Από το ιστολόγιο μαθη…μαγικα

250+ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΓΡΙΦΟΙ ΣΠΑΖΟΚΕΦΑΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΓΙΑ ΔΥΣΚΟΛΕΣ ΩΡΕΣ

Μετά υποδείξεων Ευρετικής

2016-2017

ΔΡΟΥΓΑΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

Συλλογή προβλημάτων, γρίφων και παραδόξων που κατά καιρούς έχουν αναρτηθεί στο ιστολόγιο ΜΑΘΗ..ΜΑΓΙΚΑ. Στα περισσότερα ,δεν απαιτείται άλλο μαθηματικό υπόβαθρο πέρα από τα μαθηματικά του γυμνασίου και των πρώτων τάξεων του λυκείου.Δεν υπάρχει κατηγοριοποίηση,είναι αυτό που λέμε ατάκτως ερριμένα προβλήματα,όπως αναρτήθηκαν χρονολογικά στο ιστολόγιο.Τα περισσότερα είναι παραλλαγμένα διαγωνιστικά προβλήματα,μερικά ανήκουν στην κατηγορία των έξυπνων προβλημάτων που απαιτούν έμπνευση και τέλος υπάρχουν και κλασσικοί γρίφοι-σταθμοί στην ιστορία των ψυχαγωγικών μαθηματικών.Πρόσθεσα εμβόλιμα δυο μίνι παραρτήματα,ένα για την αρχή της περιστεροφωλιάς και ένα με τα απολύτως βασικά για επίδοξους αριθμομνήμονες.

Βιβλιογραφία (Η σειρά είναι τυχαία)

1.Henry Ernest Dudeney - 536 Puzzles and Curious Problems
2.Phillips, Hubert 1961. *My best puzzles in logic and reasoning*. Dover, NY.
3.Phillips, Hubert 1962. *My best puzzles in mathematics*. Dover, NY
4. Joseph S. Madachy Madachy's Mathematical Recreations
5. Martin Gardner, My Best Mathematical and Logic Puzzles
(Κάθε βιβλίο του Martin Gardner αποτελεί αναφορά για τα ψυχαγωγικά μαθηματικά)
6. Aaron J. Friedland, Puzzles in Math and Logic ,Dover
7. Stephen Barr ,Mathematical Brain Benders ,Dover
8. Sam Loyd ,Mathematical Puzzles of Sam Loyd ,Dover
9. Boris A. Kordemsky,The Moscow Puzzles ,Dover
10. D. O. Shklarsky,The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics
11. R. Todev, International Mathematics Tournament of the Towns
12.Paul Vaderlind ,The Inquisitive Problem Solver (MAA Problem Book Series)
13. Martin Erickson Aha! Solutions (MAA Problem Book Series)
14. G. Polya ,The Stanford Mathematics Problem Book ,Dover
15.Paul J. Nahin , Number-Crunching: Taming Unruly Computational Problems from Mathematical Physics to Science Fiction
16. David Wells, Games and Mathematics: Subtle Connections
17. Raymond Smullyan, *What Is the Name of This Book? The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*
18. Raymond Smullyan, *Satan, Cantor and Infinity*
(Αρκετά βιβλία του Raymond Smullyan έχουν μεταφραστεί στα ελληνικά το καθένα τους είναι μοναδικό)
19.A.Engel , Problem solving strategies
20.D.Fomin, S.Genkin,I.Itenberg,Mathematical circles (Russian experience)
21.P.Zeitz, The art and craft of problem solving
22.Barbeau Ed, Klamkin M,Five hundred mathematical challenges
23. Πούλος Ανδρέας,Ο Οιδίποδας και η Σφίγγα
24.Περιοδικά Kvant ,Crux Mathematicorum **,**American Mathematical Monthly, Ευκλείδης Α,Β ,Το Φ
25. Αλγεβρικά Θέματα ,Μ.Γ.Μαραγκάκης
26.Το σαλιγκαράκι και άλλα γριφώδη μαθηματικά παιχνίδια, Δαυιδόπουλος Μ.-Τολιόπουλος κ.
27.Μαθηματικές σπαζοκεφαλιές 1,2,3, Bolt,B
28.Αριθμοί και άλλα ,Αγάπης Τ.
29.θησαυρός προβλημάτων ,Ψαράκης Γ
30. David Darling, The Universal Book of Mathematics
31.Barbeau E.,Mathematical Fallacies,Flaws (MAA 2000)
32.Πούλος Ανδρέας, Συνδυαστική Απαρίθμηση και Συνδυαστική Γεωμετρία
33. http://nrich.maths.org/
34.Mathematics Magazine
35.Διασκεδαστικά μαθηματικά,Yakov Perelman
36.Μαθηματικοί γρίφοι1,2,Quantum
37.Το βιβλίο των κοινών αριθμητικών τόπων, Δρούγας Α.
38. Math Wonders to Inspire Teachers and Students, Alfred S. Posamentier
39. Mathematical Lateral Thinking Puzzles, Paul Sloane ,Des MacHale's
40. Το πανηγύρι των μαθηματικών», Μάρτιν Γκάρντνερ
41.Figuring out, Nuno Crato

 Οι λύσεις στην σελ 166

«Που τελειώνει το παιχνίδι και που αρχίζουν τα σοβαρά μαθηματικά;
Για πολλούς,τα μαθηματικά, νοούμενα ως θανασίμως βαρετά,δεν έχουν καμιά σχέση με το παιχνίδι.Αντιθέτως,στα μάτια των περισσότερων μαθηματικών δεν παύουν ποτέ να αποτελούν ένα παιχνίδι,όντας ταυτόχρονα και πολλά άλλα πράγματα.»

Miguel de Guzman

Περιεχόμενα

Ευρετική για ατζαμήδες

Μαθηματικοί γρίφοι

Ευρετική για ατζαμήδες…

THE FEYNMAN
ALGORITHM

[1] WRITE DOWN THE
PROBLEM

[2] THINK VERY HARD

[3] WRITE DOWN THE
ANSWER

Μαθήματα Ευρετικής. (Αναζητώντας μοτίβο)

Ακολουθίες αριθμών που ζητείται να βρεθεί ο επόμενος όρος.Τέτοιου είδους προβλήματα εκφράζουν απόλυτα μια μέθοδο επίλυσης προβλημάτων η οποία ονομάζεται «αναγνώριση μοτίβων»(pattern recognition).
Αναζήτηση κανονικοτήτων σε μια σειρά αριθμών σημαίνει πρακτικά ότι ψάχνουμε τον κανόνα που «κρατά» τους αριθμούς «δεμένους»,το σχέδιο που ακολουθούν,για να κατορθώσουμε να εντοπίσουμε τον επόμενο. Ας δούμε αναλυτικά ένα παράδειγμα:

Δίνεται το παρακάτω τρίγωνο από φυσικούς αριθμούς:

1

2 3 4

5 6 7 8 9

10 11 12 14 13 14 15 16

17 18 19 20 21 22 23 24 25

26 27 28 29 30 ……….

Να βρεθεί σε ποια γραμμή βρίσκεται ο αριθμός 2011;

Ποιες είναι οι πρώτες σκέψεις που κάνουμε;

Αρχικά διαπιστώνουμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε σε ποια γραμμή βρίσκεται ο 2011. «χειροκίνητα». Δηλαδή δεν πρόκειται να συνεχίσουμε να γράφουμε τις σειρές των αριθμών ωσότου πετύχουμε το 2011.

Η πρώτη σκέψη είναι να κοιτάξουμε το πλήθος των στοιχείων των γραμμών του τριγώνου:

Στην πρώτη γραμμή έχουμε 1 στοιχείο.

>> δεύτερη γραμμή έχουμε 3 στοιχεία.

>> τρίτη γραμμή έχουμε 5 στοιχεία.

>> τέταρτη γραμμή έχουμε 8 στοιχεία.

>> πέμπτη γραμμή έχουμε 9 στοιχεία.

όμως αυτό δεν βοηθά οι αριθμοί δεν σχετίζονται μεταξύ τους ,τουλάχιστον με την πρώτη ματιά. Στρεφόμαστε αλλού,βλέπουμε ότι ο τελευταίος αριθμός κάθε γραμμής είναι τέλειο τετράγωνο .

Ξαναγράφουμε το τρίγωνο:

1^2

2 3 2^2

5 6 7 8 3^2

10 11 12 14 13 14 15 4^2

17 18 19 20 21 22 23 24 5^2

26 27 28 29 30 ……….

Προχωρώντας ένα βήμα παραπέρα ,παρατηρούμε ότι δεν είναι κάθε όρος στο τέλος της γραμμής μόνο τέλειο τετράγωνο **αλλά είναι συγχρόνως** και ο αύξοντας αριθμός της γραμμής :

$\underline{1^η}$ γραμμή $\underline{1}^2$

$\underline{2^η}$ γραμμή **2 3** $\underline{2}^2$

$\underline{3^η}$ γραμμή **5 6 7 8** $\underline{3}^2$

$\underline{4^η}$ γραμμή **10 11 12 14 13 14 15** $\underline{4}^2$

$\underline{5^η}$ γραμμή **17 18 19 20 21 22 23 24** $\underline{5}^2$

$\underline{6^η}$ γραμμή **26 27 28 29 30** ……….

Παρατηρούμε επίσης ότι οι αριθμοί κάθε γραμμής πλην των τετραγώνων βρίσκονται ανάμεσα σε διαδοχικά τετράγωνα.Το ερώτημα είναι ανάμεσα σε ποια τέλεια τετράγωνα βρίσκεται ο 2011; Κάνουμε πράξεις και διαπιστώνουμε ότι 44^2 =1936 και 45^2 =2025 .Οπότε 1936<2011<2025 άρα $44^2<2011<45^2$.Τελικά ο 2011 βρίσκεται στην $45^η$ γραμμή.Ας δούμε ένα ανάλογο πρόβλημα. Τοποθετούμε όλους τους φυσικούς αριθμούς στον ακόλουθο πίνακα.

Α	**Β**	**Γ**	**Δ**	**Ε**
1		2		3
	4		5	
6		7		8
	9		10	
11		12		13
	14		15	
..		..		….

Σε ποια στήλη βρίσκεται ο αριθμός 2011;

Παρατηρούμε ότι σε κάθε στήλη οι αριθμοί διαφέρουν κατά 5 μονάδες (λογικό εφόσον έχουμε 5 στήλες).Συγκεκριμένα έχουμε αριθμούς της μορφής :

Στην στήλη Α: 1,6,11,………. 5κ+1,κ φυσικός αριθμός

Στην στήλη Γ : 2,7,12…………..5κ+2,κ φυσικός αριθμός

Στην στήλη Ε: 3,8,13,…………5κ+3,κ φυσικός αριθμός

Στην στήλη Β: 4,9,14,…………..5κ+4,κ φυσικός αριθμός

Στην στήλη Δ: 5,10,15,…………..5κ,κ φυσικός αριθμός

Άρα για να βρούμε σε ποια στήλη βρίσκεται το 2011,αρκεί να διαιρέσουμε με το 5 και να υπολογίσουμε το υπόλοιπο. Το υπόλοιπο είναι 1 άρα το 2011 βρίσκεται στην στήλη Α.

Μια συμβουλή για την διδασκαλία των μαθηματικών από τον Λέοναρντ Όιλερ

Την περίοδο 1734-35,ο Ελβετός μαθηματικός Λέοναρντ Όιλερ (1707-1783) έγραψε ένα βιβλίο στοιχειώδους άλγεβρας με τίτλο *«Εισαγωγή στην τέχνη του υπολογισμού,για χρήση στα γυμνάσια της αυτοκρατορικής Ακαδημίας Επιστήμων της Αγίας Πετρούπολης»*. Στο βιβλίο αυτό συμβουλεύει:

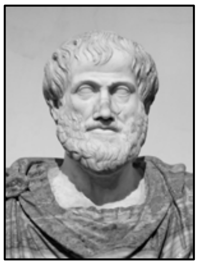
Λέοναρντ Όιλερ (1707-1783)

«Η απομνημόνευση των κανόνων υπολογισμού χωρίς κατανόηση ούτε αρκεί για να επιλυθούν όλες οι περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν ούτε οξύνει την διάνοια, κάτι που πρέπει να είναι ο πρωταρχικός στόχος της διδασκαλίας. Έχουμε συνεπώς προσπαθήσει σκληρά να εξηγήσουμε την λογική όλων των κανόνων και των πράξεων σε αυτόν τον οδηγό με τέτοιο τρόπο που ακόμα και άνθρωποι που δεν έχουν κάνει ακόμα προχωρημένες σπουδές μπορούν να τα κατανοήσουν και να τα αποδεχτούν.

Με αυτή την προσέγγιση ελπίζουμε να πετύχουμε το όφελος ότι τα παιδιά-εκτός του να αποκτούν την κατάλληλη δεξιότητα στο λογισμό-πάντα θα αντιλαμβάνονται την πραγματική λογική της κάθε πράξης στο μυαλό τους με αποτέλεσμα να συνηθίσουν σταδιακά να ακούγονται λογικά.

Αυτά,γιατί κάθε άνθρωπος πιάνει και συγκρατεί στο μυαλό του πολύ πιο εύκολα τα γεγονότα των οποίων βλέπει ξεκάθαρα την λογική και προέλευση,και είναι σε θέση επίσης να κάνει πολύ καλύτερα χρήση αυτών σε όλες τις περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν.»

Μαθήματα Ευρετικής.Η αρχή της περιστεροφωλιάς και η Αριστοτελική οξυδέρκεια



Ο πρώτος κανόνας διδασκαλίας είναι να γνωρίζετε αυτό που πρόκειται να διδάξετε.

Ο δεύτερος κανόνας είναι να γνωρίζετε λίγο περισσότερα από αυτά που πρέπει να διδάξετε.

Ο τρίτος κανόνας είναι να εφαρμόζετε απαρέγκλιτα τους δυο πρώτους κανόνες.

Ανώνυμος μαθηματικός

Ο G.Polya στο κλασσικό του βιβλίο *«πώς να το λύσω»* ισχυρίζεται ότι η σύλληψη μιας φαεινής ιδέας είναι μια πράξη οξυδέρκειας και παραθέτει τον Αριστοτέλη:

Οξυδέρκεια είναι να μαντέψουμε δια μιας,σε μια στιγμή, ουσιαστικές σχέσεις που διέπουν ένα φαινόμενο.Για παράδειγμα δείτε έναν άνθρωπο να συνομιλεί με έναν συγκεκριμένο τρόπο με έναν πλούσιο,μπορείτε στην στιγμή να μαντέψετε ότι αυτός ο άνθρωπος προσπαθεί να δανειστεί χρήματα.Η παρατηρώντας ότι η φωτεινή πλευρά της σελήνης βρίσκεται πάντα προς το μέρος του Ήλιου,μπορεί ξαφνικά να αντιληφθείτε γιατί συμβαίνει αυτό:δηλαδή,επειδή η σελήνη λάμπει μέσω του φωτός του Ήλιου.

Δεν μπορώ να φανταστώ χαρακτηριστικότερο παράδειγμα απλής μα και οξυδερκούς μαθηματικής σύλληψης από την αρχή της περιστεροφωλιάς.

Ας υποθέσουμε ότι σας καλούν σε μια κοσμική συγκέντρωση, ένα πάρτι,μια ιδιότυπη συγκέντρωση όπου υπάρχει μια αμοιβαιότητα γνωριμίας ανάμεσα στους καλεσμένους ,δηλαδή αν οποιοσδήποτε από τους καλεσμένους γνωρίζει κάποιον άλλον τότε και ο άλλος γνωρίζει αυτόν.(αν ο χ καλεσμένος είναι γνωστός με τον ψ τότε υποχρεωτικά και ο ψ είναι γνωστός με τον χ) .Πως θα σας φαινόταν αν σας έλεγα ότι τουλάχιστον δυο καλεσμένοι θα έχουν τον ίδιο αριθμό γνωστών στην συγκέντρωση. Εν πρώτοις φαίνεται αλλοπρόσαλλο.
Ας το σκεφτούμε λίγο.

Έστω ότι στο πάρτι υπάρχουν Ν καλεσμένοι.Έστω,επίσης ότι κατασκευάζουμε ταμπελάκια με αρίθμηση 0,1,2,3,4,…..Ν-1,και δίνουμε σε κάθε καλεσμένο ένα ταμπελάκι στον αριθμό του οποίου αντιστοιχίζεται ο αριθμός των γνωστών του.

Παρατηρούμε ότι μόνο ένα από τα ταμπελακια με τους αριθμούς 0 και Ν-1 θα δινόταν σε καλεσμένο γιατί αποκλείεται ένας καλεσμένος να μην έχει γνωστούς και συγχρόνως ένας άλλος να τους γνωρίζει όλους στο πάρτι. Άρα έχουμε Ν-1 ταμπελάκια και Ν καλεσμένους.Έχουμε δηλαδή λιγότερους αριθμούς στα ταμπελάκια από το πλήθος των καλεσμένων, μοιραία λοιπόν δυο καλεσμένοι θα έπαιρναν ταμπελάκια με το ίδιο αριθμό,θα είχαν δηλαδή τον ίδιο αριθμό γνωστών στην συγκέντρωση.

 Οι λύσεις στην σελ 166

Η ιδέα που κρύβεται πίσω από αυτό το γνωστό πρόβλημα ονομάζεται αρχή των θυρίδων του Ντιριχλε (Dirichlet's Box Principle) ή αλλιώς αρχή της περιστεροφωλιάς (pigeonhole principle).Το θεώρημα αποδίδεται στον Γερμανό Μαθηματικό Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Από μικρό παιδί ακόμα, είχε φανεί η μεγάλη κλίση του Dirichlet στα μαθηματικά. Συνεχίζοντας τις σπουδές του μετά το γυμνάσιο στη Γερμανία και τη Γαλλία, ο Dirichlet είχε την τύχη να διδαχθεί από τους σπουδαιότερους Μαθηματικούς εκείνης της εποχής όπως τον Ohm,τον Fourier,τον Laplace, τον Legendre και τον Poisson.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805–1859)

Ο ίδιος υπήρξε εξαίρετος δάσκαλος που εκφραζόταν πάντα με πολύ μεγάλη σαφήνεια.Το 1855 μετά το θάνατο του Gauss, είχε την τιμή να τον διαδεχθεί στο Gottingen.Η αρχή της περιστεροφωλιάς (ή αρχή του Dirichlet) αναφέρεται πρώτη φορά στο βιβλίο του,
Recherches sur les forms quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes
που εκδόθηκε το 1842.

Η αρχή της περιστεροφωλιάς είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο το όποιο χρησιμοποιείται στην συνδυαστική ανάλυση.Αλλά η βασική ιδέα είναι πολύ απλή και εξηγείται εύκολα.
Ας φανταστούμε 3 περιστέρια τα όποια πρέπει να τοποθετηθούν σε 2 περιστεροφωλιές.Μπορούμε να το κάνουμε; Φυσικά και μπορούμε αλλά είναι προφανές ότι με όποιο τρόπο και αν βάλουμε τα περιστέρια,σίγουρα ,σε μια περιστεροφωλιά θα τοποθετήσουμε τουλάχιστον δυο περιστέρια.
Μπορούμε να γενικεύσουμε για πολύ μεγαλύτερους αριθμούς.Η αρχή της περιστεροφωλιάς διατυπώνεται ως εξής:

Αν ν περιστέρια τοποθετηθούν σε ν-1 περιστεροφωλιές ,μια περιστεροφωλιά πρέπει να έχει τουλάχιστον δυο περιστέρια.

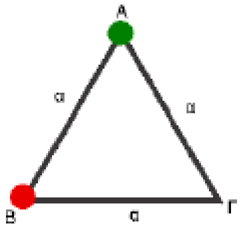
Υπάρχει και μια άλλη εκδοχή της αρχής η οποία ισχυρίζεται ότι η μεγίστη τιμή ενός μη κενού συνόλου πραγματικών αριθμών είναι ίση η μεγαλύτερη από την μέση τιμή των αριθμών.Μην σας τρομάζει η διατύπωση,η ιδέα προσεγγίζεται πολύ εύκολα διαισθητικά. Αν έχουμε 15 ανθρώπους τότε τουλάχιστον δυο από αυτούς γεννήθηκαν την ιδία μέρα της εβδομάδας,15/7 =2,1 άνθρωποι ανά ημέρα της εβδομάδας .

Σε μια διαφορετική διατύπωση:
«αν έχουμε κν+1 ή περισσότερα αντικείμενα και πρέπει να κατανεμηθούν σε ν κουτιά, τότε κάποιο από τα κουτιά πρέπει να περιέχει τουλάχιστον κ+1 αντικείμενα» ή πιο συγκεκριμένα στο προηγούμενο παράδειγμα 15=2* 7 +1 .
Είναι λογικό διότι, αν θεωρήσουμε λ_1, λ_2 ,λ_1 ,...., λ_ν το πλήθος των αντικειμένων στο 1^o ,2^o ,3^o ,...,ν-ιοστό κουτί και υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει κουτί με κ+1 αντικείμενα τότε θα ισχύει:

$$\lambda_1<=\kappa$$
$$\lambda_2<=\kappa$$
$$\lambda_3<=\kappa$$
$$.$$
$$.$$
$$\lambda_\nu<=\kappa$$

Προσθέτουμε κατά μέλη : $\lambda_1 +\lambda_2 +\lambda_1 +....+\lambda_\nu<=\kappa\nu<\kappa\nu+1$, άτοπο.
Μερικές εφαρμογές της αρχής
1)Μεταξύ τριών προσώπων, υπάρχουν τουλάχιστον δύο του ίδιου φύλου. Σε 3 αριθμούς (άνισους του μηδέν!) τουλάχιστον οι 2 είναι ομόσημοι.
2) Αν έχουμε 25 λέξεις τότε σίγουρα δυο από αυτές θα αρχίζουμε τα ίδιο γράμμα .Οι 25 λέξεις (περιστέρια) και 24 γράμματα (περιστεροφωλιες) του ελληνικού αλφάβητου.
3) Ανάμεσα σε ν διαδοχικούς αριθμούς τουλάχιστον 1 διαιρείται με τον ν (ν-1 υπόλοιπα-φωλιές)

4)Χρωματίζουμε όλα τα σημεία του επιπέδου πράσινα ή κόκκινα (Π ή Κ). Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2 σημεία με το ίδιο χρώμα, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 10 Km. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α=10 Km. Οι κορυφές του τριγώνου είναι 3 (περιστέρια) και τα χρώματα 2(φωλιές). Άρα με 1 χρώμα (φωλιά) θα χρωματιστούν τουλάχιστον 2 κορυφές (περιστέρια). Άρα 2 τουλάχιστον κορυφές θα έχουν το ίδιο χρώμα.



5)Στην Αθήνα των 2.640.701 κατοίκων σίγουρα υπάρχουν τουλάχιστον 13 άνθρωποι (που δεν είναι φαλακροί) οποίοι έχουν τον ίδιο αριθμό από τρίχες στο κεφάλι τους δεδομένου ότι κανένας άνθρωπος δεν έχει πάνω από 200.000 τρίχες στο κεφάλι του . (2.640.701=13*200.000+40.701)

6)Την στιγμή που γράφω αυτήν ανάρτηση σίγουρα υπάρχουν δυο αναρτήσεις με τον ίδιο αριθμό από σχόλια στην διάρκεια ενός έτους.Δεδομένου ότι υπάρχουν πάνω από 8.2 εκατομμύρια blogs και για καμία ανάρτηση δεν υπάρχουν ετήσια πάνω από 8.2 εκατομμύρια σχόλια.

7) Αν διαλέξουμε τυχαία πέντε αριθμούς από τους ακεραίους από το 1 μέχρι το 8 τότε δυο από αυτούς πρέπει να έχουν άθροισμα 9.

Κάθε αριθμός από το 1 μέχρι το 8 μπορεί σαν ζευγάρι κάποιον άλλο από τους 8 να έχει άθροισμα 9 .Συνολικά είναι 4 τέτοια ζεύγη.

1 με 8
2 με 7
3 με το 6 και τέλος 4 με 5

Ο καθένας από 5 αριθμούς πρέπει να ανήκει σε ένα από τα τέσσερα ζευγάρια, άρα από την αρχή της περιστεροφωλιάς ένα ζεύγος σίγουρα ανήκει στην ομάδα των 5 οπότε έχει άθροισμα 9.

8)(θέμα από Thaddeus Gorian college)

Ο Παπαδόπουλος διατηρεί ένα διαδικτυακό κατάστημα και εμπορεύεται φορητούς υπολογιστές. Κοιτώντας τις πωλήσεις που έκανε στο χρονικό διάστημα από την $1^η$ Μαρτίου μέχρι την $16^η$ Μαΐου, έκανε τις εξής παρατηρήσεις

- Κάθε μέρα κατόρθωσε να πουλήσει τουλάχιστον ένα υπολογιστή.
- Δεν πούλησε συνολικά παραπάνω από 132 υπολογιστές.(για το παραπάνω χρονικό διάστημα)

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν κάποιες συνεχόμενες μέρες που ο Παπαδόπουλος πούλησε ακριβώς 21 υπολογιστές. Το κατάστημα είναι διαδικτυακό , άρα στο παραπάνω χρονικό διάστημα δεν υπάρχουν αργίες ,ούτε ημέρες που το κατάστημα δεν λειτούργησε.

Σκεφτόμαστε ως εξής:

Από την $1^η$ Μαρτίου μέχρι την $16^η$ Μαΐου έχουμε συνολικά 77 ημέρες .Έστω Y_i ο αριθμός των υπολογιστών που πούλησε μέχρι και την i μέρα .Έχουμε λοιπόν:

$1<=Y_1< Y_2<\dots <Y_{77}<=132$ προσθέτουμε το 21

$22<= Y_1+21< Y_2+21<\dots< Y_{77}+21<=153$

Όμως μεταξύ των παραπάνω 154 αριθμών

$Y_1, Y_2,.. ,Y_{77},.. Y_1+21, Y_2+21,\dots,Y_{77}+21$

από την αρχή της περιστεροφωλιάς θα υπάρχουν σίγουρα δυο ίσοι αριθμοί άρα υπάρχουν δείκτες ημερών i και j τέτοια ώστε $Y_i = Y_j +21$ έτσι ο Παπαδόπουλος θα έχει πουλήσει ακριβώς 21 υπολογιστές τις μέρες j+1,j+2,..,i.

9)Από τον διαγωνισμό Θαλή.

Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 577 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Σε οποιαδήποτε ομάδα 9 παιδιών υπάρχουν τουλάχιστον 2 παιδιά με το ίδιο ύψος. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ομάδα 5 παιδιών από την ίδια χώρα, του ιδίου φύλου και του ιδίου ύψους.

Έχουμε 577 (παιδιά)=64*9(χώρες)+1.Άρα τουλάχιστον μια χώρα θα έχει τουλάχιστον 65 παιδιά.Αφού:65=2*32+1 Σημαίνει πως 33 τουλάχιστον παιδιά είναι και του ιδίου φύλου.Έστω τώρα πως σε αυτά τα 33 παιδιά δεν υπάρχει ομάδα 5 παιδιών του ιδίου ύψους.Τότε θα υπάρχουν ομάδες με 4 το πολύ παιδιά του ιδίου ύψους. Επειδή 33=4*8(ομάδες)+1 θα υπάρχουν τουλάχιστον 8+1=9 ομάδες παιδιών του ιδίου ύψους μέσα από τα 33 παιδιά που αναφέραμε. Αν από καθεμία από αυτές τις 9 ομάδες πάρουμε ένα παιδί τότε θα δημιουργήσουμε μια ομάδα 9 παιδιών που έχουν όλα διαφορετικό ύψος. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι δίνεται ότι σε οποιαδήποτε ομάδα 9 παιδιών υπάρχουν τουλάχιστον 2 παιδιά με το ίδιο ύψος.

10) Σε ένα ελληνικό πανεπιστήμιο φοιτούν 2800 χιλιάδες φοιτητές τότε σίγουρα υπάρχουν τουλάχιστον 54 φοιτητές θα κατάγονται από τον ίδιο νομό της Ελλάδας. (Οι νομοί της Ελλάδας είναι 51 άρα 2800/51 =54,90196078431372).

Άπειρο πλήθος μαθηματικών μπαίνουν ένας-ένας σε ένα μπαρ .Ο πρώτος λέει στο μπάρμαν. "Ένα ποτήρι μπίρα , παρακαλώ!!

Ο δεύτερος λέει" Θα πάρω μισό ποτήρι μπίρα ".

Ο τρίτος λέει "Ένα τέταρτο του ποτηριού μπίρα".

Ο Μπάρμαν δεν περιμένει να ακούσει τον τέταρτο,βάζει στον πάγκο δυο ποτήρια μπύρα. Οι μαθηματικοί απορούν,"καλά μόνο αυτό μπορείς να μας δώσεις;".

Ο μπάρμαν απαντάει:"Ελάτε, πρέπει να γνωρίζετε τα όρια σας!"

Μαθήματα Ευρετικής,προβλήματα λογικής!!!

Οι πιο δημοφιλείς σπαζοκεφαλιές είναι οι σπαζοκεφαλιές λογικής .Ίσως , γιατί δεν προϋποθέτουν μαθηματικό υπόβαθρο και μπορεί οποιοσδήποτε να ασχοληθεί μαζί τους.Σπαζοκεφαλιές που εμπλέκουν ανθρώπους που λένε πάντα ψέματα (ψεύτες) και ανθρώπους που λένε πάντα την αλήθεια (ειλικρινείς). Στις επόμενες γραμμές θα αποκαλύψουμε λίγη από την μαγεία αυτών των προβλημάτων κάνοντας λόγο για το τέχνασμα της διπλής άρνησης.Ας δούμε δυο πολύ γνωστά προβλήματα λογικής και πως εμπλέκεται στο πρώτο η διπλή άρνηση.

Πρόβλημα $1^{ο}$

Σε ένα δρόμο έχουμε μια διασταύρωση .Το ένα μονοπάτι οδηγεί στην πολη A, η οποία κατοικείται μόνο από ειλικρινείς (λένε πάντα την αλήθεια) .Το άλλο μονοπάτι οδηγεί στην πόλη Β,που κατοικείται μόνο από ψεύτες (λένε πάντα ψέματα).Στην διασταύρωση συναντάτε ένα κάτοικο της μιας από τις δυο πόλεις.Ποια ερώτηση θα του κάνατε,μόνο μια,με απάντηση η «Ναι» η «Όχι» η οποία θα σας οδηγούσε στην πόλη Α.

