hattusa_01.jpg

Δραστηριότητα 1.6 *(Η σημασία της κοινής μονάδας μέτρησης στο λόγο)*

Η Μαριάμ είναι πολύ καλή στη ζωγραφική. Στο Παρίσι, έκανε ένα πρόχειρο σκίτσο[4] από τον πύργο του Άιφελ *(το ασπρόμαυρο σχέδιο)*. Ο μικρός της αδελφός, ο Φαρούκ, εντυπωσιάστηκε από την κατασκευή. Έψαξε στο διαδίκτυο και βρήκε πληροφορίες για το μνημείο. Βρήκε ότι κατασκευάστηκε από τον μηχανικό Γουστάβο Άιφελ το 1889 και έχει ύψος **300 μέτρα** (χωρίς την κεραία). Τότε η Μαριάμ τον ρώτησε: «*δηλαδή, πόσες φορές είναι μεγαλύτερο, από* ***τον πύργο στο σχέδιό μου*****»;**



Ο Φαρούκ είχε μάθει στο σχολείο ότι: «***Ο λόγος από δύο ευθύγραμμα τμήματα μας λέει, πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το ένα σε σύγκριση με το άλλο.»***

Μέτρησε το ύψος από το άγαλμα στο σκίτσο και βρήκε ότι ήταν **10cm**. Βρήκε τότε το λόγο $\frac{\text{πραγματικό ύψος}}{\text{ύψος στο σχέδιο}} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{300\ m}{10\ cm} = 30$.

Λέει στην αδελφή του: «*Το βρήκα! Είναι 30 φορές ψηλότερο! Μετά όμως σκέφτηκε πως αυτό που βρήκε δεν είναι λογικό!*» **Γιατί;**

- Σκέψου: Τι ύψος θα έπρεπε να έχει το άγαλμα εάν ήταν 30 φορές μόνο μεγαλύτερο από αυτό στο σκίτσο που ήταν 10cm;

- **Τι δεν υπολόγισε σωστά ο Φαρούκ;**

---

[4] Σκίτσο = σχέδιο (συνήθως με μολύβι)

Θυμήσου ότι:

> **Ο λόγος από δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ένας αριθμός που μας λέει** *πόσες φορές ακριβώς είναι μεγαλύτερο* το ένα σε σύγκριση με το άλλο.

Μπορείς να υπολογίσεις τώρα σωστά, πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το πραγματικό ύψος από το ύψος στο σχέδιο;

Υπολόγισε: *πραγματικό ύψος* = 300m = ... cm

Ύψος στο σχέδιο = ...

Άρα:
....
....
....

2. Η κλίμακα

Σε ένα σχέδιο ή σε ένα χάρτη, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ***ποια είναι στην πραγματικότητα η απόσταση που βλέπουμε στο χάρτη*** ή στο σχέδιο. Αυτό το λέμε ***κλίμακα του χάρτη***.

Ο λόγος (*απόσταση στο χάρτη*): (πραγματική απόσταση) λέγεται **κλίμακα.**

Στο προηγούμενο παράδειγμα επομένως η κλίμακα του σχεδίου θα ήταν:

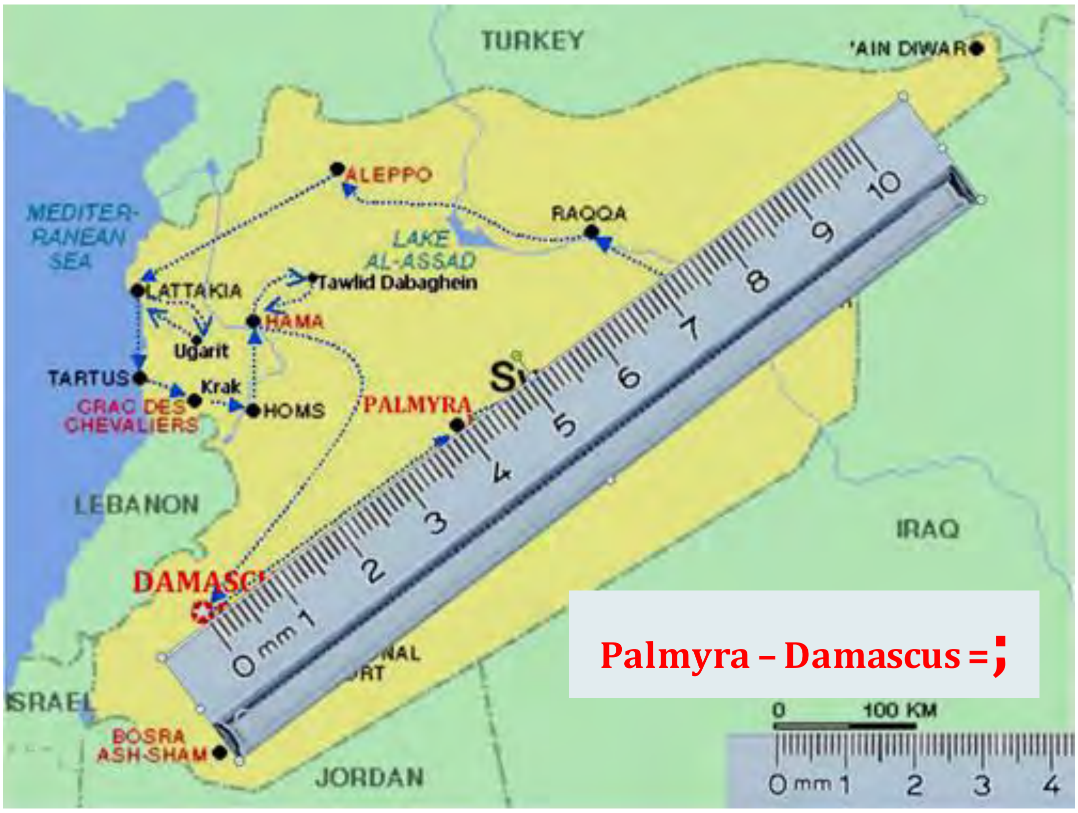
$$Κλίμακα = \frac{ύψος\ \ στο\ \ σχέδιο}{πραγματικό\ \ ύψος} = \frac{10\ cm}{300\,m} = \frac{10\ \cancel{cm}}{30000\ \cancel{cm}}$$

$$= \frac{1}{3000} = 1:3000$$

Κλίμακα 1:3000 σημαίνει ότι το 1cm στον χάρτη αντιστοιχεί σε 3000cm ή 30m στην πραγματικότητα.

Η κλίμακα στο χάρτη, μας βοηθάει να βρούμε τις αποστάσεις στην πραγματικότητα. Κάποιοι χάρτες μας λένε την κλίμακα με μία εικόνα, όπως στο παρακάτω παράδειγμα.

Δραστηριότητα 2.1 *(Η σημασία της κλίμακας σε ένα χάρτη)*



Palmyra – Damascus =;

Τι μας λέει η κλίμακα από αυτόν τον χάρτη;

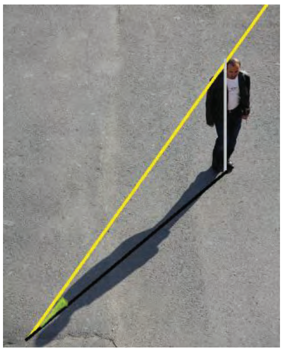
Ότι κάθε απόσταση που είναι ίση με 2cm αντιστοιχεί σε 100km. Μπορείς να βρεις την πραγματική απόσταση Παλμύρα-Δαμασκός;

Απόσταση στο χάρτη	2 cm	4 cm
Πραγματική απόσταση	100 km	x

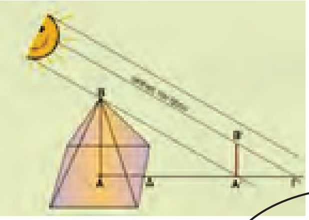
Μπορείς να βρεις την κλίμακα από τον χάρτη στην αριθμητική της μορφή; (δηλαδή 1: 1000, 1:1000000 κ.λπ)

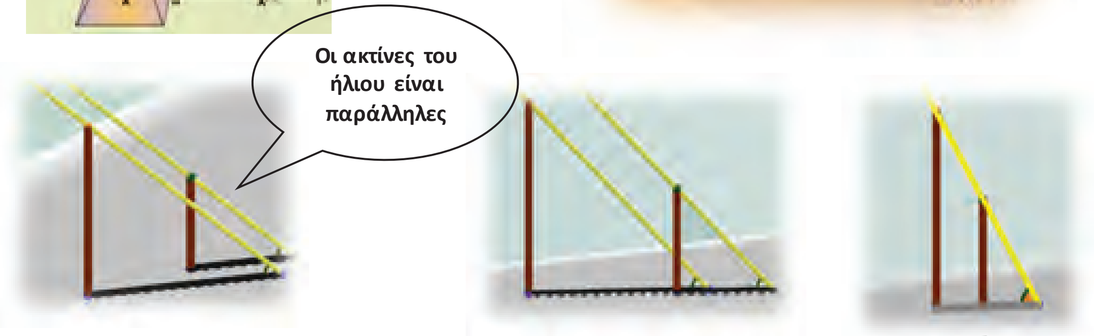
Κλίμακα χάρτη: $\frac{\quad cm}{\quad km} = \frac{\qquad\qquad cm}{\qquad\qquad cm} = \frac{1}{\qquad\qquad} = 1:$ __________

3. Το θεώρημα του Θαλή – Φως και σκιά



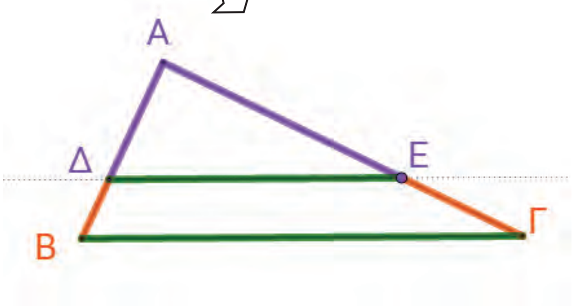
Το φως δημιουργεί σκιές. Λέγεται ότι ο Θαλής[5] ήταν ο πρώτος που **έκανε παρατηρήσεις για τα ύψη και τις σκιές τους.** Παρατήρησε ότι οι σκιές από δύο σώματα είναι ανάλογες με τα ύψη τους. Ο μύθος λέει ότι κατάφερε έτσι να υπολογίσει και το ύψος της πυραμίδας του Χέοπα.





ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ

$$\text{Αν } ΔΕ//ΒΓ, \text{ τότε } \frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$$



Και αντίστροφα:

$$\text{Αν } \frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}, \text{ τότε } ΔΕ//ΒΓ$$

---

[5] Ο πρώτος φιλόσοφος και μαθηματικός στην ιστορία του Δυτικού Πολιτισμού. Ήταν Έλληνας από την Μίλητο.

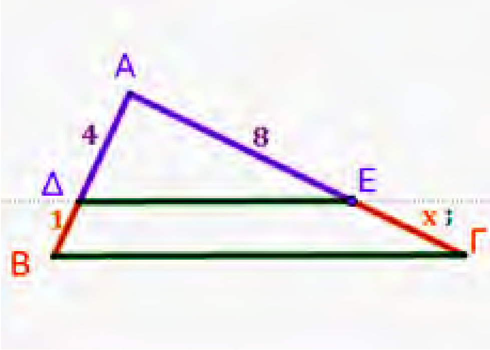
Δραστηριότητα 3.1: Βρίσκω το άγνωστο μήκος

Ισχύει ότι ΔΕ//ΒΓ. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή θα είναι:

$\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \_\_\_\_$ Συμπλήρωσε την αναλογία.

$\_\_\_\_ = \_\_\_\_$ Αντικατέστησε τις τιμές.

Λύσε την εξίσωση.



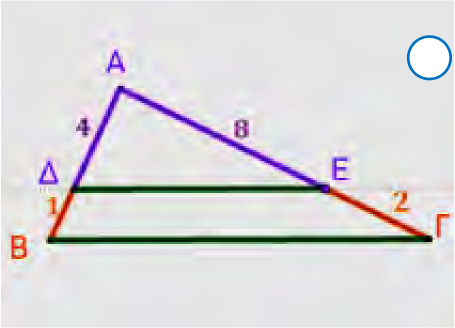
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΘΑΛΗ

Στο παρακάτω σχήμα, υπάρχουν δύο τρίγωνα. Το ΑΔΕ και το ΑΒΓ.

Μία ιδιότητα που έχουν οι αναλογίες μας οδηγεί σε μία επέκταση του θεωρήματος του Θαλή.

Μπορώ να προσθέσω στα δύο μέλη μιας εξίσωσης τον ίδιο αριθμό.

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Θαλή ισχύει:



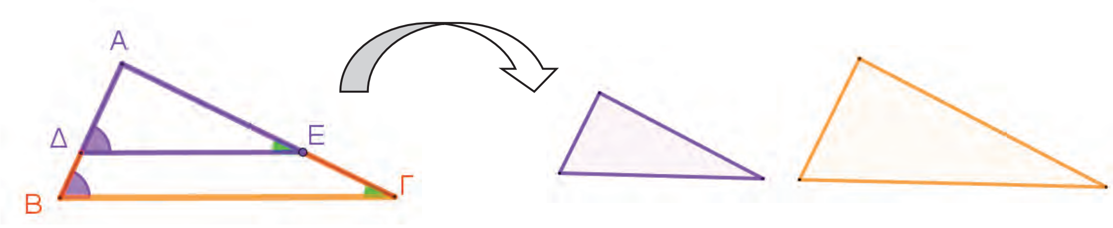
Γεωμετρική μορφή	Αριθμητική μορφή
$\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$	$\frac{4}{1} = \frac{8}{2}$
$\frac{ΔΒ}{ΑΔ} = \frac{ΕΓ}{ΑΕ}$	$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$
$1 + \frac{ΔΒ}{ΑΔ} = 1 + \frac{ΕΓ}{ΑΕ}$	$1 + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{8}$
$\frac{ΑΔ + ΔΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΕ + ΕΓ}{ΑΕ}$	$\frac{4+1}{4} = \frac{8+2}{8}$
$\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΓ}{ΑΕ}$	$\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$
$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$	$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$

Αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν **όλες τις πλευρές ανάλογες,** δηλαδή $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

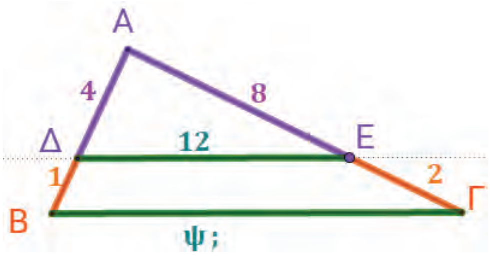
Ακόμη, επειδή **ΔΕ//ΒΓ** θα είναι $\hat{Δ} = \hat{B}$ και $\hat{E} = \hat{Γ}$ (γωνίες εντός-εκτός κι επί τ' αυτά).

Συμπέρασμα

Η παράλληλη στη βάση από ένα τρίγωνο, δημιουργεί δύο τρίγωνα με πλευρές ανάλογες και γωνίες ίσες.



Δραστηριότητα 3.2 *(Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή)*



Άλλη μια παρεξήγηση

Στο διπλανό σχήμα ***το τμήμα ΑΔ είναι τετραπλάσιο από το ΒΔ.*** Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή, το ίδιο συμβαίνει και με τα τμήματα απέναντι. Δηλαδή ***το ΑΕ είναι επίσης τετραπλάσιο από το ΕΓ***. Η Νάντια σκέφτηκε τότε ότι το ίδιο θα συμβαίνει και με τις πλευρές ΔΕ και ΒΓ, δηλαδή η ΒΓ θα πρέπει να είναι τετραπλάσια από τη ΔΕ.

Τότε θα έπρεπε το ΒΓ = 4·12 = 48.

Αλλά αυτό δεν της φάνηκε λογικό! Εσένα πώς σου φαίνεται;

Σκέψου

Το τρίγωνο ΑΒΓ θα είχε τότε μήκη πλευρών:

ΑΒ = 5 ΑΓ= 10 και ΒΓ = 48(;;)

Μπορεί να υπάρχει τρίγωνο με αυτά τα μήκη πλευρών;

<u>Η εξήγηση</u>: όπως είδαμε πριν, τα τμήματα ΑΔ, ΔΒ είναι ανάλογα με τα ΑΕ, ΕΓ αλλά όχι με τις πλευρές ΔΕ και ΒΓ. Ανάλογα όμως με τις πλευρές ΔΕ και ΒΓ είναι οι **ολόκληρες πλευρές ΑΔ, ΑΒ και ΑΕ, ΑΓ.**

Δηλαδή $\boxed{\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ} \neq \frac{ΔΕ}{ΒΓ}}$ και άρα $\cancel{\frac{4}{1} = \frac{12}{ψ}}$

Είναι όμως:

$$\boxed{\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{\mathrm{\Delta E}}{\mathrm{B\Gamma}}}$$

Και άρα:

$$\frac{4}{\underset{5}{4+1}}=\frac{12}{\psi} \qquad 4\psi=60$$

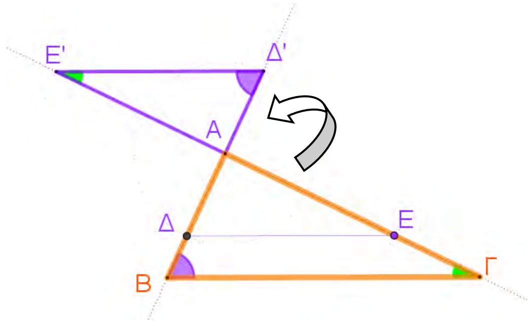
$$\frac{4}{5}=\frac{12}{\psi} \qquad \psi=\frac{60}{4}$$

$$4\psi=12\cdot 5 \qquad \psi=15$$

ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΠΕΚΤΑΣΗ – ΤΟ ΣΧΗΜΑ «ΚΛΕΨΥΔΡΑ»

Στο γνωστό μας σχήμα, σχεδιάζουμε **το συμμετρικό του τριγώνου ΑΔΕ ως προς το Α.** Τότε το νέο σχήμα μοιάζει με μία κλεψύδρα . *Το τρίγωνο ΑΔ’Ε’ , αφού είναι το συμμετρικό του ΑΔΕ, θα είναι ίσο με το ΑΔΕ* κι επομένως ΑΔ=ΑΔ’, ΑΕ’=ΑΕ και Ε’Δ’=ΕΔ. Έτσι η προηγούμενη αναλογία $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{\mathrm{\Delta E}}{\mathrm{B\Gamma}}$ γίνεται:

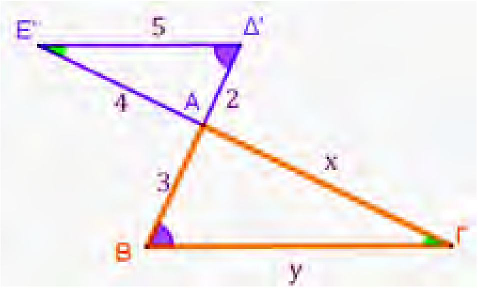
$$\boxed{\frac{\mathrm{A\Delta'}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AE'}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{\mathrm{\Delta'E'}}{\mathrm{B\Gamma}}}$$



Μπορούμε να αποδείξουμε επίσης ότι οι πλευρές Δ’Ε’ και ΔΕ θα είναι παράλληλες.