Η ερώτηση που θα πρέπει να του υποβάλλετε είναι αφού δείξετε με το χέρι το ένα από τα δυο μονοπάτια (δεν έχει σημασία ποιο) είναι:

«Πηγαίνει αυτός ο δρόμος στην πόλη σου;»

Μια καταφατική απάντηση σημαίνει ότι ο συγκεκριμένος δρόμος οδηγεί στην πόλη Α ,ενώ μια αρνητική σημαίνει ότι οδηγεί στην πόλη Β .Ειδικότερα ,αν εκείνος που απάντησε ζει στην πόλη Α, τότε το «Ναι» του σημαίνει ότι ο δρόμος οδηγεί στην Α ενώ το «Όχι» οδηγεί σημαίνει ότι οδηγεί στην Β , αφού λέει μόνο την αλήθεια .Από την άλλη, αν ζει στην Β, τότε είναι ψεύτης και το Ναι» του σημαίνει ότι ο δρόμος δεν οδηγεί στην Β (άρα οδηγεί στην Α) ενώ το «όχι» του σημαίνει ότι οδηγεί την Β στην οποία κατοικεί. Σε κάθε περίπτωση , η απάντηση «Ναι» σημαίνει ότι ο δρόμος οδηγεί στην Α και η απάντηση «Όχι» σημαίνει ότι ο δρόμος οδηγεί στην Β.
Υπάρχουν και άλλες λύσεις του προβλήματος όλες όμως χρησιμοποιούν την ίδια ιδέα. Η ερώτηση πρέπει να διατυπωθεί έτσι ώστε ο ψεύτης να πρέπει να δώσει μια «διπλή αρνητική» απάντηση σε αυτήν.Αφού η διπλή άρνηση είναι κατάφαση η απάντηση του ψεύτη θα συμπίπτει με αυτή του ειλικρινούς .

Πρόβλημα $2^{ο}$

Στο δεύτερο πρόβλημα δίνονται και αριθμητικά δεδομένα ενώ με την γενίκευση του έχει ασχοληθεί ενδελεχώς ο *Μάρτιν Γκάρντνερ* στο βιβλίο του «My best puzzles in math and logic» .

"Σε μια κοσμική συγκέντρωση συμμετέχουν Ν προσκεκλημένοι-κάποιοι από αυτούς κατάγονται από το ψευδοχώρι (ψευδοχωρίτες)ενώ οι υπόλοιποι κατάγονται από το Αληθοχώρι (αληθοχωρίτες).Είναι γνωστό ότι συμμετέχουν περισσότεροι αληθοχωρίτες από ότι ψευδοχωρίτες,και ότι οι αληθοχωρίτες απαντούν σε όλες τις ερωτήσεις με ειλικρίνεια ενώ οι ψευδοχωρίτες ψεύδονται πάντα.Ας υποθέσουμε ότι βρίσκεστε ανάμεσα τους δεν γνωρίζετε κανένα προσκεκλημένο και θέλετε να ξέρετε για καθένα από τους προσκεκλημένους αν είναι αληθοχωρίτης ή ψευδοχωρίτης .Υπάρχει μέθοδος να το κατορθώσετε υποβάλλοντας ακριβώς Ν-1 ερωτήσεις ;"
Παρότι αρχικά φαίνεται αδύνατο,εντούτοις υπάρχει λύση. Αρκεί να επιλέξουμε τυχαία έναν από τους προσκεκλημένους (Για ευκολία τον ονομάζουμε Αλβέρτο) και θα τον ρωτήσουμε για την καταγωγή (αληθοχωρίτης η ψευδοχωρίτης) όλων των άλλων.

Έτσι θα κατορθώσουμε να χωρίσουμε τους Ν-1 προσκεκλημένους σε δυο ομάδες. Μια ομάδα που θα αποτελείται από αυτούς που ο Αλβέρτος ονόμασε αληθοχωρίτες και μια ομάδα από αυτούς που ο Αλβέρτος ονόμασε ψευδοχωρίτες.Παρατηρούμε ότι το πλήθος των δύο ομάδων η ομάδα με το μεγαλύτερο πλήθος είναι οι Αληθοχωρίτες και η ομάδα με το μικρότερο πλήθος είναι οι ψευδοχωρίτες ανάλογα με τι απάντησε ο Αλβέρτος (αλήθεια ή ψέματα) τον βάζουμε στην σωστή ομάδα . Αν το πλήθος των ομάδων είναι το ίδιο τότε θα πρέπει ο Αλβέρτος να είναι Αληθοχωρίτης (οι αληθοχωρίτες είναι περισσότεροι) και τον βάζουμε με την ομάδα που χαρακτήρισε ως αληθοχωρίτες .

 Οι λύσεις στην σελ 166

Μαθήματα Ευρετικής (Δεν λύνονται όλα με εξισώσεις!!!)

Έχουμε συνδυάσει τα μαθηματικά προβλήματα με εξισώσεις .Συνήθως «μεταγλωττίζουμε» τα δεδομένα με την χρήση μεταβλητών σε εξισώσεις και από εκεί και πέρα η λύση είναι τετριμμένη. Δεν οδηγούν όμως όλα τα προβλήματα σε εξισώσεις.

Όπως για παράδειγμα κάποια προβλήματα βελτιστοποίησης. Δείτε ένα παράδειγμα:

« Ο Οδοντίατρος Παπαδόπουλος φτάνει στο ιατρείο του, εκεί διαπιστώνει ότι τον περιμένουν 5 ασθενείς του, χωρίς ραντεβού . Οι ασθενείς είναι οι Α ,Β,Γ ,Δ και ο Ε .Έχουν έρθει ταυτόχρονα και δεν υπάρχει σειρά. Για τον καθένα τους ο Παπαδόπουλος γνωρίζει πόση ώρα θα χρειαστεί για την θεραπεία του.

-Για την θεραπεία του ασθενή Α θα απαιτηθούν 20 λεπτά .

-Για την θεραπεία του ασθενή Β >>> >>> 10 λεπτά .

-Για την θεραπεία του ασθενή Γ >>> >>> 30 λεπτά .

-Για την θεραπεία του ασθενή Δ >>> >>> 15 λεπτά .

-Για την θεραπεία του ασθενή Ε >>> >>> 20 λεπτά .

Το ερώτημα που τίθεται είναι με ποια σειρά θα δεχτεί ο Παπαδόπουλος τους ασθενείς έτσι ώστε ο χρόνος που θα περιμένουν συνολικά οι 5 ασθενείς να είναι ελάχιστος».

Μια προσέγγιση θα ήταν να τους βάλει στην τύχη για παράδειγμα θα μπορούσε να τους δεχτεί με την σειρά Α,Β,Γ,Δ,Ε τότε ο συνολικός χρόνος αναμονής θα είναι :

Ο Α θα εξυπηρετηθεί αμέσως ,ο Β θα περιμένει 20 λεπτά ,ο Γ θα περιμένει 20+10=30 λεπτά , ο Δ θα περιμένει 20+10+30=60 λεπτά, ο Ε θα περιμένει 20+10+30+15=75 λεπτά άρα ο συνολικός χρόνος αναμονής είναι 20+30+60+75=185 λεπτά . Είναι όμως ο λιγότερος δυνατός; Μπορούμε να διατάξουμε 5 ασθενείς με 6!=1x2x3x4x5x6=720 τρόπους. Προφανώς και είναι πάρα πολλές οι επιλογές για να τις δοκιμάσουμε μια-μια .Πρέπει να προσεγγίσουμε το πρόβλημα διαφορετικά.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ν ασθενείς Α1,Α2,…Αν και οι χρόνοι θεραπείας τους είναι αντίστοιχα t1,t2,t3,…,tν τότε οι χρόνοι αναμονής του καθένα θα είναι:

Α1:0 λεπτά

Α2:t1 λεπτά

Α3: t1+t2 λεπτά

Α4: t1+t2+ t3 λεπτά

.

.

Αν: t1+t2+ t3+….tν-1 λεπτά (προσθέτουμε κατά μέλη)

$(\nu\text{-}1)t_1+(\nu\text{-}2)t_2+(\nu\text{-}3)t_3+\ldots 2t_{\nu-2}+t_{\nu-1}$ (1)

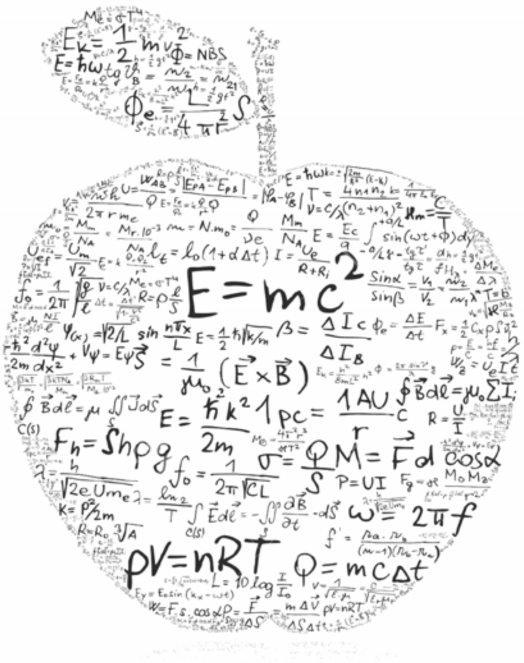
Το παραπάνω άθροισμα ο μεγαλύτερος συντελεστής είναι ο (ν-1) άρα με αυτόν πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τον μικρότερο χρόνο ,με τον αμέσως μικρότερο συντελεστή (ν-2) τον δεύτερο μεγαλύτερο χρόνο και ούτω καθεξής .

Άρα στο συγκεκριμένο παράδειγμα όπου το πλήθος των ασθενών είναι ν=5,θα έχουμε τον ελάχιστο συνολικό χρόνο ως εξής:

Οι χρόνοι διατάσσονται από τον μικρότερο προς το μεγαλύτερο 10,15,20,20,30 άρα η (1) γίνεται:

(5-1)x10+(5-2)x15+(5-3)x20+(5-4)x20=4x10+3x15+2x20+1x20=40+45+40+20=145 λεπτά

και η σειρά των ασθενών θα είναι Β,Δ,Α,Ε,Γ .



Μαθήματα Ευρετικής. Ο Ηράκλειτος,ο Bruce lee,και η αρχή του αναλλοίωτου στα μαθηματικά προβλήματα

Ο παππούς Ηράκλειτος έλεγε ότι δεν θα μπορούσε τα πόδια του,να πλύνει δυο φορές στο ίδιο νερό του ποταμιού,γεγονός που προφανώς χαροποίει τα ψάρια αλλά λέει και πολλά για το ευμετάβλητο του σύμπαντος. Αν δεν μπορούμε να προβλέψουμε τι θα συμβεί και αναγκαζόμαστε να διάγουμε βίο νεφελώδη και απρόσμενο,μπορούμε να έχουμε την μικρή ικανοποίηση να λύνουμε μια κατηγορία προβλημάτων που βασίζεται στο αμετάβλητο κάποιων καταστάσεων.Αντιλαμβάνεστε ότι για μια ακόμα φορά σκοπεύω να πέσω χαμηλά για να αναδείξω το..αναλλοιωτο.

Με τον όρο αναλλοίωτο (invariant) στα μαθηματικά προβλήματα εννοούμε ένα μέγεθος ή μια ιδιότητα που δεν μεταβάλλεται.Η λύση σε τέτοιου είδους προβλήματα δεν ακολουθεί συγκεκριμένο μοτίβο,η αναλλοίωτη ιδιότητα δεν είναι εύκολο να ανιχνευτεί,κινούμαστε πολύ γενικά και πολύ συχνά ο χειρισμός εμφανίζεται ως λαγός από το καπέλο.Ο Loren στο εξαιρετικό βιβλίο του Problem-Solving Through Problems, επισημαίνει ότι ουσιαστικά αναζητούμε το είδος (pursue parity) του αριθμού (άρτιος , περιττός), το είδος μια αλγεβρικής παράστασης όταν εμπλέκονται μεταβλητές (πολλαπλάσιο, συγκεκριμένο άθροισμα , συγκεκριμένο γινόμενο ….).Πρακτικά,σε μια διαδικασία που επαναλαμβάνεται ελέγχουμε τι δεν αλλάζει.Ας δούμε μερικά προβλήματα.

• Ο Γιαννάκης αγοράζει ζαχαρωτά από το περίπτερο της γειτονιάς που κοστίζουν είτε 3 είτε 6 ευρώ, (Κιμπάρης και Μπον Βιβέρ ο Γιαννάκης). Στο τέλος του μήνα όταν ρωτήθηκε από το πατέρα του, πόσα χρήματα είχε ξοδέψει στο περίπτερο για ζαχαρωτά αυτός απάντησε 53 ευρώ.Ο πατέρας του είναι σίγουρος πως ο Γιαννάκης έκανε λάθος. Πως το ήξερε;

Ο Γιαννάκης αγόραζε πάντα γλυκά που κόστιζαν ποσά πολλαπλάσια του 3 κατά συνέπεια κάθε χρονική στιγμή το συνολικό ποσό που θα είχε ξοδέψει θα ήταν πολλαπλάσιο του 3.(αναλλοίωτη ιδιότητα)Ο αριθμός 53 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 άρα ο πατέρας του Γιαννάκη ήταν βέβαιος ότι το καμάρι του ή δεν ήξερε πρόσθεση ή έλεγε ψέματα.

• Στα βουνά της Πρατσάνης δυτικά του Στρογγυλού ακούγεται συχνά το παρακάτω δημώδες ποίημα:

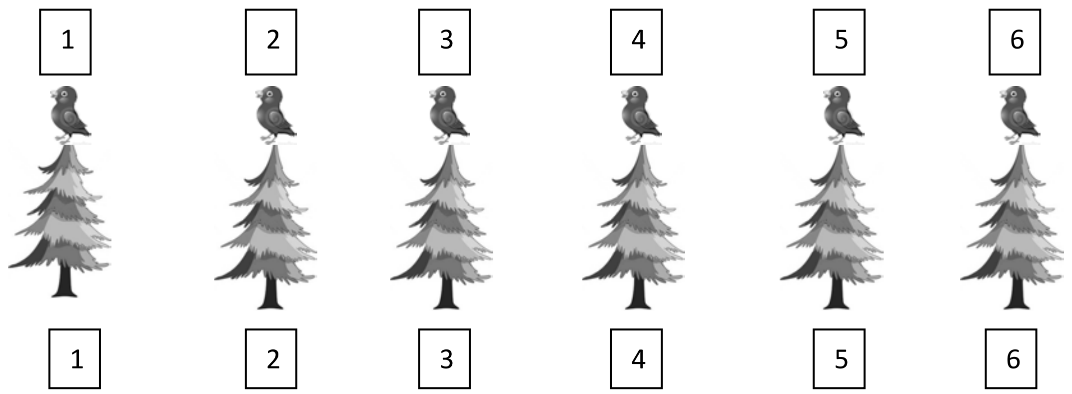
Στα έξι δέντρα….

Έξι σπουργίτες κάθονται ο καθένας σε ένα δέντρο / όλα τα δέντρα έχουν φυτευτεί στην ίδια την ευθεία γραμμή /δέντρο από δέντρο βρίσκεται ακριβώς στα έξι μέτρα /από παλιά, πάππο προς πάππο έλεγαν,ότι οι σπουργίτες θα πετούν μόνο στα έξι δέντρα /αν ένας σπουργίτης πέταγε από ένα δέντρο σε ένα άλλο τότε ένας άλλος πέταγε από άλλο δέντρο προς την αντίθετη κατεύθυνση και τι παράξενο την ίδια την απόσταση θα διανύει /κάποτε στο ίδιο δέντρο είδα μαζί όλους τους σπουργίτες και τότε ήξερα ότι γυαλιά έπρεπε να βάλω.

Γιατί ο καλλιτέχνης πρέπει να αγοράσει γυαλιά οράσεως;

Ποιο είναι το μέγεθος στο παραπάνω πρόβλημα που δεν μεταβάλλεται.Κάθε σπουργίτης συμβολίζεται με τον αύξοντα αριθμό του δέντρου που βρίσκεται αρχικά.Αριθμίζουμε τα δέντρα από αριστερά προς τα δεξιά 1,2,3,4,5,6.Παρατηρουμε ότι το άθροισμα των δεικτών είναι: Σ=1+2+3+4+5+6=21.

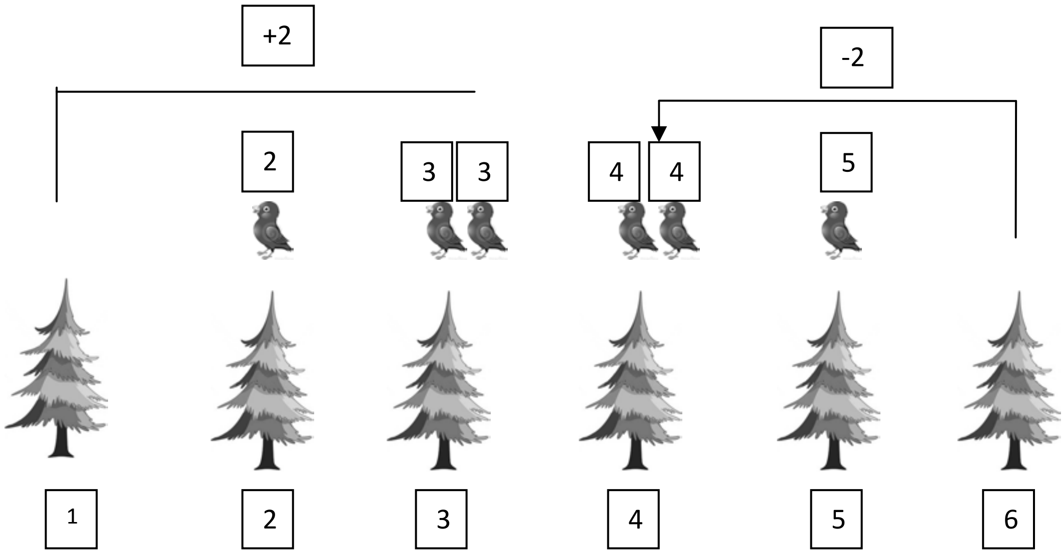
Για να δούμε, ενδεικτικά κάποιες κινήσεις σύμφωνα με τους κανόνες του προβλήματος.



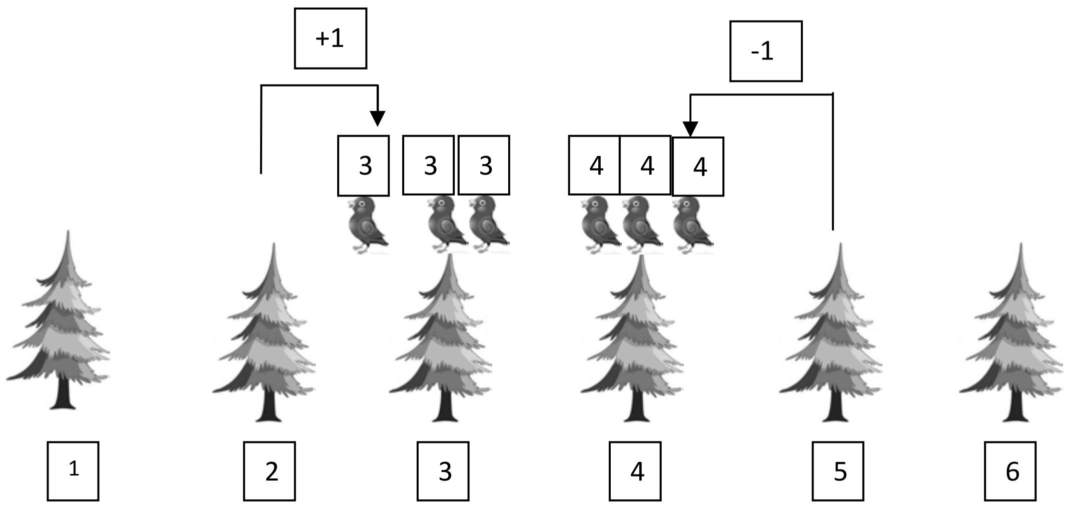
Σ=1+2+3+4+5+6=21

 Οι λύσεις στην σελ 166

Ο σπουργίτης στο $1^{ο}$ δέντρο πετά δυο δέντρα δεξιά και ο δείκτης του αυξάνεται κατά 2 ,ταυτόχρονα ο σπουργίτης από στο $6^{ο}$ δέντρο πετά αντίθετα δυο δέντρα και ο δείκτης ελαττώνεται κατά 2.Τώρα το άθροισμα των δεικτών των σπουργιτών είναι Σ=2+3+3+4+4+5=21.<u>Παρέμεινε το ίδιο.</u>



Ο σπουργίτης στο $2^{ο}$ δέντρο πετά ένα δέντρο δεξιά και ο δείκτης του αυξάνεται κατά 1 ,ταυτόχρονα ο σπουργίτης από στο $5^{ο}$ δέντρο πετά αντίθετα ένα δέντρο και ο δείκτης ελαττώνεται κατά 1.Έτσι, τώρα το άθροισμα των δεικτών των σπουργιτών είναι Σ=3+3+3+4+4+4=21.<u>Παρέμεινε το ίδιο.</u>



Παρατηρούμε,ότι ,ανεξάρτητα από τις κινήσεις των σπουργιτών το Σ παραμένει αμετάβλητο.Όταν ένας σπουργίτης πετάξει προς κάποια κατεύθυνση και ένας άλλος πετάξει από αντίθετη κατεύθυνση από κάποιο άλλο δέντρο και διανύσει την ίδια απόσταση τότε ο δείκτης του πρώτου ελαττώνεται κατά τον ίδιο αριθμό που αυξάνεται ο δείκτης του δευτέρου άρα το άθροισμα των δεικτών παραμένει σταθερό.Το άθροισμα Σ είναι αναλλοίωτο.Το άθροισμα ισούται μες 21,αν όλοι οι σπουργίτες έχουν συγκεντρωθεί μετά από κάποιες κινήσεις στο ίδιο δέντρο με δείκτη μ του θα ισχύει 6μ=21.Άτοπο, καθώς το 21 δεν είναι πολλαπλάσιο του 21.Άρα,σίγουρα δεν είναι δυνατόν να συγκεντρωθούν όλοι οι σπουργίτες στο ίδιο δέντρο.

• Σε ένα κουτί υπάρχουν επτά κόκκινες και έξι πράσινες μπάλες. Ο Γιαννάκης παίζει ένα παράξενο παιχνίδι. Αφαιρεί κάθε φορά δυο μπάλες από το κουτί, με τους εξής κανόνες:
-Αν οι μπάλες είναι και οι δυο πράσινες, ξαναβάζει στο κουτί μια πράσινη.
-Αν οι μπάλες έχουν διαφορετικό χρώμα, ξαναβάζει στο κουτί μια κόκκινη.
-Αν οι μπάλες είναι και οι δυο κόκκινες, ξαναβάζει στο κουτί μια πράσινη.
Στο τέλος, θα απομείνει μια μπάλα στο κουτί. Ποιο είναι το χρώμα της;

Σε κάθε κίνηση το πλήθος των κόκκινων σφαιρών είτε ελαττώνεται κατά δυο είτε παραμένει σταθερό (αναλλοίωτο), το πλήθος των κόκκινων σφαιρών είναι 7 που δεν είναι πολλαπλάσιο του 2 άρα σίγουρα δεν μπορούν αφαιρεθούν όλες οι κόκκινες σφαίρες ,όποια επιλογή κινήσεων και αν γίνει θα μείνει μια κόκκινη.

Προβληματάκι από το βιβλίο του Terence Tao Solving *Mathematical problems*.

• Σε ένα νησί ζούνε 13 πράσινοι χαμαιλέοντες, 15 κίτρινοι χαμαιλέοντες και 17 κόκκινοι χαμαιλέοντες. Όταν δύο διαφορετικού χρώματος συναντιούνται, αλλάζουν και οι δύο στο τρίτο χρώμα (π.χ. αν συναντηθούν ένας πράσινος με έναν κίτρινο θα αλλάξουν και οι δύο το χρώμα τους σε κόκκινο). Υπάρχει ακολουθία με την οποία αν συναντηθούν ζευγάρια μεταξύ τους, θα έχουν όλοι οι χαμαιλέοντες του νησιού το ίδιο χρώμα;

Αν α,β,γ τα πλήθη των πράσινων,κόκκινων,κίτρινων χαμαιλεόντων αντίστοιχα. Άρα (α,β,γ) είναι η αρχική κατάσταση όταν τίθεται το πρόβλημα.Κάθε φορά που θα συναντιούνται δυο χαμαιλέοντες διαφορετικού χρώματος θα έχουμε μια από τις παρακάτω καταστάσεις (α-1,γ-1,γ+2) ή (α-1,β+2,γ-1) ή (α+2,β-1,γ-1).Παρατηρούμε ότι οι διαφορές β-α,γ-β,γ-α (β-α=2,γ-β=2 ,γ-α=4) είτε δεν θα αλλάζουν είτε θα μεταβάλλονται κατά 3, αυτό σημαίνει τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των α-β,β-γ,α-γ με το 3 δεν θα μεταβάλλονται ((β-α) Mod3=2,(γ-β)mod3=2,(γ-α)mod3=1,αναλλοίωτο). Όμως ,στην επιθυμητή τελική κατάσταση που όλοι οι χαμαιλέοντες θα έχουν πάρει το ίδιο χρώμα π.χ πράσινο.Οι διαφορές θα είναι α-β=45,β-γ=0,α-γ=45 στην διαίρεση με το 3 όμως το υπόλοιπο είναι 0 και όχι 2.Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ,ποτέ οι χαμαιλέοντες δεν θα πάρουν το ίδιο χρώμα.

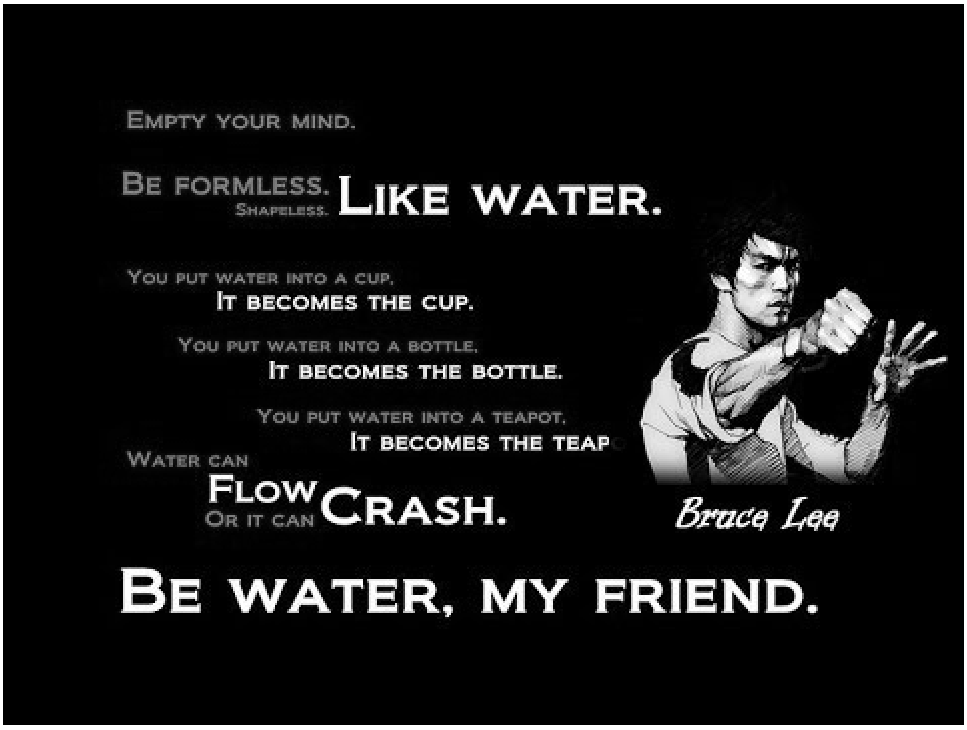
•Ο Γιάννης,ο Γιώργος και δυο φιλικά τους πρόσωπα πήγαν στην χασαποταβέρνα «Το χοιρομέρι» για φαγητό και κάθισαν ένα τραπέζι.Ο Γιάννης παρατήρησε ότι στην ταβέρνα βρίσκονταν 23 άνδρες και 32 γυναίκες πελάτες (συμπεριλαμβανόμενων και των τεσσάρων της παρέας).Ο Γιάννης καθόταν δίπλα στην είσοδο και μπορούσε να δει όλους όσους έμπαιναν ή έβγαιναν από το μαγαζί.Παρατήρησε λοιπόν τα έξης : Για κάθε δυο πελάτες που έφευγαν από το μαγαζί ένας νέος πελάτης ερχόταν. Συγκεκριμένα αν οι δυο πελάτες που έφευγαν ήταν του ίδιου φύλου τότε ερχόταν μια γυναίκα πελάτισσα.Αντίθετα αν οι δυο πελάτες που έφευγαν ήταν διαφορετικού φύλου τότε ερχόταν ένα άντρας πελάτης.Ένα πρόσωπο από την παρέα του Γιάννη και του Γιώργου (μαζί με κάποιο άλλο πρόσωπο)έφυγε από το μαγαζί αλλά ξαναγύρισε μόνο του διότι θυμήθηκε ότι δεν είχε πληρώσει για τον λογαριασμό.Τότε,ο Γιώργος παρατήρησε ότι οι μοναδικοί πελάτες που είχαν μείνει στο μαγαζί ήταν αυτός,ο Γιάννης, και τα δυο άτομα της παρέας τους. Το ερώτημα είναι το εξής:Είναι του ίδιου φύλου τα δυο φιλικά πρόσωπα του Γιάννη και του Γιώργου;

Από τις συνθήκες του προβλήματος βλέπουμε ότι ο αριθμός των ανδρών στο μαγαζί ελαττώνεται κατά 0 (αν δυο γυναίκες ή ένας άνδρας και μια γυναίκα φύγουν) ή κατά 2 (αν φύγουν δυο άνδρες). Όταν αρχικά μπήκε μέσα η παρέα των τεσσάρων, υπήρχε περιττός αριθμός από άνδρες στο μαγαζί και ακολούθως με κάθε μετακίνηση το πλήθος των ανδρών θα παρέμενε περιττός (αναλλοίωτη ιδιότητα).Τελικά ,όταν μόνο η παρέα τους έμεινε στο μαγαζί επίσης πρέπει ο αριθμός των ανδρών να είναι περιττός.Εφόσον έχουν ήδη δυο άνδρες (Γιάννης και Γιώργος) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένα από τα δυο πρόσωπα θα είναι άνδρας και το άλλο γυναίκα.

Σας ακούω,που ψιθυρίζετε*: αρκεί η παράθεση μερικών προβλημάτων για να κατανοήσουμε την μέθοδο;* Ακολουθώντας την συμβουλή των ερμητιστών *Obscurum per obscurius,ignotum per ignotius* δηλ *να ερμηνεύεις, το σκοτεινό με το πιο σκοτεινο και το άγνωστο με το πιο άγνωστο* παραθέτω Bruce Lee.

Άδειασε το μυαλό σου, γίνε χωρίς μορφή, χωρίς σχήμα, σαν το νερό.
Εάν βάλεις νερό σε μία κούπα, εκείνο γίνεται η κούπα.
Εάν βάλεις νερό σ'ένα μπουκάλι, γίνεται το μπουκάλι.
Εάν το βάλεις στην τσαγιέρα, γίνεται η τσαγιέρα.
Τώρα το νερό μπορεί να κυλήσει ή να συγκρουστεί.
Να είσαι νερό, φίλε μου.
Bruce Lee

Αστειεύομαι, αν θέλετε να μάθετε περισσότερα για το αναλλοίωτο ως στρατηγική επίλυσης διαγωνιστικών μαθηματικών προβλημάτων,στο τέλος της ανάρτησης παραθέτω βιβλιογραφία και σας συνιστώ να παρακολουθήσετε την ομιλία από το παράρτημα Μαγνησίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας με ομιλητή τον Αθανάσιο Μάγκο. Αρκούντως εύληπτη και πολύ κατατοπιστική.
https://www.youtube.com/watch?v=5cpy1EPZHmI



Μαθήματα Ευρετικής: Ο Όιλερ, ο κανόνας του τυφλού και λοιπά…συναφή προβλήματα

"…ο Όιλερ έκανε υπολογισμούς χωρίς εμφανή προσπάθεια όπως οι άλλοι αναπνέουν ή όπως ζυγιάζονται οι αετοί στον αέρα.."

François Arago, *Arago's Biographies of Scientific Men*

Λέοναρντ Όιλερ (1707-1783)

Την περίοδο 1734-35,ο Ελβετός μαθηματικός Λέοναρντ Όιλερ (1707-1783) έγραψε ένα βιβλίο στοιχειώδους άλγεβρας με τίτλο «*Εισαγωγή στην τέχνη του υπολογισμού, για χρήση στα γυμνάσια της αυτοκρατορικής Ακαδημίας Επιστήμων της Αγίας Πετρούπολης*». Το βιβλίο χρησιμοποιήθηκε ως βασικό εγχειρίδιο αριθμητικής και άλγεβρας στα σχολεία της μητέρας Ρωσίας για πολλά χρόνια και παρότι φέρει το βάρος τριών αιώνων διαβάζεται άνετα καθώς χρησιμοποιεί αλγεβρικό συμβολισμό που δεν διαφέρει από τον σημερινό και καταδεικνύει όχι μόνο τον μαθηματικό αλλά και τον δάσκαλο Όιλερ. Στο βιβλίο αυτό,ο Όιλερ προτρέπει:

Η απομνημόνευση των κανόνων υπολογισμού χωρίς κατανόηση ούτε αρκεί για να επιλυθούν όλες οι περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν ούτε οξύνει την διάνοια, κάτι που πρέπει να είναι ο πρωταρχικός στόχος της διδασκαλίας .Έχουμε συνεπώς προσπαθήσει σκληρά να εξηγήσουμε την λογική όλων των κανόνων και των πράξεων σε αυτόν τον οδηγό με τέτοιο τρόπο που ακόμα και άνθρωποι που δεν έχουν κάνει ακόμα προχωρημένες σπουδές μπορούν να τα κατανοήσουν και να τα αποδεχτούν.

Με αυτή την προσέγγιση ελπίζουμε να πετύχουμε το όφελος ότι τα παιδιά-εκτός του να αποκτούν την κατάλληλη δεξιότητα στο λογισμό- πάντα θα αντιλαμβάνονται την πραγματική λογική της κάθε πράξης στο μυαλό τους με αποτέλεσμα να συνηθίσουν σταδιακά να ακούγονται λογικά.

Αυτά, γιατί κάθε άνθρωπος πιάνει και συγκρατεί στο μυαλό του πολύ πιο εύκολα τα γεγονότα των οποίων βλέπει ξεκάθαρα την λογική και προέλευση, και είναι σε θέση επίσης να κάνει πολύ καλύτερα χρήση αυτών σε όλες τις περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν.

Ο Όιλερ παρότι υπήρξε ο πιο παραγωγικός μαθηματικός που έζησε ποτέ και καταπιάστηκε σχεδόν με κάθε πεδίο των μαθηματικών της εποχής του,δεν θεώρησε ταπεινωτικό να αναλύσει και να καταδείξει τις εφαρμογές των εξισώσεων στην επίλυση περιγραφικών προβλημάτων.Σταχυολογώ λοιπόν,χαρακτηριστικά προβλήματα .

1)Ένας πατέρας πεθαίνει και αφήνει στα παιδιά του την περιουσία του την οποία μοιράζουν ως εξής :

Το πρώτο παιδί παίρνει εκατό νομίσματα και το ένα δέκατο από τα υπόλοιπα.

Το δεύτερο παιδί παίρνει διακόσια νομίσματα και το ένα δέκατο από τα υπόλοιπα.

Το τρίτο παιδί παίρνει τριακόσια νομίσματα και το ένα δέκατο από τα υπόλοιπα.

Το τέταρτο παιδί παίρνει τετρακόσια νομίσματα και το ένα δέκατο από τα υπόλοιπα. κ.ο.κ

Στο τέλος βλέπουν ότι η περιουσία έχει μοιραστεί εξίσου σε όλα τα παιδιά.

Πόση είναι η περιουσία,πόσα είναι τα παιδιά και τι πήρε τι καθένα;

 Οι λύσεις στην σελ 166

Λύση

Το μερίδιο του κάθε παιδιού είναι x και όλη η περιουσία είναι y,τα μερίδια των παιδιών είναι:

Του πρώτου $x=100+(y-100)/10$

Του δευτέρου $x=200+(y-x-200)/10$

Του τρίτου $x=300+(y-2x-300)/10$ κ.ο.κ

Η διαφορά μεταξύ δυο διαδοχικών δεξιών μελών από τις παραπάνω εξισώσεις είναι

$100-(\chi+100)/10$

Αν αυτή η διαφορά είναι 0 τότε $\chi=900$ και άρα από την πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε $y=8100$, τα παιδιά είναι 9.
2)Τρεις άνθρωποι παίζουν χαρτιά. Στο πρώτο παιχνίδι, χάνει ο πρώτος και πληρώνει στον καθένα από τους άλλους δυο τόσα χρήματα όσα έχει ο καθένας τους .Στο δεύτερο παιχνίδι, χάνει ο δεύτερος και πληρώνει στον καθένα από τους άλλους δυο τόσα χρήματα όσα έχουν εκείνη την στιγμή. Τελικά,στο τρίτο παιχνίδι,ο πρώτος και ο δεύτερος κερδίζουν ο καθένας από τον τρίτο όσα χρήματα είχαν προηγουμένως.Τότε σταματούν το παιχνίδι και βλέπουν πως έχουν από 24 νομίσματα. Με πόσα νομίσματα είχε ξεκινήσει ο καθένας το παιχνίδι ;

(Πάμπολλες …παραλλαγές του συγκεκριμένου προβλήματος έχω πετύχει στο καναδικό περιοδικό Crux)
Λύση
Έστω ότι τα αρχικά ποσά των τριών παικτών είναι x,y,z αντίστοιχα. Θα βοηθηθούμε να θεωρήσουμε $x+y+z=s$, όπου $s=72$.Πρέπει να εξετάσουμε τα ποσά που κατέχουν οι παίκτες σε τέσσερις διαφορετικές χρονικές στιγμές , μεταξύ δυο οποιωνδήποτε στιγμών μεσολαβεί ένα παιχνίδι,και το συνολικό ποσό που κατέχουν είναι σταθερά s:

Πρώτος παίκτης	Δεύτερος παίκτης	Τρίτος παίκτης
x	y	z
$2x-s$	$2y$	$2z$
$4x-2s$	$4y-s$	$4z$
$8x-4s=24$	$8y-2s=24$	$8z-s=24$

Για $s=72$,οι τρεις παραπάνω σχέσεις δίνουν $x=39,y=21,z=12$

Το επόμενο πρόβλημα έχει την ιδιαιτερότητα ότι οι εξισώσεις είναι λιγότερες από τους αγνώστους,τέτοιου είδους προβλήματα ο Όιλερ τα έλυνε ακολουθώντας μια μέθοδο που την αποκαλούσε Regula Caeci (κανόνας του τυφλού).

3)Κάποιος αγόρασε χοίρους, γίδες και πρόβατα, συνολικά 100 με100 νομίσματα.Οι χοίροι του κόστισαν 3 ½ νομίσματα το κεφάλι, οι γίδες 1 και 1/3 νομίσματα το κεφάλι και τα πρόβατα ½ του νομίσματος το κεφάλι.Πόσα ζώα αγόρασε από κάθε είδος.

Λύση

Έστω x,y,z το πλήθος από χοίρους,γίδες και τα πρόβατα αντίστοιχα , που αγοράστηκαν.Τα χ,z είναι θετικοί ακέραιοι. Αν εκφράσουμε πρώτα το συνολικό πλήθος και έπειτα το συνολικό κόστος των νεοαποκτηθέντων ζώων παίρνουμε:

$$x+y+z=100$$

$$(7/2)\,x+(4/3)y+(1/2)z=100 \quad ή \quad 21x+8y+3z=600$$

Αν απαλείψουμε το z και στην συνέχεια λύσουμε ως προς y , παίρνουμε y=60-18x/5 από το οποίο συμπεραίνουμε πως ο χ/5=t, πρέπει να είναι θετικός ακέραιος .

Αν x=5 τότε y=60-18=42 , z=53

Αν x=10 τότε y=60-36=24 , z=66

Αν x=15 τότε y=60-54=6 , z=79

Αν x>15 τότε η τιμή του y είναι αρνητική οπότε απορρίπτεται.

''Όταν ήμουν μικρός, κόμπαζα για το πόσο πολλές σελίδες διάβαζα σε μία ώρα. Στο κολέγιο έμαθα πόσο βλακώδες ήταν αυτό. Το να διαβάζεις δέκα σελίδες μαθηματικά την ημέρα μπορεί να είναι ένας εξαιρετικά γοργός ρυθμός. Ακόμα και μία σελίδα, όμως, μπορεί να είναι αρκετή.''

WILLIAM THURSTON

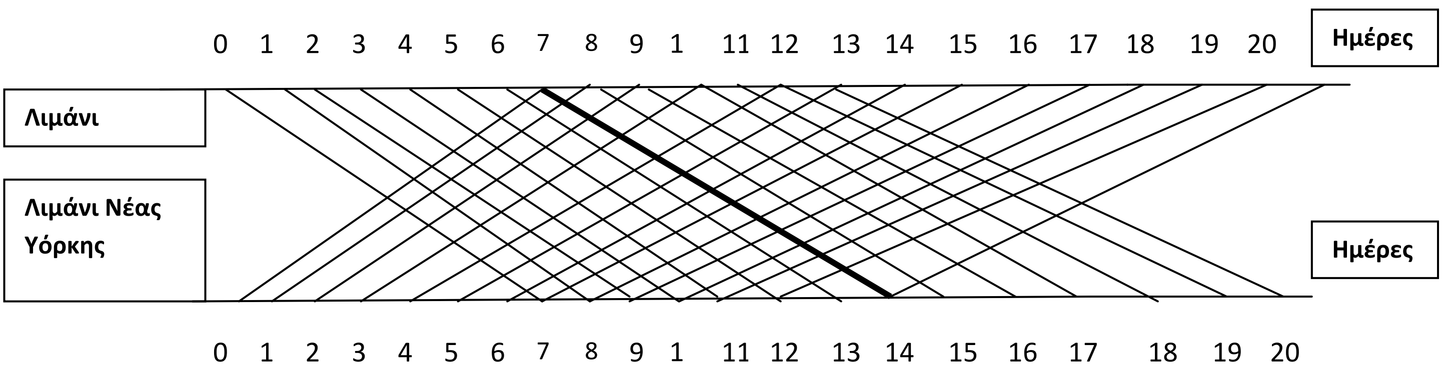
Οι λύσεις στην σελ 166

Μαθήματα Ευρετικής. (Για να το λύσεις... ζωγράφισε το!!)

Νομίζετε ότι μόνο τα γεωμετρικά προβλήματα απαιτούν σχήμα; Είναι συχνό το φαινόμενο να προσεγγίζουμε ένα πρόβλημα τοποθετώντας το σε ένα αφηρημένο πλαίσιο ,να γράφουμε δεδομένα-ζητούμενα ,να χρησιμοποιούμε αλγεβρικό συμβολισμό. Δεν είναι όμως λίγες οι φορές που ένα σχήμα μπορεί να απλοποιήσει το πρόβλημα.Περιπτώσεις που τα δεδομένα αναπαρίστανται πολύ πιο εύγλωττα με ένα διάγραμμα. Ας δούμε ένα κλασσικό πρόβλημα του Γάλλου μαθηματικού E.Lucas (1842-1891),γνωστού μας από τους «Πύργους του Ανόι.»

«Κάθε μεσημέρι από το λιμάνι της Χάβρης στην Γαλλία αναχωρεί ένα πλοίο με προορισμό το λιμάνι της Νέας Υόρκης στις Η.Π.Α ενώ ταυτόχρονα αναχωρεί ένα άλλο πλοίο από την Νέα Υόρκη με κατεύθυνση το λιμάνι της Χάβρης.Το ταξίδι διαρκεί 7 ημέρες και 7 νύχτες.Αν ένα πλοίο αναχωρήσει σήμερα 7 του μήνα από το λιμάνι της Χάβρης,πόσα πλοία με δρομολόγιο Νέα Υόρκη- Χάβρη θα συναντήσει μέχρι να φτάσει στον προορισμό του;»

Δείτε πως ο ίδιος ο Lukas απλοποιεί το πρόβλημα με ένα σχήμα.Το διάγραμμα παριστάνει με ευθύγραμμα τμήματα το ταξίδια των πλοίων που αναχωρούν κάθε μεσημέρι τόσο από το λιμάνι της Χάβρης όσο και από το λιμάνι της Νέας Υόρκης με ημέρες αναχώρησης- άφιξης κάθε πλοίου για ένα χρονικό διάστημα 21 ημερών. Επιλέγουμε το πλοίο που αναχωρεί στις 7 του μήνα (μπορούμε να επιλέξουμε όποια ημέρα θέλουμε). Το δρομολόγιο του πλοίου αναπαρίσταται από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και από το σχήμα είναι σαφές ότι θα διασταυρωθεί με 13 πλοία που έρχονται από την Νέα Υόρκη και θα συναντήσει άλλα 2 πλοία στα λιμάνια αναχώρησης –προορισμού οπότε έχουμε ένα σύνολο 15 πλοίων.Ο Lukas υποθέτει ότι η ταχύτητα κάθε πλοίου είναι σταθερή και δεν υπάρχουν για κανένα λόγο καθυστερήσεις.



Μαθήματα ευρετικής.Κρυπτάριθμος.

Κρυπτάριθμος ή **Κρυπτόγραμμα** η **Αριθμόγραμμα** είναι ένα είδος προβλήματος όπου τα αριθμητικά ψηφία σε μια αριθμητική σχέση έχουν αντικατασταθεί από γράμματα ,κατά τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε αριθμητικό ψηφίο να αντιστοιχίζεται ένα διαφορετικό γράμμα.Το ζητούμενο στο πρόβλημα η εύρεση των αριθμητικών ψηφίων. Αυτού του είδους τα προβλήματα σύμφωνα με τον J.A.H.Hunter συγγραφέα βιβλίων με γρίφους προέρχονται από την Αρχαία Κίνα και στην αρχή,απλά αποτελούσαν αναδιατυπωμένες αριθμητικές πράξεις,με τα γράμματα που αντικαθιστούν τα ψηφία να μην έχουν νόημα. Αργότερα εξελιχτήκαν έτσι ώστε να γίνουν πιο ελκυστικά και να σχηματίζουν μια ή περισσότερες λέξεις ή και ολόκληρες φράσεις . Αντιμετωπζουμε συνηθως τετοια προβληματα με παρατηρηση και αποκλεισμο περιπτωσεων. Ένα πολύ γνωστό αριθμόγραμμα από το βιβλίο του A.Beiler “Recreations in the Theory of Numbers” είναι το εξής :
Κρεοπώλης στις Η.Π.Α υποσχόταν ότι θα έδινε C μπριζόλες (C>2) σε εκείνον που θα υπολόγιζε την αριθμητική τιμή των γραμμάτων στο κλάσμα $\frac{PORK}{CHOP}=C$ (τα ανόμοια γράμματα παρίσταναν διαφορετικούς αριθμούς).

Σκεπτόμαστε ως εξής: Το C υποχρεωτικά θα είναι 3, είναι μεγαλύτερο του 2 και δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του 3, γιατί τότε το PORK θα έπρεπε να είναι πενταψήφιος αριθμός.

Από την $\frac{PORK}{CHOP}=3 \Leftrightarrow P=9$ και έχουμε $\frac{9ORK}{3HO9}=3$

Άρα K=7 (3x9=27) και έχουμε και 2 κρατούμενα $\frac{9OR7}{3HO9}=3$

Αν αντικαταστήσουμε το O με το X (για να μην συμπίπτει το μηδέν με το όμικρον), θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
&9000+100X+10R+7=9000+300H+30X+27 \Leftrightarrow\\
&100X+10R+7=300H+30X+27 \Leftrightarrow\\
&100X+10R=300H+30X+20 \Leftrightarrow\\
&7X+R=30H+2
\end{aligned}$$

Το 7X+R έχει για μεγαλύτερη τιμή 7•8+6=62

Άρα το Η μπορεί να είναι 0,1,2.

Αν Η=0 τότε 7X+R=2 άρα X=0 Ατοπο(Η=0).

Αν Η=1, τότε 7X+R=32 άρα X=4 και R=4 Άτοπο(X=R).

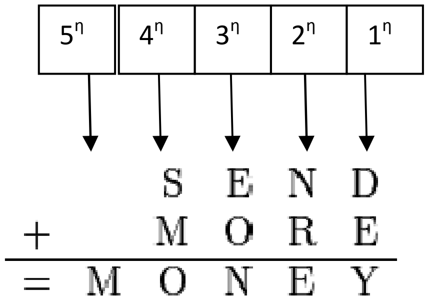
Αν Η=2, τότε 7X+R=62 άρα X=8 και R=6 Δεκτό .Η λύση λοιπόν είναι $\frac{9867}{3289}=3$.

Ένα από τα πιο γνωστά αριθμογράμματα είναι δημιούργημα του H.E. Dudeney και υποτίθεται ότι αναγράφεται σε γράμμα που έστειλε ένας φοιτητής στον πατέρα του ζητώντας χρήματα:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & S & E & N & D \\
+ & & M & O & R & E \\
\hline
= & M & O & N & E & Y
\end{array}$$

Οι λύσεις στην σελ 166

Για το παραπανω αριθμογραμμα σκεφτομαστε ως εξης:



-Από την την στηλη 5 προκυπτει ότι M=1 διοτι μονο 1 ως κρατούμενο μπορει να εχει το αθροισμα δυο μονοψηφιων αριθμων(S,M) στην στηλη 4.

-Για να έχουμε κρατούμενο από το άθροισμα των αριθμών της στήλης 4 τότε S+M είναι τουλάχιστον 9 ,άρα S+M είναι 9 ή 10 άρα το O είναι αντίστοιχα 0 η 1. Αλλά ήδη γνωρίζουμε ότι M=1 οπότε O=0.

-Αν υπάρχει κρατούμενο από την στήλη 3 στην στήλη 4 τότε E=9 και έτσι N=0.Αλλα ξέρουμε ήδη ότι O=0 οπότε δεν έχουμε κρατούμενο και S=9.

-Αν υπάρχει κρατούμενο από την στήλη 2 στην στήλη 3 τότε E=N και έτσι N=0.Αλλα ξέρουμε ήδη ότι O=0 οπότε δεν έχουμε κρατούμενο και S=9,άτοπο .Έτσι υπάρχει κρατούμενο και N=E+1.

-Αν δεν υπάρχει κρατούμενο από την στήλη 1 στην στήλη 2 τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του N+R με το 10 είναι το E και N=E+1 έτσι το υπόλοιπο της διαίρεσης του E+1+R με το 10 είναι το E άρα R=9. Αλλά ήδη γνωρίζουμε ότι S=9 τότε πρέπει να υπάρχει κρατούμενο από την στήλη 1 στην στήλη 2 και τελικά R=8.

-Για να έχουμε κρατούμενο από την στήλη 1 στην στήλη 2 πρέπει να ισχύει D + E = 10 + Y. Όμως το Y δεν μπορεί να είναι 0 ή 1 , D + E είναι τουλάχιστον 12.Αν D είναι το πολύ 7 τότε το E είναι τουλάχιστον 5.Το N είναι το πολύ 7 και ισχύει N = E + 1.Ετσι E είναι 5 η 6.

-Αν το E είναι 6 τότε για να είναι το άθροισμα D+E τουλάχιστον 12, Τότε το D θα πρέπει να είναι 7.Αλλα N = E + 1 έτσι N θα είναι 7 το οποίο είναι άτοπο. Άρα E=5 και N=6

-Για να ισχύει D+E τουλάχιστον 12 πρέπει να έχουμε D=7 και έτσι Y=2.

Φυσικά είναι δυνατό με ένα κατάλληλο πρόγραμμα και την χρήση υπολογιστή να ελεγχτούν ένας όλες οι δυνατές αντιστοιχίσεις των γραμμάτων S,E,N,D,M,O,R,Y με τα αριθμητικά ψηφία 0,..,9 .Πρέπει να δοκιμάσει 1814400 περιπτώσεις .Μια πολύ μεγάλη συλλογή αριθμογραμμάτων μπορείτε να βρείτε στον ιστότοπο:

http://www.tkcs-collins.com/truman/alphamet/alphamet.shtml

Μαθηματικοί

Γρίφοι

Εισέρχεστε τις παρακάτω σελίδες

με δική σας...ευθύνη

1.Λευκό άλογο από τον Σαμ Λόιντ

Ο διάσημος κατασκευαστής γρίφων Σαμ Λόιντ (1841-1911) κατά την διάρκεια ενός ταξιδιού του στην Ευρώπη εμπνεύστηκε από το μνημείο του λευκού αλόγου στο Uppingkton στην Νότια Αγγλία για να κατασκευάσει έναν από τους πιο διάσημους γρίφους του.*Το λευκό πόνι*

Το λευκό άλογο του Uppingkton είναι ένα κολοσσιαίο γεωγραφικό μνημείο μήκους 110 μέτρων πάνω σε ένα λόφο στο Μπέρκσαϊρ της Νότιας Αγγλίας .Το κατασκεύασαν πριν 3000 χρόνια οι Σάξονες χτίστες του κάστρου του Uppingkton σκάβοντας χαρακώματα που τα γέμισαν με λευκό ασβεστόλιθο. Η φιγούρα του αλόγου είναι ορατή από 15 μίλια και αποτελεί το σήμα κατατεθέν της περιοχής.Ο Λόιντ ισχυριζόταν ότι πούλησε πάνω από ένα εκατομμύριο κόπιες του γρίφου.

Ο γρίφος του Λόιντ ήταν ο εξής:

Να αναδιατάξετε τα 6 κομμάτια που αποτελούν το μαύρο άλογο έτσι ώστε να εμφανιστεί ένα λευκό άλογο.

 Οι λύσεις στην σελ 166

2.Οι ναύτες,οι καρύδες και ο πίθηκος

Πέντε ναυτικοί βρίσκονται ναυαγοί σε ένα έρημο νησί. Στο νησί,ο μόνος κάτοικος του νησιού είναι ένας πίθηκος και η μοναδική τροφή που υπάρχει είναι καρύδες.Αρχίζουν λοιπόν οι ναυαγοί να μαζεύουν καρύδες σε ένα μεγάλο σωρό .Όταν νύχτωσε όντας πολύ κουρασμένοι πέφτουν για ύπνο με σκοπό να μοιραστούν τις καρύδες εξίσου το επόμενο πρωί.
Κατά τη διάρκεια της νύχτας ένας ναύτης ξυπνά, σκεπτόμενος ότι οι άλλοι μπορεί να προσπαθήσουν να τον εξαπατήσουν στην μοιρασιά ,και αποφασίζει να πάρει το μερίδιο του νωρίτερα,χωρίζει τις καρύδες σε πέντε ισοπληθείς σωρούς και διαπιστώνοντας ότι περισσεύει μια καρύδα την δίνει στον πίθηκο.Κρύβει έναν από τους πέντε σωρούς και τους υπόλοιπους τους κάνει έναν σωρό και πέφτει για ύπνο.Αργότερα,ο δεύτερος ναύτης ξυπνά με την ίδιες υποψίες ότι οι υπόλοιποι θα τον «ρίξουν» στην μοιρασιά και κάνει το ίδιο πράγμα ,χωρίζει τις καρύδες σε πέντε σωρούς πάλι περισσεύει μια καρύδα την οποία δίνει στον πίθηκο. Στη συνέχεια κρύβει το μερίδιό του,συγκεντρώνει τους υπόλοιπους σωρούς σε ένα έναν μεγαλύτερο και πέφτει για ύπνο.
Ο ένας μετά τον άλλο και οι υπόλοιποι ναύτες κάνουν ακριβώς το ίδιο: Ο κάθε ναύτης λαμβάνει το ένα πέμπτο των καρυδών στο σωρό (υπάρχει πάντα επιπλέον μία, η οποία δίνεται στην πίθηκο) και στη συνέχεια να επιστρέφει για ύπνο. Όταν οι ναύτες ξυπνούν το επόμενο πρωί όλοι παρατήρησαν ότι ο σωρός καρυδών είναι πολύ μικρότερος από ό,τι ήταν το προηγούμενο βράδυ,αλλά δεδομένου ότι κάθε ναύτης είναι τόσο ένοχος όσο και οι άλλοι,κανείς δεν λέει τίποτα.Τότε χωρίζουν τις καρύδες (για έκτη φορά) σε πέντε ίσα μέρη και παίρνει ο καθένας από ένα.Πόσες καρύδες υπήρχαν αρχικά;

3.Αριθμητικό τρικ με διαδοχικούς αριθμούς

Ζητείστε από έναν φίλο σας να σκεφτεί τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς (π.χ 21,22,23) , υπό την προϋπόθεση ότι κανένας από αυτούς να μην είναι μεγαλύτερος από 60.Στην συνέχεια του ζητάτε να επιλέξει και να ανακοινώσει ένα πολλαπλάσιο του 3 μικρότερο του 100 (π.χ το 18).Του ζητάτε (με την βοήθεια αριθμομηχανής αν θέλει) να προσθέσει τους τέσσερεις αριθμούς και κατόπιν να πολλαπλασιάσει με το 67 (84x 67=5628). Σας ανακοινώνει τα δυο τελευταία ψηφία (των μονάδων και των δεκάδων) του αποτελέσματος και σεις ως δια μαγείας του μαντεύετε τους τρεις αριθμούς που σκέφτηκε καθώς και υπόλοιπα ψηφία του γινομένου.

Πως το κάνετε αυτό;

Αρχικά διαιρέστε το πολλαπλάσιο του 3 με το 3 και προσθέστε 1:

18:3+1=7

Αφαιρέστε το αποτέλεσμα από το διψήφιο αριθμό που σας ανακοινώθηκε

28-7=21

θα έχετε σαν αποτέλεσμα το πρώτο από τους αριθμούς που σκέφτηκε.

Τώρα για τα υπόλοιπα ψηφία αρκεί να διπλασιάσετε το διψήφιο αριθμό που σας ανακοινώθηκε :

2x28=56

Γιατί δουλεύει το τρικ;

4.Μια σειρά ελεφάντων

Δεκαπέντε ελέφαντες βρίσκονται σε ευθεία γραμμή.Τα βάρη τους εκφράζονται με ακέραιο αριθμό τόνων. Το άθροισμα του βάρους κάθε ελέφαντα (εκτός αυτού που βρίσκεται στο δεξιό άκρο της σειράς) και του διπλάσιου βάρους του δεξιού γείτονα του είναι ακριβώς δεκαπέντε τόνοι. Να προσδιοριστεί το βάρος του κάθε ελέφαντα.

Tournament of towns 1989

5.Ένα πολιτικά..ορθό πρόβλημα!!

Σε μια μακρινή χώρα από τους τρεις βουλευτές Αντώνη, Γιάννη και Κώστα μόνο ένας είναι έντιμος. Προφανώς ,ο κάθε βουλευτής έχει επίγνωση της κατάστασης του (αν είναι έντιμος ή όχι.)

Ο Αντώνης δηλώνει αληθώς ότι:

(1) Αν δεν είμαι έντιμος τότε δεν θα γίνω υπουργός .

(2) Αν είμαι έντιμος τότε θα γίνω πρωθυπουργός.

Ο Γιάννης δηλώνει επίσης αληθώς:

(3) Αν δεν είμαι έντιμος τότε δεν θα γίνω πρωθυπουργός .

(4) Αν είμαι έντιμος τότε θα γίνω υπουργός.