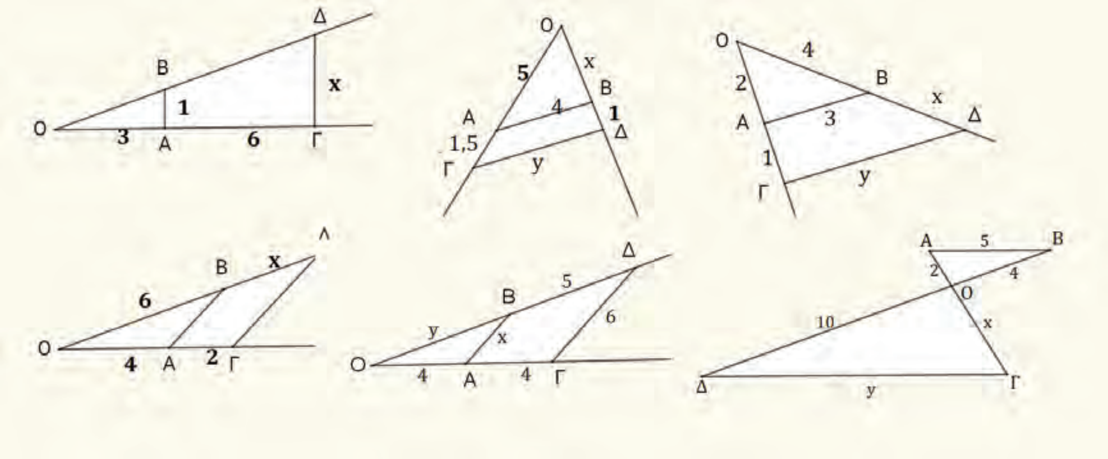
Δραστηριότητα 3.3: *Βρίσκω το άγνωστο μήκος*

Χρησιμοποίησε αυτά που έμαθες για να βρεις τις άγνωστες πλευρές x και y στο διπλανό σχήμα.



Άσκηση 3.4

Στα παρακάτω σχήματα είναι ΑΒ//ΓΔ. Να βρείτε τις πλευρές x και y.



Οι καινούριες μου λέξεις

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που συνάντησες σε αυτή την ενότητα.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Γράψε τις καινούριες μαθηματικές λέξεις που συνάντησες.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4. Μεγαλώνω ένα τρίγωνο – Κρατάω τις αναλογίες

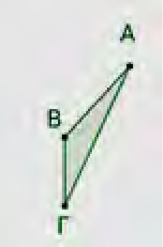
Θέλουμε να **μεγεθύνουμε**[6] ένα τρίγωνο ΑΒΓ κατά **50%.** Δηλαδή οι πλευρές του θέλουμε να μεγαλώσουν κατά 50% . Αυτό σημαίνει ότι η πλευρά ΑΒ θα γίνει:

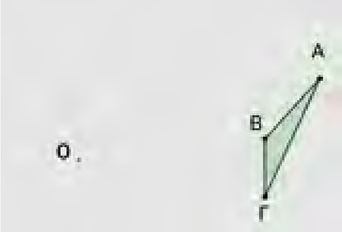
$$\mathrm{A'B'} = (100\% + 50\%)\cdot \mathrm{AB} = 150\%\mathrm{AB} = \frac{150}{100}\cdot \mathrm{AB} = 1{,}5\cdot \mathrm{AB}\cdot$$

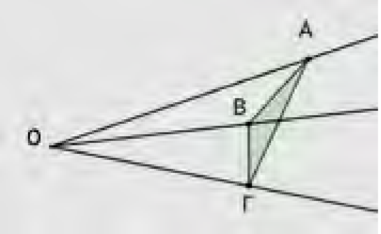
Με τον ίδιο τρόπο,

$$\mathrm{A'\Gamma'} = 1{,}5\cdot \mathrm{A\Gamma} \quad \textit{και} \quad \mathrm{B'\Gamma'} = 1{,}5\cdot \mathrm{B\Gamma}$$

- **Βήμα 1**: Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου Ο, *έξω από το τρίγωνο* και φέρνουμε τις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ.



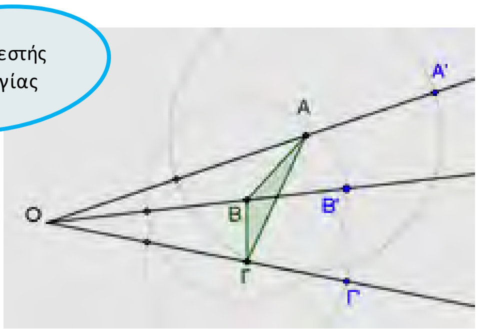




-
- **Βήμα 2:** Πάνω στην ΟΑ παίρνουμε σημείο Α' τέτοιο, ώστε:

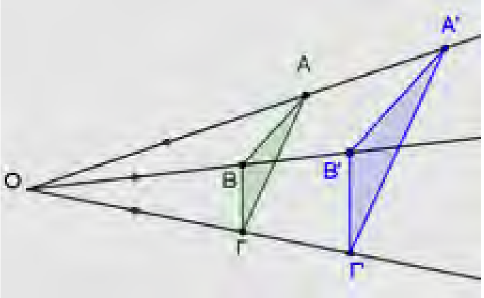
ΟΑ' = 1,5·ΟΑ ή $\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OA}} = \boxed{1{,}5}$

Συντελεστής Αναλογίας



- **Βήμα 3:** Κάνουμε το ίδιο για τα Β και Γ. Δηλαδή, **ΟΒ'=1,5·ΟΒ και ΟΓ'=1,5·ΟΓ**.

- **Βήμα 4:** Σχεδιάζουμε το τρίγωνο Α'Β'Γ'.



Ισχύει $\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{O\Gamma'}}{\mathrm{O\Gamma}} = 1{,}5$ τότε θα είναι υποχρεωτικά και $\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{B'\Gamma'}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{A'\Gamma'}}{\mathrm{A\Gamma}} = 1{,}5$. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

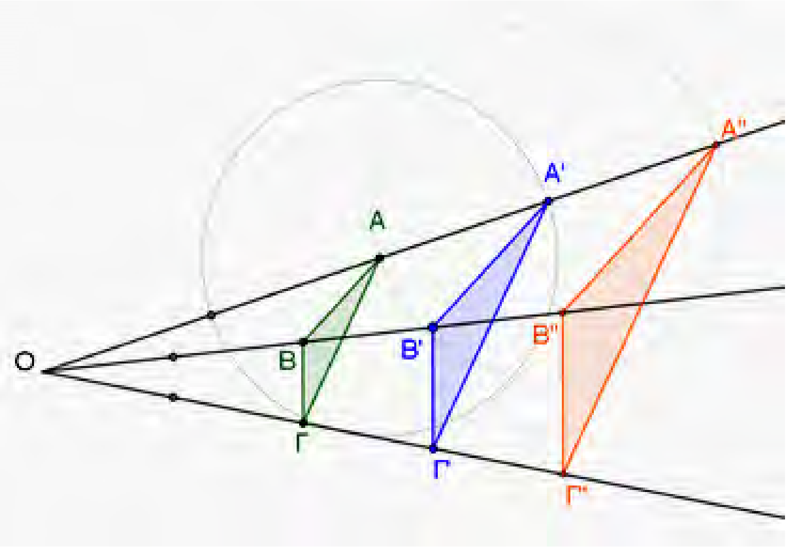
Και έτσι, όλες οι πλευρές θα έχουν μεγαλώσει κατά 50%.

- Μπορείτε να σκεφτείτε τι συμβαίνει με τις γωνίες τους και γιατί;

Αν θέλαμε να διπλασιάσουμε τις πλευρές του ΑΒΓ θα είχαμε πάρει τότε σημείο Α'' τέτοιο, ώστε ΟΑ''=2·ΟΑ, ΟΒ''=2·ΟΒ, ΟΓ''=2·ΟΓ … κ.λπ

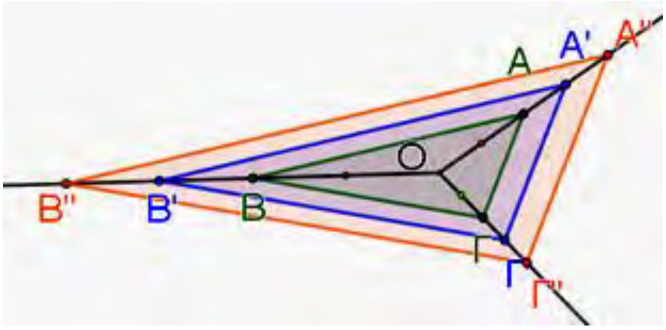
---

[6] Μεγεθύνω = μεγαλώνω, αυξάνω το μέγεθος



Η επιλογή του σημείου Ο

Στο Μιχάλη αρέσει να πειραματίζεται[7]. Σκέφτηκε: *«τι θα γινόταν αν το σημείο Ο ήταν μέσα στο τρίγωνο;»* Η απάντηση είναι ότι μπορούμε να επιλέξουμε όποια θέση θέλουμε για το σημείο Ο. Στη συνέχεια ακολουθούμε ακριβώς τα ίδια βήματα.



Αυτή η διαδικασία[8] ονομάζεται **ομοιοθεσία** και τα σχήματα **ομοιόθετα.** Το σημείο Ο ονομάζεται κέντρο της ομοιοθεσίας.

Μαθαίνω

Τα τρίγωνα που έχουν **3 πλευρές ανάλογες είναι μία μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου και έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες.**

---

[7] Να δοκιμάζει καινούρια πράγματα

[8] Διαδικασία= μέθοδος, μια σειρά πράξεων

Άσκηση 4.1

Σχεδιάστε ένα τρίγωνο ΑΒΓ στο τετράδιό σας και μετά σχεδιάστε τρία ομοιόθετα αυτού με κέντρο ομοιοθεσίας:

α. την κορυφή Α και συντελεστή λ = 2

β. το βαρύκεντρο Κ (σημείο τομής των διαμέσων) και συντελεστή λ = 0,5

γ. ένα σημείο Ο εκτός του τριγώνου και συντελεστή λ = 3

Δραστηριότητα 4.2 *(Σύνδεση με πραγματικές εφαρμογές)*

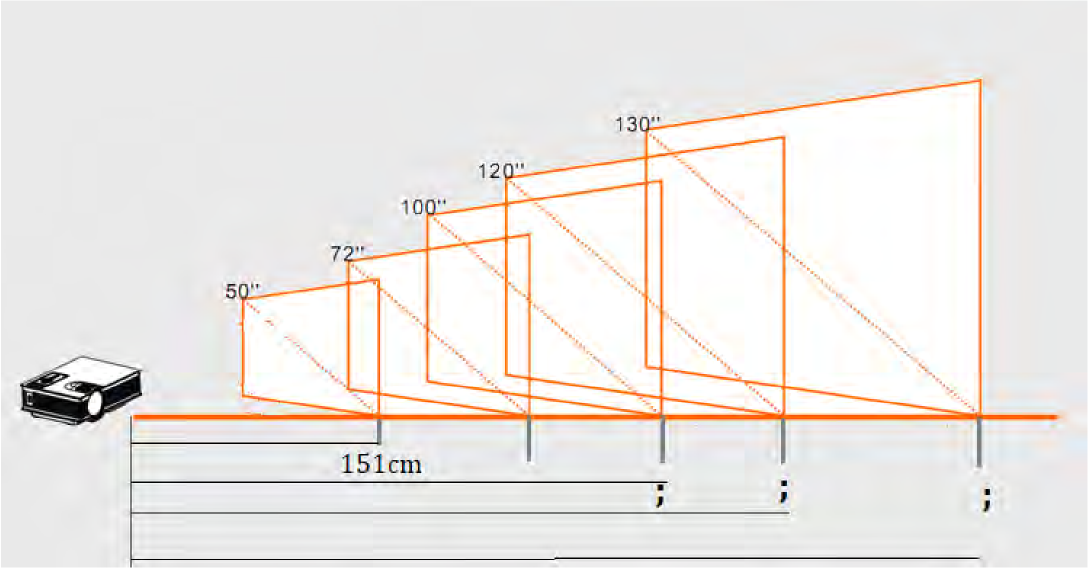
Ένας προτζέκτορας προβάλλει μία εικόνα σε ένα πανί ή τον τοίχο. Για να μεγεθύνουμε την εικόνα, πού πρέπει να τοποθετήσουμε τον προτζέκρορα;

α. πιο μακριά από τον τοίχο; ή

β. πιο κοντά στον τοίχο;

Η Ελένη τοποθέτησε τον προτζέκτορα της τάξης σε απόσταση 151cm από τον τοίχο. Τότε, η διαγώνιος της εικόνας στον τοίχο ήταν 50’’ (inches). Σ**ε ποια απόσταση από τον τοίχο** θα έπρεπε να τον βάλει, ώστε το μέγεθος της διαγωνίου της εικόνας να είναι:

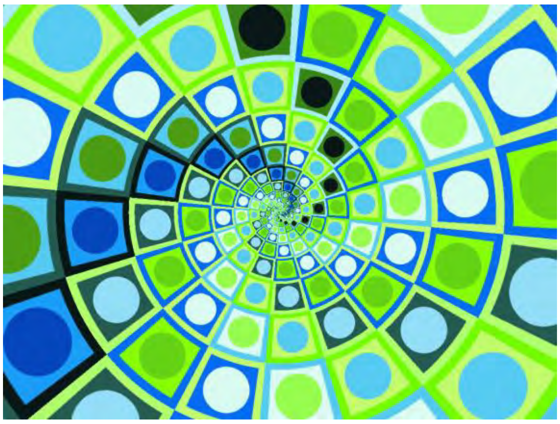
α. 100’’ β. 120’’ γ. 130’’

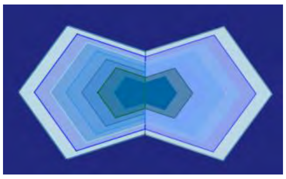


50’’	100’’	120’’	130’’
151cm	x	y	z

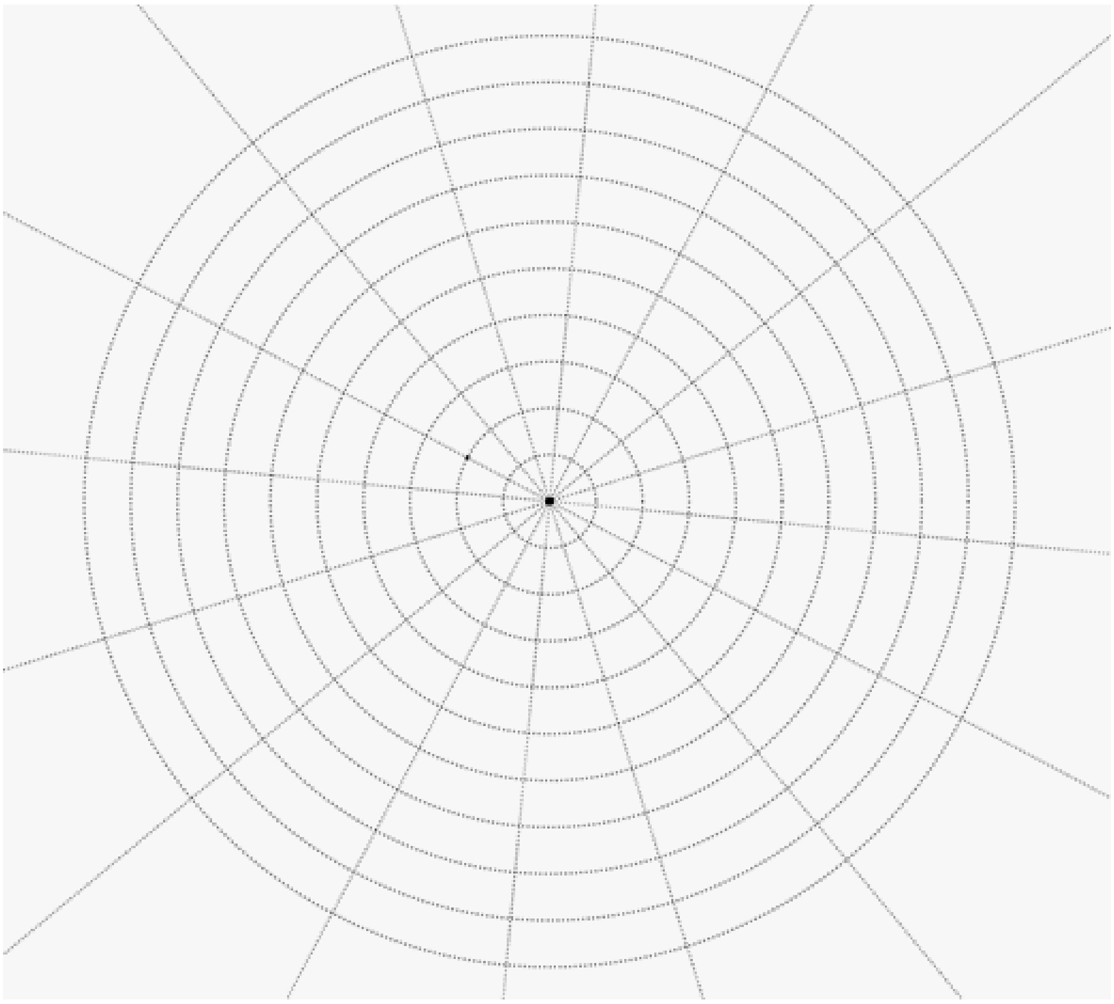
Δραστηριότητα 4.3: Σύνδεση των μαθηματικών με την τέχνη

Α. Ο Ούγγρος ζωγράφος Victor Vasarely ήταν ένας σημαντικός και διάσημος καλλιτέχνης μοντέρνας τέχνης. Στα έργα του χρησιμοποιούσε γεωμετρικά σχήματα.