Ο Κώστας δηλώνει αληθώς:

(5) Αν δεν είμαι έντιμος τότε δεν θα γίνω υπουργός.

(6) Αν είμαι έντιμος τότε θα γίνω υπουργός.

Γνωρίζουμε ότι:

(Ι) Ο έντιμος βουλευτής είναι ο μόνος από τους τρεις που πέτυχε έναν από τους δυο στόχους (να γίνει υπουργός ή να γίνει πρωθυπουργός)

(ΙΙ) Ο έντιμος βουλευτής πέτυχε τον έναν στόχο και απέτυχε στο άλλο.

Ποιος από τους τρεις βουλευτές είναι ο έντιμος ;

6.Αθλήματα

Σε μια μακρινή χώρα,5 αθλητές οι Αντωνίου (Α), Βασιλείου (Β), Γεωργίου (Γ), Δημητρίου (Δ) και Ευθύμιου (Ε) λαμβάνουν μέρος σε 5 διαφορετικά αγωνίσματα,ας τα ονομάσουμε V,W,X,Y και Z. Στο καθένα από τα 5 αγωνίσματα οι αθλητές που καταλαμβάνουν τις θέσεις $1^η$,$2^η$,$3^η$,$4^η$, και $5^η$ λαμβάνουν αντίστοιχα 5,4,3,2, και 1 βαθμούς.Γνωρίζουμε ότι σε κανένα αγώνισμα δεν πρόεκυψε ισοπαλία.Ο αθλητής Α έλαβε συνολικά (για τα 5 αγωνίσματα) 24 βαθμούς,ο αθλητής Γ έλαβε την ίδια βαθμολογία στα 4 από τα 5 αγωνίσματα,ο αθλητής Δ έλαβε 4 βαθμούς στο αγώνισμα V, ο αθλητής Ε πήρε 5 βαθμούς στο αγώνισμα W και 3 βαθμούς στο αγώνισμα X. Η τελική κατάταξη των αθλητών με βάση την συνολική βαθμολογία τους ήταν ταυτόσημη με την αλφαβητική σειρά των ονομάτων τους.Να βρεθεί η συνολική βαθμολογία του καθένα από τους 5 αθλητές.

 Οι λύσεις στην σελ 166

7.Μια πυθαγόρεια τριάδα

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη κάθετων πλευρών ΑΒ= 30α+40β cm και ΑΓ=40α+30β cm και η υποτείνουσα ΒΓ έχει μήκος ΒΓ=50α+κβ cm ,όπου α,β,κ είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.Να βρεθεί η μικρότερη τριάδα τιμών (α,β,κ) που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες.

8.Ένα πρόβλημα….διασκέδασης

Μια παρέα από φίλους–άντρες και γυναίκες-διασκέδασαν δυο συνεχόμενες νύχτες στο μπαρ *το Ναυάγιο* .Την πρώτη νύχτα οι άνδρες της παρέας παρήγγειλαν και ήπιαν όλοι από ένα μπουκάλι μπύρα ενώ οι γυναίκες της παρέας ήπιαν όλες τους από ένα ποτήρι κρασί. Την επομένη νύχτα συνέβη το αντίθετο ,όλες οι γυναίκες ήπιαν μπύρα και όλοι οι άνδρες ήπιαν κρασί. Γνωρίζουμε ότι το χρηματικό ποσό του λογαριασμού την πρώτη νύχτα ήταν κατά 1 λεπτό περισσότερο από το ποσό του λογαριασμού την δεύτερη. Αν στο μπαρ το Ναυάγιο ένα μπουκάλι μπύρα κοστίζει περισσότερο από ένα ποτήρι κρασί. Ποιοι ήταν περισσότεροι στην παρέα ,οι άνδρες ή οι γυναίκες και κατά πόσοι η πόσες περισσότερες;

9.Παλιό αλλά κλασσικό:Η τετραγωνική ρίζα του πάθους…

Ένας κλασσικός κρυπτάριθμος που κυκλοφορεί στο διαδίκτυο .

Δίνεται:

$$\sqrt{PASSION} = KISS$$

Κάθε γράμμα αντιπροσωπεύει ένα μοναδικό αριθμητικό ψηφίο 0-9. Δυο διαφορετικά γράμματα αντιπροσωπεύουν διαφορετικά ψηφία, αλλά αν ένα γράμμα εμφανιστεί και δεύτερη φορά τότε αντιπροσωπεύει πάλι το ίδιο ψηφίο. Να βρεθεί σε ποιο ψηφίο αντιστοιχεί κάθε γράμμα.

10. Η Ξαπλοχώρα και Χουζουροχώρα

Δυο γειτονικές χώρες, η Ξαπλοχώρα και Χουζουροχώρα διοργάνωσαν ένα τουρνουά πινγκ - πονγκ,στο τουρνουά έλαβαν μέρος μόνο παίκτες από τις δυο αυτές χώρες.Σε κάθε παιχνίδι οι δυο αντίπαλοι παίκτες προέρχονταν από διαφορετικές χώρες.Όταν τέλειωσε το τουρνουά και ρωτήθηκαν όλοι οι παίκτες σε πόσα παιχνίδια έλαβαν μέρος,δηλώθηκαν τα εξής: Ένας αθλητής έλαβε μέρος σε εννέα παιχνίδια,τέσσερεις παίκτες έλαβαν μέρος σε έξι,ένας παίκτης σε πέντε και έξι παίκτες σε τρία παιχνίδια. Να αποδείξετε ότι κάποιος ή κάποιοι από τους παίκτες απάντησαν ψευδώς.(Kvant magazine)

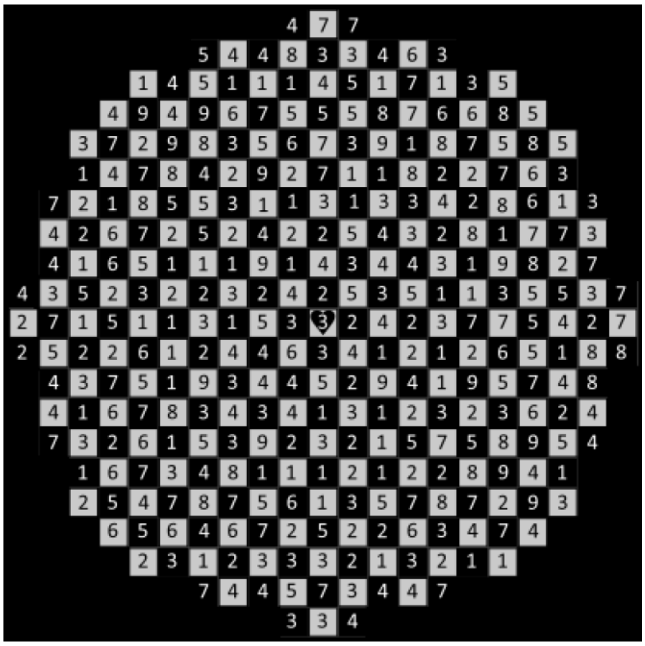
Οι λύσεις στην σελ 166

***Επιστρέφοντας στο Κλόνταϊκ*,ένα πρόβλημα λαβυρίνθου από τον Sam Loyd!**

O Leonard Euler, ο μεγάλος Ελβετός μαθηματικός ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με τον τρόπο εύρεσης της εξόδου σε προβλήματα λαβυρινθων συμβάλλοντας εξαιρετικά στην εξέλιξη της τοπολογίας .Ποιος δεν γνωρίζει τις [γέφυρες του Καινιξμπεργκ](#) ;Ο Euler λοιπόν γνώριζε αυτό που είναι γνωστό σε όσους ασχολούνται με τέτοια προβλήματα λαβύρινθου,ότι κάθε λαβύρινθος λύνεται αν ξεκινήσουμε από τη έξοδο και "γυρίσουμε προς τα πίσω".

Ένα πρόβλημα τέτοιου είδους από τον Sam Loyd, γνωστό μας από το πρόβλημα 14-15 ,ξεπερνά τον κανόνα του Euler.Ο συγκεκριμένος λαβύρινθος έφερε την ονομασία "Επιστρέφοντας στο Κλόνταϊκ" . Ο Μάρτιν Γκάρντνερ ασχολήθηκε ενδελεχώς με το πρόβλημα με άρθρο του στο Scientific American .Παρ�ότι ο Loyd ισχυριζόταν ότι η λύση είναι μοναδική,με ένα απλό πρόγραμμα fortran ήδη από το 1976 τρεις φοιτητές απέδειξαν ότι υπάρχουν πολλές λύσεις.Το πρόβλημα ήταν διατυπωμένο από τον Loyd ως εξής:

Ξεκινήστε από την καρδιά στο κέντρο. Πηγαίνετε τρία βήματα σε μια ευθεία γραμμή σε οποιαδήποτε από τις οκτώ κατευθύνσεις, βόρεια, νότια, ανατολικά, δυτικά, ή, βορειοανατολικά,βορειοδυτικά,νοτιοανατολικά, νοτιοδυτικά.Όταν έχετε διανύσει τρία βήματα σε ευθεία γραμμή θα φτάσετε σε ένα τετράγωνο με έναν αριθμό σε αυτό, γεγονός που δείχνει το ταξίδι της δεύτερης ημέρας, ο αριθμός των βημάτων της δεύτερης μέρας θα καθορίζεται από τον αριθμό της πλατείας πάντα σε ευθεία γραμμή σε όποια από τις 8 κατευθύνσεις επιθυμείτε. Από αυτό το νέο σημείο, πορεία και πάλι ανάλογα με τον αριθμό, και να συνεχίσετε με αυτόν τον τρόπο μέχρι να φτάσετε σε ένα τετράγωνο με έναν αριθμό που θα σας μεταφέρει μόνο ένα βήμα πέρα από τα σύνορα.



Για την ιστορία,η λύση ήταν: Νοτιοδυτικά,Νοτιοδυτικά , Βορειοανατολικά,Βορειοανατολικά ,Βορειοανατολικά, Νοτιοδυτικά,Νοτιοδυτικά,Νοτιοδυτικά,Βορειοδυτικά (ή Νοτιοανατολικά)

Διαίσθηση;

Η προσέγγιση των μαθηματικών προβλημάτων διαισθητικά,αποτελεί μοναδικό εργαλείο για την επίλυση τους , καμιά φορά όμως μας οδηγεί σε λανθασμένα συμπεράσματα.Ας δούμε δυο συναφή παραδείγματα.

• Ας υποθέσουμε ότι την προηγούμενη χρονιά η επιχείρηση στην όποια εργάζεστε ευημερεί και σας δίνει μια γενναιόδωρη αύξηση 10% αλλά την φετινή χρονιά ελέω κρίσης σας κάνει μια μείωση μισθού 10% .Θα πάρετε τα ίδια χρήματα με την προηγούμενη χρονιά;Η διαίσθηση σας υπαγορεύει ναι ,αλλά αυτό είναι λάθος!

Ας πούμε ότι ο μισθός σας την περσινή χρονιά είναι 1000 ευρώ .Η αύξηση ,το 10% είναι 100 ευρώ άρα συνολικά είναι 1100 ευρώ.Την επόμενη χρονιά με μείωση 10% η μείωση θα είναι το 10% του 1100,110 ευρώ άρα ο μισθός σας κατόπιν μείωσης γίνεται 990 ευρώ.Είναι προφανές ότι η σειρά δεν έχει σημασία,αν κάναμε στον αρχικό μισθό μείωση 10% και κατόπιν αύξηση 10% πάλι θα καταλήγαμε στο ίδιο ποσό.

• Έστω ότι βρίσκεστε σε ένα δωμάτιο όπου σε ένα τραπέζι είναι παραταγμένες 100 κάρτες ίδιου χρώματος ,η πίσω όψη κάθε κάρτας (αυτή που δεν φαίνεται) έχει την λέξη **«κέρδισες»** ή **«έχασες»**.Γνωρίζετε ότι από τις 100 κάρτες οι 45 έχουν την λέξη **« έχασες»** και οι υπόλοιπες 55 την λέξη **«κέρδισες »** .Σας δίνουν ένα αρχικό ποσό 10000 ευρώ.Μπορείτε να γυρίσετε όποια κάρτα θέλετε στοιχηματίζοντας το μισό ποσό που έχετε στην κατοχή σας,αν κερδίσετε το διπλασιάζετε αλλιώς το χάνετε. Το παιχνίδι τελειώνει όταν τελειώσουν οι κάρτες . Πόσα χρήματα αναμένεται να έχετε στο τέλος του παιχνιδιού;

Να το θέσουμε διαφορετικά είναι πιθανότερο να έχετε περισσότερα ή λιγότερα χρήματα από αυτά που ξεκινήσατε; Η κοινή λογική θα υπαγόρευε: εφόσον κερδίζετε 10 φορές περισσότερο από ότι χάνετε θα καταλήξετε με περισσότερα χρήματα από τα 10000 που είχατε αρχικά. Είναι λάθος .Έστω ότι κερδίζετε στην πρώτη κάρτα άρα κερδίζετε 5000 ευρώ (το μισό από το αρχικό ποσό) οπότε έχετε 15000 ευρώ. Γυρίζετε την επόμενη κάρτα και χάνετε το μισό ποσό άρα σας μένουν 7500 ευρώ. Ξεκινήσατε με 10000 ευρώ, πήγατε στις 15000 ευρώ και πέσατε στις 7500 ευρώ. Αν προσέξουμε τα νούμερα θα δούμε ότι κάθε φορά που κερδίζετε και κατόπιν χάνετε, χάνετε το ¼ των χρημάτων σας .Πόσες φορές αναμένετε να συμβεί αυτό; 45 φορές κερδίζετε-χάνετε και επιπλέον 10 φορές κερδίζετε.

Άρα 45 φορές παίρνετε το 3/4 των χρημάτων σας και 10 φορές διπλασιάζετε το μισό ποσό που έχετε (άρα μένετε με το 3/2 των συνολικών σας χρημάτων). Οπότε το αναμενόμενο ποσό μετά το πέρας του παιχνιδιού είναι:

$10000(3/4)^{45}\ (3/2)^{10}$ περίπου 1.38 ευρώ!

11.Ένα εταιρικό πρόβλημα

Σε μια πολυεθνική εταιρεία γνωρίσουμε ότι εργάζονται 15 άτομα ελληνικής υπηκοότητας και 24 γυναίκες.Είναι γνωστό επίσης ότι 8 άτομα από το υπαλληλικό προσωπικό της εταιρείας δεν είναι ούτε ελληνικής ούτε γερμανικής υπηκοότητας και τα μισά από αυτά είναι γυναίκες.

-Θέλοντας να κάνει μια κίνηση το διοικητικό συμβούλιο της εταιρείας για να ενισχύσει τις…μειονότητες αποφασίζει να δώσει ισόποση αύξηση σε μια από τις δυο παρακάτω ομάδες υπαλλήλων:Έλληνες άρρενες υπάλληλοι ή Γερμανίδες υπάλληλοι.Ποια από τις δυο ομάδες υπάλληλων πρέπει να επιλεγεί για να έχει η εταιρεία το λιγότερο κόστος;

Αν ο Παπαδόπουλος από την Λαμία είναι υπάλληλος της εν λόγω εταιρείας σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα ,ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός υπάλληλων που απασχολεί η εταιρεία;

12.Μια βρώμικη ιστορία

Ρωτάει ο κλέφτης διαμαντιών Λαμόγιος τον βοηθό του Αρπάξη:

«Που είναι τα διαμάντια που άφησα χθες βράδυ στο χρηματοκιβώτιο;Όταν τα έβαλα στο χρηματοκιβώτιο τα είχα διατάξει σε σήμα τετραγώνου,αλλά τώρα που άνοιξα το χρηματοκιβώτιο βρήκα μόνο δυο.» Ο Αρπάξης αποκρίθηκε :

«Ήρθαν ο Βούτας και τα δυο αδέρφια του και τα πήραν αφεντικό»,και συνέχισε «άφησαν μόνο δυο γιατί δεν μπορούσαν να τα μοιράσουν εξίσου μεταξύ τους.»

«Λες ψέματα .» Απάντησε νευριασμένα ο Λαμόγιος και τον ρήμαξε στο ξύλο .

Πως κατάλαβε ότι ο βοηθός του έλεγε ψέματα;

13. Γινόμενο

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο 8 διαδοχικών φυσικών αριθμών δεν μπορεί να ισούται με την τέταρτη δύναμη φυσικού αριθμού.

American Mathematical Monthly, 1956

14.Ένα πρόβλημα νομής τυριών

• Η Χαρά είναι φίλη της Άννας και της Αντωνίας.Οι τρεις γυναίκες κρατούν με ευλάβεια κρυφές της ηλικίες τους. Γνωρίζουμε όμως ότι:

(Α) Είτε η Άννα είτε η Αντωνία είναι η μεγαλύτερη σε ηλικία από τις τρεις γυναίκες .

(Β) Είτε η Χαρά είναι μεγαλύτερη σε ηλικία είτε η Αντωνία είναι η νεώτερη.

Ποια είναι η μεγαλύτερη σε ηλικία και ποια η μικρότερη από τις δυο γυναίκες ;

• Οι τρεις γυναίκες λόγω της οικονομικής κρίσης έδωσαν 4 ευρώ η καθεμία και αγόρασαν ένα μεγάλο κομμάτι τυρί.Η Χαρά το έκοψε σε τρία ισοβαρή (κατά την κρίση της) κομμάτια για να πάρουν ένα η καθεμία. Όμως η Άννα όταν είδε τα κομμάτια δυσανασχέτησε και απαίτησε να πάνε στον μπακάλη της γειτονιάς και να τα ζυγίσουν. Η ζυγαριά έδειξε ότι τα βάρη των τριών κομματιών αναλογούσαν χρηματικά σε 3,4,5 ευρώ.Η Αντωνία αμφισβητώντας τα δυο παραπάνω αποτελέσματα έφερε μια ζυγαριά από το σπίτι της και ζύγισε τα τρία κομμάτια και τα αποτελέσματα ήταν διαφορετικά και από τις δυο παραπάνω μετρήσεις,της Άννας και της Χαράς. Εκεί επήλθε το αδιέξοδο,η Χαρά επέμεινε ότι τα κομμάτια είναι ισοβαρή,η Άννα στην μέτρηση της ζυγαριάς του μπακάλη και η Αντωνία στην μέτρηση της δίκης της ζυγαριάς.

Υπάρχει τρόπος χωρίς να κοπούν περαιτέρω τα τρία κομμάτια τυρί να γίνει η μοιρασιά και να είναι και οι τρεις γυναίκες ευχαριστημένες;

 Οι λύσεις στην σελ 166

15.Μαύρο τραπεζικό χιούμορ

Στην πολύ γνωστή τράπεζα Tsifutis Bank λόγω οικονομικής κρίσης υπάρχει κεφάλαιο μόνο 500 ευρώ!! Η διοίκηση της τράπεζας σε μια κίνηση απελπισίας αποφάσισε να επιτρέψει στους πελάτες της να πραγματοποιούν μόνο δυο είδους τραπεζικές συναλλαγές. Είτε να κάνουν ανάληψη 300 ευρώ ακριβώς,είτε να καταθέτουν 198 ευρώ ακριβώς. Οι δυο αυτές τραπεζικές συναλλαγές μπορούν να επαναλαμβάνονται όσες φορές απαιτηθεί ακόμα και από το ίδιο πρόσωπο αρκεί να το επιτρέπει το κεφάλαιο της τράπεζας το οποίο αρχικά είναι 500 ευρώ. Το ερώτημα είναι:

Ποιο είναι το μέγιστο ποσό που μπορεί να αποσύρει ο πρώτος πελάτης που θα μπει σε αυτήν την «φτωχοτράπεζα».Με ποια ακολουθία αναλήψεων-καταθέσεων μπορεί να το επιτύχει;

16.Μαγικό τετράγωνο Fibonacci;

«Υπάρχει μαγικό τετράγωνο τάξης 3x3 , που στα κελιά του να βρίσκονται διαφορετικοί όροι της ακολουθίας Fibonacci;(Μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι όροι f1,f2, f1=f2=1).»

Υπενθυμίζουμε ότι οι όροι της ακολουθίας Fibonacci ορίζονται $f_0=0$, $f_1=1$,$f_2=1$,..γενικά $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$,κάθε όρος της ακολουθίας προκύπτει από το άθροισμα των δυο προηγουμένων .Μερικοί πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι: 0,1,1,2,3,5,8,…

Λεονάρντο Φιμπονάτσι
(1170 - 1240)

17.Ο αριθμός του Χασογκόλη

Ένα ακόμα πρόβλημα από το βιβλίο του Αλί Νταρ Νασάθ ,*Προβλήματα για δύσκολες ώρες* .

"Οι 10 παίκτες της ποδοσφαιρικής ομάδας ο «Πύραυλος» δεν έχουν καμιά ελπίδα να κερδίσουν το πρωτάθλημα , έτσι ,αντί να προπονούνται παίζουν το εξής παιχνίδι:Σχηματίζουν ένα κύκλο ο καθένας τους σκέπτεται έναν αριθμό. Με το παράγγελμα του τερματοφύλακα ο κάθε παίκτης ψιθυρίζει τον αριθμό που σκέφτηκε στους δυο παίκτες εκατέρωθεν του.Έτσι ο καθένας από τους 10 παίκτες άκουσε δυο αριθμούς ,κατόπιν υπολογίζει νοερά τον μέσο όρο τους .Με το δεύτερο παράγγελμα του τερματοφύλακα οι 10 παίκτες ένας-ένας , ανακοινώνουν διαδοχικά (ακολουθώντας την φορά του κύκλου) ο καθένας τον μέσο όρο του .

Για την ακρίβεια οι αριθμοί που ειπώθηκαν από τους παίκτες στην σειρά ήταν: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.

Ο ποδοσφαιριστής Χασογκόλης ανακοίνωσε τον αριθμό 6. Ποιος ήταν ο αριθμός που σκέφτηκε αρχικά;"

(Προφανώς και δεν έχει σημασία ποιος θα από τους δέκα ποδοσφαιριστές θα ξεκινήσει πρώτος να ανακοινώνει το μέσο όρο του ούτε αν οι ανακοινώσεις γίνουν αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα).

 Οι λύσεις στην σελ 166

18.Ζάρια

Έστω ένα παιχνίδι με τρία ζάρια:κόκκινο,μπλε και κίτρινο με ενδείξεις (3,3,5,5,10,10),(4,4,6,6,8,8) και(2,2,7,7,9,9) αντίστοιχα.Δυο παίκτες παίζουν ως έξης : διαλέγει ο πρώτος παίκτης ένα ζάρι και το ρίχνει.Κάνει το ίδιο και ο δεύτερος παίκτης.Κερδίζει αυτός που το ζάρι του θα δείχνει το μεγαλύτερο αριθμό.

Ποιος παίκτης έχει πλεονέκτημα ο πρώτος ή ο δεύτερος;

19.Ένα πρόβλημα από το νησί του Boole !!!

Στο νησί του Boole ζουν 200 άτομα. Κάποιοι από τους κάτοικους του νησιού λένε πάντα ψέματα και οι υπόλοιποι λένε πάντα την αλήθεια. Στο νησί έγιναν εκλογές .Ο καθένας από τους 200 κάτοικους ψήφισε ένα από τα τρία κόμματα:

Το κόμμα των πρασίνων, το κόμμα των κόκκινων και το κόμμα των κίτρινων. Δεν υπήρξαν λεύκα ή άκυρα. Ένας δημοσιογράφος που δεν ήταν κάτοικος του νησιού έκανε σε όλους τους κάτοικους τις έξης ερωτήσεις:

1) Ψήφισες το κόμμα των πρασίνων;

2) Ψήφισες το κόμμα των κόκκινων;

3) Ψήφισες το κόμμα των κίτρινων;

Γνωρίζουμε ότι απάντησαν όλοι οι κάτοικοι του νησιού .Καταγράφηκαν 150 καταφατικές απαντήσεις στην πρώτη ερώτηση , 50 καταφατικές απαντήσεις στην δεύτερη ερώτηση και 130 αρνητικές απαντήσεις στην τρίτη ερώτηση. Πόσοι ήταν οι κάτοικοι του νησιού που λένε πάντα ψέματα.

20. Ένα πρόβλημα στοιχημάτων

Ο Παπαδόπουλος κάθε Κυριακή παίζει στις ιπποδρομίες , γνωρίζει πολύ καλά τις αποδόσεις. Για παράδειγμα ,αν στοιχηματίσει σε ένα άλογο που έχει απόδοση 6 προς 2 το ποσό των 20 ευρώ,τότε υπάρχουν τα έξης ενδεχόμενα:

- Αν κερδίσει το άλογο να πάρει 60 ευρώ ως κέρδος συν τα 20 ευρώ που πλήρωσε .

- Αν χάσει το άλογο να χάσει τα 20 ευρώ.

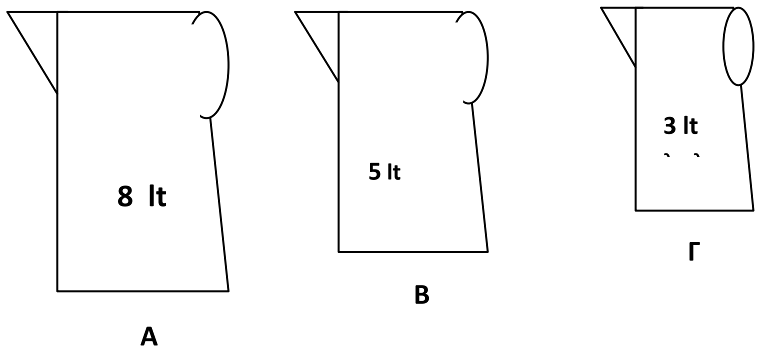
Όταν φτάνει στον ιππόδρομο βλέπει τις εξής αποδόσεις :

Αννίβας:	5 προς 2
Βουκεφάλας:	2 προς 1
Θρίαμβος :	6 προς 1
Πετεφρής :	6 προς 1

Υπάρχει τρόπος να στοιχηματίσει ο Παπαδόπουλος έτσι ώστε ανεξάρτητα από το ποιο από τα 4 άλογα τερματίσει πρώτο,ο Παπαδόπουλος να κερδίσει;

21.Μεταγγίσεις

Έστω τρεις κανάτες χωρητικότητας 8,5 και 3 λίτρων , Η κανάτα των 8 λίτρων είναι γεμάτη νερό και οι άλλες δυο είναι άδειες .



Μπορούμε να χύσουμε νερό από μια κανάτα σε μια άλλη ακολουθώντας έναν κανόνα .Χύνουμε νερό από μια κανάτα σε μια άλλη είτε μέχρι να αδειάσει η πρώτη είτε μέχρι να γεμίσει η δεύτερη. Οι κανάτες δεν έχουν στην επιφάνεια τους καμιά ένδειξη που να υποδεικνύει την χωρητικότητα τους ανάλογα με το ύψος της στάθμης του νερού.Το ερώτημα που τίθεται, είναι, μπορούμε «μεταγγίζοντας» νερό να χωρίσουμε την ποσότητα των 8 λίτρων σε δυο ποσότητες των 4 λίτρων η καθεμιά;

22.Μεγάλοι αριθμοί

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας 3 αριθμητικά ψηφία και τις συνήθεις αριθμητικές πράξεις και να βρεθούν τα δυο τελευταία ψηφία του ;

23.Άθροισμα ,γινόμενο

Υπάρχει ζεύγος αριθμών που το γινόμενο τους ισούται με το άθροισμα τους;

Μια προφανής λύση,οι αριθμοί 2 και 2 τότε: 2+2=2x2=4

Είναι το μοναδικό ζεύγος; Αν όχι πόσα υπάρχουν; (H.E.Dudeney ,1926)

Το πρόβλημα των δεκαπέντε μαθητριών του Κίρκμαν

Δεν είναι λίγες οι φορές που μια σπαζοκεφαλιά που απευθύνεται στο ευρύ κοινό οδηγεί σε σημαντικά συμπεράσματα σε ένα πεδίο των μαθηματικών ,τα ψυχαγωγικά μαθηματικά πέρα από ότι αποτελούν μια διανοητική απόλαυση οδηγούν τα μαθηματικά σε εξέλιξη .Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το πρόβλημα των 15 μαθητριών του Τ.Π.Κίρκμαν. Ένα πρόβλημα που οδήγησε τον κλάδο της συνδυαστικής σε νέες εξελίξεις . Το 1850 στο περιοδικό *Lady's and Gentleman's Diary ο Βρετανός μαθηματικός* Τ.Π.Κιρκμαν(1806-1895) δημοσιεύει το εξής πρόβλημα:

«Δεκαπέντε μαθήτριες πηγαίνουν στην εκκλησία υπό την συνοδεία της δασκάλας τους περπατώντας σε 5 γραμμές (στίχους) των τριών μαθητριών και το κάνουν κάθε μέρα της εβδομάδας . Η δασκάλα του φροντίζει να στοιχίζει τις μαθήτριες κάθε μέρα με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε μαθήτρια κάθε μέρα να έχει διαφορετική παρέα. Δηλαδή για κανένα ζεύγος μαθητριών, οι μαθήτριες δεν βαδίζουν πλάι στην σειρά περισσότερο από μια φορά την εβδομάδα .»

Μπορείτε να το δοκιμάσετε αν βαρεθήκατε το Σουντόκου.