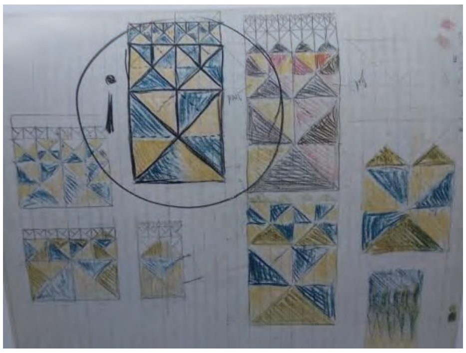


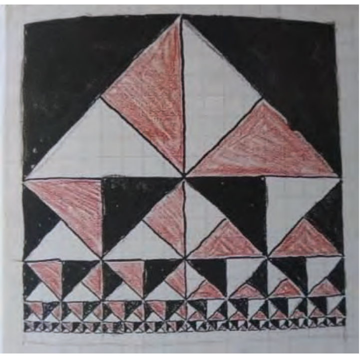


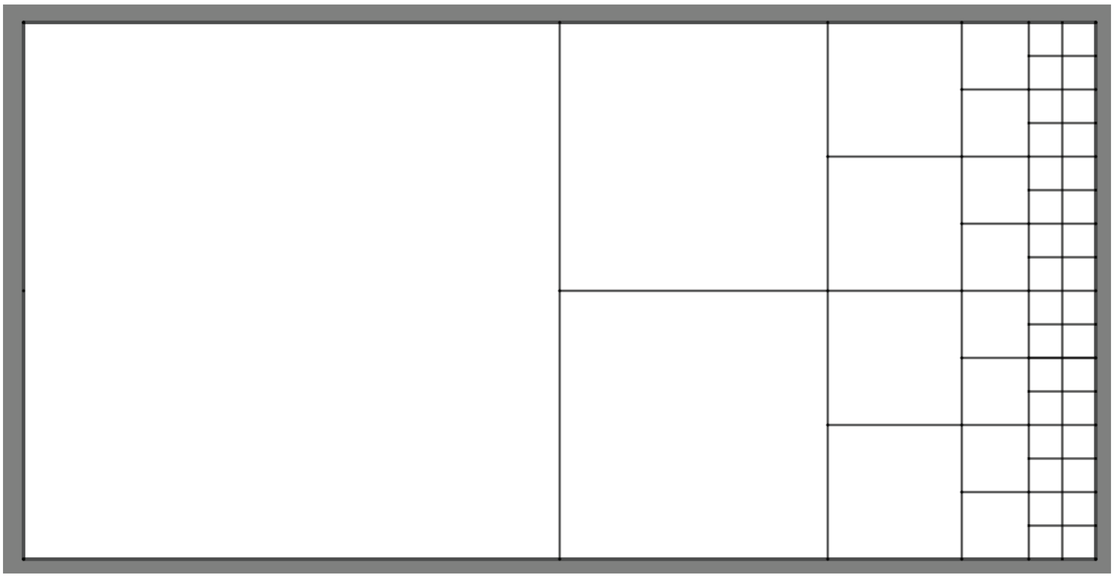
Ένα απλό σχήμα και οι διαδοχικές μεγεθύνσεις του μαζί με χρώμα μπορούν να συνθέσουν ένα έργο. Φτιάξε κι εσύ το δικό σου έργο τέχνης, χρησιμοποιώντας την ομοιοθεσία ενός σχήματος.



Β. Ο Escher ήταν ένας άλλος σπουδαίος καλλιτέχνης, Ολλανδός, που χρησιμοποίησε πάρα πολύ τη συμμετρία και την ομοιοθεσία στα έργα του. Τα σχέδιά του ήταν πολύ όμορφα αλλά και πολύ και σύνθετα. Όμως η αρχική ιδέα ήταν απλή. Για παράδειγμα η αρχική ιδέα του έργου με τις σαύρες ήταν συνεχόμενες μεγεθύνσεις από απλά σχήματα. Μπορείς να δοκιμάσεις κι εσύ με την ομάδα σου, να κάνετε το δικό σας έργο.







5. Ομοιότητα

ΑΝΑΓΝΩΡΙΖΩ ΤΑ ΟΜΟΙΑ ΣΧΗΜΑΤΑ – ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ΣΤΑ ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

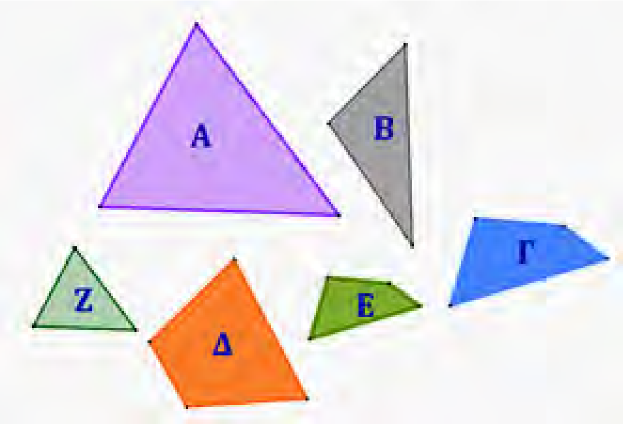
Δεν είναι **ίδια** κι όμως **μοιάζουν!**

Τι μένει ίδιο, τι αλλάζει;

Συχνά λέμε ότι δύο άνθρωποι ***μοιάζουν***.

Επίσης λέμε: *«κάνει παρέα με τους ομοίους του»*. Αυτό μπορεί να σημαίνει ότι κάνει παρέα με ανθρώπους της ίδιας ηλικίας, δουλειάς, καταγωγής κ.α.

Στην καθημερινή ζωή η ομοιότητα σημαίνει ότι κάποια χαρακτηριστικά μένουν **ίδια** και κάποια **αλλάζουν.**



Ας δούμε τι σημαίνει η **ομοιότητα στα σχήματα.**

Στη γεωμετρία ομοιότητα σημαίνει ότι **αλλάζει το μέγεθος** και μένει **ίδια η μορφή το σχήματος**[9]. Δηλαδή τα όμοια σχήματα είναι η μεγέθυνση/σμίκρυνση του άλλου.

Στην παραπάνω εικόνα ποια σχήματα θα λέγατε ότι είναι όμοια; ……………………………. ……

Στα σχήματα που είναι όμοια, τι βλέπετε να **μένει ίδιο, τι αλλάζει;** …… ……

Μπορείτε να πείτε πότε νομίζετε ότι δύο τρίγωνα θα είναι όμοια; Ποια σχέση θα πρέπει να έχουν οι πλευρές τους; Θα μπορούσε για παράδειγμα η μία πλευρά του ενός να είναι διπλάσια του άλλου και η άλλη τριπλάσια; ……………………………….

---

[9] Τα ίσα σχήματα μπορούμε να τα θεωρήσουμε και όμοια.

………

Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι γωνίες τους; …………………………………………………….

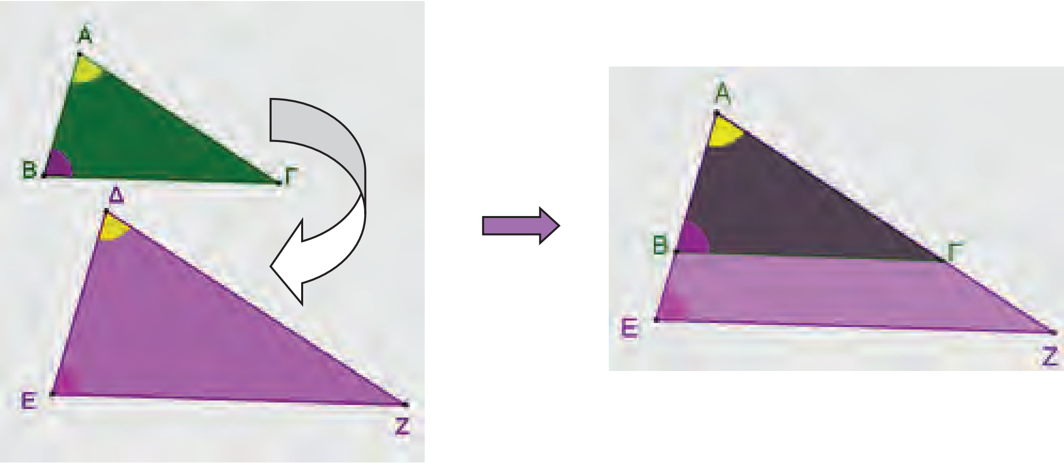
………

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Μαθαίνω

Εάν δύο τρίγωνα έχουν **2 γωνίες ίσες**, τότε είναι όμοια.

Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\Delta}$ και $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{E}}$. Βάζουμε το ΑΒΓ πάνω στο ΔΕΖ έτσι, ώστε η κορυφή Α να «πέφτει» πάνω στη Δ και οι ευθείες ΑΒ και ΑΓ να «πέφτουν» πάνω στις ευθείες ΑΕ και ΑΖ. Επειδή $\hat{\mathrm{B}}=\hat{E}$ θα είναι ΒΓ // ΕΖ



Αφού ΒΓ//ΕΖ τότε: $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{AZ}}=\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{ZE}}=\lambda$

Λόγος ομοιότητας

Οι πλευρές δύο ομοίων τριγώνων είναι ανάλογες και ο λόγος τους λέγεται **λόγος ομοιότητας.**

Επομένως **τα τρίγωνα θα έχουν όλες τις γωνίες ίσες και τις πλευρές τους ανάλογες και άρα θα είναι όμοια.**

Γράφουμε:

$$\mathrm{AB}\Gamma \approx \Delta\mathrm{EZ}_{\text{με}}\ \hat{\mathrm{A}}=\hat{\Delta}\,,\ \hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{E}}\ \text{και}\ \hat{\Gamma}=\hat{\mathrm{Z}}$$

Μαθαίνω

Σε δύο όμοια τρίγωνα, οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες, λέγονται **ομόλογες**.

Ομόλογες πλευρές

Επομένως στα προηγούμενα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, οι ομόλογες πλευρές είναι:

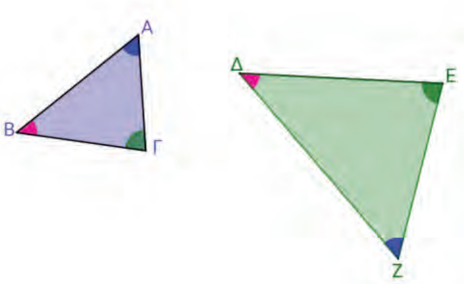
ΑΒ	ΒΓ	ΑΓ
ΔΕ	ΕΖ	ΔΖ

Μαθαίνω Εάν δύο τρίγωνα έχουν **τις πλευρές τους ανάλογες**, τότε είναι όμοια.

Ομόλογες πλευρές

Δραστηριότητα 5.1: *(Οι ομόλογες πλευρές σε δύο όμοια τρίγωνα και οι αναλογίες τους)*

Στα παρακάτω τρίγωνα, η γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ είναι ίση με τη γωνία $\widehat{\mathrm{Z}}$.
Απέναντι από τη γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ είναι η πλευρά ΒΓ.
Απέναντι από τη γωνία $\widehat{\mathrm{Z}}$ είναι η πλευρά ΔΕ.
Επομένως ομόλογες πλευρές είναι οι ΒΓ και ΔΕ.



Συμπλήρωσε τις φράσεις και τον πίνακα

Η γωνία $\hat{B}$ είναι ίση με τη γωνία ……
Απέναντι από τη γωνία $\hat{B}$ είναι η πλευρά …….
Απέναντι από τη γωνία …… είναι η πλευρά ……
Επομένως ομόλογες πλευρές είναι οι …………………

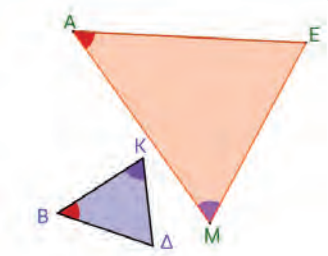
$\widehat{\mathrm{A}}$	$\widehat{\mathrm{B}}$	$\widehat{\Gamma}$
ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ
$\hat{\mathrm{Z}}$	$\hat{\Delta}$	$\hat{\mathrm{E}}$
ΔΕ		

Τότε: $\dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{\Delta\mathrm{E}} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

Εφαρμογή

ΑΣΚΗΣΗ Γ5.1: α) Να εξηγήσεις γιατί τα τρίγωνα ΑΝΕ και ΒΔΚ είναι όμοια.

β) Να βρεις τις ίσες γωνίες και τις ομόλογες πλευρές και να συμπληρώσεις το πινακάκι και τις αναλογίες



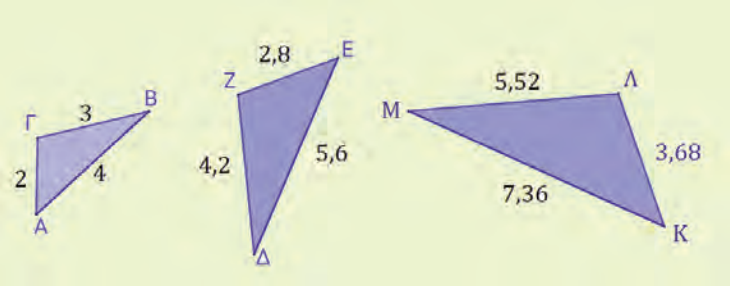
Α	Μ	Ε
ΜΕ	ΑΕ	ΑΜ
Β	Κ	Δ

$\hat{A} = \ldots\ldots\ldots$ $\hat{M} = \ldots\ldots\ldots$ $\hat{E} = \ldots\ldots\ldots$ και

$$\frac{AM}{} = \frac{ME}{} = \frac{AE}{}$$

Ασκήσεις

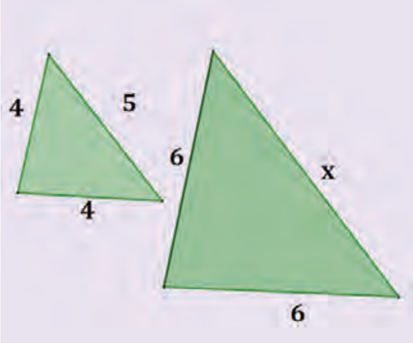
Άσκηση 5.2



Α. Είναι τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ και ΚΛΜ **όμοια;** Εξηγήστε γιατί.

Β. Ποιοι είναι οι συντελεστές ομοιότητας;

Άσκηση 5.3



Τα τρίγωνα είναι όμοια. Βρείτε:

α. **την πλευρά x**.

β. τον ***συντελεστή ομοιότητας* (λ)**

Δραστηριότητα 5.2 (Ομαδική) *(Εφαρμογή της ομοιότητας σε ένα πραγματικό πρόβλημα)*

Ας δούμε πώς μπορούμε να μετρήσετε με την ομάδα σας, το ύψος από το σχολείο σας ή από κάποιο άλλο ψηλό αντικείμενο, δέντρο κ.λπ. στην αυλή σας.

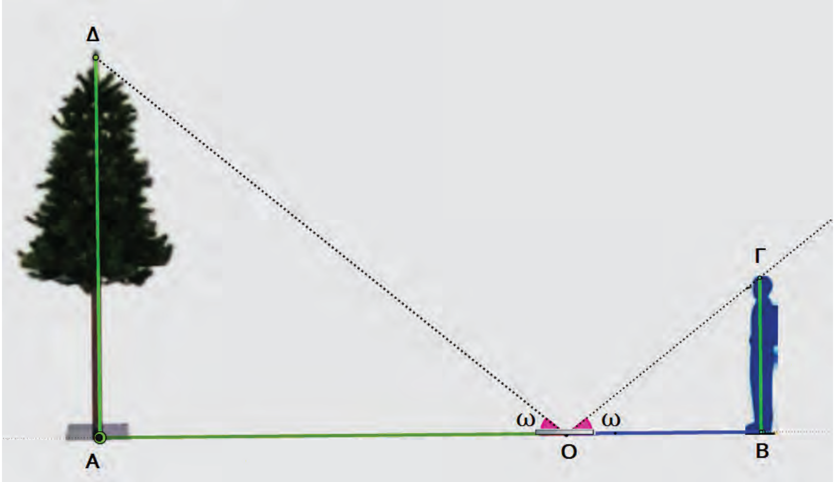
Τοποθετήστε το καθρεφτάκι στο έδαφος. Ένας από εσάς θα σταθεί όρθιος και θα απομακρυνθεί από τον καθρέπτη τόσο, ώστε να μπορεί να δει μέσα από αυτό την κορυφή από το αντικείμενο. Τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας θα πρέπει να μετρήσουν:

α. την απόσταση του αντικειμένου από τον καθρέπτη (d1)

β. την απόσταση του μέλους που στέκεται από τον καθρέπτη και

γ. το ύψος του παιδιού που στέκεται.

Τότε: $\dfrac{OA}{OB} = \underline{\qquad}$



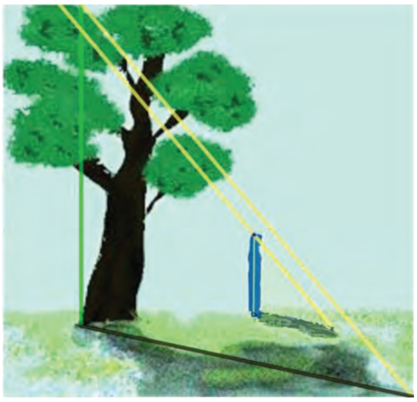
Δραστηριότητα 5.2: Βρίσκω το ύψος από ένα δέντρο με μέτρο τον εαυτό μου

Όπως έκανε και ο Θαλής, μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος από ένα ψηλό αντικείμενο με τη σκιά του.

Μετράμε το μήκος από τη δική μας σκιά.

Μετράμε το μήκος από τη σκιά από το αντικείμενο (π.χ. δέντρο)

Ισχύει: $\dfrac{σκιά\ 1}{σκιά\ 2} = \dfrac{ύψος\ 1}{ύψος\ 2}$



Οι καινούριες μου λέξεις

Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που συνάντησες σε αυτή την ενότητα.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Γράψε τις καινούριες μαθηματικές λέξεις που συνάντησες.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

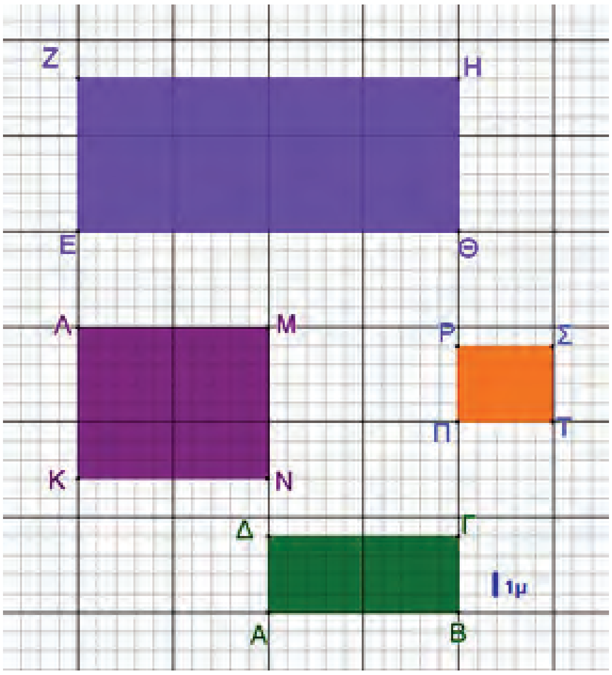
Ορθογώνια: Τα παρακάτω σχήματα είναι *όλα ορθογώνια*. Όμως ***δεν** είναι όλα όμοια* μεταξύ τους. Εσείς ποια νομίζετε ότι είναι όμοια; Πώς σκεφτήκατε;

ΑΒ	10
ΑΔ	4

ΠΤ	5
ΠΡ	4

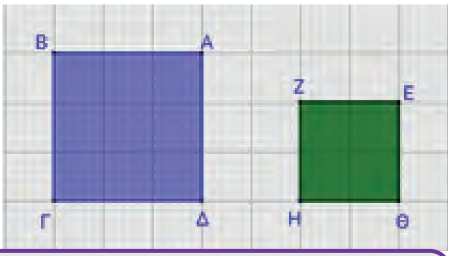
ΚΝ	10
ΚΛ	8

ΕΘ	20
ΕΖ	8



Τετράγωνα: Δύο τετράγωνα δεν είναι πάντα ίσα, είναι όμως πάντα όμοια.

ΑΒ	3	ΖΕ	2
ΒΓ	3	ΖΗ	2

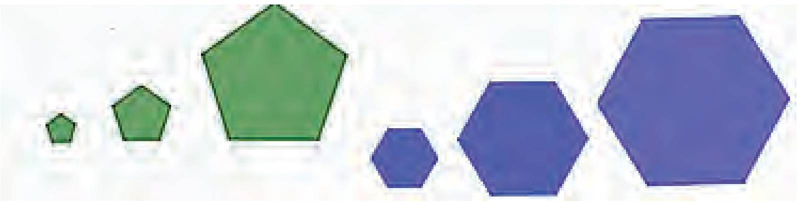


Τι μένει ίδιο, τι αλλάζει;

Μαθαίνω

Όλα τα κανονικά πολύγωνα που έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.

Γιατί;

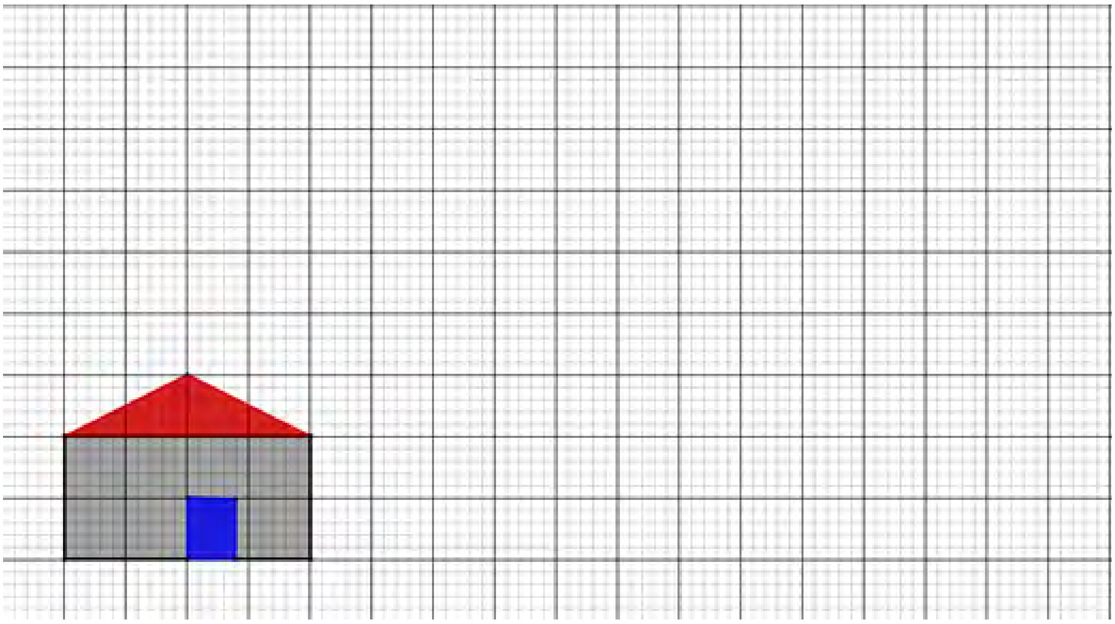


Μαθαίνω

Δύο πολύγωνα είναι **όμοια όταν έχουν ίσες γωνίες και πλευρές ανάλογες**

Δραστηριότητα 5.4 *(Μεγέθυνση ενός σχήματος)*

Α. Το σχέδιο που κάναμε μας βγήκε λίγο μικρό. Θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα μεγαλύτερο, όμοιο με το αρχικό με συντελεστή ομοιότητας λ = 1,5. Μπορείς να βρεις τις νέες διαστάσεις και να σχεδιάσεις το νέο σπίτι;



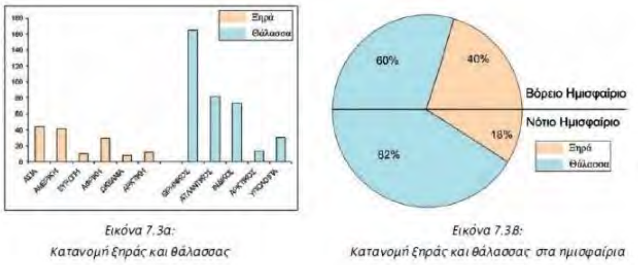
Β. Προσπαθήστε να μεγαλώσετε το παρακάτω σχήμα με συντελεστή:

α. $\lambda = 2$ β. όσο θέλετε

Ενότητα Γ1

Στατιστική

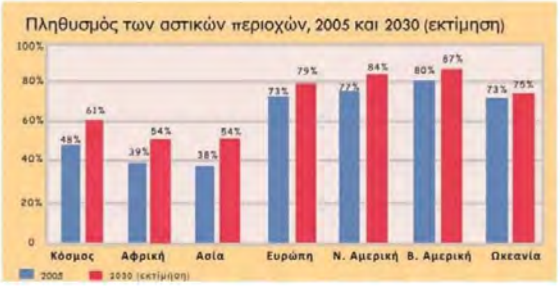
Γιατί η Στατιστική;



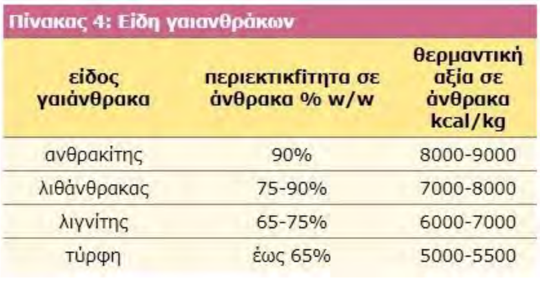
Εικόνα 7.3α: Κατανομή ξηράς και θάλασσας

Εικόνα 7.3β: Κατανομή ξηράς και θάλασσας στα ημισφαίρια

Γεωγραφία – ΣΤ Δημοτικού



Γεωλογία - Γεωγραφία – Α Γυμνασίου



Πίνακας 4: Είδη γαιανθράκων

είδος γαιάνθρακα	περιεκτικότητα σε άνθρακα % w/w	θερμαντική αξία σε άνθρακα kcal/kg
ανθρακίτης	90%	8000-9000
λιθάνθρακας	75-90%	7000-8000
λιγνίτης	65-75%	6000-7000
τύρφη	έως 65%	5000-5500

Χημεία – Γ Γυμνασίου

Σύσταση του αέρα

Χημεία – Β Γυμνασίου

Συχνά βλέπουμε στα σχολικά βιβλία αλλά και σε εφημερίδες, σε ειδήσεις και στο ιντερνέτ, πίνακες με αριθμούς ή ποσοστά και διαγράμματα. Αυτά μας δίνουν κάποιες πληροφορίες. Αυτές οι πληροφορίες μας βοηθάνε να βγάλουμε συμπεράσματα και να πάρουμε κάποιες αποφάσεις.

Σε αυτό μας βοηθάει ένα ‘κομμάτι’ από τα Μαθηματικά που λέγεται **Στατιστική**[1].

---

[1] Statistics, علم الاحصاء.

1. Η ορολογία της Στατιστικής

1.1 Πληθυσμός – μεταβλητή

Δραστηριότητα 1.1

Ο Χαλίλ είναι στην Β' Γυμνασίου. Ο κ. Κώστας είναι ο καθηγητής του.

Ο κ. Κώστας θέλει να μάθει κάποιες πληροφορίες για τους μαθητές του. Αυτές οι πληροφορίες θα τον βοηθήσουν για να πάρει κάποιες αποφάσεις. Ένα από τα πράγματα που θέλει να μάθει, είναι το χρώμα που αρέσει στους περισσότερους. Αυτό θα τον βοηθήσει για να φτιάξει μία σημαία για την τάξη.

Γι' αυτό,

- τους ρωτάει κάποιες ερωτήσεις σε ένα **ερωτηματολόγιο**[2],
- μαζεύει και **οργανώνει** τις απαντήσεις τους,
- **μελετάει τις πληροφορίες**[3] που έχει από τις απαντήσεις,
- και μετά **αποφασίζει**.

Λέμε ότι κάνει μία **στατιστική έρευνα** στην τάξη.

Ερωτηματολόγιο

Φύλο (αγόρι ή κορίτσι) _________

Το αγαπημένο μου χρώμα _________

Πόσες γλώσσες ξέρω _________

Πόσα λεπτά παίζω στο κινητό μου _________

Συζήτησε με την ομάδα σου και συμπλήρωσε:

1) Για ποιους[4] θέλει ο κ. Κώστας να μάθει κάποιες πληροφορίες; ……………………………………………….....

Στη Στατιστική, λέμε ότι αυτοί είναι ο «**πληθυσμός**» της έρευνας που κάνει ο κ. Κώστας.

2) Ποιο χαρακτηριστικό, δηλαδή τι, θέλει να μάθει ο κ. Κώστας για τους μαθητές; Επέλεξε το σωστό.

   i) Την ηλικία ii) Το αγαπημένο χρώμα iii) Πόσο καλά ζωγραφίζουν

---

[2] Ερωτήσεις γραμμένες σε ένα χαρτί. Questionnaire, استبيان.

[3] Information, معلومات.

[4] Σε ποιους κάνει την έρευνα;

Στη Στατιστική, λέμε ότι αυτό είναι η «**μεταβλητή**» της έρευνας.

Μαθαίνω

- Όταν κάνουμε μία στατιστική έρευνα, ο **πληθυσμός** είναι η ομάδα για την οποία θέλουμε να μάθουμε κάποιες πληροφορίες.
  - ➢ Απαντάμε στην ερώτηση: **για ποιους θέλουμε να μάθουμε**;
- Η **μεταβλητή** είναι ένα χαρακτηριστικό που μελετάμε για όλα τα μέλη στην ομάδα.
  - ➢ Απαντάμε στην ερώτηση: **τι θέλουμε να μάθουμε** γι' αυτήν την ομάδα;

Παραδείγματα για τον πληθυσμό

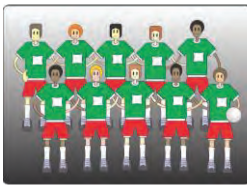
☞ Ο πληθυσμός σε μία έρευνα μπορεί να είναι

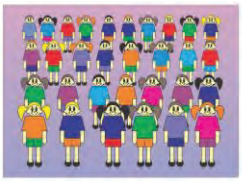
Μία **ομάδα από άτομα** όπως για παράδειγμα:

οι μαθητές ενός σχολείου, οι παίκτες μιας ποδοσφαιρικής ομάδας, οι άνθρωποι που μένουν σε μία πόλη, κ.αλ.

Μία **ομάδα από πράγματα** όπως για παράδειγμα:

αυτοκίνητα που περνάνε σ' ένα δρόμο, τα κινητά μιας παρέας, προϊόντα που φτιάχνει μία εταιρία, κ.αλ.





Παραδείγματα για τη μεταβλητή

☞ **Ποσοτική μεταβλητή**.

Η μεταβλητή είναι ένας **αριθμός**.

Για παράδειγμα: πόσα αδέρφια έχει κάποιος (0, 1, 2, ...), η ταχύτητα για κάποια αυτοκίνητα (50, 65, 70 km/h, ...), το ύψος που έχει κάθε παιδί (1,30 , 1,50 , 1,42 , 1,35cm), κ.αλ.

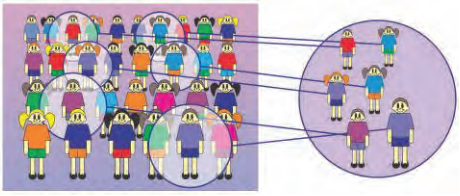
☞ **Ποιοτική μεταβλητή**.

Η μεταβλητή είναι ένα **χαρακτηριστικό που περιγράφει**, για παράδειγμα,

- **προτίμηση**, όπως το αγαπημένο χρώμα,
- **μάρκα**, όπως η μάρκα για αυτοκίνητα,

- **ποιότητα**, όπως πόσο καλά ξέρει κάποιος τα Ελληνικά (λίγο, μέτρια, καλά),
- κ.ά.

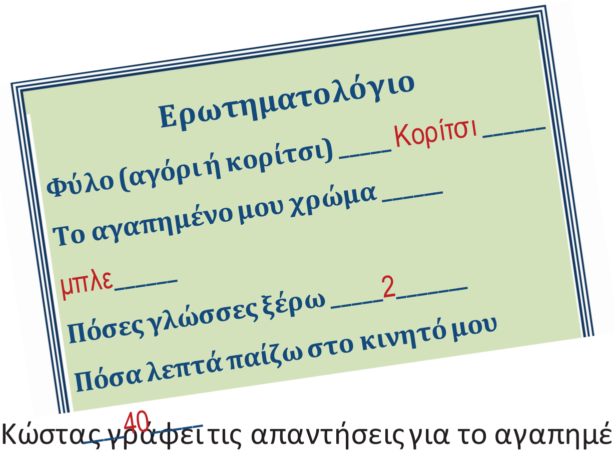
1.2 Δείγμα



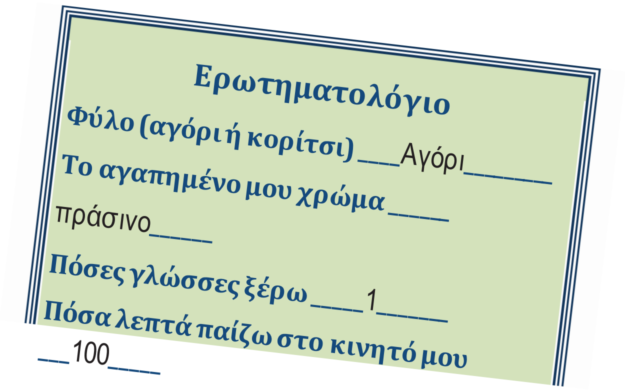
Κάποιες φορές ο πληθυσμός είναι πολύ μεγάλος, για παράδειγμα, όλοι οι μαθητές στην Αθήνα.
Έτσι, δε μπορούμε να τους ρωτήσουμε όλους. Γι' αυτό, ρωτάμε μόνο κάποιους από αυτούς που επιλέγουμε 'τυχαία'. Λέμε ότι παίρνουμε ένα **δείγμα** από τον πληθυσμό. Λέμε επίσης ότι κάνουμε μία **δειγματοληψία** ή **δημοσκόπηση**.

1.3 Δεδομένα – τιμές μιας μεταβλητής

Ο κ. Κώστας μαζεύει τις απαντήσεις των μαθητών. Στη Στατιστική λέμε ότι **συλλέγει δεδομένα**[5] **ή παρατηρήσεις**.



Ερωτηματολόγιο
Φύλο (αγόρι ή κορίτσι) ____Κορίτσι_____
Το αγαπημένο μου χρώμα _____
μπλε_____
Πόσες γλώσσες ξέρω ____2_____
Πόσα λεπτά παίζω στο κινητό μου
____40____



Ερωτηματολόγιο
Φύλο (αγόρι ή κορίτσι)___Αγόρι_______
Το αγαπημένο μου χρώμα _____
πράσινο_____
Πόσες γλώσσες ξέρω ____1_____
Πόσα λεπτά παίζω στο κινητό μου
__100____

Ο κ. Κώστας γράφει τις απαντήσεις για το αγαπημένο χρώμα.

Μπλε, πράσινο, πορτοκαλί, μπλε, ροζ, πορτοκαλί, μπλε
πορτοκαλί, πράσινο, μπλε, πράσινο, ροζ, πορτοκαλί, ροζ,
κίτρινο, πορτοκαλί, πράσινο, κίτρινο, πορτοκαλί, μπλε.

← **Τα δεδομένα** (ή **οι παρατηρήσεις**).

Πόσα είναι τα δεδομένα; ……… Πόσοι μαθητές είναι στην τάξη; ……..…

Στη Στατιστική, αυτόν τον αριθμό το λέμε **μέγεθος του πληθυσμού** της έρευνας.

Πόσα είναι τα (διαφορετικά) χρώματα που βλέπουμε σ' αυτές τις παρατηρήσεις; …….

Ποια είναι αυτά τα (διαφορετικά) χρώματα; …………………………………………………………………………………

Στη Στατιστική, τα λέμε **οι τιμές της μεταβλητής**.

---

[5] Data, بيانات.

Μαθαίνω

Σε μία στατιστική έρευνα, το **μέγεθος του πληθυσμού** είναι ο αριθμός από άτομα ή αντικείμενα για τους οποίους μας ενδιαφέρει να μάθουμε πληροφορίες.

Μαθαίνω

Σε μία στατιστική έρευνα,

- Τα **δεδομένα** της έρευνας είναι όλες οι απαντήσεις, οι παρατηρήσεις, οι μετρήσεις που έχουμε για τη μεταβλητή που μελετάμε.
- Τις διαφορετικές τιμές που βλέπουμε στα δεδομένα (χωρίς επανάληψη), τις λέμε **τιμές της μεταβλητής**.

Παράδειγμα

Μετρήσαμε για 10 παιδιά που παίζουν ένα μουσικό όργανο το πλάτος της παλάμης τους.
Οι μετρήσεις είναι (σε cm): 11 , 10 , 10,5 , 12 , 11 , 10,5 , 11,3 , 12 , 11,5 , 12.

Ο πληθυσμός είναι: 10 παιδιά που παίζουν ένα μουσικό όργανο.
Έχουμε συνολικά 10 δεδομένα (μετρήσεις). Το μέγεθος του πληθυσμού είναι 10.
Η μεταβλητή είναι το πλάτος από το δεξί χέρι.
Οι τιμές της μεταβλητής είναι 10 , 10,5 , 11 , 11,3 , 11,5 , 12. Έχουμε 6 διαφορετικές τιμές στα 10 δεδομένα.

Άσκηση 1.1

Για κάθε περίπτωση, επίλεξε το σωστό

Περίπτωση 1. Αυτήν την εβδομάδα, η Μίριαμ μίλησε στο κινητό:
3 ώρες με την Εκίν, 2 ώρες με τη Μαρία, 5 ώρες με την Δανάη και 2 ώρες με τη Νάντα.

Ο πληθυσμός είναι (α) η Μίριαμ, (β) οι φίλες της Μίριαμ.

Η μεταβλητή είναι
(α) ο αριθμός από φίλες που έχει η Μίριαμ,
(β) ο αριθμός από ώρες που μίλησε η Μίριαμ στο κινητό αυτήν την εβδομάδα.

Περίπτωση 2. Χθες 6 με 7 το πρωί, τα αυτοκίνητα που πέρασαν από μία οδό είχαν ταχύτητα (km/h): 52 – 49 – 60 – 62 – 53 – 55 – 68 – 52 – 60 – 65 – 53 – 48 – 62 – 55 – 48.