Αν ονομάσουμε τις μαθήτριες α,β,γ,δ,ε,ζ,η,Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ . Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν 7 διαφορετικές λύσεις . Μια από αυτές είναι και η ακόλουθη:

ΔΕΥΤΕΡΑ

α	Α	Θ
β	Ε	Δ
γ	Β	Η
δ	ζ	η
ε	Ζ	Γ

ΤΡΙΤΗ

β	Β	Θ
γ	Ζ	Ε
δ	Γ	Α
ε	η	α
ζ	Η	Δ

ΤΕΤΑΡΤΗ

γ	Γ	Θ
δ	Η	Ζ
ε	Δ	Β
ζ	α	β
η	Α	Ε

Τ.Π.Κίρκμαν (1806-1895)

ΠΕΜΠΤΗ

δ	Δ	Θ
ε	Α	Η
ζ	Ε	Γ
η	β	γ
α	Β	Ζ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ

ε	Ε	Θ
ζ	Β	Α
η	Ζ	Δ
α	γ	δ
β	Γ	Η

ΣΑΒΒΑΤΟ

ζ	Ζ	Θ
η	Γ	Β
α	Η	Ε
β	δ	ε
γ	Δ	Α

ΚΥΡΙΑΚΗ

η	Η	Θ
α	Δ	Γ
β	Α	Ζ
γ	ε	ζ
δ	Ε	Β

Οι λύσεις στην σελ 166

24.…οπουλοι

Στο χωριό Κάτω Πλατανιά ζουν τρεις μεγάλες οικογένειες οι Παπαδόπουλοι , οι Σωτηρόπουλοι και οι Κωνσταντόπουλοι .Στο γραφικό αυτό χωριό συνέβη το έξης παράδοξο : Στο αστυνομικό τμήμα της κοινότητας, το πρωί, βρίσκονταν 10 άτομα από τα οποία τα 6 είχαν το επώνυμο Παπαδόπουλος .Συνολικά αυτά τα δέκα άτομα ήταν 6 αστυνομικοί και 4 απατεώνες .Είναι γνωστό ότι ένας Παπαδόπουλος συνέλαβε έναν άλλο Παπαδόπουλο και ένας Σωτηρόπουλος έναν άλλο Σωτηρόπουλο .Ωστόσο ο τελευταίος απατεώνας , ο Σωτηρόπουλος , δεν συνελήφθει από τον αδελφό του. Δεν γνωρίζουμε ακριβώς ποιος συνέλαβε τον Κωνσταντόπουλο ή ένας Παπαδόπουλος ή ένας Σωτηρόπουλος .Να βρεθούν τα επώνυμα και οι ιδιότητες των 10 ατόμων ;

25. Βαρέλια

Ο Αντώνης,ιδιοκτήτης της κάβας η « Αφθονία» ,διαθέτει προς πώληση κρασί και μπύρα. Έχει στην αποθήκη του 6 βαρέλια, όλα διαφορετικών διαστάσεων , χωρητικότητας 15,16,18,19,20 και 31 λίτρα αντίστοιχα. Πέντε βαρέλια περιέχουν κρασί και ένα περιέχει μπύρα . Ο πρώτος πελάτης που μπήκε στο μαγαζί αγόρασε δυο βαρέλια κρασί ενώ ο επόμενος αγόρασε κρασί , διπλάσιας ποσότητας σε λίτρα από τον πρώτο . Ποια είναι η χωρητικότητα του βαρελιού που περιείχε μπύρα;

26.Ένα πρόβλημα πινακίδας

Ο κ. Παπαδόπουλος έχει 8 παιδιά και κανένα από αυτά δεν γεννήθηκε τον ίδιο χρόνο. Ο μεγαλύτερος, ο Γιαννάκης είναι 9 ετών . Ο αριθμός της πινακίδας του αυτοκίνητου της οικογενείας είναι ένας τετραψήφιος αριθμός όπου αποτελείται μόνο από δυο ψηφία , όπου όπως είναι φυσικό επαναλαμβάνονται το καθένα δυο φορές.
Οι συμπτώσεις όμως δεν σταματούν εδώ, ο αριθμός της πινακίδας διαιρείται ακριβώς με την ηλικία κάθε παιδιού της οικογενείας και τα δυο τελευταία ψηφία αποτελούν την ηλικία του κ. Παπαδοπούλου.
Μπορείς να βρεις τον αριθμό;

27.Τα ψέματα,ένα επίκαιρο λογικό πρόβλημα.

Σε ένα τηλεοπτικό πάνελ 12 υποψήφιοι βουλευτές διαπληκτίζονται,ως είθισται σε τέτοιου είδους εκπομπές. Ακουστήκαν πολλά.Όταν η κουβέντα άναψε για τα καλά ,ένας υποψήφιος βουλευτής φώναξε « Μέχρι στιγμής έχει ειπωθεί ένα ψέμα.». Ένας άλλος απάντησε: «Τώρα ειπώθηκαν δυο ψέματα.» .Ένας τρίτος υπερθεμάτισε: «Τώρα ειπώθηκαν τρία ψέματα.» Αυτό συνεχίστηκε μεχρις ότου ο δωδέκατος υποψήφιος είπε: «Τώρα έχουν ειπωθεί δώδεκα ψέματα.» . Σε αυτό το σημείο ο παρουσιαστής της εκπομπής την διέκοψε . Αργότερα βλέποντας το βίντεο της εκπομπής ο παρουσιαστής παρατήρησε ότι τουλάχιστον ένας από τους υποψηφίους βουλευτές δήλωσε σωστά το πλήθος των ψεμάτων που ειπώθηκαν προτού κάνει την δήλωση . Πόσα ψέματα ειπώθηκαν συνολικά από τους υποψηφίους βουλευτές;

Ισότητα

Το 1955, ο Royal V. Heath στο μαθηματικό περιοδικό *Scripta Mathematica* δημοσίευε την παρακάτω ισότητα:

$$0264 + 4125 + 5610 = 0165 + 5214 + 4620$$

… που παραμένει ισότητα αν χωρίσουμε κάθε τετραψήφιο με το σύμβολο του πολ/σμου :

$$02 \times 64 + 41 \times 25 + 56 \times 10 = 01 \times 65 + 52 \times 14 + 46 \times 20$$

…ή με το σύμβολο της πρόσθεσης :

$$02 + 64 + 41 + 25 + 56 + 10 = 01 + 65 + 52 + 14 + 46 + 20$$

..ή αν υψώσουμε κάθε όρο στο τετράγωνο.

$$0264^2 + 4125^2 + 5610^2 = 0165^2 + 5214^2 + 4620^2$$

Κριτήριο διαιρετότητας για το 7 !

Για να εξετάσουμε αν ένας φυσικός αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 7 αρκεί να διαγράψουμε το τελευταίο ψηφίο του και να αφαιρέσουμε από τον αριθμό το διπλάσιο του ψηφίου που διαγράψαμε. Ο αριθμός που προκύπτει είναι πολλαπλάσιο του 7 **αν και μόνο αν** ο αρχικός αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 7. Συνεχίζουμε την διαδικασία μέχρι να καταλήξουμε σε διψήφιο αριθμό όπου από την προπαίδεια θα γνωρίζουμε αν είναι ή όχι πολλαπλάσιο του 7 .
Ας το διασαφηνίσουμε με ένα παράδειγμα:
Επιλέγουμε τυχαία ένα αριθμό 412734.
Διαγράφουμε το τελευταίο ψηφίο του 412734 και αφαιρούμε το διπλάσιο του τελευταίου ψηφίου του : 41273-(2x4)= 41273-8= 41265
Επαναλαμβάνουμε:

- Διαγράφουμε το τελευταίο ψηφίο του 41265 και αφαιρούμε το διπλάσιο του τελευταίου διαγραμμένου ψηφίου του: 4126-(2x5)= 4126-10=4116.

- Διαγράφουμε το τελευταίο ψηφίο του 4116 και αφαιρούμαι το διπλάσιο του τελευταίου διαγραμμένου ψηφίου του: 411 -(2x6)= 411 - 12=399
- Διαγράφουμε το τελευταίο ψηφίο του 399 και αφαιρούμε το διπλάσιο του τελευταίου διαγραμμένου ψηφίου του: 39 -(2x9)= 39 -18=21

Το 21 είναι πολλαπλάσιο του 7 άρα και ο αρχικός αριθμός 412734 είναι πολλαπλάσιο του 7 .

Ο μαγικός 777

Πείτε σε ένα φίλο σας να σκεφτεί έναν αριθμό ανάμεσα στο 500 και στο 1000 χωρίς να τον ανακοινώσει. Προτρέψτε τον, νοερά,να προσθέσει στον αριθμό το *«μαγικό»* αριθμό 777 .Το άθροισμα προφανώς ξεπερνά το 1000,πείτε του,από το αποτέλεσμα να αποκόψει το ψηφίο των χιλιάδων και να το προσθέσει στο ψηφίο των μονάδων.Στην συνέχεια-πάντα νοερά-πρέπει να αφαιρέσει από τον αριθμό που σκέφτηκε το προηγούμενο αποτέλεσμα. Ανακοινώστε του ότι η διαφορά είναι 222.

Για παράδειγμα αν σκεφτεί το 600 τότε έχουμε διαδοχικά:

600+777=1377

Αποκόπτουμε το 1 και το προσθέτουμε στο 7

377+1=378

Αφαιρούμε από τον αρχικό αριθμό (600) το 378.

600-378=222

Πως αιτιολογείται το γεγονός ότι πάντα το τελικό αποτέλεσμα είναι 222;

Αν προσθέσουμε οποιοδήποτε αριθμό από το 500 μέχρι το 1000 στο 777 προκύπτει ένα αριθμός που το ψηφίο των χιλιάδων είναι πάντα το 1.Αν λοιπόν αποκόψουμε το ψηφίο των χιλιάδων και το προσθέσουμε στο ψηφίο των μονάδων ουσιαστικά αφαιρούμε από το άθροισμα τον αριθμό 1000-1=999
Αν Χ είναι ο αριθμός που σκέπτεται το υποψήφιο θύμα τότε η παραπάνω διαδικασία αλγεβρικά συνοψίζεται:

Χ-(Χ+777-999)=222

Προφανώς θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αντί για το 777 ένα άλλο αριθμό μεγαλύτερο του 500.Μόνο το τελικό αποτέλεσμα αλλάζει..

28.Ένα πρόβλημα ισοτιμιών

Σε δυο φανταστικά κρατίδια το Μποράχ και το Κοράχ ,τα εθνικά νομίσματα είναι αντίστοιχα το Μπορχ και το Κορχ .Στο Μποράχ 1 Μπορχ ανταλλάσσεται με 10 Κορχ και στο Κοράχ 1 Κορχ ανταλλάσσεται με 10 Μπορχ . Ένας νεαρός από το Μποραχ που έμενε κοντά στα σύνορα έχοντας 1 Μπορχ το αντάλλαξε με 10 Κορχ πέρασε τα σύνορα ,αγόρασε ένα παντελόνι και μια μπλούζα αξίας 9 Κορχ και αντάλλαξε το Κορχ που του έμεινε με 10 Μπορχ και πέρασε ξανά τα σύνορα.Το ερώτημα που έθετε ο Northrop ήταν ποιος πλήρωσε για τα ψώνια του νεαρού καθώς και τα 9 Μπορχ που του περίσσεψαν. Η απάντηση δεν ήταν δύσκολη αν σκεφτεί κανείς ποιος πληρώνει πάντα ,οι φορολογούμενοι των δυο κρατών. Ας το κάνουμε λίγο πιο δύσκολο.Ένας πονηρός έμπορος από το Μποραχ ξεκινά με 1 Μπορχ και μπορεί να μεταβαίνει ελεύθερα από την μια χώρα στην άλλη ,ανταλλάσσοντας νομίσματα .Είναι δυνατόν κάποια στιγμή ο έμπορος να έχει τον ίδιο αριθμό Μπορχ και Κορχ ;

29.Στρογγυλό τραπέζι

Οι κύριοι Παπαδόπουλος (Π), Βασιλείου (Β), Γεωργίου (Γ) ,Κολιόπουλος (Κ) και Ευσταθίου (Ε) μαζί με τις συζύγους τους δειπνήσαν σε ένα εστιατόριο. Το τραπέζι ήταν κυκλικό και κάθισαν ένας άνδρας και μια γυναίκα εναλλάξ. Κάθε γυναίκα κάθισε τρία καθίσματα μακριά από τον σύζυγο της .Η κύρια Γεωργίου κάθισε δεξιά από τον κύριο Παπαδόπουλο .Ο κύριος Ευσταθίου κάθισε δυο θέσεις αριστερά από τον κύριο Γεωργίου , ενώ η κυρία Ευσταθίου κάθισε δυο θέσεις δεξιά από την κυρία Βασιλείου. Το άτομο που καθόταν αριστερά από την κυρία Παπαδοπούλου έφυγε από το εστιατόριο κακήν κακώς γιατί ξέχασε το θερμοσίφωνα ανοιχτό παίρνοντας μαζί του και το έτερον ήμισυ.Ποιο ζευγάρι έφυγε νωρίτερα; (Η έννοια αριστερά -δεξιά έχει να κάνει με το πώς θα έβλεπε ένας παρατηρητής στο κέντρο του τραπεζιού).

30.Σκάκι

Όταν ολοκληρώθηκε ένα τουρνουά σκακιού όπου κάθε παίκτης έπαιξε με όλους τους άλλους παίκτες ακριβώς μια φορά, ανακοινώθηκε η σειρά κατάταξης των 5 παικτών που έλαβαν μέρος . Η σειρά κατάταξης ήταν Α,Β,Γ,Δ,Ε ,γνωρίζουμε ότι δεν υπήρξαν παίκτες με την ίδια βαθμολογία .Μετά το πέρας του τουρνουά έγιναν δηλώσεις από κάποιους παίκτες.

Ο Β δήλωσε :«Μόνο εγώ δεν ηττήθηκα ούτε μια φορά!»

Ο Ε δήλωσε : «Μόνο εγώ δεν σημείωσα ούτε μια νίκη!»

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα μπορείτε να βρείτε τα αποτελέσματα του τουρνουά; Πόσες νίκες, πόσες ήττες και ισοπαλίες καθώς και την βαθμολογία του καθένα από τους 5 παίκτες .

(Σημειώνουμε ότι σε ένα αγώνα σκακιού ,ο νικητής παίρνει ένα βαθμό, ενώ σε περίπτωση ισοπαλίας παίρνουν μισό βαθμό ο κάθε παίκτης)

«Λένε πως η ιστορία των μαθηματικών θα έπρεπε να εξελίσσεται όπως και η μουσική ανάλυση μιας συμφωνίας . Η συμφωνία αποτελείται από κάποια βασικά θέματα .Είναι σχετικά εύκολο να αντιληφτούμε πότε ένα θέμα εμφανίζεται για πρώτη φορά. Στην συνέχεια αναμιγνύεται με άλλα θέματα.Η τέχνη του συνθέτη είναι να μπορεί να τα χειρίζεται όλα μαζί.Υπάρχουν στιγμές που άλλο θέμα παίζει το βιολί και άλλο το φλάουτο.Στην συνέχεια εναλλάσσονται και αυτό επαναλαμβάνεται συνεχώς.Με την ιστορία των μαθηματικών συμβαίνει ακριβώς το ίδιο.»

Αντρέ Βειλ (1906 –1998)

Η απονομή βραβείου Νόμπελ και μια πλάνη πιθανοτήτων..

Linus Pauling (1901-1994)

Όταν ο χημικός Linus Pauling (1901-1994) ,τιμήθηκε με το δεύτερο βραβείο Νόμπελ(με πρώτο το νόμπελ Χημείας το 1954 για το έργο του στην κβαντική χημεία, και με δεύτερο το νόμπελ ειρήνης για την εκστρατεία του ενάντια στις πυρηνικές δόκιμες),δήλωσε, προφανώς αστειευόμενος,πως η απόκτηση του πρώτου βραβείου ήταν πολύ δύσκολη καθώς η πιθανότητα ήταν μια στα 3 δισεκατομμύρια (ο αριθμός που αντιπροσωπεύει τον παγκόσμιο πληθυσμό τη χρονιά που του απονεμήθηκε το Νόμπελ) και ότι είχε πολύ λιγότερη άξια η απόκτηση του δεύτερου , καθότι οι πιθανότητες του ήταν μια σε μερικές εκατοντάδες (αριθμός των ζώντων που είχαν ήδη τιμηθεί με το βραβείο Νόμπελ).Που βρίσκεται το σφάλμα σε αυτήν την σίγουρα διασκεδαστική αλλά άκρως παραπλανητική συλλογιστική;

Αν αποδεχτούμε ότι η πιθανότητα να τιμηθεί κανείς με δεύτερο βραβείο Νόμπελ εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των ατόμων που έχουν πάρει ένα πρώτο βραβείο , θα έπρεπε η επιτροπή να έχει αποφασίσει να ανταμείψει κάποιον που έχει ήδη ένα βραβείο Νόμπελ. Αλλά στην πραγματικότητα , η απόκτηση του δευτέρου βραβείου,από άποψη πιθανοτήτων, είναι εξίσου δύσκολη με εκείνη του πρώτου, καθότι ξέρουμε ότι η επιτροπή δεν λαμβάνει υπόψη για την επιλογή της το γεγονός πως οι υποψήφιοι έχουν τιμηθεί με άλλα βραβεία στο παρελθόν. Στην πραγματικότητα όμως η απόκτηση ενός βραβείου νόμπελ δεν είναι θέμα τύχης , αλλά κυρίως αξίας.

31.Οι τραπεζικές Θυρίδες

Δυο τραπεζικοί υπάλληλοι ο Α και ο Β πήραν εντολή από τον διευθυντή τους να ανοίξουν τις 200 θυρίδες της τράπεζας και να τις αδειάσουν από το περιεχόμενο τους αφού το καταγράψουν. Ήταν μια κοπιαστική και δύσκολη δουλειά,για αυτό ο διευθυντής της τράπεζας τους έδωσε ένα κίνητρο. Οι δυο υπάλληλοι θα έπαιζαν ένα παιχνίδι με τις θυρίδες διεκδικώντας ένα χρηματικό ποσό.Το παιχνίδι όριζε ότι οι δυο τραπεζικοί Θα ανοίγουν εναλλάξ είτε 1,ειτε 2, είτε 7 είτε 13 θυρίδες και νικητής θα ανακηρυχτεί αυτός που θα ανοίξει την τελευταία θυρίδα. Ορίστηκε να παίξει πρώτος ο Α. Υπάρχει στρατηγική νίκης για κάποιον από τους δυο παίκτες ;

 Οι λύσεις στην σελ 166

32.Βρες τους 6 αριθμούς

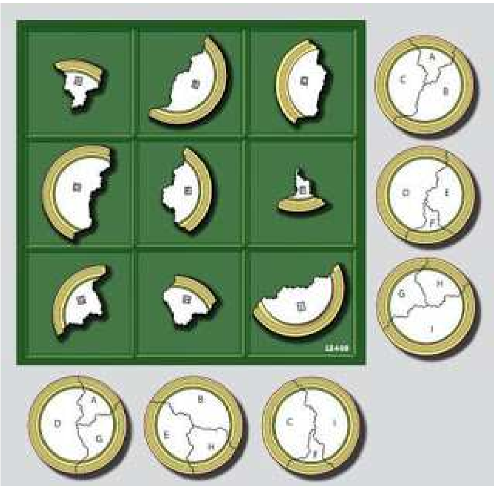
Ο Γιώργος και ο Γιάννης παίζουν το εξής παιχνίδι. Ο Γιώργος γράφει κρυφά σε ένα χαρτί από το Γιάννη 6 θετικούς ακεραίους αριθμούς $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_6$.(όχι κατ ανάγκη διαφορετικούς μεταξύ τους).Ο Γιάννης θα πρέπει να προσπαθήσει να βρει τους αριθμούς ως εξής : Ο Γιάννης επιλέγει και αυτός 6 θετικούς ακεραίους ,οποίους θέλει, $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\ldots\beta_6$ και τους λέει στον Γιώργο. Τότε ο Γιώργος υπολογίζει στο χαρτί το άθροισμα των αντίστοιχων γινομένων : $\chi_1\beta_1+\chi_2\beta_2+\chi_3\beta_3+\ldots+\chi_6\beta_6$ και το ανακοινώνει στον Γιάννη . Στην συνέχεια ο Γιάννης επιλέγει μια άλλη λίστα 6 θετικών ακεραίων , $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_6$ και τους λέει στον Γιώργο. Τότε ο Γιώργος ξανά υπολογίζει στο χαρτί το άθροισμα των αντίστοιχων γινομένων : $\chi_1\alpha_1+\chi_2\alpha_2+\chi_3\alpha_3+\ldots+\chi_6\alpha_6$ και το ανακοινώνει στον Γιάννη . Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί όσες φόρες επιθυμεί ο Γιάννης μέχρι να είναι σε θέση να βρει τους αριθμούς $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_6$.Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός γύρων του παιχνιδιού με τους οποίους ο Γιάννης είναι σε θέση να βρει τους αριθμούς;

33.Ένα τραπεζικό…. λάθος

Το παρακάτω πρόβλημα είναι κλασσικό και πιστώνεται στον Henry Dudeney (1857-1930) Βρετανό μαθηματικό του 18^{ου} αιώνα ,πρωτοπόρο των ψυχαγωγικών μαθηματικών (recreation mathematics),το αναβίωσε ο Martin Gardner το 1950 μέσα από τις σελίδες του περιοδικού scientific American και την θρυλική στήλη του «Μαθηματικά παιχνίδια“.Τη συγκεκριμένη σπαζοκεφαλιά τη χρησιμοποιώ καμιά φορά στους μαθητές μου όταν υπάρχει χρόνος , για να τονίσω ότι για το ίδιο πρόβλημα μπορεί να υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις με πολύ μεγάλη διαφορά στο βαθμό δυσκολίας .Πρόκειται για το είδος του προβλήματος που επιδέχεται δυο ειδών λύσεις μια , η οποία εμπλέκει ανωτέρα μαθηματικά (μέθοδος συνέχων κλασμάτων) και μια πολύ απλή που απαιτεί μαθηματικά γυμνασίου!!!!

«Όταν ο κ. Παπαδόπουλος πήγε στην τράπεζα να εξαργυρώσει μια επιταγή. Ο ταμίας έκανε λάθος και του εξαργύρωσε το ποσό δίνοντας τόσα ευρώ όσα λεπτά έπρεπε να του δώσει και το αντίστροφο .Δηλαδή αν έπρεπε να του δώσει χ ευρώ και ψ λεπτά του έδωσε ψ ευρώ και χ λεπτά. Ο κ. Παπαδόπουλος χωρίς να αντιλήφθη τίποτα βγήκε από την τράπεζα και στην είσοδο της τράπεζας σε ένα ζητιάνο έδωσε 5 λεπτά. Όταν έφτασε στο σπίτι του και κοίταξε το πορτοφόλι του διαπίστωσε ότι είχε ακριβώς τα διπλάσια χρήματα από το πόσο της επιταγής.Μπορείς να βρεις το ποσό της επιταγής ;»

Ένα ιδιαίτερο μαγικό τετράγωνο από τον Lee Swallows (http://www.geomagicsquares.com/)
Στην παρακάτω εικόνα όταν τα κομμάτια μιας σπασμένης πιατέλας συγκολληθούν κατά γραμμές ή στήλες δημιουργούν την πιατέλα.



Ένα ζυγισμένο....πρόβλημα του Hugo steinhaus

Hugo Steinhaus
(1887-1972)

Ένα πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα πραγματεύτηκε το 1950 , ο hugo Steinhaus ο μαθηματικός που μας είναι γνώριμος από το πρόβλημα των ίσων μεριδίων .Το πρόβλημα της κατάταξης ν αντικείμενων κατά αύξουσα σειρά βάρους (από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο) με τον ελάχιστο αριθμό ζυγίσεων.
Ας γίνουμε περισσότερο συγκεκριμένοι. Έστω ότι πρέπει να κατατάξετε πέντε διαφορετικά σώματα σύμφωνα με το βάρος τους. Έχετε όμως στην διάθεση σας μια ζυγαριά , που έχετε χάσει τα σταθμά της .Πως θα τα καταφέρετε κάνοντας μόνο 7 ζυγίσεις ;Αν είχατε δυο σώματα, θα τα καταφέρνατε με μια μόνο ζύγιση.
Για τρία σώματα χρειάζονται τρεις ζυγίσεις. Η πρώτη θα δείχνει ποιο από τα σώματα Α και Β είναι βαρύτερο, εάν είναι το Α, η δεύτερη ζύγιση σας δείχνει ποιο από τα Α και Γ είναι βαρύτερο. Εάν το Α είναι βαρύτερο από το Γ, είναι απαραίτητη και τρίτη ζύγιση για την σύγκριση των Β και Γ.
Για τέσσερα σώματα, το πρόβλημα παραμένει απλό, χρειάζονται 5 ζυγίσεις.
Από 5 σώματα και πάνω το πράγμα αρχίζει και ζορίζει.

Τα 5 σώματα μπορεί να διαταχθούν κατά αυξανόμενο βάρος <u>με επτά ζυγίσεις το πολύ</u>:
1^{η} ζύγιση : Συγκρίνουμε το Α με το Β και υποθέτουμε ότι το Β είναι πιο βαρύ. (Α<Β)
2^{η} ζύγιση: Συγκρίνουμε το Γ με το Δ και υποθέτουμε ότι το Δ είναι βαρύτερο (Γ<Δ)
3^{η} ζύγιση: Συγκρίνουμε το Β με το Δ έστω ότι το Δ είναι βαρύτερο (Β<Δ)
4^{η} ζύγιση: Συγκρίνουμε το Β με το Ε .
5^{η} ζύγιση: Εάν το Ε είναι πιο βαρύ από το Β, συγκρίνουμε το Ε με το Δ. Εάν αντίθετα είναι ελαφρύτερο από το Β, τότε το συγκρίνουμε με το Α.
Η πέμπτη ζύγιση μας επιτρέπει να κατατάξουμε τα τέσσερα αντικείμενα Α,Β,Ε,Δ κατά αύξουσα σειρά. Γνωρίζουμε όμως από την δεύτερη ζύγιση ότι το Γ είναι πιο ελαφρύ από το Δ. Ας υποθέσουμε ότι το αποτέλεσμα της πέμπτης ζύγισης είναι: <u>Δ>Β>Ε>Α.</u> Απομένει η κατάταξη του Γ σε σχέση με τα Β,Ε και Α, πράγμα που θα επιτύχουμε με δυο ακόμα ζυγίσεις.
6^{η} ζύγιση: Συγκρίνουμε το Γ με το Ε.
7^{η} ζύγιση: Αν το Γ είναι πιο βαρύ από το Ε, συγκρίνουμε το Γ με το Β. Εάν το Γ είναι ελαφρύτερο από το Ε, το συγκρίνουμε με το Α.
Ο Hugo Steinhaus επανεξέτασε το πρόβλημα , το 1968 , και δίνει ένα πινάκα στον οποίο αποφαίνεται για τον ελάχιστο αριθμό ζυγίσεων που απαιτούνται για την διάταξη ν αντικείμενων όπου ν=1,….,11

ν αντικείμενα	Ελάχιστος αριθμός ζυγίσεων
1	0
2	1
3	3
4	5
5	7
6	10
7	13
8	16
9	19
10	22
11	26

Το παραπάνω πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το να μας ζητηθεί για ν αριθμό παικτών στο τένις να βρούμε τον ελάχιστο αριθμό παιχνιδιών που πρέπει να δώσουν για να έχουμε την τελική κατάταξη.

34.Ένα πρόβλημα με τραίνα

Ένα πολύ γνωστό πρόβλημα ελαφρά παραλλαγμένο,δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά στο scientific American το Φεβρουάριο του 1948.

Διηγείται ο κ. Παπαδόπουλος σε ένα φίλο του:

«Κάθε απόγευμα όταν φεύγω από την δουλειά μου , την ίδια ώρα κάθε μέρα παίρνω τραίνο και πάω σπίτι μου. Όταν κατεβαίνω από το τραίνο στον σταθμό, εκείνη ακριβώς την στιγμή φθανει και η γυναίκα μου με το αυτοκίνητο μας που είχε ξεκινήσει από το σπίτι μας για να γυρίσουμε μαζί εκεί. Μια μέρα που δεν είχε πολύ δουλειά σχόλασα νωρίτερα και πήρα το τραίνο μια ώρα νωρίτερα ακριβώς χωρίς να προλάβω να ειδοποιήσω την γυναίκα μου .Έτσι έφτασα στον σταθμό νωρίτερα και ξεκίνησα να πάω με τα πόδια .Σε κάποιο σημείο του δρόμου, συναντήθηκα με την γυναίκα μου, μπήκαμε στο αυτοκίνητο και φτάσαμε στο σπίτι μισή ώρα νωρίτερα από ότι συνήθως. Πόση ώρα περπάτησα;»

35.Ένα επίκαιρο…πρόβλημα

Στο Καφριστάν ψηλά στα υψίπεδα της χωράς της Ρεμούλας πραγματοποιείται ένα πολιτικό συνέδριο .Στο πολιτικό συνέδριο έλαβαν μέρος είκοσι πολιτικοί ,κάθε πολίτικος ήταν είτε διεφθαρμένος είτε τίμιος. Μας δίνονται τα εξής στοιχεία:

-Τουλάχιστον ένας από τους πολιτικούς ήταν τίμιος .

-Σε οποιοδήποτε ζεύγος πολιτικών, τουλάχιστον ένας από τους δυο ήταν διεφθαρμένος .

Μπορούμε να συμπεραίνουμε από τα δυο αυτά δεδομένα πόσοι από τους πολιτικούς ήταν τίμιοι και πόσοι διεφθαρμένοι;

36.Αριθμητικές παραστάσεις

Δίνεται η αριθμητική παράσταση:

$$A=1*2*3*4*5*6*.....*2008*2009$$

Κάθε αστερίσκος αντιστοιχεί είτε σε θετικό πρόσημο + είτε σε αρνητικό πρόσημο - , είναι δυνατόν να τοποθετηθούν τα πρόσημα + , - έτσι ώστε η αριθμητική παράσταση Α να ισούται με ένα θετικό αριθμό μικρότερο του 5;

Τι μπορούμε να απαντήσουμε στην ίδια ερώτηση για την αριθμητική παράσταση

$$B=1^2*2^2*3^2*4^2*5^2*6^2*.....*2008^2*2009^2$$

37.Τετράγωνο

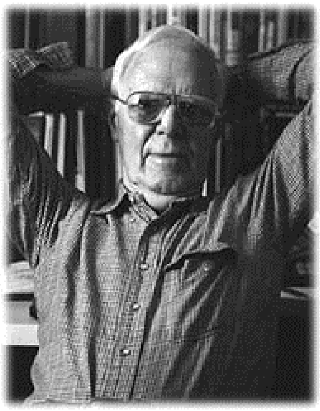
Το παρακάτω τετράγωνο περιέχει τα γράμματα Α,Β,Γ,Δ τέσσερις φόρες το καθένα. Μπορείς να χωρίσεις το τετράγωνο σε τέσσερα όμοια και ισεμβαδικά σχήματα όπου κάθε σχήμα θα περιέχει μια φορά το κάθε γράμμα ;

(καθένα από τα τέσσερα σχήματα με κατάλληλη περιστροφή θα δίνει οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα τρία σχήματα)

			Α			Δ	
Δ			Γ				
		Β			Β		Α
						Γ	
	Γ						
Α		Β			Β		
				Γ			Δ
	Δ				Α		

«Ακόμη και οι σπουδαίοι μαθηματικοί είναι τις περισσότερες φόρες άγνωστοι στο ευρύ κοινό.Οι 'περιπέτειες' τους είναι συνήθως τόσο περιορισμένες στο εσωτερικό του κρανίου τους ώστε μονό οι συνάδελφοι τους ενδιαφέρονται να διαβάσουν για αυτές.''