Ο πληθυσμός είναι
(α) τα αυτοκίνητα που πέρασαν από μία οδό χθες 6 με 7 το πρωί,
(β) αυτοκίνητα.

Η μεταβλητή είναι (α) το χρώμα, (β) η ταχύτητα.

Άσκηση 1.2

Για κάθε περίπτωση από τις παραπάνω δώσε τα δεδομένα και τις τιμές της μεταβλητής.

Περίπτωση 1. Τα δεδομένα είναι ....

Οι τιμές της μεταβλητής είναι ....

Περίπτωση 2. Τα δεδομένα είναι ....

Οι τιμές της μεταβλητής είναι ....

2. Η οργάνωση των δεδομένων σ' έναν πίνακα συχνοτήτων

2.1 Συχνότητα

Δραστηριότητα 2.1 *(συχνότητα, πίνακας συχνοτήτων)*

Για να έχει καλύτερη ιδέα, ο κ. Κώστας **οργανώνει τα δεδομένα** σ' έναν πίνακα.

Αυτός ο πίνακας λέγεται **πίνακας των συχνοτήτων**[6].

Μπλε, πράσινο, πορτοκαλί, μπλε, ροζ, πορτοκαλί, μπλε, πορτοκαλί, πράσινο, μπλε, πράσινο, ροζ, πορτοκαλί, ροζ, κίτρινο, πορτοκαλί, πράσινο, κίτρινο, πορτοκαλί, μπλε.

Τα δεδομένα

Για να το κάνει,

1) Γράφει σε μία στήλη τις τιμές της μεταβλητής: Μπλε, πράσινο, πορτοκαλί, ροζ, κίτρινο.
2) Για κάθε τιμή, δηλαδή χρώμα, μετράει πόσες φορές είναι στις απαντήσεις. Για παράδειγμα,

το «μπλε» ⟶ 5 φορές στις απαντήσεις. 5 μαθητές προτιμάνε το χρώμα μπλε.

Αυτός ο αριθμός λέγεται **η συχνότητα της τιμής «μπλε»**.

3) Γράφει σε άλλη στήλη τις συχνότητες αντίστοιχα με τις τιμές.

Συμπληρώνουμε τις παρακάτω φράσεις και τον πίνακα:

- Πόσες φορές είναι η τιμή «**πράσινο**» στις απαντήσεις; .... Άρα, η συχνότητα της τιμής «**πράσινο**» είναι .....

- Πόσοι μαθητές προτιμάνε το χρώμα ροζ; .... Άρα, η συχνότητα της τιμής «**ροζ**» είναι .....

Οι τιμές της μεταβλητής

Χρώμα	Συχνότητα
Μπλε	5
Πράσινο	…
Πορτοκαλί	…
ροζ	…
Κίτρινο	…

Η συχνότητα της τιμής «μπλε»

---

[6] Tabular representation, عرض جدولي

Ο παραπάνω πίνακας είναι **ο πίνακας των συχνοτήτων** για τα δεδομένα που μελετάμε.

Μπορούμε να κάνουμε τον πίνακα συχνοτήτων και με αυτόν τον τρόπο.

Χρώμα	Μπλε	Πράσινο	Πορτοκάλι	ροζ	Κίτρινο
Συχνότητα	5	…	…	…	…

Τελικά, από ποιο χρώμα θα είναι η σημαία της τάξης; ……………………………….

Μαθαίνω

Η **συχνότητα** μιας τιμής είναι το πόσες φορές υπάρχει αυτή η τιμή στα δεδομένα.

Η συχνότητα είναι ένας φυσικός αριθμός.

Μαθαίνω

Στον **πίνακα συχνοτήτων** οργανώνουμε τα δεδομένα. Με αυτόν τον πίνακα, διαβάζουμε πιο εύκολα τις πληροφορίες από τα δεδομένα.

- Στην πρώτη στήλη βάζουμε τις διαφορετικές τιμές από τα δεδομένα.
- Στη δεύτερη στήλη βάζουμε τις αντίστοιχες συχνότητες.

Παράδειγμα

Στην τάξη του Χαλίλ

Στο ερωτηματολόγιο του κ. Κώστα, οι απαντήσεις στο «πόσες γλώσσες ξέρω» είναι 3, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 4, 2.

Οι τιμές είναι: 1, 2, 3, 4. Τις γράφουμε **από την πιο μικρή μέχρι την πιο μεγάλη**.

Έχουμε:

Το 1 ⟶ 2 φορές.
Το 2 ⟶ 8 φορές.
Το 3 ⟶ 7 φορές.
Το 4 ⟶ 3 φορές.

Σύνολο: 2+8+7+3 = 20. Είναι ο αριθμός των μαθητών.

Άρα, ο πίνακας των συχνοτήτων είναι

Αριθμός από γλώσσες	**Αριθμός από μαθητές (ή συχνότητα)**
1	2
2	8
3	7
4	3
Σύνολο	20

Όταν οι τιμές είναι αριθμοί, τις γράφουμε από την πιο μικρή μέχρι την πιο μεγάλη.

Αυτό σημαίνει ότι 3 μαθητές από την τάξη του Χαλίλ ξέρουν 4 γλώσσες.

2.2 Σχετική συχνότητα

Δραστηριότητα 2.2 *(σχετική συχνότητα)*

Συζήτησε με την ομάδα σου και απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- Ποια είναι η συχνότητα της τιμής «κορίτσια»; ……………………..

- Τι σημαίνει αυτό ως προς τον αριθμό όλων των μαθητών;

- Σημαίνει το ίδιο να έχουμε 13 κορίτσια σε μία τάξη από 20 μαθητές και 13 κορίτσια σε μία τάξη από 26 μαθητές;

	Συχνότητα
Κορίτσια	13
Αγόρια	7
Σύνολο	20

Για να δούμε την αξία της συχνότητας 13 ως προς τον αριθμό όλων των μαθητών, υπολογίζουμε το λόγο $\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{20}}$.

Τα κορίτσια

Το $\frac{13}{20}$ λέγεται η **σχετική συχνότητα** της τιμής «κορίτσια».

Όλοι οι μαθητές

Όπως $\frac{13}{20}$ = 13 ÷ 20 = 0,65. Άρα, μπορούμε επίσης να πούμε:

- η σχετική συχνότητα της τιμής «κορίτσια» είναι **0,65**,

ή και

- **65%** από τους μαθητές είναι κορίτσια.

Υπενθύμιση:
Το ποσοστό είναι ένας αριθμός που γράφεται ως ένα κλάσμα με παρονομαστή το 100.
Χρησιμοποιούμε για το ποσοστό, το σύμβολο % και το διαβάζουμε «τοις εκατό».
Π.χ. 40% = $\frac{40}{100}$ = 0,40.
$\frac{13}{32}$ = 0,40625 = 40,625%.

Συζήτησε με την ομάδα σου:
- Γιατί είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε κάποιες φορές τη σχετική συχνότητα αντί για τη συχνότητα;
- Γιατί είναι χρήσιμο κάποιες φορές να γράφουμε τη σχετική συχνότητα ως ποσοστό;
- Ο Χαλίλ σκέφτεται ότι η σχετική συχνότητα είναι ένας αριθμός πάντα μικρότερος από το 1. Έχει δίκιο; Γιατί;

Μαθαίνω

Για να βρούμε τη **σχετική συχνότητα** μιας τιμής, διαιρούμε τη συχνότητά της με τον συνολικό αριθμό από όλα τα δεδομένα.

$$\text{σχετική συχνότητα} = \frac{\text{συχνότητα}}{\text{αριθμός των δεδομένων}}$$

Πολύ συχνά, εκφράζουμε τη σχετική συχνότητα ως **ποσοστό (%)**.

Η σχετική συχνότητα είναι ένας αριθμός ανάμεσα στο 0 και στο 1.

Παραδείγματα

Στους παραπάνω πίνακες συχνοτήτων για το «πόσες γλώσσες ξέρουν οι μαθητές», και για το «αγαπημένο τους χρώμα», βάζουμε τις σχετικές συχνότητες σε μία στήλη.

Στην τάξη του Χαλίλ

Αριθμός από γλώσσες	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
1	2	$\frac{2}{20} = 0{,}1$
2	8	$\frac{7}{20} = 0{,}35$
3	7	$\frac{6}{20} = 0{,}3$
4	3	$\frac{3}{20} = 0{,}15$
Σύνολο	20	1

Χρώμα	Σχετική συχνότητα
Μπλε	0,25
Πράσινο	0,2
Πορτοκαλί	0,3
Ροζ	0,15
Κίτρινο	0,1
Σύνολο	1

Το σύνολο για όλες τις σχετικές συχνότητες είναι 1.

- Η σχετική συχνότητα της τιμής «3 γλώσσες» είναι $\frac{7}{20}$ άρα 0,35. Δηλαδή, 7 από 20 μαθητές ξέρουν 3 γλώσσες. Με άλλα λόγια, 35% από τους μαθητές ξέρουν 3 γλώσσες.
- 8 + 7 + 3 = 18 μαθητές ξέρουν τουλάχιστον 2 γλώσσες.
- Το 28% από τους μαθητές προτιμάνε το χρώμα πορτοκαλί.

Άσκηση 2.1

Σε μία σακούλα έχει 3 μπλε, 5 κόκκινες και 2 πράσινες μπάλες.
Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα.

Χρώμα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Σχετική συχνότητα σε ποσοστό (%)
Μπλε	3	…	…
Κόκκινο	…	0,5	…
Πράσινο	…	…	…
Σύνολο	…	…	100%

Άσκηση 2.2

Η Ταμάρ έκανε μία έρευνα στους φίλους της για το πόσα φρούτα τρώνε την ημέρα. Τα αποτελέσματα είναι στον διπλανό πίνακα.

Για κάθε ερώτηση επέλεξε τη σωστή απάντηση:

Αριθμός από φρούτα	**Συχνότητα**
0	9
1	6
2	4
3	1

1) Πόσους φίλους ρώτησε η Ταμάρ;

α) 6 β) 20 γ) 36

2) Πόσοι τρώνε 1 φρούτο την ημέρα;

α) 6 β) 3 γ) 15

3) Πόσοι τρώνε τουλάχιστον 2 φρούτα την ημέρα;

α) 5 β) 4 γ) 10

4) Ποια είναι η σχετική συχνότητα για την τιμή «2»;

α) 4 β) 0,8 γ) 0,2

5) Ποια είναι η σχετική συχνότητα για την τιμή «1»;

α) $\frac{1}{6}$ β) $\frac{3}{10}$ γ) $\frac{1}{20}$

6) Ποιο είναι το ποσοστό από τους φίλους της που τρώνε το πολύ ένα φρούτο;

α) 75% β) 30% γ) 70%

Άσκηση 2.3

Διαβάζουμε τον παρακάτω πίνακα και απαντάμε στις παρακάτω ερωτήσεις

	Η τάξη της Μαρίας	Η τάξη της Εκίν
Κορίτσια	10	9

Σε ποια τάξη, έχουμε **περισσότερα κορίτσια**; ……………………………………………

Σε ποια τάξη, έχουμε το **πιο μεγάλο ποσοστό από κορίτσια**; ……………………..………………….

Άσκηση 2.4

Η Άιντα ρώτησε τους φίλους της ποια είναι η μητρική τους γλώσσα. Οι απαντήσεις τους είναι:

Αραβικά, Ελληνικά, Αραβικά, Γεωργιανά, Φαρσί, Αραβικά, Ελληνικά, Φαρσί.

1) Κάνε έναν πίνακα συχνοτήτων γι’ αυτά τα δεδομένα.

2) Η Άϊντα υπολόγισε τις σχετικές συχνότητες όλων των τιμών και μετά τα μπέρδεψε. Βοήθησε την να τα ενώσει μαζί.

Τιμή	Σχετική συχνότητα
Αραβικά ●	● $\frac{2}{8}$
Ελληνικά ●	● 25%
Γεωργιανά ●	● 0,375
Φαρσί ●	● 0,125

3. Γραφική αναπαράσταση για τα δεδομένα

Για να παρουσιάσουμε γραφικά τα δεδομένα έχουμε πολλούς τρόπους. Εδώ, θα δούμε κάποιους απ'αυτούς.

3.1 Ραβδόγραμμα

Στο **ραβδόγραμμα**, χρησιμοποιούμε κάθετα ορθογώνια (κάθετες μπάρες) που λέγονται ράβδοι.

- Για κάθε τιμή της μεταβλητής βάζουμε ένα ορθογώνιο.
- Τα ορθογώνια δεν είναι κολλημένα το ένα με το άλλο.
- Το ύψος για κάθε ορθογώνιο είναι ίσο με τη συχνότητα αυτής της τιμής.

☞ Το χρησιμοποιούμε ειδικά για να δείξουμε τις συχνότητες για τις τιμές.

Παραδείγματα

1) Στο παρακάτω ραβδόγραμμα, παρουσιάζουμε γραφικά τα δεδομένα για το αγαπημένο χρώμα στην τάξη του Χαλίλ.

Στην τάξη του Χαλίλ

Το ύψος για το 1ο ορθογώνιο είναι 5. Επειδή, η συχνότητα της τιμής «μπλε» είναι 5.

Ο αριθμός των μαθητών. Δηλαδή, η συχνότητα.

Οι τιμές της μεταβλητής.

2) Στο παρακάτω ραβδόγραμμα, παρουσιάζουμε γραφικά τα δεδομένα για τον αριθμό από γλώσσες που ξέρουν οι μαθητές στην τάξη του Χαλίλ.

8 μαθητές ξέρουν 2 γλώσσες.

3.2 Κυκλικό διάγραμμα

Το **κυκλικό διάγραμμα** είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κομμάτια (σαν τα κομμάτια μιας πίτσας).

- Για κάθε τιμή της μεταβλητής αντιστοιχεί ένα κομμάτι από το δίσκο.
- Η γωνία για κάθε κομμάτι από το δίσκο είναι ανάλογη με τη σχετική συχνότητα αυτής της τιμής.

☞ Το χρησιμοποιούμε ειδικά για να δείξουμε τις σχετικές συχνότητες σε ποσοστό για τις τιμές. Δηλαδή, τι μέρος σε ποσοστό έχει η κάθε τιμή σε σχέση με όλα τα δεδομένα.

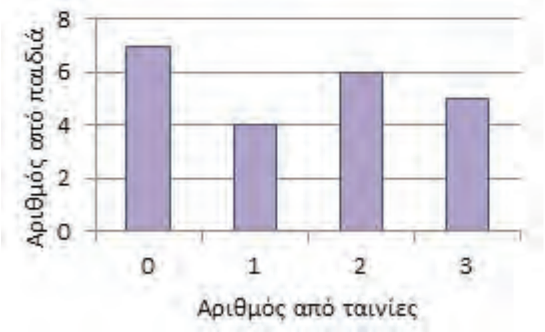
Παραδείγματα

35% από τους μαθητές είναι αγόρια.

Το 29% της Γης είναι ξηρά και το υπόλοιπο θάλασσα.

Άσκηση 3.1

Ρωτήσαμε κάποια παιδιά πόσες ταινίες είδαν αυτήν την εβδομάδα στο κινητό τους. Οι απαντήσεις τους είναι στο παρακάτω ραβδόγραμμα.



1) Πόσα παιδιά ρωτήσαμε; ………………….

2) Πόσα παιδιά είδαν 3 ταινίες; ………………….

3) Πόσα παιδιά είδαν λιγότερο από 2 ταινίες; ………………….

Άσκηση 3.2

Ο κύριος Μαχμούντ φτιάχνει παγωτό σε τρεις γεύσεις: σοκολάτα, φράουλα και λεμόνι. Σήμερα πούλησε από όλες τις γεύσεις όπως στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα.

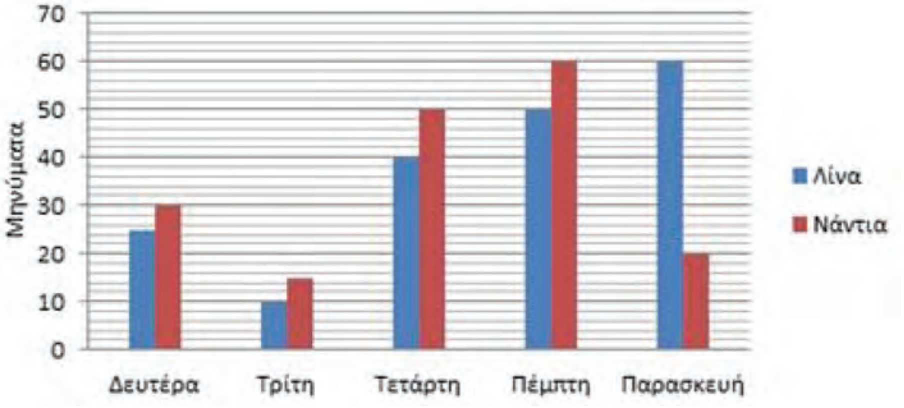
1) Ποιο ποσοστό από αυτά που πούλησε έχει η γεύση λεμόνι; ………………….

2) Ο κύριος Μαχμούντ πούλησε συνολικά 8 κιλά παγωτό. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα.

Γεύση	**Συχνότητα**	**Σχετική συχνότητα**
…………………..	…	…
…………………..	…	…
…………………..	…	…
Σύνολο (σε κιλά)	…	…

Άσκηση 3.3

Στο παρακάτω ραβδόγραμμα, είναι ο αριθμός από μηνύματα που έστειλαν η Λίνα και η Νάντια στο WhatsApp από τη Δευτέρα μέχρι την Παρασκευή.



1) Την Παρασκευή, πόσα μηνύματα έστειλε η Λίνα; ………………… Η Νάντια; ……………………

2) Ο Αλί λέει: «Σε μία μέρα, έστειλε 15 μηνύματα.» Για ποια μέρα μιλάει; ……………….

Μιλάει για τη Λίνα ή για τη Νάντια; ……………….

3) Σε ποιες μέρες η διαφορά στα μηνύματα ήταν 10; …………………

4) Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα

	Λίνα	**Νάντια**
Δευτέρα	…	…
Τρίτη	…	…
Τετάρτη	…	…
Πέμπτη	…	…
Παρασκευή	…	…
Σύνολο	…	…

Άσκηση 3.4

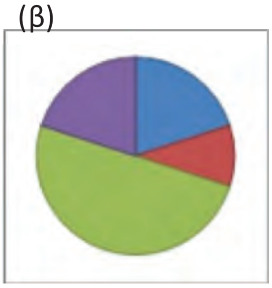
Η Νάντια έστειλε 20 μηνύματα την Παρασκευή. Τα έστειλε στην Αγκού, Ταμάρ, Λίνα και στην Αζάρ όπως στον παρακάτω πίνακα.

	Μηνύματα
Αγκού	3
Ταμάρ	1
Λίνα	10
Αζάρ	6

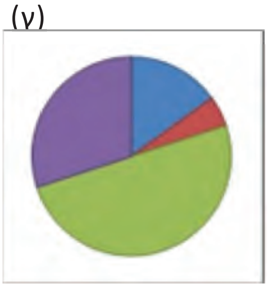
Ποιο κυκλικό διάγραμμα από τα παρακάτω αντιστοιχεί σ’ αυτόν τον πίνακα;

(α)

(β)



(γ)



4. Ομαδοποίηση και ιστόγραμμα

Δραστηριότητα 4.1 *(Ομαδοποίηση των δεδομένων)*

Α) Χωρίζουμε τα δεδομένα σε ομάδες

Στο σχολείο του Χαλίλ, η διευθύντρια κάνει μία έρευνα για το πόσα λεπτά οι μαθητές παίζουν video games στο κινητό σε μία μέρα. Ζήτησε από τον Χαλίλ να τη βοηθήσει.

Ο Χαλίλ πήρε ένα δείγμα από 30 μαθητές και τους ρώτησε:

«Σε μία μέρα, πόσα λεπτά παίζεις video games στο κινητό;» και γράφει τις απαντήσεις τους:

15; 40; 120; 0; 50; 40; 135; 95; 120; 20; 0; 140; 35; 25; 60;
30; 50; 60; 55; 45; 95; 100; 75; 70; 110; 115; 90; 80; 65; 85.

Συμπληρώνουμε:

Η μεταβλητή είναι ……………………………………………………………………………………………

Έχουμε ….. δεδομένα. Έχουμε …….. τιμές για τη μεταβλητή.

Η πιο μικρή τιμή είναι …… Η πιο μεγάλη τιμή είναι …….

Η διευθύντρια λέει στο Χαλίλ:

Δεν είναι καλή ιδέα να οργανώσεις τα δεδομένα όπως είναι σ' έναν πίνακα συχνοτήτων.

Καλύτερα πρώτα να τα χωρίσεις σε ομάδες, για παράδειγμα, ανά μισή ώρα.

Συζήτησε με την ομάδα σου και εξηγήστε γιατί; ………………………
……………………………………………….

Έτσι, με αυτόν τον τρόπο, ο Χαλίλ φτιάχνει 5 ομάδες.

Ο χρόνος 30 λεπτά μπαίνει στην ομάδα 30 – 60 και όχι στην ομάδα 0 – 30.

0; 0; 15; 20; 25.	30; 35; 40; 40; 45; 50; 50: 55.	60; 60; 65; 70; 75; 80; 85.	90; 95; 95; 100; 110; 115.	120; 120; 135; 140.
0 – 30	**30 – 60**	**60 – 90**	**90 – 120**	**120 – 150**
$0 \leq$ χρόνος < 30.	**$30 \leq$ χρόνος < 60.**	**$60 \leq$ χρόνος < 89.**	**$90 \leq$ χρόνος < 119.**	**$120 \leq$ χρόνος < 149.**

Μαθαίνω

> Όταν οι τιμές μιας μεταβλητής είναι αριθμοί και είναι πολλές, κάνουμε μία **ομαδοποίηση για τα δεδομένα**, δηλαδή τα χωρίζουμε σε ομάδες.
>
> Αυτές οι ομάδες λέγονται **«κλάσεις»**.

- Δύο κλάσεις δεν έχουν κοινά δεδομένα. Δηλαδή, ένα δεδομένο δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα σε περισσότερο από μία κλάση.
- Η κάθε κλάση (εκτός από την πρώτη) ξεκινάει από τον αριθμό που τελειώνει η προηγούμενη κλάση. Δεν μετράμε αυτόν τον αριθμό στην προηγούμενη κλάση.
- Συνήθως, οι κλάσεις έχουν το ίδιο πλάτος.

Παράδειγμα:

Ο Χαλίλ χώρισε τα δεδομένα σε 5 κλάσεις:

«**0**-30», «**30**-60», «**60**-90», «**90**-120», «**120**-150».

Το πλάτος για κάθε κλάση είναι 30 λεπτά.

Το 120 μπαίνει στην κλάση 120-150 και όχι στην κλάση 90-120.

Β) Οργανώνουμε τις κλάσεις σε έναν πίνακα συχνοτήτων

Ο Χαλίλ οργανώνει τις κλάσεις σε έναν πίνακα συχνοτήτων. Το βοηθάμε και συμπληρώνουμε:

Κλάσεις	**0 - 30**	**30 - 60**	**60 - 90**	**90 - 120**	**120 - 150**	**Σύνολο**
Συχνότητα	5	…	…	…	…	…

5 απαντήσεις είναι μεγαλύτερες ή ίσες με το 0 και μικρότερες από το 30.

Γ) Παρουσιάζουμε γραφικά τις κλάσεις σε ένα ιστόγραμμα

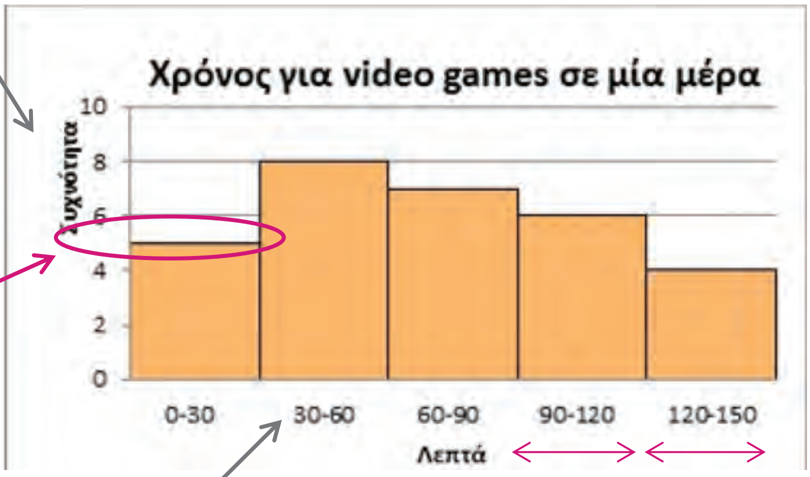
Όταν κάνουμε ομαδοποίηση για τα δεδομένα σε κλάσεις, χρησιμοποιούμε ένα ειδικό γράφημα για να τα παρουσιάσουμε γραφικά. Αυτό το γράφημα λέγεται **ιστόγραμμα**.

Ένα ιστόγραμμα είναι μία σειρά από κάθετα ορθογώνια κολλημένα το ένα με το άλλο.

- Κάθε ορθογώνιο αντιστοιχεί σε μία κλάση.
- Το ύψος για κάθε ορθογώνιο είναι ίσο με τη συχνότητα αυτής της κλάσης.
- Τα ορθογώνια έχουν το ίδιο πλάτος.

☞ Το χρησιμοποιούμε ειδικά για να δείξουμε τις συχνότητες για τις κλάσεις.

Παράδειγμα:



Ο αριθμός δεδομένων σε κάθε κλάση.

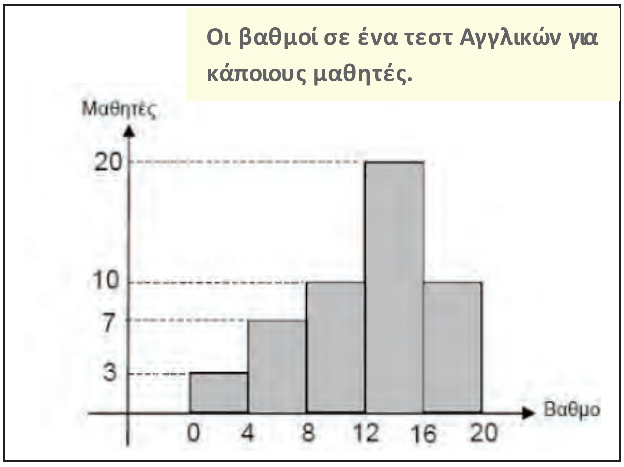
Η συχνότητα της κλάσης «0-30» είναι 5.

Οι κλάσεις.

Ίδιο πλάτος.

Άσκηση 4.1

Μελετάμε κάθε ιστόγραμμα και συμπληρώνουμε.


Οι βαθμοί σε ένα τεστ Αγγλικών για κάποιους μαθητές.

- Συνολικά στις 2 τάξεις είναι … μαθητές.
- … μαθητές πήραν βαθμό μικρότερο από 4.
- … μαθητές πήραν βαθμό από 12 και πάνω.
- Είναι σωστό πως 17 από τους μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο με το 4 και μικρότερο από το 12; ……


Ο χρόνος για διάβασμα σε μία μέρα για μαθητές από ένα σχολείο.

- Συνολικά, ρωτήσαμε …. μαθητές σ' αυτό το σχολείο.
- 12 μαθητές διάβασαν ……………………..
- Πόσοι μαθητές διάβασαν 40 λεπτά; ………
- Πόσοι μαθητές διάβασαν 40 με 50 λεπτά; ………
- Πόσοι μαθητές διάβασαν λιγότερο από 60 λεπτά; ………

Άσκηση 4.2

Η Λέιλα και οι φίλοι της έκαναν μία έρευνα για «το πόση μάζα έχει η σχολική τσάντα». Γι’ αυτό ζύγισαν τις τσάντες για 40 μαθητές στο σχολείο τους. Οι μετρήσεις είναι στον παρακάτω πίνακα.

Μάζα (kg)	**1-3**	**3-5**	**5-7**	**7-9**	**9-11**	**Σύνολο**
Συχνότητα	3	6	10	15	…	…

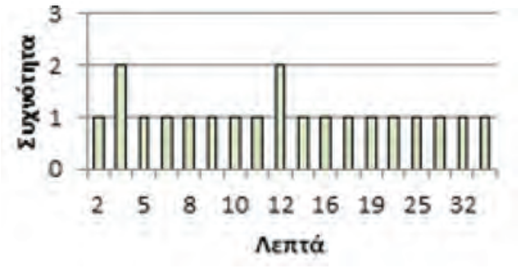
1) Συμπλήρωσε τον πίνακα.
2) Για πόσους μαθητές, η σχολική τσάντα ζυγίζει λιγότερο από 7 κιλά; …………………………….
3) Μπορούμε να μάθουμε για πόσους μαθητές, η σχολική τσάντα ζυγίζει 6 κιλά; ……………
4) Η Λέϊλα είπε: «Η σχολική τσάντα ζυγίζει τουλάχιστον 5 kg για 75% από τους μαθητές.» Έχει δίκιο; Γιατί; ……………………………………………………………………………………………………

Άσκηση 4.3

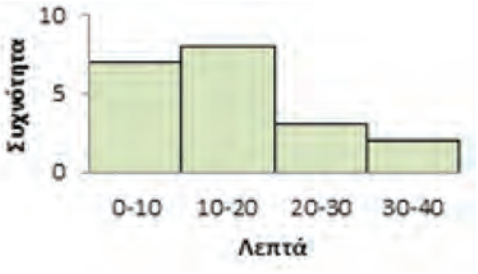
Ο πατέρας της Εκίν της λέει ότι μιλάει πολύ στο κινητό. Η Εκίν πιστεύει πως όχι.
Για να του το δείξει, γράφει πόσα λεπτά μίλησε σε κάθε μία από τις τελευταίες 20 ομιλίες της:
22, 3, 2, 15, 16, 29, 32, 10, 9, 12, 19, 12, 18, 8, 5, 11, 25, 37, 3, 6.

Για να τα παρουσιάσει γραφικά, ποιο διάγραμμα από τα παρακάτω πρέπει να επιλέξει; …….

(α)



(β)



5. Ο μέσος όρος και το εύρος

5.1 Ο μέσος όρος

Δραστηριότητα 5.1 *(Η έννοια του μέσου όρου)*

Η Μίριαμ περπατάει κάθε μέρα το βράδυ. Την προηγούμενη εβδομάδα περπάτησε 28 χιλιόμετρα όπως το εξής:

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο	Κυριακή	**Σύνολο**
Χιλιόμετρα	3,8	1,7	2,9	5	3,4	5,4	5,8	28

Η Μίριαμ θέλει να περπατήσει την επόμενη εβδομάδα συνολικά τα ίδια χιλιόμετρα, δηλαδή 28 χιλιόμετρα. Όμως, θέλει να κάνει κάθε μέρα τα ίδια χιλιόμετρα.
Πόσα χιλιόμετρα θα πρέπει να κάνει κάθε μέρα; ....

Αυτός ο αριθμός είναι ο **μέσος όρος** για τα χιλιόμετρα 3,8 , 1,7 , 2,9 , 5 , 3,4 , 5,4 , 5,8, ανά μέρα σε μία εβδομάδα. Δηλαδή, θα πρέπει να περπατάει .... χιλιόμετρα την ημέρα.

Ο **μέσος όρος** ή **μέση τιμή** για τα δεδομένα είναι ένας αριθμός. Πολλές φορές σκεφτόμαστε ότι αυτός ο αριθμός εκφράζει 'το δίκαιο' μοίρασμα γι' αυτά τα δεδομένα.

Μαθαίνω

Για να υπολογίσουμε τον μέσο όρο (ή την μέση τιμή) για κάποια δεδομένα, προσθέτουμε όλα τα δεδομένα και μετά διαιρούμε με τον αριθμό από όλα τα δεδομένα.

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα για τα δεδομένα}}{\text{αριθμός των δεδομένων}}$$

Παράδειγμα

Κάθε μέρα στις 8 το πρωί για όλη την εβδομάδα, ο Αμίρ έγραψε τη θερμοκρασία:

5, 3, 1, 0, 1, -2, -1 °C.

Η μέση τιμή για αυτές τις θερμοκρασίες είναι:

Προσθέτουμε όλα τα δεδομένα.

$$\frac{5+3+1+0+1+(-2)+(-1)}{7} = 1^\circ\mathrm{C}.$$

Έχουμε συνολικά 7 δεδομένα.

Άρα η **μέση θερμοκρασία** αυτήν την εβδομάδα είναι $1^\circ\mathrm{C}$.

Η μέση τιμή έχει την ίδια μονάδα με τα δεδομένα.

Υπολογίζουμε τον μέσο όρο με τις συχνότητες

Μαθαίνω

Όταν έχουμε δεδομένα οργανωμένα σ' έναν πίνακα συχνοτήτων χρησιμοποιούμε τις συχνότητες για να υπολογίσουμε τον μέσο όρο.

Παράδειγμα

Ο Χαλίλ παίζει στην ποδοσφαιρική ομάδα του σχολείου του. Στον παρακάτω πίνακα, έγραψε τα γκολ[7] που έβαλαν στα τελαυταία 15 ματς[8].

Αριθμός των γκολ	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Συχνότητα	1	3	4	2	3	2

Μέσος όρος

$$= \frac{1\cdot\mathbf{0} + 3\cdot\mathbf{1} + 4\cdot\mathbf{2} + 2\cdot\mathbf{3} + 3\cdot\mathbf{4} + \boxed{2\cdot\mathbf{5}}}{15}$$

Προσθέτουμε 2 φορές το 5, επειδή σε 2 ματς, έβαλαν από 5 γκολ.

$$= \frac{0+3+8+6+12+10}{15}$$

$$= \frac{39}{15}$$

= 2,6 **γκολ**.

Άρα, στα τελαυταία 15 ματς, ο Χαλίλ με την ποδοσφαιρική του ομάδα έβαλαν **κατά μέσο όρο 2,6 γκολ ανά ματς**.

Συζήτησε με την ομάδα σου για το τι σημαίνει αυτό. ……………………………………………………

5.2 Το εύρος

Μαθαίνω

Όταν έχουμε δεδομένα από αριθμούς, το **εύρος** για τα δεδομένα είναι η διαφορά ανάμεσα στην πιο μεγάλη τιμή και την πιο μικρή τιμή από τα δεδομένα.

Παράδειγμα

- ☞ Για τα δεδομένα 8, 8, 7, 7, 8, 7, το εύρος είναι 8 – 7 = 1.
- ☞ Για τα δεδομένα 12, 15, 5, 50, 150, 45, 30, το εύρος είναι 150 – 5 = 145.
- ☞ Για τα δεδομένα 5, 3, 1, 0, 1, -2, -1, το εύρος είναι 5 - (-1) = 6.

Άσκηση 5.2

Συμπλήρωσε

Έχουμε τα δεδομένα 3, 7, 4, 2, 6, 8. Η μέση τιμή είναι …….. Το εύρος είναι …….

Έχουμε τα δεδομένα 3, 7, 4, 2, 6, 8, 59. Η μέση τιμή είναι …….. Το εύρος είναι …….

Τι παρατηρείς; ……………………………………………………………………….

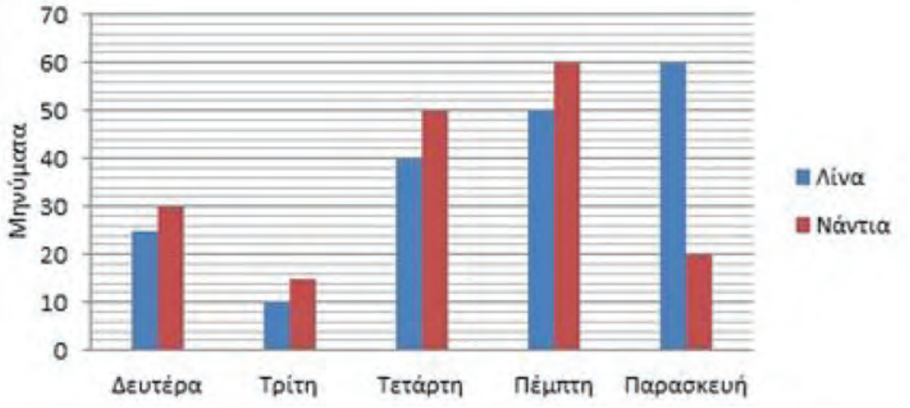
---

[7] Goal.

[8] Match.

Άσκηση 5.3

Στο παρακάτω ραβδόγραμμα, είναι ο αριθμός από μηνύματα που έστειλαν η Λίνα και η Νάντια στο WhatsApp από τη Δευτέρα μέχρι την Παρασκευή.



1) Ο μέσος όρος για τα μηνύματα της Λίνας είναι ....
2) Η Νάντια έστειλε κατά μέσο όρο ....
3) Κατά μέσο όρο ποια στέλνει περισσότερα μηνύματα; ....
4) Το εύρος για τα μηνύματα της Λίνας είναι ....
5) Η Λίνα στέλνει περίπου τον ίδιο αριθμό από μηνύματα κάθε μέρα; ....

Άσκηση 5.4

Η Εκίν, ο Μουσταφά και η Μελέκ συγκρίνουν τους βαθμούς τους στα Μαθηματικά. Έχουν κάνει 6 τεστ. Οι βαθμοί τους είναι στον παρακάτω πίνακα. Η βαθμολογία είναι στα 20.