Martin Gardner ''The adventures of Stanislaw Ulam''

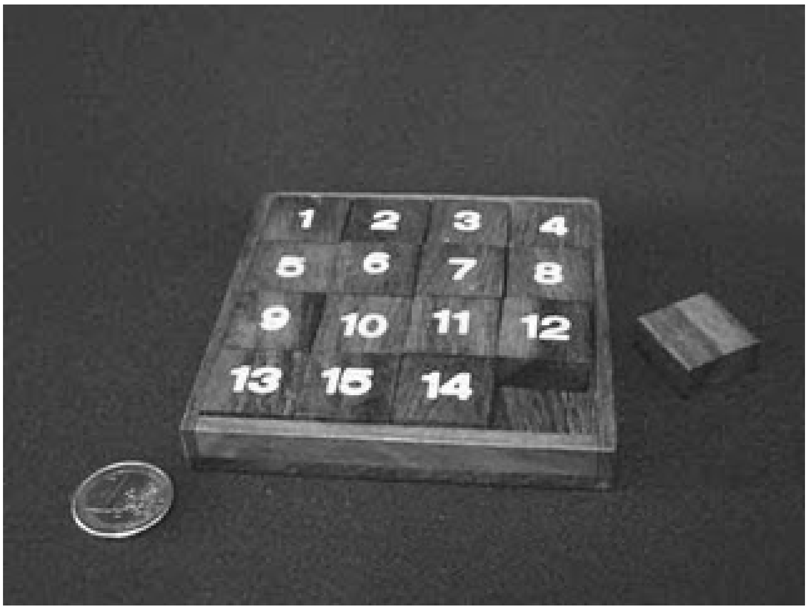


Οι λύσεις στην σελ 166

Ο γρίφος των δεκαπέντε και ένας ανασχηματισμός που προκαλεί πονοκέφαλο…

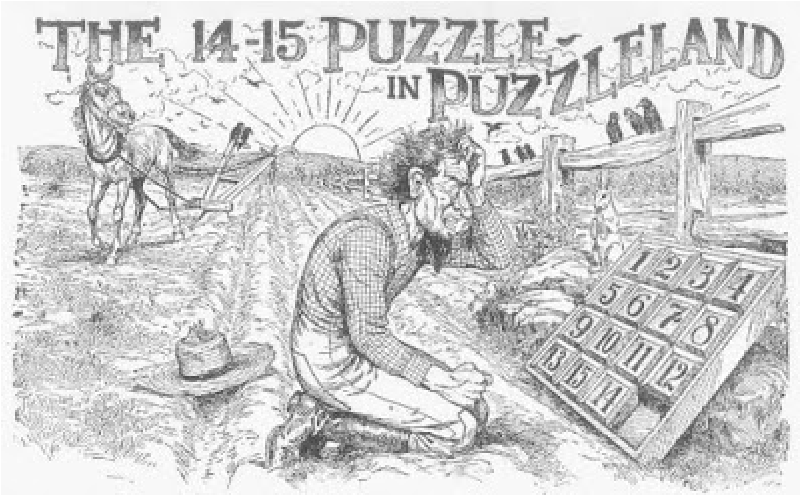
Χρωμολιθογραφία εποχής που διακωμωδεί την προσπάθεια του επικεφαλή των ρεπουμπλικάνων γερουσιαστή Roscoe Conkling να επιλέξει τον κατάλληλο υποψήφιο για τις Αμερικανικές προεδρικές εκλογές του 1880

Την δεκαετία του 1870,αρκετά χρόνια προτού εμφανιστεί ο κύβος του Ρουμπικ, ένα ξύλινο πάζλ είχε κάνει την εμφάνιση του στην Αμερική και κατόπιν στην Ευρώπη και ώθησε τον κόσμο να ασχολείται μανιωδώς μαζί του.
Ονομαζόταν 14-15 (fifteen puzzle) και δεν ήταν τίποτα παραπάνω από ένα τετράγωνο ξύλινο πλαίσιο στο όποιο είχαν τοποθετηθεί υπό μορφή μικρών ξύλινων κύβων όλοι οι αριθμοί από το 1 μέχρι το 15,στο ξύλινο πλαίσιο έμενε μια θέση κενή. Η αρίθμηση αρχικά ήταν από την πρώτη γραμμή από το 1 μέχρι το 15 με την διαφορά ότι τα δυο τελευταία νούμερα ήταν τοποθετημένα αντίστροφα πρώτα το 15 και μετά το 14.
Δείτε το σχήμα:



 Οι λύσεις στην σελ 166

Το ζητούμενο ήταν χρησιμοποιώντας την κενή θέση να βρεθεί η κατάλληλη ακολουθία κινήσεων η οποία θα επανάφερε το 14 πριν το 15 στην σωστή του θέση.



http://www.mathpuzzle.com/loyd/cop234-235.jpg

Ο Σαμ Λόιντ,ο δημιουργός αυτού του παιχνιδιού επικήρυξε τη λύση του ,προσφέροντας 100 δολάρια(κατ άλλους 1000 δολάρια) ,σε οποίον κατάφερνε να το λύσει. Εκατό δολάρια στα τέλη του 19ου αιώνα δεν ήταν διόλου ευκαταφρόνητο ποσό.Ο Λοιντ σημειώνει:
«Αυτό ήταν.. φρενίτιδα κατέλαβε τους πάντες. Υπήρξαν περιστατικά στα οποία σερβιτόροι ξεχνούσαν να φέρνουν το φαγητό στους πελάτες των εστιατόριων που εργάζονταν, υπάλληλοι γραφείων και καταστημάτων απορροφούνταν τόσο πολύ από το παιχνίδι που οι εργοδότες τους αναγκάστηκαν να τους το απαγορεύσουν. Ο μαθηματικός Σ. Γκάνθερ που εκείνη την εποχή ήταν βουλευτής στο Γερμανικό κοινοβούλιο θυμόταν τους γκριζομάλληδες συναδέλφους του βουλευτές να σκύβουν προβληματισμένοι πάνω στα μικρά τετραγωνικά πλακίδια.»

Βέβαια για να είμαστε ειλικρινείς ,ο Λοιντ δεν ρίσκαρε με το χρηματικό έπαθλο ούτε ένα δολάριο, διότι αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα είναι αδύνατο. Στο συγκεκριμένο στιγμιότυπο του προβλήματος υπάρχει μόνο μια παραφωνία όσο αφορά την σειρά των αριθμών,το 14-15. Όταν υπάρχει περιττός αριθμός τέτοιων παραφωνιών το πρόβλημα είναι άλυτο, αν είναι άρτιος αριθμός τότε υπάρχει η κατάλληλη ακολουθία κινήσεων η οποία επαναφέρει τους αριθμούς στην σωστή σειρά.

Ο Λόιντ όταν είδε την τεράστια επιτυχία του παιχνιδιού έσπευσε να το κατοχυρώσει στο γραφείο ευρεσιτεχνιών, εκεί όμως συνάντησε αντίδραση από τους υπάλληλους ,καθώς του επεσήμαναν ότι αν δεν τους δώσει την λύση δεν μπορεί να το κατοχυρώσει. Αναγκάστηκε τότε να παραδεχτεί ότι ήταν αδύνατο. Όταν έγινε γνωστή η μαθηματική εξήγηση του προβλήματος η μανία με το συγκεκριμένο παιχνίδι κόπασε όμως ακόμα και σήμερα εξακολουθούν να υπάρχουν παρεμφερή παιχνίδια.

Σχετική χρωμολιθογραφία εποχής που διακωμωδεί την προσπάθεια του επικεφαλή των ρεπουμπλικάνων γερουσιαστή Roscoe Conkling να επιλέξει τον κατάλληλο υποψήφιο για τις Αμερικανικές προεδρικές εκλογές του 1880.

Μια online εκδοχή του παιχνιδιού στον ηλεκτρονικό σύνδεσμο:
http://migo.sixbit.org/puzzles/fifteen/
Περισσότερες πληροφορίες
https://app.box.com/s/bdpntjx94zbwdrj7sqf07ahqelpd63ie
http://www.math.utah.edu/mathcircle/notes/permutations.pdf
http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/academic/class/15859-f01/www/notes/15-puzzle.pdf

38. Ένα πρόβλημα παρευρισκομένων

Ο Γιάννης και ο Γιώργος και δυο φιλικά τους πρόσωπα τους πήγαν στην χασαποταβέρνα «το κοψίδι» για φαγητό ,κάθισαν ένα τραπέζι . Ο Γιάννης παρατήρησε ότι στην ταβέρνα βρίσκονταν 23 άνδρες και 32 γυναίκες πελάτες (συμπεριλαμβανόμενων και των τεσσάρων της παρέας) .Ο Γιάννης καθόταν δίπλα στην είσοδο και μπορούσε να δει όλους όσους έμπαιναν ή έβγαιναν από το μαγαζί. Παρατήρησε λοιπόν τα έξης :

Για κάθε δυο πελάτες που έφευγαν από το μαγαζί ένας νέος πελάτης ερχόταν.Πιο συγκεκριμένα αν οι δυο πελάτες που έφευγαν ήταν του ίδιου φύλου τότε ερχόταν μια γυναίκα πελάτισσα.Αντίθετα αν οι δυο πελάτες που έφευγαν ήταν διαφορετικού φύλου τότε ερχόταν ένα άντρας πελάτης .Ένα πρόσωπο από την παρέα του Γιάννη και του Γιώργου (μαζί με κάποιο άλλο πρόσωπο) έφυγε από το μαγαζί αλλά ξαναγύρισε μόνο του διότι θυμήθηκε ότι δεν είχε πληρώσει για τον λογαριασμό.Τότε ο Γιώργος παρατήρησε ότι οι μοναδικοί πελάτες που είχαν μείνει στο μαγαζί ήταν αυτός, ο Γιάννης και τα δυο άτομα της παρέας τους. Το ερώτημα είναι το έξης : Είναι του ίδιου φύλου τα δυο φιλικά πρόσωπα του Γιάννη και του Γιώργου;

39. Οι κανίβαλοι και ο ταξιδιώτης,ένα πρόβλημα θεωρίας παιγνίων

Ένα έξυπνο πρόβλημα θεωρίας παιγνίων από το βιβλίο του Αλ Νταρ Νασάθ «Προβλήματα για δύσκολες ώρες » που δημοσιεύτηκε πρόσφατα ελαφρά παραλλαγμένο στο περιοδικό «The incidental economist» . Το πρόβλημα είναι αρκετά απλό στην διατύπωση του και έχει ως εξής :

Ένας ταξιδιώτης κατά την διάρκεια του ταξιδίου του στην χώρα των κανίβαλων βρέθηκε περικυκλωμένος από 10 κανίβαλους .Καθένας από τους κανίβαλους θέλει να φάει τον ταξιδιώτη αλλά ,όπως όλοι στην χώρα των κανίβαλων γνωρίζουν υπάρχει ένα ρίσκο. Όταν κάποιος από του κανίβαλους επιτεθεί στον ταξιδιώτη και τον φάει τότε θα κουραστεί και θα είναι ανυπεράσπιστος στην όρεξη οποιουδήποτε άλλου κανιβάλου (ο οποίος παρεμπιπτόντως αν φάει τον πρώτο κανίβαλο θα βρεθεί στην ίδια θέση).

Οι κανίβαλοι είναι όλοι πεινασμένοι αλλά δεν υπάρχει περίπτωση να συνεργαστούν .Όλοι οι κανίβαλοι είναι εξίσου νοήμονες, εξίσου ικανοί στην λήψη αποφάσεων και είναι σε θέση να κάνουν το καλύτερο δυνατό λογικό συλλογισμό (πολύ γνωστό και αυτό!!) .Άρα θα σκεφτούν προτού κάνουν οποιαδήποτε κίνηση.

Το ερώτημα είναι:θα γλυτώσει ο ταξιδιώτης;

"Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η λύση ενός αξιόλογου προβλήματος σπάνια μας "έρχεται" εύκολα και χωρίς σκληρή δουλειά.Είναι μάλλον το αποτέλεσμα μιας διανοητικής προσπάθειας ημερών,εβδομάδων ή μηνών. "

Szego Gabor
(1895 – 1985)

http://mathhmagic.blogspot.gr/

Οι λύσεις στην σελ 166

Ένα..παράδοξο

Ένα ωραίο παράδοξο από το βιβλίο του E.P.Northrop **"Μαθηματικοί γρίφοι:Ένα βιβλίο παραδόξων"(Riddles in Mathematics: A Book of Paradoxes)** .Αρχικά ο Northrop θέτει τα ερωτήματα:

1.Επιλέγεται τυχαία ένας πραγματικός αριθμός –ρητός είτε άρρητος– ανάμεσα στο 0 και το 10.Ποια είναι η πιθανότητα να είναι μεγαλύτερος του 5;

2.Επιλέγεται τυχαία ένας πραγματικός αριθμός –ρητός είτε άρρητος –ανάμεσα στο 0 και το 100.Ποια είναι η πιθανότητα να είναι μεγαλύτερος του 25;

Η απάντηση σε καθένα από τα δυο ερωτήματα είναι σχετικά απλή.

Στο πρώτο ερώτημα παρατηρούμε ότι ο αριθμός 5 χωρίζει το διάστημα (0,10) σε δυο ισοπλατή διαστήματα, αρα αν ένας αριθμός επιλεγεί στην τύχη από αυτό το διάστημα είναι το ίδιο πιθανό να είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος του 5.

Στο δεύτερο ερώτημα βλέπουμε ότι το διάστημα (25,100) έχει τρεις φορές μεγαλύτερο πλάτος από το διάστημα (0,25) .Έτσι ένας τυχαίος αριθμός ανάμεσα στο 0 και 100 είναι τρεις φορές πιθανότερο να επιλεγεί από το διάστημα (25,100).
Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα στο 1ο και το 2ο ερώτημα είναι 1/2 και 3/4 αντίστοιχα.

Από την άλλη όμως παρατηρούμε ότι:
Το τετράγωνο κάθε αριθμού στο διάστημα (0,5) ανήκει στο διάστημα (0,25) ,επίσης το τετράγωνο κάθε αριθμού στο διάστημα (5,10) ανήκει στο διάστημα (25,100).
Η παρατήρηση αυτή ,όμως δεν καθιστά τόσο απλή την απάντηση στα παρακάτω δυο ερωτήματα.

3.Ποια είναι η πιθανότητα το τετράγωνο ενός αριθμού που επιλέγεται τυχαία στο διάστημα (0,10) είναι μεγαλύτερο από 25;

4. Ποια είναι η πιθανότητα η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού που επιλέγεται τυχαία στο διάστημα (0,100) είναι μεγαλύτερο από 5;

Το πανηγύρι τώρα αρχίζει ...τα τετράγωνα των αριθμών στο διάστημα (5,10) καταλαμβάνουν τα τρία τέταρτα του διαστήματος (0,100) ,αλλά ,οι αριθμοί αυτοί καθαυτοί (στο διάστημα (0,5)) καταλαμβάνουν το μισό του διαστήματος (0,10).
Έτσι η απάντηση στην τρίτη ερώτηση είναι ¾ ή ½ ;
Η απάντηση στην τετάρτη ερώτηση είναι ¾ ή ½;

Τι έχει συμβεί; Οι απαντήσεις που δόθηκαν είναι αντιφατικές γιατί θεωρήσαμε –λανθασμένα- ότι τα τετράγωνα και οι τετραγωνικές ρίζες των πραγματικών αριθμών κατανέμονται ομοιόμορφα στον πραγματικό άξονα όπως και οι ίδιοι οι αριθμοί.

 Οι λύσεις στην σελ 166

Η μέρα των Χριστουγέννων και ένα πρόβλημα του μαθηματικού διαγωνισμού Putnam !

Φέτος τα Χριστούγεννα πέφτουν Τετάρτη . Πέρυσι ήταν Τρίτη , εν γένει η μέρα των Χριστουγέννων αλλάζει κάθε χρόνο. Είναι εύλογο λοιπόν να υποτεθεί ότι κάθε μέρα της εβδομάδας έχει τις ίδιες πιθανότητες να είναι η μέρα των Χριστουγέννων.Όμως αυτό δεν είναι σωστό!! Δεν έχουν όλες οι μέρες της εβδομάδας την ίδια πιθανότητα να πέφτουν Χριστούγεννα.Ένα ανάλογο πρόβλημα τέθηκε το 1950,στον μαθηματικό διαγωνισμό Putnam. Η διατύπωση του είναι η εξής :

«Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα η μέρα των Χριστουγέννων να είναι Κυριακή δεν είναι 1/7».

Για να είμαστε ακριβείς το πρόβλημα αφορά το Γρηγοριανό ημερολόγιο και οι κανόνες που καθορίζουν τα δίσεκτα και τα μη δίσεκτα έτη είναι:

1. Τα έτη που δεν είναι δίσεκτα έχουν 365 μέρες ενώ τα έτη που είναι δίσεκτα έχουν 366 μέρες .

2.Τα μη δίσεκτα έτη δεν είναι πολλαπλάσια του 4 ή διαιρούνται με το 100 αλλά όχι με το 400(για παράδειγμα τα 1700,1800 και 1900 δεν ήταν δίσεκτα έτη.)

3.Τα δίσεκτα έτη διαιρούνται με το 4 αλλά όχι με το 100 ή διαιρούνται με το 400(για παράδειγμα τα έτη 1600 και 200 ήταν δίσεκτα).Επανερχόμαστε στο αρχικό ερώτημα: «να αποδειχτεί ότι η πιθανότητα η μέρα των Χριστουγέννων να είναι Κυριακή δεν είναι 1/7»

Καταρχήν ας δούμε γιατί αλλάζει κάθε χρόνο η μέρα των Χριστουγέννων. Ένα έτος με 365 ημέρες έχει 52 εβδομάδες και 1 επιπλέον ημέρα .Αυτή η μέρα είναι η αιτία που κάθε ερχόμενο έτος θα ξεκινήσει μια μέρα αργότερα από ότι ξεκίνησε το προηγούμενο (αν το 2011 ξεκίνησε με Σάββατο ,το 2012 θα ξεκινήσει με Κυριακή) .Άρα η διαδικασία αυτή το επόμενο έτος θα «σπρώξει» και την ημέρα των Χριστουγέννων κατά μια μέρα.Είναι αναμενόμενο λοιπόν ύστερα από ένα συγκεκριμένο αριθμό ετών θα υπάρξει ταύτιση όλων των ημερών ενός έτους με τις ημέρες κάποιου από τα προηγούμενα. Ποιος είναι αυτός ο χρονικός κύκλος .Για το Γρηγοριανό ημερολόγιο ο χρονικός κύκλος είναι 400 χρόνια .Δείτε, κάθε 400 χρόνια έχουμε 303 μη δίσεκτα έτη και 97 δίσεκτα έτη, ένα σύνολο από 303x365+97x366= 146097 μέρες . Ο αριθμός αυτός διαιρείται ακριβώς με το 7, αυτό σημαίνει ότι 400 χρόνια είναι ακριβώς 146097 /7=20871 εβδομάδες .Χωρίς υπόλοιπο καμία μέρα , η μέρα της εβδομάδας που θα πέσουν τα Χριστούγεννα καθώς και όλες οι άλλες μέρες θα είναι οι ίδιες κάθε 400 χρόνια. Τώρα όσο αφορά τη ζητούμενη πιθανότητα .Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε διάστημα 400 ετών υπάρχουν Ε έτη που τα Χριστούγεννα θα πέφτουν Κυριακή , τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι Ε/400 αλλά για καμία φυσική τιμή του Ε το κλάσμα Ε/400 δεν ισούται με το 1/7.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η συχνότητα εμφάνισης κάθε ημέρας στην γιορτή των Χριστουγέννων σε διάστημα 400 ετών, αποδεικνύεται ότι:

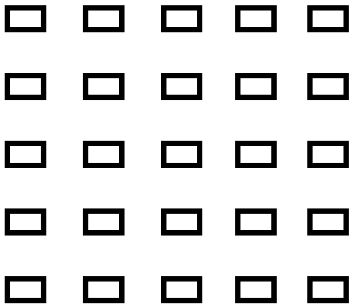
Κυριακή 58 ,Δευτέρα 56 , Τρίτη 58 , Τέταρτη 57 , Πέμπτη 57,Παρασκευή 58 , Σάββατο 56

Άρα είναι πιθανότερο η μέρα των Χριστουγέννων να πέσει Κυριακή ,Τρίτη ή Παρασκευή.

Οι προληπτικοί θα είναι καλό να γνωρίζουν ότι η 13 κάθε μήνα είναι πιθανότερο να πέσει παρασκευή παρά οποιαδήποτε άλλη μέρα της εβδομάδας .

40.Ένα αδύνατο πρόβλημα

Στο Γυμνάσιο της Λοξολάνδης σε μια σχολική αίθουσα υπάρχουν 25 θρανία του ενός ατόμου, διατεταγμένα σε 5 γραμμές , σχηματίζοντας ένα τετράγωνο. Την Τρίτη στην τάξη έφτασε μια νέα δασκάλα η οποία μόλις έφτασε, έδωσε οδηγίες στους μαθητές να αλλάξουν όλοι τους θέση με όσο το δυνατόν λιγότερη μετακίνηση .Για αυτό τους είπε, ο καθένας τους να μετακινηθεί κατά ένα μόνο θρανίο, είτε μπροστά , είτε πίσω, είτε αριστερά ,είτε δεξιά . Το έκαναν όλοι οι μαθητές αλλά πρέπει να σημειώσουμε ότι την ημέρα εκείνη έλειπε ένας μαθητής, ο Γιάννης και το θρανίο του έμεινε άδειο . Την επόμενη μέρα ο Γιάννης ήρθε στο σχολείο και όταν κάθισαν όλοι η δασκάλα είπε ξανά στα παιδιά να μετακινηθούν ξανά όλοι, κατά ένα θρανίο ,είτε μπροστά ,είτε πίσω, είτε αριστερά ,είτε δεξιά. Ο Γιάννης όμως της είπε ότι αυτό που τους ζητούσε, δεν ήταν δυνατό να γίνει και… κατέληξε στο γραφείο του Γυμνασιάρχη. Μπορείς να αιτιολογήσεις γιατί ο Γιάννης είχε δίκιο.



(Mensa 1978)

41.Ένα βαρύ..πρόβλημα

Ο Παπαδόπουλος στο βουστάσιο που διατηρεί εκτρέφει ταύρους .Λόγω οικονομικής κρίσης επιλέγει 18 από αυτούς για τους πουλήσει , τους ζυγίζει και καταγράφει τις μετρήσεις σε ένα χαρτί. Όταν κοίταξε το χαρτί με έκπληξη διαπίστωσε ότι τα βάρη των ταύρων ήταν όλα τριψήφιοι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Το ίδιο βράδυ ανέφερε το γεγονός στο μικρό του γιο τον Κωστάκη που είναι ξεφτέρι στα μαθηματικά. Ο Κωστάκης όταν το άκουσε χωρίς να γνωρίζει τα βάρη των ταύρων με την σοβαρότητα που διακρίνει τα δεκατριάχρονα παιδιά του λέει:

-«Τουλάχιστον ένα από τα βάρη των ταύρων διαιρείται με το άθροισμα των ψηφιών του.»

Πως το ήξερε ο Κωστάκης ;;

42.Πρόβλημα..ηλικίας !!!!!

Ο Κώστας και η Άννα είναι παιδιά του Βασίλη και της Γεωργίας.Τα δυο παιδιά είναι μεταξύ 10 και 20 ετών. Στον κύβο της ηλικίας του Κώστα , αν προστεθεί το τετράγωνο της ηλικίας της Άννας,δίνει την χρονολογία που γεννήθηκε η Γεωργία.Ο Βασίλης είναι 5 χρόνια μεγαλύτερος από την γυναίκα του.Πόσων χρονών ήταν ο καθένας το 1945;

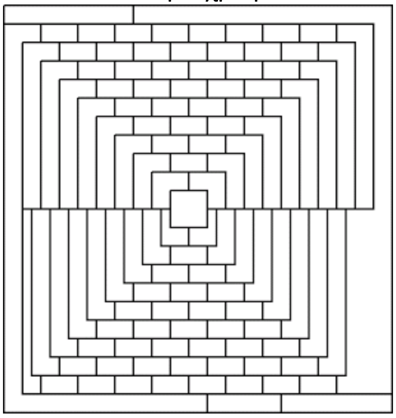
Πρωταπριλιάτικες μαθηματικές φάρσες, το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων και η σταθερά του Ραμανουτζάν…

Την πρώτη Απριλίου του 1975, ο Μάρτιν Γκάρντνερ ανακοίνωσε ότι τον Νοέμβριο του 1974,ο Γουίλιαμ Μακ Γκρέγκορ, ένας μαθηματικός με ειδίκευση στην θεωρία γράφων από την Νέα Υόρκη, ανακάλυψε ένα αντιπαράδειγμα για την εικασία τότε των τεσσάρων χρωμάτων.

Σχεδίασε ένα χάρτη 110 περιοχών που απαιτούσε για τον χρωματισμό του πέντε χρώματα.Το δημοσίευσε στην διάσημη στήλη του *Μαθηματικά παιχνίδια* στο περιοδικό Scientific American.Η αντίδραση ήταν πάνω από 100 επιστολές διαμαρτυρίας, συμπεριλαμβανομένου και ενός γράμματος από έναν μαθηματικό από το πανεπιστήμιο του Warwick που απειλούσε με μήνυση καθώς κατέστρεψε την εργασία που είχε κάνει για την απόδειξη του θεωρήματος των τεσσάρων χρωμάτων.Το έκανε μόλις διάβασε για το αντιπαράδειγμα. Οι φοιτητές του μαθηματικού τμήματος του Warwick όταν αντιλήφθηκαν ότι πρόκειται για πρωταπριλιάτικη φάρσα συνέθεσαν το παρακάτω ποίημα:

Κύριε Γκάρντνερ,
Τι έχετε κάνει;
Έχετε ξεκινήσει μια φήμη
Που δεν έπρεπε ποτέ να αρχίσει.
Μια φάρσα για τα τέσσερα χρώματα δεν μπορεί,
τόσο γρήγορα να αναιρεθεί.
Κύριε Γκάρντνερ, πρόκειται για ποταπό
ανόητο τέχνασμα!

Ο χάρτης που υποτίθεται ότι απαιτούσε τέσσερα χρώματα.



Στο ίδιο άρθρο ο Γκάρντνερ έκανε και ένα δεύτερο πρωταπριλιάτικο αστείο καθώς ισχυρίστηκε ότι αποδείχθηκε ότι η σταθερά του Ραμανουτζάν e^(π*(163)^(1/2)) είναι ακέραιος.
(Για το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων περισσότερες πληροφορίες:
http://mathhmagic.blogspot.gr/2011/03/blog-post_16.html)

43.Ένα πρόβλημα παιγνίων!

Σε ένα καφενείο τέσσερεις άνδρες ,ο Λάμπρος , ο Αντώνης , ο Τάσος και ο Ανέστης παίζουν χαρτιά σε ένα τετράγωνο τραπέζι. Όλοι οι παίκτες έχουν διαφορετικά επαγγέλματα , φοράνε διαφορετικά πουκάμισα και πίνουν διαφορετικά ποτά. Μας δίνονται τα εξής στοιχεία :

Στοιχείο 1 : ο Λάμπρος κάθεται απέναντι από το αρχιτέκτονα .

Στοιχείο 2: Ο γιατρός φοράει καρό πουκάμισο .

Στοιχείο 3:Ο δικηγόρος κάθεται απέναντι από αυτόν που φορεί το ριγέ πουκάμισο.

Στοιχείο 4: Στον μηχανικό ο γιατρός έχει απαγορέψει να πίνει αλκοόλ. .

Στοιχείο 5:Ο παίκτης δεξιά από τον αρχιτέκτονα πίνει καφέ .

Στοιχείο 6: Ο Αντώνης κάθεται από τα αριστερά αυτού που φοράει το μονόχρωμο πουκάμισο.

Στοιχείο 7: Ο Ανέστης φοράει πολύχρωμο πουκάμισο.

Στοιχείο 8: Ο παίκτης από αριστερά αυτού με το ριγέ πουκάμισο πίνει μπύρα.

Στοιχείο 9: Αυτός που πίνει κρασί κάθεται απέναντι από τον γιατρό .

Στοιχείο 10: Ο Τάσος,φοράει μονόχρωμο πουκάμισο.

Τι πουκάμισο φοράει αυτός που πίνει νερό;

Πως ονομάζεται ο δικηγόρος ;

44.Ο κ. Παπαδόπουλος γνωστός έμπορος αυτοκίνητων στην χώρα της Λοξολάνδης ,διατηρεί μια αντιπροσωπεία αυτοκίνητων της πολύ γνωστής μάρκας «με έκαψες». Όταν τον ρώτησαν πως πάνε οι δουλείες αυτός αφού σκέφτηκε λίγο απάντησε: «Αυτό το μήνα πουλήσαμε αρκετά αυτοκίνητα. Τώρα που το σκέπτομαι κάθε εβδομάδα πουλήσαμε περισσότερα αυτοκίνητα από την προηγούμενη. Δεν είμαι σίγουρος για τις τελευταίες μέρες αλλά θυμάμαι πολύ καλά ότι τις πρώτες τρεις εβδομάδες του μήνα πουλήσαμε 56 αυτοκίνητα, και μάλιστα η διαφορά ανάμεσα στον αριθμό των πωλήσεων της πρώτης εβδομάδας και της δεύτερης πολλαπλασιασμένη επί την διαφορά των πωλήσεων της τρίτης και της δεύτερης εβδομάδας ισούται με τον αριθμό των αυτοκίνητων που πουλήσαμε την πρώτη εβδομάδα.»