	Τεστ 1	**Τεστ 2**	**Τεστ 3**	**Τεστ 4**	**Τεστ 5**	**Τεστ 6**
Εκίν	17	16,5	13	13,5	15	10
Μουσταφά	14	12	20	9	16,5	7
Μελέκ	7	9	14	9,5	13,5	9

Συμπληρώνουμε με σωστό ή λάθος;

- Η μέση τιμή για τους βαθμούς της Εκίν είναι ανάμεσα στα 10 και στα 17 ....
- Η μέση τιμή για τους βαθμούς της Μελέκ είναι πιο μικρή από 10 επειδή έχει τους περισσότερους βαθμούς κάτω από τα 10 ....
- Ο Μουσταφά είναι ο καλύτερος στα Μαθηματικά επειδή έχει έναν βαθμό ίσον με 20 ....
- Το εύρος από τους βαθμούς για την Εκίν είναι 7 ....
- Η Εκίν και η Μελέκ έχουν την ίδια μέση τιμή ....
- Κατά μέσο όρο, ο Μουσταφά έχει 10 στα Μαθηματικά ....

Άσκηση 5.5

Ο Αλί έκανε τέσσερα τεστ στα Ελληνικά. Η βαθμολογία είναι στα 20. Ποιους βαθμούς μπορεί να έχει ο Αλί σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις; Συζήτησε με την ομάδα σου και δώστε παραδείγματα.

(α) η μέση τιμή για τα τέσσερα τεστ είναι 12 ……………………………………………………………………….

(β) η μέση τιμή είναι 12 και το εύρος είναι 0 ……………………………………………………………………….

(γ) η μέση τιμή είναι 12 και το εύρος είναι 2 ……………………………………………………………………….

(δ) η μέση τιμή είναι 12 και το εύρος είναι 3 ……………………………………………………………………….

(ε) η μέση τιμή είναι 12 και το εύρος είναι 8 ……………………………………………………………………….

Άσκηση 5.5

Η Μαρία, η Νάντα και η Άϊντα έφεραν στην τάξη καραμέλες.
Κατά μέσο όρο, οι καραμέλες είναι 11 για την κάθε μία.
1) Ξέρουμε ότι η Μαρία έχει 8 καραμέλες. Η Νάντα έχει 5 καραμέλες. Πόσες καραμέλες έχει η Άϊντα;
2) Η Λίνα ήρθε στην παρέα τους. Η Λίνα δεν έφερε καραμέλες. Ποια είναι τώρα η μέση τιμή για τις καραμέλες για όλα τα κορίτσια;

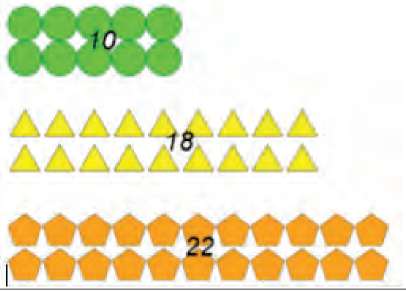
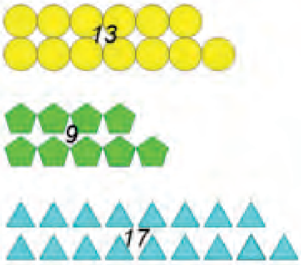
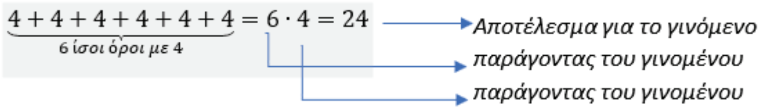
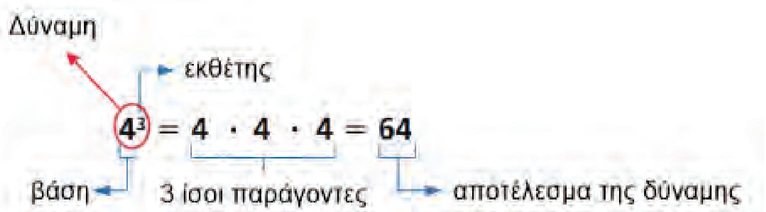
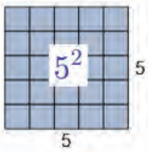
Οι καινούριες μου λέξεις

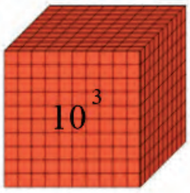
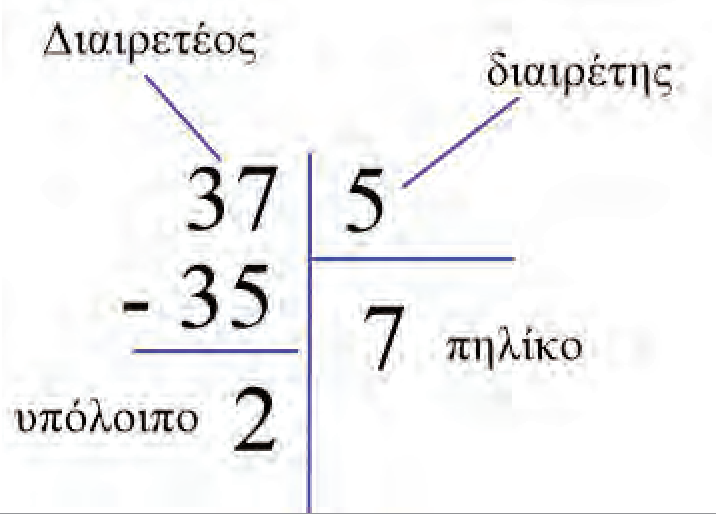
Γράψε τρεις καινούριες ελληνικές λέξεις που συνάντησες σε αυτή την ενότητα.
………
………
………

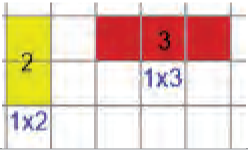
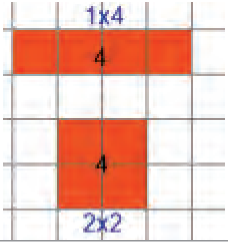
Γράψε τις καινούριες μαθηματικές λέξεις που συνάντησες.
………
………
………

Γλωσσάρι με παραδείγματα 1

Φυσικοί Αριθμοί

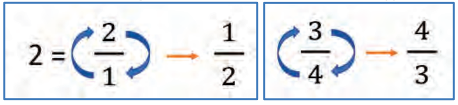
Φυσικοί αριθμοί		
Έννοια	**Παράδειγμα**	**Σελίδα**
Φυσικοί αριθμοί	$0, 1, 2, 3, \dots, 29, 30, \dots, 999, 1000, \dots$	
Άρτιοι (ή ζυγοί) αριθμοί	$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$  	
Περιττοί (ή μονοί) αριθμοί	$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$  	
Πρόσθεση - άθροισμα	10+5=15	
Αφαίρεση – διαφορά	$12 - 2 = 10$	
Πολλαπλασιασμός – γινόμενο – παράγοντες του γινομένου	 	
Δύναμη	$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	
Βάση δύναμης – Εκθέτης δύναμης	 	
Τετράγωνο αριθμού	$2^2, 7^2, 123^2$  	

Κύβος αριθμού	$2^3, 6^3, 304^3$ 	
Διαίρεση – Πηλίκο	$15:3=5$ 	
Διαιρέτης – διαιρετέος – υπόλοιπο		
Ευκλείδεια διαίρεση	$37 = 5 \cdot 7 + 2$	
Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού	Τα πολλαπλάσια του 5 είναι: $0, 5, 10, 15, 20, \ldots$	
Ελάχιστο (μικρότερο) κοινό πολλαπλάσιο	Τα πολλαπλάσια του 5: 0,5,10,15,10,… Τα πολλαπλάσια του 3: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, … $ΕΚΠ(5\,,3) = 15$	
Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού	Οι διαιρέτες του 15 είναι: $1, 3, 5, 15$	
Μέγιστος (μεγαλύτερος) κοινός διαιρέτης	Οι διαιρέτες του 15 είναι: $1, 3, 5, 15$ Οι διαιρέτες του 12 είναι: 1, 2, 3, 4, 6, 12 $ΜΚΔ(15, 12) = 3$	

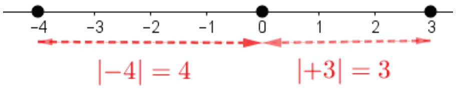
Πρώτοι αριθμοί	2, 3, 5, 7, 11, 13, … 	
Σύνθετοι αριθμοί	4, 6, 8, 9, 12, 15, … 	

Γλωσσάρι με παραδείγματα 2

Κλάσματα		
Έννοια	**Παράδειγμα**	**Σελίδα**
Κλάσμα	Κλάσμα: $\frac{2}{3}$ αριθμητής γραμμή κλάσματος παρονομαστής  Το διαβάζουμε «δύο τρίτα» ή «δύο προς τρία»	1
Ισοδύναμα κλάσματα	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$	4
Απλοποίηση	$\frac{18}{27} = \frac{18:9}{27:9} = \frac{2}{3}$	6
Ανάγωγο κλάσμα	Είναι ανάγωγα: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{5}$ Δεν είναι ανάγωγα: $\frac{2}{4}, \frac{9}{12}, \frac{14}{10}$	6
Ομώνυμα κλάσματα	$\frac{3}{5}, \frac{12}{5}$ $\frac{5}{7}, \frac{3}{7}$ $\frac{6}{13}, \frac{17}{13}$	7
Ετερώνυμα κλάσματα	$\frac{3}{5}, \frac{12}{7}$ $\frac{5}{8}, \frac{3}{7}$ $\frac{6}{13}, \frac{17}{14}$	8
Πρόσθεση κλασμάτων	$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$ $\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3},$ $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$	12
Αφαίρεση κλασμάτων	$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}$ $\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5-2}{3} = \frac{3}{3} = 1,$ $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$	12
Πολλαπλασιασμός κλασμάτων	$\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$, π.χ. $5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3} = \frac{10}{3}$ $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$, π.χ. $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$	17

Αντίστροφοι αριθμοί	$\frac{3}{4}$ με $\frac{4}{3}$, 2 με $\frac{1}{2}$, α με $\frac{1}{\alpha}$  γιατί: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$ =1 , 2 · $\frac{1}{2}$ =1, α · $\frac{1}{\alpha}$ =1	18
Διαίρεση κλασμάτων	$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$, π.χ. $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{6}{5}$	19

Γλωσσάρι με παραδείγματα 3

Ακέραιοι αριθμοί και πράξεις		
Έννοια	**Παράδειγμα**	**Σελίδα**
Φυσικοί αριθμοί ή θετικοί αριθμοί	0, 1, 2, 3, 4, 5, …, 1000, …	2
Αρνητικοί αριθμοί	-1, -2, -3, -4, …., -1000, …	2
Πρόσημο	+4, -7, +9, -122	2
Αριθμογραμμή		2
Ομόσημοι αριθμοί	2 και 5, -6 και -4,	2
Ετερόσημοι αριθμοί	2 και -4, -9 και 7	2
Αντίθετοι αριθμοί	5 και -5, -7 και 7, -123 και 123	3
Ακέραιοι αριθμοί	…, -1000, …, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …, 1000,…	3
Απόλυτη τιμή αριθμού		4

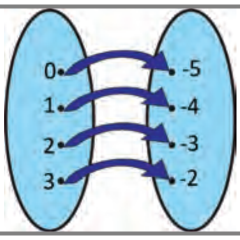
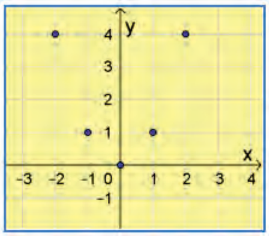
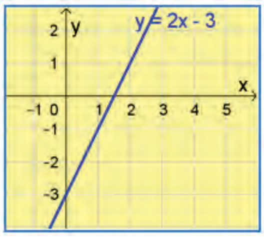
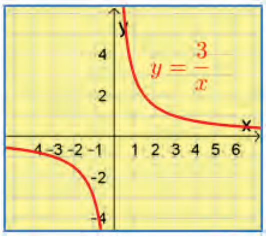
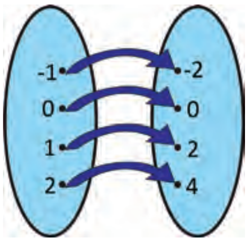
Γλωσσάρι με παραδείγματα 4

Εξίσωση - Ανίσωση

Άλγεβρα: Εξίσωση 1^{ου} βαθμού		
Έννοια	**Παράδειγμα**	**Σελίδα**
Ισότητα	$7 - 3 = 8 \div 2$	2
Εξίσωση 1^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο	$5x - 6 = 10 - 3x$	3
Λύση/ρίζα μιας εξίσωσης	2 είναι η λύση της $5x - 6 = 10 - 3x$	4
Άλγεβρα: Ανίσωση 1ου βαθμού		
Έννοια	**Παράδειγμα**	**Σελίδα**
Ανισότητα	$7 - 3 > 2$, $3+1 < 2 \cdot 5$	1
Ανίσωση 1^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο	$8x - 3 > 12 + 2x$	6
Λύση/ρίζα μιας ανίσωσης	3, 4, 5, 12 είναι λύσεις για $8x - 3 > 12 + 2x$	7

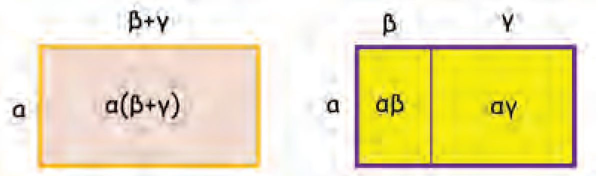
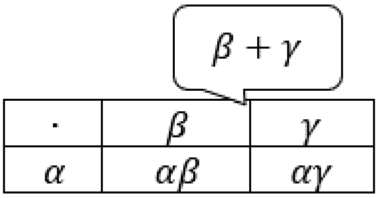
Γλωσσάρι με παραδείγματα 5

<table>
<tr><th colspan="3">Συναρτήσεις</th></tr>
<tr><th>Έννοια</th><th>Παράδειγμα</th><th>Σελίδα</th></tr>
<tr><td>Σύστημα αξόνων
● Άξονας του x
● Άξονας του y
● Αρχή για το σύστημα αξόνων</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>Συντεταγμένες</td><td>
</td><td>2</td></tr>
<tr><td>x-συντεταγμένη</td><td>(-4, 5) , (3, 0) , (0, -2) , (1, -100)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>y-συντεταγμένη</td><td>(-4, 5) , (3, 0) , (0, -2) , (1, -100)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Ποσά ανάλογα</td><td>$\frac{y}{x} = 5$
x 2 x 2
x 3 x 3
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10</td></tr>
<tr><td>6</td><td>30</td></tr>
<tr><td>18</td><td>90</td></tr>
</table></td><td>4</td></tr>
<tr><td>Συντελεστής αναλογίας</td><td>$\frac{y}{x} = a$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Ποσά αντιστρόφως ανάλογα</td><td>x 2 : 2
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>1</td><td>12</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td></tr>
</table>
$x \cdot y = 12$</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Πίνακας τιμών</td><td>
<table>
<tr><td>**x**</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>**y**</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>12</td></tr>
</table></td><td>12</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Διάγραμμα</td><td> </td><td>12</td></tr>
<tr><td>Γραφική παράσταση</td><td>   </td><td>12</td></tr>
<tr><td>Τύπος</td><td>y=-2x, y=2x-1, y=x^2 , y=$\frac{3}{x}$</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Συνάρτηση</td><td><table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr></table> y= 2x
«επί δύο»</td><td>11</td></tr>
<tr><td>Κλίση ευθείας</td><td>y= 2x , y=-3x+4</td><td>15, 19</td></tr>
</table>

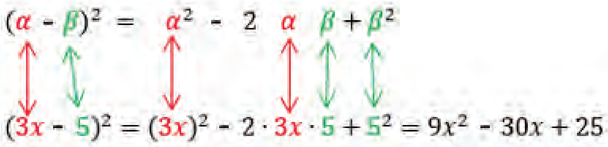
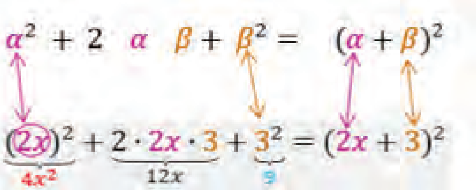
Υπερβολή		22

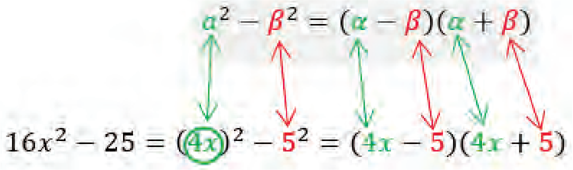
Γλωσσάρι με παραδείγματα 6

Άλγεβρα: Αλγεβρικές παραστάσεις		
Έννοια	**Παράδειγμα**	**Σελίδα**
Μεταβλητή	κ x a	2
Αλγεβρική παράσταση	$3x$ $x+5$ $y^2-2y+\frac{1}{6}$ $3\omega^2\alpha\beta^3$	3
Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης	Για $x=2, \textit{είναι}: x+5=2+5=7$	3
Όμοιοι όροι [1]	$3\alpha+2\beta-\alpha-5\beta+6\alpha$ Όμοιοι (μεταξύ τους) είναι οι: $3\alpha, -\alpha, 6\alpha$ και οι: $2\beta, -5\beta$	6
Επιμεριστική ιδιότητα	$\boldsymbol{\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma}$  	9
Ανάπτυγμα γινομένου	Ανάπτυγμα του γινομένου $\alpha(\beta+\gamma)$ είναι το $\alpha\beta+\alpha\gamma$	9
Μονώνυμο	$3x^2$ $-31xy$ $\frac{1}{3}x^4y^3$ $-x$ 5	12
Κύριο μέρος μονωνύμου Συντελεστής μονωνύμου		12
Όμοια μονώνυμα	Έχουν το ίδιο κύριο μέρος $2\alpha^2\beta, -\alpha^2\beta, \frac{1}{2}\alpha^2\beta$	12
Πολυώνυμο	$3x^2-5x$ $-7x+2y$	12

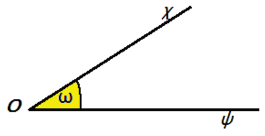
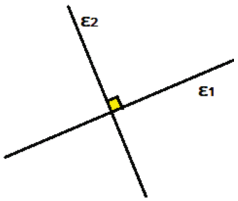
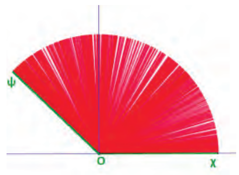
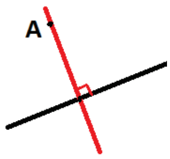
---

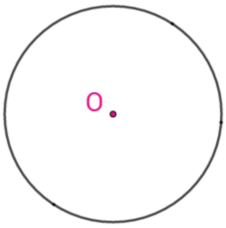
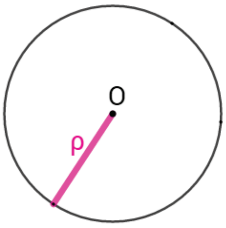
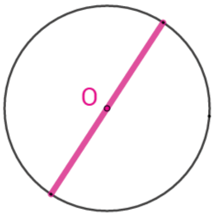
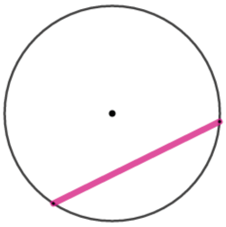
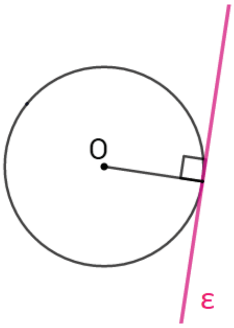
[1] *Δες παρακάτω και τα όμοια μονώνυμα*