Μπορείς να βρεις πόσα αυτοκίνητα πούλησε ο κ. Παπαδόπουλος την τρίτη εβδομάδα.

45.Πεταλώνοντας

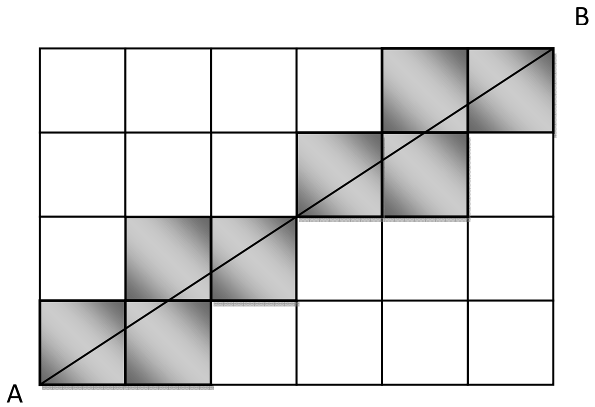
Ένα ωραίο προβληματάκι βελτιστοποίησης .

"Εάν ένας σιδεράς χρειάζεται 5 λεπτά για να βάλει ένα πέταλο σε ένα άλογο, είναι δυνατό 8 σιδεράδες να πεταλώσουν 10 άλογα σε λιγότερο από μισή ώρα; (πρέπει να πεταλωθούν και τα 4 πόδια κάθε αλόγου και είναι προφανές ότι κάθε άλογο μπορεί να σταθεί σε τρία πόδια, αλλά όχι σε δύο.)",

 Οι λύσεις στην σελ 166

46.Μια περαστική ..διαγώνιος !!!

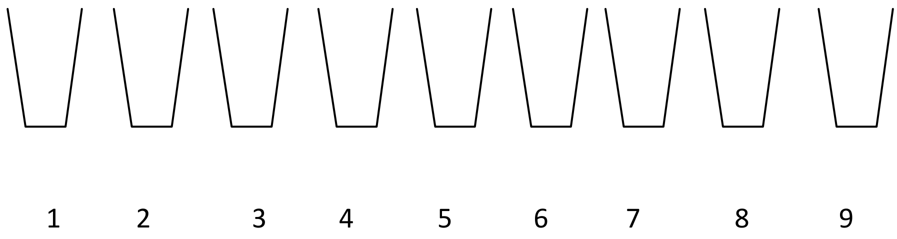
Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 4x6 του παρακάτω σχήματος η διαγώνιος ΑΒ τέμνει 8 τετραγωνικά κελιά (χρωματισμένα με γκρι χρώμα). Πόσα τετραγωνικά κελιά θα τέμνει η διαγώνιος σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑxΒ(Α,Β θετικοί ακέραιοι) ;



47.Παλιό αλλά κλασσικό: Ποτήρια !!

Σε ένα τραπέζι είναι τοποθετημένα 9 άδεια ποτήρια, επιτρέπεται να αναποδογυρίζουμε κάθε φορά ακριβώς 5 ποτήρια, όποια θέλουμε, και αυτό είναι μια κίνηση. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός κινήσεων που απαιτείται για να αναποδογυρίσουμε όλα τα ποτήρια;

Τι συμβαίνει αν κάθε φορά αναποδογυρίζουμε ακριβώς 6 ποτήρια;



Ο Fibonacci και ένα δημόσιο..διαγώνισμα!!

Εν έτη 1225, ο αυτοκράτορας Φρειδερίκος ο 2ος ταξίδεψε μέχρι την Πίζα της Ιταλίας συνοδευόμενος από ένα επιτελείο διακεκριμένων μαθηματικών της εποχής , να διαπιστώσει ιδίοις όμμασι,αν ο Leonardo Fibonacci ήταν αντάξιος της φήμης του.Τον υπέβαλλε λοιπόν σε μια δημόσια μαθηματική εξέταση. Ο Fibonacci με ευκολία έλυσε κάθε πρόβλημα που του τέθηκε και δικαίωσε την μαθηματική του φήμη.
Ένα από τα προβλήματα αυτού του... διαγωνίσματος ,ήταν το εξής :

« Να βρεθεί ένα τέλειο τετράγωνο , τέτοιο ώστε , είτε αφαιρέσουμε 5 μονάδες ,είτε προσθέσουμε 5 μονάδες να παραμένει τέλειο τετράγωνο.»

Ο μαθηματικός και ιστορικός των μαθηματικών G.N.Popov , στο βιβλίο του «Ιστορικά προβλήματα» (1932) παρουσιάζει μια λύση του προβλήματος ,εικάζοντας τον τρόπο λύσης του Fibonacci.

Έστω α^2 ο ζητούμενος αριθμός , τότε από υπόθεση θα ισχύει:

$\alpha^2+5=\beta^2$ $\qquad$ $\alpha^2-5=\gamma^2$

Αφαιρούμε κατά μέλη :

Και προκύπτει: $\beta^2 - \gamma^2 = 10$

Αλλά ο αριθμός 10 γράφεται: $10 = (80 \times 18)/12^2$,όμως $\beta^2 - \gamma^2=(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)$(Ταυτότητα διαφοράς τετράγωνων)

$(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)= (80 \times 18)/12^2$ ή $(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)= (80/12) \times (18/12)$

ή

$\beta-\gamma =18/12$ $\qquad$ $\beta+\gamma =80/12$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε : $\beta=49/12$, $\gamma=31/12$

Άρα $\alpha^2=(1681/144)=(41/12)^2$

Πραγματικά επαληθεύοντας ,προκύπτει:

$(1681/144)+5= 2401/144=(49/12)^2$

$(1681/144)-5= 961/144=(31/12)^2$

Λεονάρντο Φιμπονάτσι
(1170 - 1240)

Οι λύσεις στην σελ 166

48.Δακτυλοδεικτούμενο αριθμόγραμμα!

Να λύσετε το παρακάτω αριθμόγραμμα:

$$(ΝΑ)^2=ΕΝΑ$$

Στο οποίο ίδια γράμματα συμβολίζουν ιδίους αριθμούς και διαφορετικά γράμματα διαφορετικούς αριθμούς .

49.Πυθαγόρεια …οικογένεια!!

Μια οικογένεια έχει 4 παιδιά με διαφορετικές ηλικίες , ο μικρότερος γιος της οικογένειας ο Γιάννης είναι το λιγότερο 2 ετών και η Μαρία ,το μεγαλύτερο παιδί της οικογένειας είναι το πολύ 16 ετών. Οι ηλικίες των τεσσάρων παιδιών είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Πριν από ένα χρόνο ακριβώς από σήμερα το τετράγωνο της ηλικίας της Μαρίας ήταν ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ηλικιών των άλλων τριών παιδιών .Σε ένα χρόνο από σήμερα το άθροισμα των τετραγώνων της ηλικίας της Μαρίας και του Γιάννη θα ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των ηλικιών των άλλων δυο παιδιών. Ποιες είναι σήμερα οι ηλικίες των τεσσάρων παιδιών;

50. Οικογενειακή λογική

Δυο παλιοί φίλοι ο ένας αφηρημένος εκ φυσικού όταν ξαναβρίσκονται ύστερα από πολλά χρόνια:

Α:Ποσα παιδιά έχεις ;

Β:Εχω τρεις γιους .

Α: Τι ηλικία έχουν;

Β:Ο ένας από τους τρεις είναι μικρότερος !!

Α:Χαιρω πολύ. Ποιος είναι ο μικρότερος;

Β:Δεν είμαι σίγουρος, ξέρω όμως ότι είναι ή ο Αντώνης ή ο Μανώλης.

Α:Καλα τότε μπορείς να μου πεις ποιος είναι ο μεγαλύτερος γιος ;

Β:Δεν θυμάμαι ,είμαι σίγουρος όμως ότι ή ο Αντώνης είναι ο μεγαλύτερος ή ο Λάμπης ο μικρότερος.

Να βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος και ποιος ο μικρότερος γιος;

 Οι λύσεις στην σελ 166

51.Μαθήματα ευρετικής από τον Διόφαντο!!

Από την μετάφραση του 1963 στα νέα ελληνικά από τον Ε.Σταμάτη σταχυολογώ το πρόβλημα 32 του 2ου βιβλίου :

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

«Βρείτε τρεις αριθμούς έτσι ώστε το τετράγωνο οποιουδήποτε από αυτούς αν προστεθεί στον επόμενο, να μας δίνει ένα τετράγωνο.»

Ο Διόφαντος προτείνει μια λύση για το παραπάνω πρόβλημα που φανερώνει ότι υπήρξε μοναδικός αλγοριστής!! Προτείνει το εξής :

« Έστω x ο πρώτος ,2x+1 ο δεύτερος και 2(2x+1)+1 ή , ισοδύναμα ,4x+3 ο τρίτος , έτσι ώστε να πληρούνται οι δυο συνθήκες .Η τελευταία συνθήκη δίνει $(4χ+3)^2+x$=τετράγωνο και έστω τετραγωνο=$(4χ+4)^2$.Τοτε χ=7/57 ,και οι αριθμοί είναι 7/57,71/57,199/57»

Τι εννοεί ο ποιητής; Τον πρώτο αριθμό τον ονόμασε x .Τον δεύτερο αριθμό θα μπορούσε να τον ονομάσει με πολλούς τρόπους ,αλλά αποφάσισε να τον ονομάσει 2x+1 επειδή γνώριζε ότι $x^2+2x+1=(x+1)^2$, και συνεπώς είχε ήδη ικανοποιηθεί η πρώτη συνθήκη. Στην συνέχεια , τον τρίτο αριθμό θα μπορούσε να τον ονομάσει όπως ήθελε , αλλά επέλεξε να τον ονομάσει 2(2x+1)+1 δηλαδή 4x+3, επειδή ήξερε ότι $(2x+1)^2+2(2x+1)+1=(2x+2)^2$, και συνεπώς ικανοποιείται και η δεύτερη συνθήκη. Του έμενε μόνο να ικανοποιήσει την τρίτη συνθήκη, δηλαδή η παράσταση $(4x+3)^2+x$ να ισούται με ένα τέλειο τετράγωνο. Εδώ ο Διόφαντος προσθέτει την τελευταία πινελιά καθώς σκέφτηκε ότι αυτό το τετράγωνο θα μπορούσε να είναι της μορφής (4x-4) , επειδή έτσι θα μπορούσε να λύσει εύκολα το πρόβλημα με την επίλυση μιας απλής πρωτοβάθμιας εξίσωσης

$(4x+3)^2+x=(4x-4)^2$ ή

$16x^2+24x+9+x=16x^2-32x+16$ ή

$24x+9+x=-32x+16$ ή

$24x+32x+x=16-9$ ή

 Οι λύσεις στην σελ 166

$57x= 7$ ή

$x=7/57$

Που είναι η τιμή του πρώτου αριθμού που αναζητούσαμε .Εύκολα με αντικατάσταση βρίσκουμε του άλλους δυο αριθμούς :

$2x+1= 2(7/57)+1=71/57$

$4x+3=4(7/57)+3=199/57$

Πραγματικά οι τρεις αριθμοί ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος

$(7/57)^2+71/57=(64/57)^2$

$(71/57)^2+199/57=(128/57)^2$

$(199/57)^2+7/57=(200/57)^2$

Προφανώς και δεν είναι η μοναδική τριάδα λύσεων αν έθετε σαν τρίτο αριθμό το 4x-5 ή το 4x-6 θα μπορούσε να βρει και άλλες λύσεις.

52.Βάφοντας ένα κύβο

Έστω ένας κύβος που αποτελείται από νχνχν μοναδιαίους κύβους ,χρωματίζουμε κάποιες από τις 6 έδρες του αλλά όχι όλες. Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι ακριβώς 218 από τους μοναδιαίους κύβους έχουν χρώμα σε μια τουλάχιστον έδρα τους .Ποιες είναι οι διαστάσεις του μεγάλου κύβου;

53.Οι μπύρες

Σε μια κοσμική συγκέντρωση για τον αγώνα κατά του αλκοολισμού , 4 παντρεμένα ζευγάρια ήπιαν 44 μπουκάλια μπύρα .Η Άννα ήπιε 2 μπουκάλια, η Βίκυ ήπιε 3 ,η Καίτη 4 και η Δώρα 5 μπουκάλια μπύρα. Ο Παπαδόπουλος ήπιε τόσα μπουκάλια μπύρα όσα και η σύζυγος του. Αλλά ,ο καθένας από τους άλλους 3 άνδρες ήπιε περισσότερα μπουκάλια μπύρες από τη σύζυγο του. Ο Γεώργιου ήπιε τα διπλάσια μπουκάλια από την σύζυγο του , ο Ευθύμιου τα τριπλάσια και ο Αντωνίου τα τετραπλάσια. Ποια είναι τα επώνυμα των 4 γυναικών;

54.Παλιό αλλά κλασσικό: Έκπτωση!!

Ένα μολύβι μάρκας Α στο χαρτοβιβλιοπωλείο του Παπαδόπουλου κοστίζει 50 λεπτά. Ο Παπαδόπουλος στα πλαίσια μια επιθετικής εμπορικής πολιτικής έκανε μια γενναία έκπτωση στην τιμή των μολυβιών μάρκας Α. Το ίδιο απόγευμα ένα πελάτης αγόρασε όλα τα μολύβια μάρκας Α στο μαγαζί του Παπαδόπουλου και πλήρωσε 31,93 ευρώ .Ποια είναι η έκπτωση που έκανε ο Παπαδόπουλος στην τιμή του μολυβιού της συγκεκριμένης μάρκας ;

 Οι λύσεις στην σελ 166

55.Ένα πρόβλημα με μαγικά τετράγωνα !!

Το παρακάτω τετράγωνο είναι μαγικό .Κάθε γραμμή ,κάθε στήλη και διαγώνιος έχει το ίδιο άθροισμα .

A=

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Τι θα γινόταν αν αντικαθιστούσαμε την λέξη άθροισμα με την λέξη γινόμενο.Υπάρχει τέτοιο τετράγωνο με ίδιο γινόμενο για κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιο;

Να συμπληρώσετε με κατάλληλους φυσικούς αριθμούς το παρακάτω τετράγωνο έτσι ώστε κάθε γραμμή, κάθε στήλη και διαγώνιος να έχει το ίδιο γινόμενο.

(Οι αριθμοί δεν είναι απαραίτητο να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους .)

	1	
4		
		2

56.Ένα πρόβλημα θερμοκρασίας

Ο μετεωρολόγος Παπαδόπουλος κατέγραψε την χαμηλότερη θερμοκρασία κάθε ημέρας του διμήνου Δεκεμβρίου-Ιανουαρίου στην πόλη Χ. Όταν κοίταξε τις μετρήσεις ,παρατήρησε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία κάθε ημέρας του διμήνου εκτός από την πρώτη και την τελευταία ισούται με το άθροισμα της ελάχιστης θερμοκρασίας της προηγούμενης και της επόμενης ημέρας. Αν στις 3 Δεκεμβρίου η χαμηλότερη θερμοκρασία είναι 5^{o} C και στις 31 Ιανουαρίου η ελάχιστη θερμοκρασία είναι 2^{o} C να υπολογίσετε την ελάχιστη θερμοκρασία την ημέρα των Χριστουγέννων.

.

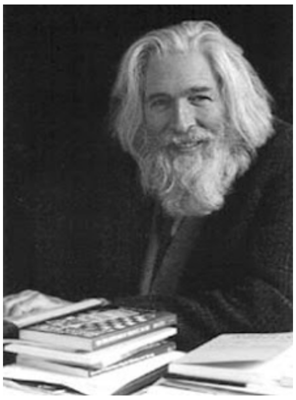
Οι λύσεις στην σελ   166

57.Ένα επικαιρο κρυπτογραμμα!
Στην παρακάτω πρόσθεση :

```
      H I T  LE  R
+  GOER  I N  G
H  T  T L LHH H
```

κάθε γράμμα αντιστοιχεί σε μοναδικό αριθμητικό ψηφίο .Να βρεθεί σε ποιο αριθμητικό ψηφίο αντιστοιχεί κάθε γράμμα;

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος;


Ρέιμοντ Σμούλιαν

Ένα παράδοξο από τον Ρέιμοντ Σμούλιαν που το παρουσίασε στην πρώτη συγκέντρωση προς τιμήν του Μάρτιν Γκάρντνερ : Έστω δυο θετικοί αριθμοί , α και β . Ο ένας είναι διπλάσιος από τον άλλο αλλά δεν γνωρίζουμε ποιος από τους δυο είναι ο μεγαλύτερος.
-Αν ο α είναι μεγαλύτερος από τον β, τότε προφανώς α=2β άρα η "αριθμητική υπεροχή" του α από τον β ισούται με β.Από την άλλη , αν ο β είναι μεγαλύτερος από τον α, τότε α=0.5β, και η αριθμητική υπεροχή του β από τον α είναι β-0.5β=0.5β.Προφανώς και ισχύει ότι β είναι μεγαλύτερο από το 0.5β, άρα γενικεύοντας μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η αριθμητική υπεροχή του α από το β , αν α είναι μεγαλύτερη από το β ,είναι μεγαλύτερη από την αριθμητική υπεροχή του β από το α ,αν β μεγαλύτερο του α.
-Έστω δ η διαφορά ανάμεσα στα α,β. Από υπόθεση η διαφορά είναι ίση με τον μικρότερο από τους δυο αριθμούς .Άρα μπορούμε να ισχυριστούμε η αριθμητική υπεροχή του α από τον β, αν α μεγαλύτερος του β είναι <u>ίση</u> με την αριθμητική υπεροχή του β από το α, αν β μεγαλύτερο του α.
Παρατηρείτε ότι έχουμε αντιφατικά συμπεράσματα. Ο Σμούλιαν ευφυώς «μπουρδουκλώνει» τους ισχυρισμούς του και καταλήγει σε αντίφαση.

58.Ένα δεύτερο πρόβλημα πωλήσεων..
Ο Παπαδόπουλος διατηρεί ένα διαδικτυακό κατάστημα και εμπορεύεται φορητούς υπολογιστές. Κοιτώντας τις πωλήσεις που έκανε στο χρονικό διάστημα από την 1η Μαρτίου μέχρι την 16η Μαΐου, έκανε τις εξής παρατηρήσεις:
- Κάθε μέρα κατόρθωσε να πουλήσει τουλάχιστον ένα υπολογιστή.
- Δεν πούλησε συνολικά παραπάνω από 132 υπολογιστές.
(για το παραπάνω χρονικό διάστημα)
Να αποδείξετε ότι υπάρχουν κάποιες συνεχόμενες μέρες που ο Παπαδόπουλος πούλησε ακριβώς 21 υπολογιστές. Το κατάστημα είναι διαδικτυακό , άρα στο παραπάνω χρονικό διάστημα δεν υπάρχουν αργίες ,ούτε ημέρες που το κατάστημα δεν λειτούργησε.

59.Ο χρωματισμός μιας σημαίας.
Η σημαία της μακρινής Λοξολάνδης είναι μοναδική, στο κέντρο της είναι σχεδιασμένο κυρτό πολύγωνο ν πλευρών το οποίο είναι χωρισμένο σε τρίγωνα -όχι απαραίτητα ισεμβαδικα - κατά τέτοιο τρόπο ώστε ανά δυο μην έχουν κοινό εσωτερικό μέρος και οι κορυφές τους να είναι μεταξύ των κορυφών του πολυγώνου. Όλα τα τρίγωνα που έχουν δυο κοινές πλευρές με το πολύγωνο είναι χρωματισμένα πράσινα, όλα τα τρίγωνα που μια πλευρά τους είναι και πλευρά του πολυγώνου είναι χρωματισμένα κόκκινα και τέλος όλα τα τρίγωνα που έχουν μόνο κοινές κορυφές με το πολύγωνο είναι χρωματισμένα άσπρα. Να αποδείξετε ότι τα πράσινα τρίγωνα είναι δύο παραπάνω από τα άσπρα.

Οι λύσεις στην σελ 166

«Αν λοιπόν το πνεύμα ενός ανθρώπου αρέσκεται στην περιπλάνηση ,ας μελετήσει μαθηματικά.Διότι, αν στις αποδείξεις του,αφαιρεθεί έστω και λίγο ,πρέπει να ξαναρχίσει.»

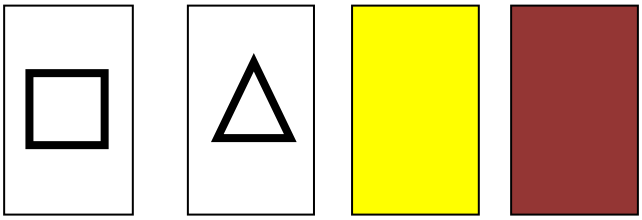
Φράνσις Μπέικον Δοκίμια.

Οι κάρτες(Wason selection task).Παλιό αλλά κλασσικό

Το 1966, ο Βρετανός ψυχολόγος Peter Cathcart Wason επινόησε ένα λογικό τεστ με κάρτες (Wason selection task) για να αξιολογήσει τον τρόπο με τον οποίο δομούνται οι λογικές μας ικανότητες .Το εν λόγω τεστ έκτοτε χρησιμοποιήθηκε σε πολλές παραλλαγές σε κάθε είδους ερωτηματολόγιο με σκοπό την αξιολόγηση υποψηφίων από οργανισμούς,εταιρείες ακόμα και εκπαιδευτικά ιδρύματα.Το τεστ έχει ως έξης:
Σας παρουσιάζουν 4 κάρτες και σας λένε ότι έχουν κατασκευαστεί σύμφωνα με ένα αυστηρό κανόνα:

«Αν μια κάρτα έχει τρίγωνο από την μια όψη,τότε είναι κίτρινη από την άλλη όψη.»

Σας δίνουν τις κάρτες του σχήματος έτσι ώστε να φαίνεται μόνο η μια όψη τους.



Σας λένε ότι καθεμία από τις 4 παρακάτω κάρτες έχει ένα σχήμα από την μια όψη και ένα χρώμα από την άλλη
Το ερώτημα που τίθεται ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός καρτών που πρέπει να «γυρίσετε» από την άλλη όψη , για να εξακριβώσετε αν τηρείται ο κανόνας του κατασκευαστή.
Ενώ μοιάζει απλό ,μόνο το 10% των εξεταζόμενων απαντούν με επιτυχία.Εσείς;
Λύση
Η σωστή απάντηση είναι ότι είναι απαραίτητο να γυρίσετε δυο κάρτες για να εξακριβώσετε αν τηρείται ο κανόνας που λέει ότι αν η κάρτα έχει τρίγωνο από την μια πλευρά τότε είναι κίτρινη από την άλλη. Οι κάρτες που πρέπει να γυρίσετε είναι αυτή με το τρίγωνο και αυτή που είναι κόκκινη.
Η αιτιολόγηση είναι η έξης :
-Δεν είναι απαραίτητο να γυρίσετε την κάρτα με το τετράγωνο μιας και δεν μας ενδιαφέρει τι χρώμα έχει από την άλλη πλευρά (επειδή ο κανόνας δεν λέει τίποτα για το χρώμα που έχουν τα τετράγωνα).
-Πρέπει όμως να γυρίσετε την κάρτα με τον τρίγωνο,επειδή η άλλη πλευρά πιθανόν να μην είναι κίτρινη,γεγονός που παραβιάζει τον κανόνα.
-Δεν είναι απαραίτητο να γυρίσετε την κάρτα με το κίτρινο επειδή δεν μας ενδιαφέρει ποιο σχήμα υπάρχει από την άλλη πλευρά-ο κανόνας δεν λέει ότι το κίτρινο πρέπει να συνδυαστεί αποκλειστικά με το τρίγωνο , δηλώνει μόνο ότι αν υπάρχει τρίγωνο από την μια πλευρά τότε πρέπει να υπάρχει κίτρινο από την άλλη.(δεν είναι απαραίτητο δηλαδή να ισχύει το αντίστροφο)
-Πρέπει σίγουρα να γυρίσετε την κάρτα με το κόκκινο επειδή υπάρχει περίπτωση να έχει τρίγωνο από την άλλη πλευρά και τότε ο κανόνας παραβιάζεται.
Μια interactive εκδοχή του τεστ στο σύνδεσμο:
http://www.philosophyexperiments.com/wason/Default.aspx

http://mathhmagic.blogspot.gr/ **Οι λύσεις στην σελ 166**

60.Μια λογική λίστα…

1. Ο αύξοντας αριθμός της πρώτης σωστής πρότασης σε αυτήν την λίστα αν προστεθεί στον αύξοντα αριθμό της δεύτερης λανθασμένης πρότασης σε αυτήν την λίστα τότε δίνει ως άθροισμα τον αύξοντα αριθμό μιας πρότασης στην λίστα που είναι αληθής .

2.Υπαρχουν περισσότερες αληθείς προτάσεις από ότι ψευδείς σε αυτήν την λίστα.

3.Ο αύξοντας αριθμός της δεύτερης αληθούς πρότασης προστιθέμενος στον αύξοντα αριθμό της πρώτης ψευδούς πρότασης δίνει τον αύξοντα αριθμό μια πρότασης που είναι αληθής.

4. Δεν υπάρχουν δυο συνεχόμενες αληθείς προτάσεις .

5. Υπάρχουν το πολύ τρεις ψευδείς προτάσεις .

Πόσες προτάσεις από τις παραπάνω είναι αληθείς;

61.Αν ο Ιώσηπος ήταν αλκοολικός ….

Ένα προβληματάκι βέλτιστης τοποθέτησης….

Στο μπαρ «το ναυάγιο» είναι γνωστό ότι, όλοι οι πελάτες του είναι αντικοινωνικοί. Το μπαρ έχει 25 καθίσματα σε μια σειρά .Κάθε πελάτης που μπαίνει στο μπαρ θα καθίσει όσο μακρύτερα μπορεί από άλλο πελάτη και σίγουρα δεν θα καθίσει σε διπλανό κάθισμα κατειλημμένο από άλλο πελάτη. Αν δεν υπάρχει ελεύθερο κάθισμα που να τηρεί τις παραπάνω προϋποθέσεις ,θα προτιμήσει να φύγει. Ο μπάρμαν, θέλει να έχει όσο το δυνατόν περισσοτέρους πελάτες στο μαγαζί του χωρίς να παραβιάζονται οι παραπάνω κανόνες και έχει την δυνατότητα να τοποθετήσει αυτός σε όποιο κάθισμα θέλει τον πρώτο πελάτη του μπαρ.

Σε ποιο από τα 25 καθίσματα πρέπει να τον βάλει να καθίσει;

62.Μια κοσμική συγκέντρωση...

Σε μια κοσμική συγκέντρωση κατά του αλκοολισμού παραβρεθήκαν 150 άνδρες και 70 γυναίκες. Ο μπάρμαν ισχυρίστηκε μετά το τέλος της συγκέντρωσης ότι καταναλωθήκαν συνολικά 1110 αναψυκτικά. Επίσης επιβεβαιώθηκε ότι ο κάθε άνδρας κατανάλωσε τον ίδιο αριθμό αναψυκτικών με οποιονδήποτε άλλο άνδρα και το ίδιο ισχύει και για τις γυναίκες. Πόσα αναψυκτικά κατανάλωσε κάθε άνδρας και πόσα αναψυκτικά κατανάλωσε κάθε γυναίκα

Συζήτηση μαθηματικού με κοπέλα.

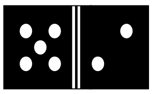
-Και δέ μου λές, πώς σε λένε;

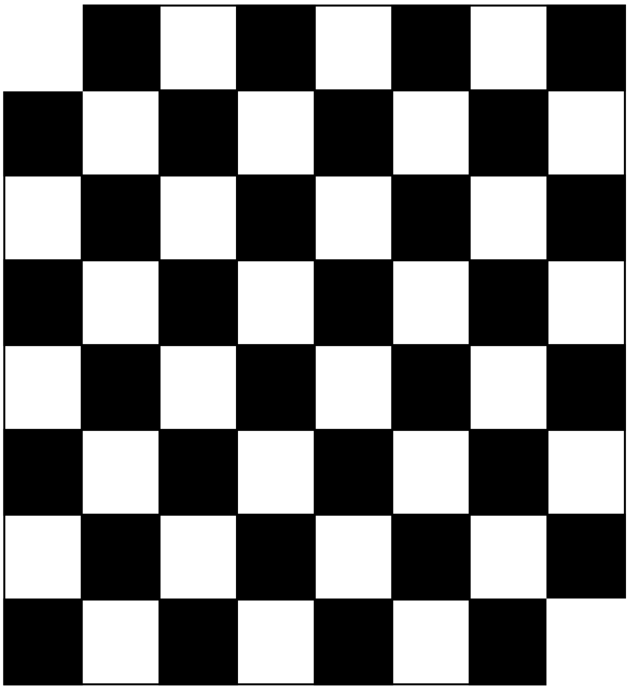
-Ελένη! (lne)

-α ωραία μπορω να σε φωνάζω 1;…

Αδύνατα προβλήματα και η ακρωτηριασμένη σκακιέρα

Ίσως το πιο χαρακτηριστικό και εύληπτο παράδειγμα αδυνάτου προβλήματος είναι η ακρωτηριασμένη σκακιέρα . Έστω ότι έχουμε μια σκακιέρα με 64 τετράγωνα , από την σκακιέρα αυτή αφαιρούμε
Πρώτα τις δυο απέναντι γωνίες (βλέπε σχήμα),ώστε να απομένουν 62 τετράγωνα.
Κατόπιν παίρνουμε 31 πούλια του ντόμινο διαμορφωμένα έτσι ώστε καθένα να καλύπτει ακριβώς δυο τετράγωνα .Το ερώτημα είναι:είναι δυνατόν να τακτοποιήσουμε με τέτοιο τρόπο τα 31 πούλια ώστε να καλύπτουν και τα 62 τετράγωνα της σκακιέρας;
Ακολουθήστε τους εξής συλλογισμούς:
Οι γωνίες που έχουν αφαιρεθεί από την σκακιέρα ήταν και οι δυο άσπρες .Έτσι τώρα υπάρχουν 32 μαύρα τετράγωνα και 30 άσπρα.
Κάθε ντόμινο καλύπτει δυο γειτονικά τετράγωνα.Τα γειτονικά τετράγωνα έχουν πάντοτε διαφορετικό χρώμα . Άρα, χωρίς να έχει σημασία ο τρόπος της διάταξης,τα 30 ντόμινο που απλώνονται στο επίπεδο καλύπτουν 30 άσπρα τετράγωνα και 3 μαύρα .
Συνεπώς,πάντοτε απομένουν ένα ντόμινο και 2 μαύρα τετράγωνα.
Όμως δεν πρέπει να ξεχνούμε ότι όλα τα ντόμινο καλύπτουν δυο γειτονικά τετραγώνου που έχουν πάντοτε διαφορετικό χρώμα. Τα δυο τετράγωνα που περισσεύουν έχουν το ίδιο χρώμα , δεν μπορούν συνεπώς να καλυφτούν και τα δυο με το ένα ντόμινο που απέμεινε .Επομένως η κάλυψη του επιπέδου είναι αδύνατη!!!!