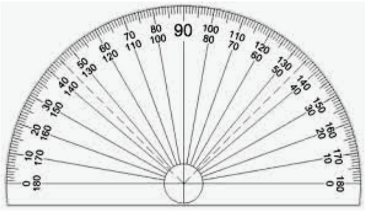
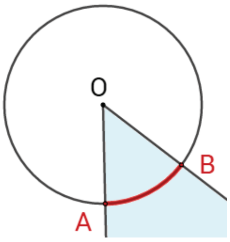
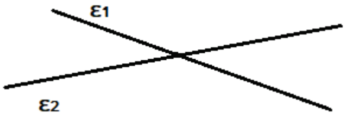
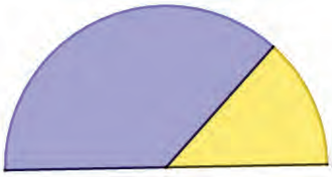
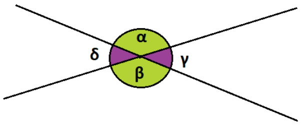
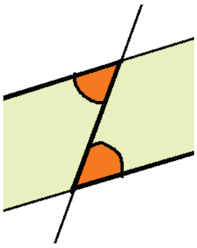
Αναγωγή όμοιων όρων (πρόσθεση μονωνύμων)	$2\alpha^2\beta + 10\alpha^2\beta - 4\alpha^2\beta =$ $= (2 + 10 - 4)\alpha^2\beta =$ $= 8\alpha^2\beta$	13
Πρόσθεση πολυωνύμων	$(2x^2 - 5x + 6) + (x^3 + 3x^2 + 4x - 7) =$ $= 2x^2 - 5x + 6 + x^3 + 3x^2 + 4x - 7 =$ $= x^3 + 5x^2 - x - 1$	13
Πολλαπλασιασμός μονωνύμων	$3\alpha^2\beta \cdot 5\alpha\beta^3\kappa = 15\alpha^3\beta^4\kappa$	14
Πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυώνυμο	$-2x(3x^2 - x + 4) = -6x^3 + 2x^2 - 8x$	16
Παραγοντοποίηση (Μέθοδος κοινού παράγοντα)	$6x^4y^3 + 8x^3y =$ $= 2x^2y \cdot 3x^2y^2 + 2x^2y \cdot 4 =$ $= 2x^2y\,(3x^2y^2 + 4)$	19-20
Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου με πολυώνυμο	$(2x - 3)(5x - 1) = 10x^2 - 17x + 3$	22-23
Παραγοντοποίηση (Μέθοδος της ομαδοποίησης)	$\kappa\alpha + \lambda\alpha + \kappa\beta + \lambda\beta = (\alpha + \beta)(\kappa + \lambda)$	26-27
Ανάπτυγμα τετραγώνου αθροίσματος δύο όρων	$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ $(■ + ●)^2 = ■^2 + 2■\cdot● + ●^2$ π.χ. $(3x + 5)^2 = 9x^2 + 10x + 25$ 	30 και 34
Ανάπτυγμα τετραγώνου διαφοράς δύο όρων	$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ $(■ - ●)^2 = ■^2 - 2■\cdot● + ●^2$ π.χ. $(3x - 5)^2 = 9x^2 - 10x + 25$ 	31 και 34
Παραγοντοποίηση (Μέθοδος αναπτύγματος τετραγώνου)	$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ $■^2 + 2■\cdot● + ●^2 = (■ + ●)^2$ ή $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ $■^2 - 2■\cdot● + ●^2 = (■ - ●)^2$ π.χ. $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$ 	32-33 και 34

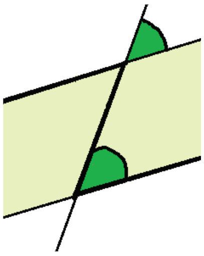
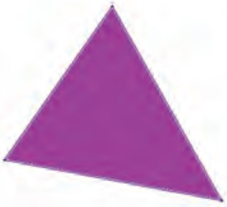
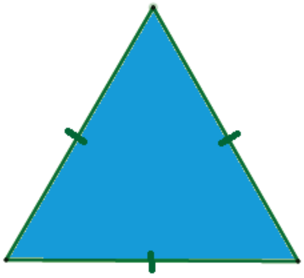
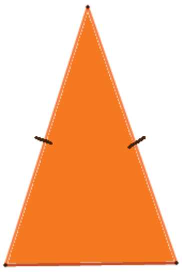
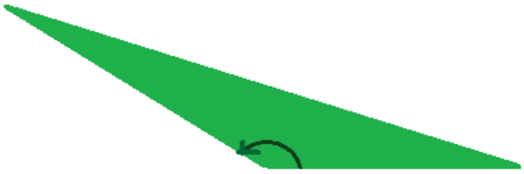
Γινόμενο αθροίσματος επί διαφοράς δύο όρων	$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ π.χ. $(3x+5)(3x-5)=(3x)^2-5^2=9x^2-25$	38
Παραγοντοποίηση (Μέθοδος διαφοράς τετραγώνων)	$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ π.χ. $16x^2-25=(4x-5)(4x+5)$  $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ $16x^2-25=(4x)^2-5^2=(4x-5)(4x+5)$	39-40

Γλωσσάρι με παραδείγματα 7

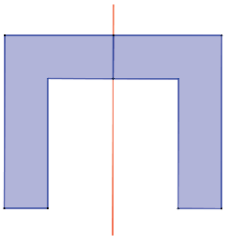
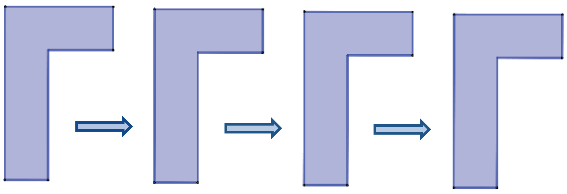
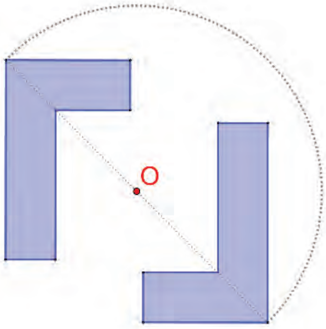
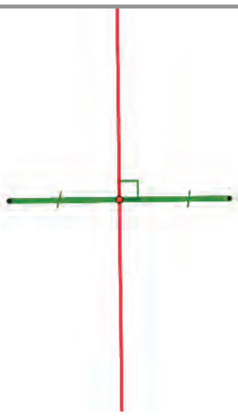
Γεωμετρία: Βασικές γεωμετρικές έννοιες		
Έννοια	**Παράδειγμα**	**Σελίδα**
Σημείο Α		
Ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ		
Ευθεία ε		
Ημιευθεία Αχ		
Γωνία $\widehat{\omega}$		
Ορθή γωνία		
Οξεία γωνία		
Αμβλεία γωνία		
Ευθεία κάθετη προς άλλη		

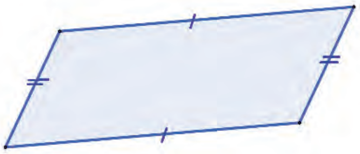
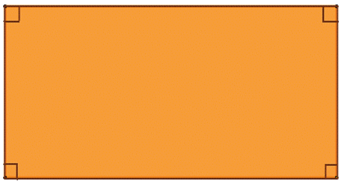
Κύκλος		
Ακτίνα ενός κύκλου		
Διάμετρος		
Χορδή		
Τόξο		
Εφαπτομένη ευθεία		

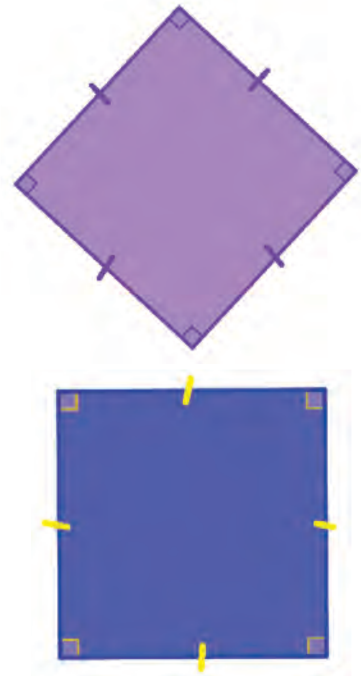
Μοιρογνωμόνιο		
Επίκεντρη γωνία		
Τεμνόμενες ευθείες		
Παράλληλες ευθείες		
Παραπληρωματικές γωνίες		
Κατακορυφήν γωνίες		
Εντός κι εναλλάξ γωνίες		

Εντός-εκτός κι επί τα' αυτά γωνίες		
Τρίγωνο		
Ισόπλευρο τρίγωνο		
Ισοσκελές τρίγωνο		
Ορθογώνιο τρίγωνο		
Αμβλυγώνιο τρίγωνο		

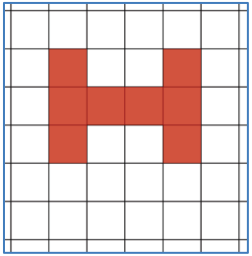
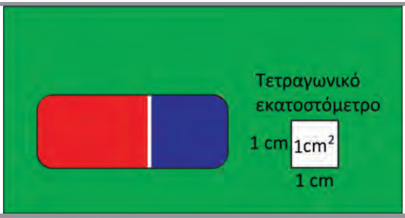
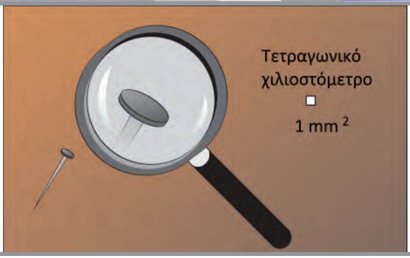
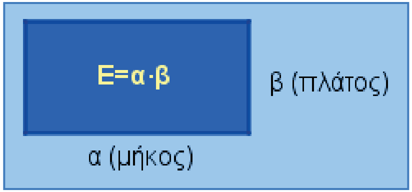
Γλωσσάρι με παραδείγματα 8

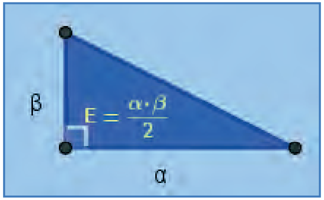
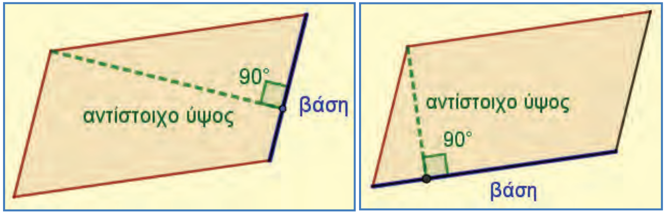
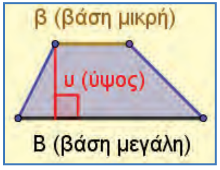
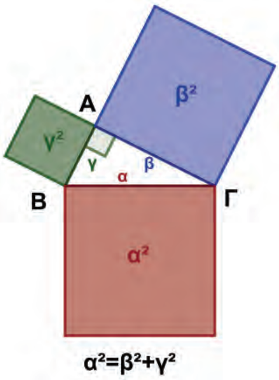
Γεωμετρία: Συμμετρία		
Έννοια	**Παράδειγμα**	**Σελίδα**
Αξονική Συμμετρία (καθρέφτης)		
Μεταφορά		
Κεντρική συμμετρία (στροφή 180ο)		
Μεσοκάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα		

Παραλληλόγραμμο	 	
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο		
Ρόμβος	 	

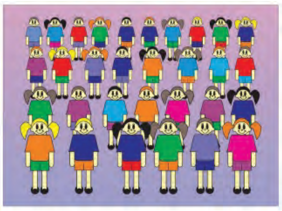
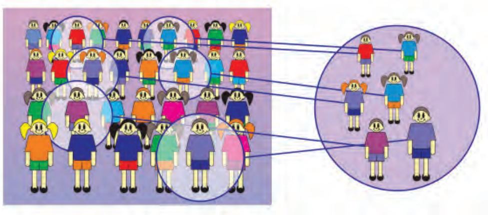
Τετράγωνο		

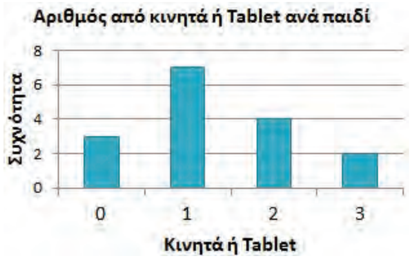
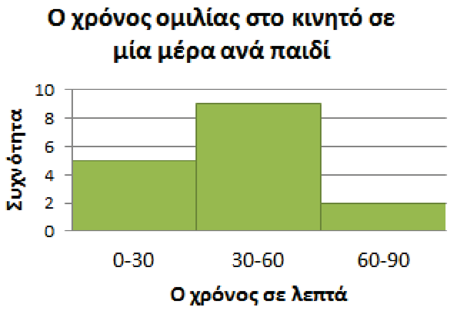
Γλωσσάρι με παραδείγματα 9

Εμβαδά – Πυθαγόρειο θεώρημα		
Έννοια	**Παράδειγμα**	**Σελίδα**
Επιφάνεια		1
Εμβαδόν	Ε = 8 🟥 	4
Τετραγωνικό εκατοστόμετρο		4
Τετραγωνικό μέτρο		5
Τετραγωνικό χιλιοστόμετρο		10
Εμβαδόν ορθογωνίου		5

Εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου		8
Εμβαδόν παραλληλογράμμου	 E= (βάση) x (αντίστοιχο ύψος)	14
Εμβαδόν τριγώνου	 $E = \frac{(\beta ά\sigma\eta)\ x\ (\alpha\nu\tau ί\sigma\tau\omicron\iota\chi\omicron\ ύ\psi\omicron\varsigma)}{2}$	18
Εμβαδόν τραπεζίου	 $E = \frac{(B+\beta)\cdot\upsilon}{2}$	20
Πυθαγόρειο θεώρημα		26

Γλωσσάρι με παραδείγματα 10

Στοχαστικά: Στατιστική		
Έννοια	**Παράδειγμα**	**Σελίδα**
Ο πληθυσμός μιας στατιστικής έρευνας	Παιδιά 12 με 15 χρονών. 	3
Δείγμα		4
Η μεταβλητή μιας στατιστικής έρευνας	Αυτό που μελετάμε στην έρευνά μας. Π.χ. σε μία τάξη με 16 παιδιά, • Ο αριθμός από κινητά ή Tablet. • Το αγαπημένο άθλημα. • Ο χρόνος (σε λεπτά) ομιλίας στο κινητό σε μία μέρα.	3
Δεδομένα	Οι παρατηρήσεις ή μετρήσεις που έχουμε για τη μεταβλητή. Π.χ. • 2, 1, 2, 1, 0, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 0, 1, 2, 1, 0. • Μπάσκετ, βόλεϊ, ποδόσφαιρο, βόλεϊ, ποδόσφαιρο, βόλεϊ, μπάσκετ, βόλεϊ, μπάσκετ, βόλεϊ, ποδόσφαιρο, βόλεϊ, ποδόσφαιρο, μπάσκετ, ποδόσφαιρο, ποδόσφαιρο. • 15, 45, 10, 43, 40, 15, 25, 30, 55, 20, 60, 35, 50, 35, 65, 40.	5
Οι τιμές της μεταβλητής	• 0, 1, 2, 3. • Μπάσκετ, βόλεϊ, ποδόσφαιρο. • 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 43, 45, 50, 55, 60, 65.	5
Η συχνότητα μιας τιμής	Πόσες φορές έχουμε την τιμή στα δεδομένα. • Η συχνότητα της τιμής «3» = 2. • Η συχνότητα της τιμής «βόλεϊ» = 6. • Η συχνότητα της τιμής «30» = 1.	7
Η σχετική συχνότητα μιας τιμής	$= \frac{\text{συχνότητα}}{\text{αριθμός των δεδομένων}}$. Π.χ. • Η σχετική συχνότητα της τιμής «3» = $\frac{2}{16}$. • Η σχετική συχνότητα της τιμής «βόλεϊ» = $\frac{6}{16}$. • Η σχετική συχνότητα της τιμής «30» = $\frac{1}{16}$.	8

<table>
<tr>
<td>Ομαδοποίηση σε κλάσεις</td>
<td>$\underbrace{10, 15, 15, 20, 25,}_{0 \leq \text{χρόνος} < 30}\ \underbrace{30, 35, 35, 40, 40, 43, 45, 50, 55,}_{30 \leq \text{χρόνος} < 60}\ \underbrace{60, 65}_{60 \leq \text{χρόνος} < 90}.$
Κλάση «0-30» Κλάση «30-60» Κλάση «60-90»</td>
<td>16</td>
</tr>
<tr>
<td>Πίνακας συχνοτήτων</td>
<td>
<table>
<tr><th>Αριθμός από κινητά ή Tablet</th><th>Συχνότητα</th></tr>
<tr><td>0</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Σύνολο</td><td>16</td></tr>
</table>
</td>
<td>7</td>
</tr>
<tr>
<td>Ραβδόγραμμα</td>
<td> </td>
<td>12</td>
</tr>
<tr>
<td>Κυκλικό διάγραμμα</td>
<td> </td>
<td>13</td>
</tr>
<tr>
<td>Ιστόγραμμα</td>
<td> </td>
<td>17</td>
</tr>
</table>

Ο μέσος όρος – Η μέση τιμή	• $\frac{2+1+2+1+0+1+3+1+2+1+3+0+1+2+1+0}{16}$ = 1,3125 κινητά/Tablet ανά παιδί. • $\frac{15+45+10+43+40+15+25+30+55+20+60+35+50+35+65+40}{16}$ = 36,4375 λεπτά ομιλίας την ημέρα ανά παιδί.	20
Το εύρος	• 3 – 0 = 3 για τα δεδομένα 2, 1, 2, 1, 0, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 0, 1, 2, 1, 0. • 65 – 10 = 55 για τα δεδομένα 15, 45, 10, 43, 40, 15, 25, 30, 55, 20, 60, 35, 50, 35, 65, 40.	21

unicef
for every child

Funded by the Asylum, Migration and Integration Fund of the European Union

IOM
UN MIGRATION

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΔΔ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ
& ΠΟΛΥΓΛΩΣΣΙΑΣ

Αυτή η έκδοση χρηματοδοτήθηκε από την Ευρωπαϊκή Ένωση. Το περιεχόμενό της εκφράζει τις απόψεις των συγγραφέων της και δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι αντικατοπτρίζει την επίσημη θέση της Ευρωπαϊκής Ένωσης.