Οι λύσεις στην σελ 166

63.Ένα πρόβλημα από τα social media.

"Συζητούν τρεις φίλες. Η Αντωνοπούλου,η Βασιλοπούλου,και η Γεωργοπούλου με ονόματα Δώρα, Μαρία και Ελένη όχι απαραίτητα με αυτήν την αντιστοιχία. Οι τρεις γυναίκες συγκρίνουν τους φίλους που έχουν στο Facebook. Η Μαρία έχει διπλάσιους φίλους από την Ελένη και η Ελένη έχει τριπλάσιους από την Δώρα. Αν είναι γνωστό ότι η Αντωνοπούλου έχει 3865 φίλους περισσοτέρους από την Γεωργοπούλου, να βρείτε τα πλήρη ονοματεπώνυμα των τριών γυναικών."

65. Έστω ότι έχουμε ν μικρούς κύβους με το ίδιο όγκο. Όταν προσπαθήσαμε να τους τοποθετήσουμε όλους, έτσι ώστε να κατασκευάσουμε ένα μεγαλύτερο κύβο διαπιστώσαμε ότι δεν μας φτάνουν. Μια έδρα του μεγάλου κύβου είχε μια γραμμή λιγότερη. Να δείξετε ότι το πλήθος ν των κύβων είναι πολλαπλάσιο του 6.

66.Το πολυκατάστημα «Η αφθονία» έχει τρεις ορόφους που συνδέονται μόνο με ένα ασανσέρ(δεν υπάρχουν σκάλες). Την νύχτα το κατάστημα κλείνει και κατά την διάρκεια μιας εργάσιμης ημέρας διαπιστώθηκαν τα έξης:

(1) Από τον αριθμό των πελατών που μπήκαν στο ασανσέρ στον δεύτερο όροφο οι μισοί κατέβηκαν στον πρώτο όροφο και οι άλλοι μισοί στον τρίτο όροφο.

(2) Ο αριθμός των πελατών που βγαίνουν στον τρίτο όροφο από το ασανσέρ είναι μικρότερος από το 1/3 του συνολικού αριθμού των πελατών που βγαίνουν από το ασανσέρ.

Ποιος είναι μεγαλύτερος; Ο αριθμός των πελατών που ανέβηκαν από τον πρώτο όροφο στον δεύτερο ή ο αριθμός των πελατών που ανέβηκαν από το πρώτο όροφο στον τρίτο όροφο.

67.Κουτιά και καπέλα!!!

Ο Παπαδόπουλος κατασκευάζει κουτιά εμπορευμάτων για το ταχυδρομείο.Κάθε κουτί που κατασκευάζει έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, ακέραιες διαστάσεις και η συνολική του επιφάνεια ισούται με τον όγκο του.Για παράδειγμα ένα κουτί με διαστάσεις 5x5x10 cm .Η συνολική του επιφάνεια ισούται με τον όγκο του. Πόσα διαφορετικά κουτιά μπορεί να κατασκευάσει που να πληρούν τις παραπάνω ιδιότητες.

Thadeus Gorian College

Δημοσιογραφικό έργο!!

Οι παροικούντες στην χώρα των αριθμών γνωρίζουν πολύ καλά τον θρύλο που περιβάλλει το τελευταίο θεώρημα του Φερμά. Διατυπώνεται ως εξής:

Αν ένας ακέραιος ν είναι μεγαλύτερος του 2 τότε η εξίσωση $x^ν+y^ν=z^ν$, όπου x,y,z θετικοί ακέραιοι δεν έχει λύση..

Ένα θεώρημα που αντιστάθηκε για περισσότερα από 300 χρόνια σε κάθε προσπάθεια να αποδειχθεί.Τελικά, το απέδειξε ο μαθηματικός Άντριου Γουαιλς,το 1995.Τον Μάρτιο του 1938, το περιοδικό Time δημοσίευσε την είδηση ότι ο μαθηματικός Σάμιουελ Ισαάκ Κρίγκερ,ανακάλυψε ένα αντιπαράδειγμα για το τελευταίο θεώρημα του Φερμά.

Ο Κρίγκερ ισχυρίστηκε ότι η εξίσωση $1324^ν+731^ν=1961^ν$ έχει λύση για ν μεγαλύτερο του 2.Όμως ένας δημοσιογράφος των New York Times κατέρριψε τον ισχυρισμό του Κρίγκερ.

Αν μπόρεσε ένας δημοσιογράφος τότε μπορείτε και εσείς.Πως το έκανε;

Έγραψε την εξίσωση 1324^ν =1961 ^ν -731^ ν και παρατήρησε ότι ο αριθμός 1324 υψωμένος σε οποιαδήποτε δύναμη έχει ως τελευταίο ψηφίο το 6 η το 4 ενώ καθένας από τους άλλους δυο αριθμούς 731,1961 υψωμένος σε οποιοδήποτε δύναμη έχει ως τελευταίο ψηφίο το 1 άρα σίγουρα η εξίσωση δεν έχει λύση.

 Οι λύσεις στην σελ 166

68. Το έτος της ανάκαμψης !!!

Όταν ρωτήθηκε ο γνωστός αστρολόγος-μελλοντολόγος Μάκης Μπούλης από γνωστό δημοσιογράφο «Ποιο θα είναι το έτος οικονομικής ανάκαμψης της Χώρας;»

Ο Μάκης Μπούλης κοίταξε την μαγική του σφαίρα και είπε με στόμφο

Το έτος που ζητάς είναι στην τρίτη χιλιετία μ.χ και δεν μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα διαδοχικών φυσικών αριθμών.»

Ποιο είναι το έτος που προέβλεψε ο Μάκης Μπούλης;

69. Ένα πρόβλημα καπνιστών…..

"Ώστε έμεινες περίπου πέντε εβδομάδες στη Θεσσαλονίκη;" Είπε ο Γιώργος στο Γιάννη και του πρόσφερε ένα τσιγάρο.

"Πως ήταν ο καιρός;"

"Τι περισσότερες μέρες έβρεχε." Απάντησε ο Γιάννης και συνέχισε:

"Εκεί πάνω κόντεψα να κόψω το τσιγάρο. Φαντάσου ότι τις μέρες που έβρεχε κάπνιζα κατά μέσο όρο 20 τσιγάρα την ημέρα και τις ήμερες που δεν έβρεχε μόλις το ένα πέμπτο των τσιγάρων που κάπνιζα την μέρα κατά μέσο όρο καθ όλη την διάρκεια της παραμονής μου."

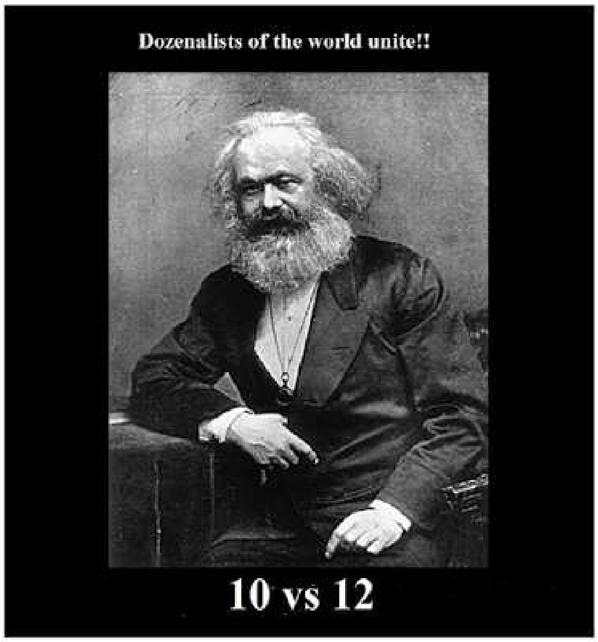
Πόσες ημέρες έβρεχε στην Θεσσαλονίκη κατά την παραμονή του Γιάννη;

70.Μεταπρόβλημα εξωγήινων

Στον πλανήτη Άρη, σε μια αίθουσα βρίσκονται περισσότεροι από ένας Αρειανοί. Κάθε Αρειανός έχει δυο χέρια, με τουλάχιστον ένα δάκτυλο σε κάθε χέρι και όλοι οι Αρειανοί έχουν τον ίδιο αριθμό από δάκτυλα.Το πλήθος των Αρειανών δακτύλων στην αίθουσα είναι ανάμεσα στα 200 και 300.Αν γνωρίζουμε τον ακριβή αριθμό των δακτύλων είναι δυνατό να βρούμε το πλήθος των Αρειανών στην αίθουσα. Πόσοι είναι συνολικά, οι Αρειανοί και πόσα δάκτυλα έχει ο καθένας τους;

Άπειρο πλήθος μαθηματικών μπαίνουν ένας-ένας στο μπαρ Φιμπονάτσι.
Ο πρώτος λέει στο μπάρμαν. "Ένα ποτήρι μπίρα, παρακαλώ!!
Ο δεύτερος λέει" Θα πάρω ένα ποτήρι μπίρα ".
………………
Ο ν-ιοστος μαθηματικός δείχνει τους μαθηματικούς ν-1 και το ν-2 λέει "Θα πάρω ότι πηρέ αυτός και αυτός ".

10 VS 12



«Αν μπορούσε το πάχος μου να μιλήσει,πιθανότατα θα μιλούσε για την μεγάλη μοναξιά του ανθρώπου –α,ναι, με μερικές ίσως έμμεσες αποδείξεις για το πως φτιάχνονται τα χάρτινα καραβάκια.Κάθε κιλό του σώματος μου θέλει να πει την ιστορία του,ιδιαίτερα τα προγούλια υπ' αριθ 4 έως 12 ,του δωδεκάτου περιλαμβανομένου.»
Γούντι Άλλεν, Πάτσι

Θα μπορούσε να είναι σύνθημα σε συνδικαλιστική συγκέντρωση ή προτροπή για επανάσταση. Επανάσταση εναντία σε ποιον, μα φυσικά στην τυραννική δεσποτεία του δέκα.Εξηγούμαι.

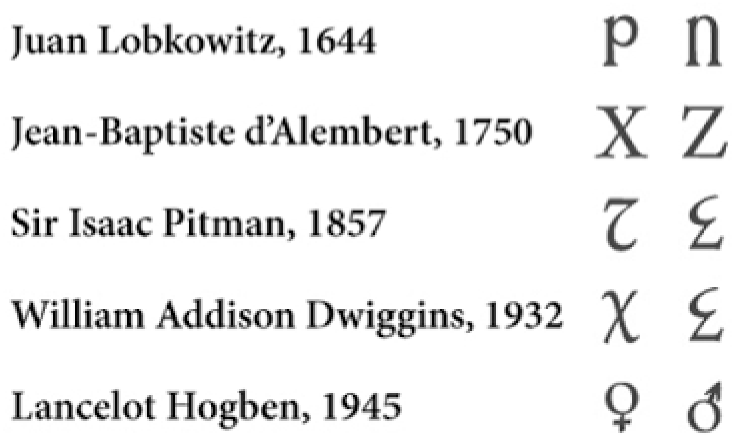
Οι περισσότεροι άνθρωποι στο κόσμο ακολουθούν το δεκαδικό σύστημα μέτρησης και μετρούν μέχρι το 10 ως εξής: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

Οι δωδεκαδιστές μετρούν : 0,1,2,3,4,5,6,6,7,8,9,Χ,Ε,10

όπου Χ και Ε θεωρούνται αριθμητικά ψηφία ενώ το 10 είναι ο αριθμός 12 στο δεκαδικό. Άλλος τρόπος γραφής του Χ είναι το 2 ανεστραμμένο και του Ε το 3 ανεστραμμένο. Η πρώτη ερώτηση είναι: τι χρειάζονται δυο ψηφία ακόμα; Οι δωδεκαδιστές επιμένουν ότι έτσι το μέτρημα και οι αριθμητικοί υπολογισμοί γίνονται πολύ πιο εύκολα. Ο πρόεδρος της Δωδεκαδικής Αμερικανικής εταιρείας (DSA) Ντον Γκούντμαν ισχυρίζεται ότι η ανθρωπότητα θα έκανε την αριθμητική ζωή της ευκολότερη αν άλλαζε το ισχύον δεκαδικό αριθμητικό σύστημα με το δωδεκαδικό.Δεν είναι ο μόνος.Διακεκριμένοι μαθηματικοί, φιλόσοφοι και κοινωνικοί επιστήμονες είχαν την ίδια πεποίθηση. Μπορούμε να θυμηθούμε τον Πλάτωνα, θεωρούσε αυτονόητη την χρήση του δωδεκαδικού συστήματος στο νομισματικό και μετρικό σύστημα της ιδανικής πολιτείας του.Οι Ρωμαίοι χρησιμοποίησαν το δωδεκαδικό για τα κλάσματα τους. Το 12 έχει περισσοτέρους διαιρέτες από το 10,οπότε είναι ευκολότερο να χωριστεί σε μισά,τρίτα, τέταρτα και έκτα,γεγονός που είχε πολύ μεγάλη σημασία στο εμπόριο.Υπέρμαχοι του δωδεκαδικού συστήματος υπήρξαν ο φιλόσοφος Χ. Σπένσερ ,ο συγγραφέας Χ. Τ. Γουέλς, ο εφευρέτης της στενογραφίας Ισαάκ Πίτμαν ,ο θεατρικός συγγραφέας Μπέρναρντ Σω και πολλοί άλλοι. Όλοι τους υποστήριξαν ότι η μέτρηση σε δωδέκατα είναι λογικότερη από την μέτρηση σε δέκατα.Η DNS εκδίδει ένα περιοδικό που έχει σαν σκοπό να τεκμηριώσει γιατί η δωδεκαδική αριθμητική είναι πολύ πιο απλή από την δεκαδική. Πεποίθηση που έχει ως κύριο άξονα το γεγονός ότι ο αριθμός 12 μπορεί να διαιρεθεί με τους αριθμούς 2,3,4 και 6 την ίδια στιγμή που το 10 διαιρείται μόνο με το 2 και το 5.

 Οι λύσεις στην σελ 166

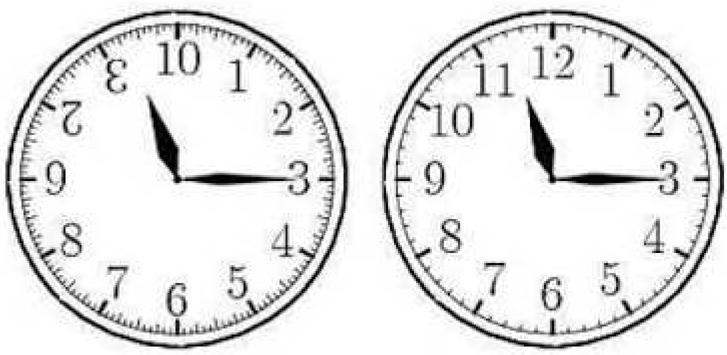
Για τα δυο νέα ψηφία το 10 και το 11 έχουν γίνει κατά καιρούς αρκετές προτάσεις ως προς τον συμβολισμό τους. Δείτε τον παρακάτω πινάκα:



(Πηγή: http://www.dozenal.org/drupal/

Φανταστείτε δυο αναλογικά ρολόγια ,το ένα χρησιμοποιεί το δεκαδικό ενώ το άλλο το δωδεκαδικό σύστημα (δείτε το παρακάτω σχήμα).

ΔΩΔΕΚΑΔΙΚΟ **ΔΕΚΑΔΙΚΟ**



Από την στιγμή που θα συνηθίσει κάποιος τα δυο νέα ψηφία το να διαβάζει την ώρα σε ένα δωδεκαδικό ρολόι είναι πολύ πιο απλό και ταιριάζει περισσότερο οπτικά.Στο ρολόι δεξιά με το δεκαδικό σύστημα λέμε ότι η ώρα είναι 11 και 15 ενώ στο ρολόι αριστερά λέμε ότι η ώρα είναι 11 και 3. Ο λόγος είναι ότι το 1/12 της ώρας είναι πέντε λεπτά. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα δωδεκαδικό ρολόι τόσο ο λεπτοδείκτης όσο και ο ωροδείκτης μας δίνουν την ώρα που αναγράφει το ψηφίο ενώ στο δεκαδικό πρέπει ο λεπτοδείκτης να πολλαπλασιαστεί με το πέντε για να δώσει την ακριβή ώρα.

 Οι λύσεις στην σελ 166

71.Μια διεύθυνση

Αντώνης : «Τώρα που το σκέφτομαι διαπιστώνω ότι τόσο ο αριθμός της οδού που βρίσκεται το σπίτι μου όσο και ο αριθμός της οδού που βρίσκεται η εργασία μου είναι ιδιαίτεροι».

Βασίλης : «Τι εννοείς ;»

Αντώνης : «Είναι διψήφιοι και το γινόμενο τους δεν αλλάζει ακόμα και αν αντιστρέψουμε και των δυο τα ψηφία. Κανένας τους δεν είναι πολλαπλάσιο του 11».

Βασίλης : «Υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί;»

Αντώνης : «Προφανώς και υπάρχουν. Για παράδειγμα το 12 και το 42 , ισχύει : 12x42=21X24=504».

Βασίλης :«Αυτοί είναι οι αριθμοί των οδών του σπιτιού και της εργασίας σου;»

Αντώνης : «Όχι βέβαια , ο αριθμός της οδού που μένω είναι μικρότερος της οδού που εργάζομαι ,το γινόμενο τους είναι ανάμεσα στο 3000 και το 4000 και στο μέσο του αριθμού της οδού της εργασίας μου μένει η Τασία ».

Ποιος είναι ο αριθμός της οδού που βρίσκεται η εργασία του Αντώνη;

•

Το παράδοξο του Yablo !!!
Ένα παράδοξο από τον Stephen Yablo αμερικανό καθηγητή φιλοσοφίας του MIT :
Δίνονται οι παρακάτω προτάσεις απείρου πλήθους :
«Όλες οι ακόλουθες προτάσεις είναι ψευδείς.»
«Όλες οι ακόλουθες προτάσεις είναι ψευδείς. »
«Όλες οι ακόλουθες προτάσεις είναι ψευδείς. »
«Όλες οι ακόλουθες προτάσεις είναι ψευδείς. »
«Όλες οι ακόλουθες προτάσεις είναι ψευδείς. »
Ο Yablo ισχυρίζεται το εξής:
Αν όλες οι προτάσεις είναι ψευδείς τότε έχουμε αντίφαση με την πρώτη πρόταση ,αλλά δεν μπορεί και καμιά τους να είναι αληθής γιατί τότε όλες οι ακόλουθες της προτάσεις θα ήταν ψευδείς αυτό όμως σημαίνει ότι για οποιαδήποτε από αυτές κάποια που ακολουθει ήταν αληθής.Αντίφαση ξανά!! Άρα δεν μπορούμε χαρακτηρίσουμε καμιά πρόταση αληθή ή ψευδή.
Δείτε :http://www.mit.edu/~yablo/pwsr.pdf

•

Μαθηματικά αξιοπερίεργα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους ανακατεύεται μια τράπουλα και η ηλικία του σύμπαντος.

Μια συνηθισμένη τράπουλα έχει 52 χαρτιά άρα ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών τρόπων που μπορούμε να την ανακατέψουμε είναι 52!

Όπου 52! Είναι περίπου 8.06582×10^{67}

Οι επιστήμονες εικάζουν ότι η ηλικία του σύμπαντος είναι ανάμεσα στα 10 και 16 δισεκατομμύρια χρόνια (16,000,000,000)

Ας πάρουμε την μεγαλύτερη τιμή $16,000,000,000=16 \times 10^9$ χρόνια και ας το μετατρέψουμε σε δευτερόλεπτα

Έχουμε:

-60 δευτερόλεπτα σε ένα λεπτό.

-60 λεπτά σε μια ώρα .

-24 ώρες σε μια ημέρα .

-365 ημέρες σε ένα χρόνο (366 στα δίσεκτα έτη).

Άρα η μεγίστη εκτίμηση της ηλικίας του σύμπαντος σε δευτερόλεπτα είναι :

$60 \times 60 \times 24 \times 366 \times 16,000,000,000 = 505958400000000000$ περίπου 5.1×10^{17} δευτερόλεπτα

Παρατηρούμε ότι:

$$8.06582 \times 10^{67} > 5.1 \times 10^{17}$$

Άρα είναι σαφές ότι υπάρχουν περισσότεροι τρόποι να ανακατευτεί μια τράπουλα από ότι η ηλικία του σύμπαντος σε δευτερόλεπτα

72.Ο Κωστίκας ,ο Γιωρίκας και ένα μη αμερόληπτο κέρμα.

Σε ένα ερημονήσι ναυαγούν ο Κωστίκας και ο Γιωρίκας. Σύντομα καταναλώνουν όλες τις τροφές και τους μένει μόνο ένα μήλο. Δεν θέλουν να το μοιράσουν έτσι πρέπει να αποφασίσουν ποιος θα το φάει .Έχουν ένα κέρμα αλλά έχει λυγίσει και κατά συνέπεια δεν είναι αμερόληπτο, δηλαδή η πιθανότητα σε μια ρίψη να έρθει κορώνα δεν είναι ίση με την πιθανότητα να έρθει γράμματα. Είναι δυνατό με αυτό το κέρμα ο Κωστίκας και ο Γιωρίκας να παίξουν δίκαια κορώνα-γράμματα το μήλο;

73.Μια μοιρασιά στα σκοτεινά

Σε ένα σκοτεινό δωμάτιο πάνω σε ένα τραπέζι είναι τοποθετημένα 100 νομίσματα , εκ των οποίων 10 είναι με την όψη των γραμμάτων προς τα πάνω και 90 είναι με την όψη της κορώνας προς τα πάνω. Θεωρούμε ότι στο δωμάτιο δεν υπάρχει φως και δεν είστε σε θέση να αναγνωρίσετε ούτε καν με την αφή ποια όψη έχει το κάθε κέρμα στραμμένη προς τα πάνω. Είναι δυνατόν να χωρίσετε τα κέρματα σε δυο ομάδες νομισμάτων έτσι ώστε σε κάθε ομάδα να υπάρχει ο ίδιος αριθμός κερμάτων με την όψη της κορώνας στραμμένη προς τα πάνω;

74.Μια πιθανότητα της πίτσας

Στην πιτσαρία του Μπάρμπα Μήτσου, όλες οι πίτσες έχουν τυρί και σάλτσα ντομάτας.Υλικά που μπορούν να επιλεγούν επιπλέον είναι:μαύρες ελιές ,αντσούγιες και λουκάνικο.Από τους 200 πελάτες που πήραν πίτσα την χθεσινή μέρα από την πιτσαρία του Μπάρμπα Μήτσου οι 40 επέλεξαν να βάλουν αντσούγιες στην πίτσα τους ,80 επέλεξαν μαύρες ελιές,120 επέλεξαν λουκάνικο και 60 επέλεξαν μαύρες ελιές και λουκάνικο αλλά κανένας δεν επέλεξε να βάλει στην πίτσα του μαύρες ελιές με αντσούγιες ή αντσούγιες μαζί με λουκάνικο.Αν επιλέξουμε τυχαία έναν από τους 200 πελάτες ,ποια είναι η πιθανότητα να αγόρασε πίτσα με τυρί και σάλτσα;

75. Το οδικό δίκτυο της Λοξολάνδης

Στην μακρινή χώρα της Λοξολάνδης,οι πόλεις Α,Β,Γ συνδέονται μεταξύ τους με το οδικό δίκτυο της χώρας. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας δρόμος (μπορεί να είναι και περισσότεροι) που να συνδέει άμεσα κάθε ζεύγος των τριών πόλεων. Για παράδειγμα ,αν κάποιος ταξιδιώτης θέλει να μεταβεί από την πόλη Α στην πόλη Β μπορεί να πάρει κάποιο δρόμο που συνδέει άμεσα τις δυο πόλεις ή να χρησιμοποιήσει σαν ενδιάμεσο σταθμό την πόλη Γ.Ανάλογη διαδικασία προβλέπεται για την μετάβαση από οποιαδήποτε από τις τρεις πόλεις με προορισμό τις άλλες δυο πόλεις. Το υπουργείο μεταφορών της Λοξολάνδης υπολόγισε ότι ο αριθμός των συνολικών διαδρομών από την πόλη Α στην πόλη Β είναι 33.Συμπεριλαμβανομενων και των διαδρομών με ενδιάμεσο σταθμό την πόλη Γ. Ανάλογα, ο αριθμός των συνολικών διαδρομών από την πόλη Β στην πόλη Γείναι 23,επισης συμπεριλαμβανόμενων των διαδρομών με ενδιάμεσο σταθμό την πόλη Α.

Να υπολογίσετε το συνολικό αριθμό των διαδρομών από την πόλη Α στην πόλη Γ.

(συμπεριλαμβανόμενων και των διαδρομών με ενδιάμεσο σταθμό την πόλη Β).

Το παράδοξο των φακέλων

«Φάκελος:Το φέρετρο ενός έγγραφου,η φαρέτρα ενός λογαριασμού, το καβούκι ενός εμβάσματος , το νυχτικό μιας ερωτικής επιστολής .»

Αμβρόσιος Πηρς

Φανταστείτε ότι βρίσκεστε σε ένα τηλεπαιχνίδι. Μπροστά σας είναι τοποθετημένοι δυο κλειστοί φάκελοι με χρήματα.
Ο παρουσιαστής σας ενημερώνει ο ένας φάκελος περιέχει διπλάσιο ποσό χρημάτων από τον άλλο αλλά δεν γνωρίζετε ποιος. Επιλέγετε έναν φάκελο στην τύχη τον ανοίγετε και διαπιστώνετε ότι περιέχει το ποσό των 100 ευρώ. Ο παρουσιαστής σας δίνει την δυνατότητα η να κρατήσετε τον ανοικτό φάκελο και το ποσό των 100 ευρώ η να τον ανταλλάξετε με τον άλλο φάκελο.Ο Άλλος φάκελος περιέχει με ίσες πιθανότητες η το διπλάσιο ποσό 200 ευρώ η το μισό των χρημάτων που βρήκατε 50 ευρώ.Οι πιθανότητες να κερδίσετε η να χάσετε είναι ισες . Αλλά φυσικά το αναμενόμενο κέρδος είναι διαφορετικό στην πρώτη περίπτωση κερδίζετε 100 ευρώ επιπλέον στην δεύτερη χάνετε μόνο 50. Άρα σας συμφέρει να τον ανταλλάξετε.
Σε αυτό σημείο όμως έχουμε θέμα. Προτού ανοίξετε τον φάκελο γνωρίζετε ότι οποιοδήποτε ποσό και αν βρείτε, το σκεπτικό θα παραμείνει το ίδιο, έτσι το πιο λογικό πράγμα που έχετε να κάνετε είναι να ανταλλάξετε αμέσως το φάκελο με τον άλλο , δίχως να σας απασχολεί το άνοιγμα του: Διότι, αν ο φάκελος που κρατάτε περιέχει χ ευρώ, τότε ο άλλος φάκελος θα περιέχει η χ/2 ή 2χ ευρώ,με ισες πιθανότητες .Όποτε θα έχετε ισες πιθανότητες να κερδίσετε χ ευρώ ή να χάσετε χ/2 ευρώ. Άρα σας συμφέρει να κάνετε την ανταλλαγή.Αλλά αν αρχικά είχατε επιλέξει το δεύτερο φάκελο, τότε με το ίδιο σκεπτικό,θα σας συνέφερε να τον ανταλλάξετε αυτόματα με τον πρώτο.Αδιέξοδο,φτάνουμε σε παράδοξο!! Είναι σαφές ότι υπάρχει αντίφαση αλλά ποιο είναι το σφάλμα του παραπάνω συλλογισμού;
Ικανοποιητική ερμηνεία δεν έχει δοθεί μέχρι σήμερα.
Το παράδοξο είναι γνωστό από την δεκαετία του 1930 αλλά με την μορφή των φακέλων παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από των καθηγητή μαθηματικών του Χάρβαρντ Sandy Zabell.
Απαλλαγμένη από πιθανότητες μια άλλη εκδοχή του παράδοξου δίνει ο Ρειμοντ Σμουλίαν , Μαθηματικός με ειδίκευση στην Λογική και συγγραφέας βιβλίων με γρίφους.
Το θέτει ως εξής:
Επιλέγουμε στην αρχή τον ένα από τους δυο φάκελους και αποφασίζουμε να τον ανταλλάξουμε με τον άλλο. Από την ανταλλαγή αυτή είναι σαφές ότι ή θα κερδίσουμε ή θα χάσουμε. Θα αποδείξουμε τώρα δυο αντιφατικές προτάσεις:

● Πρόταση 1: Το ποσό που θα κερδίσουμε, αν κερδίσουμε, είναι μεγαλύτερο από το ποσό που θα χάσουμε, αν χάσουμε.
● Πρόταση 2: Τα ποσά είναι ίσα.
Ευθύς εξαρχής είναι σαφές ότι δεν μπορούν να αληθεύουν και οι δυο προτάσεις .Θα αποδείξουμε και τις δυο.
Η πρόταση 1 αναδιατυπώνει όσα αναφέραμε στην αρχή.
Αν χ ευρώ περιέχει ο φάκελος που κρατάμε ο άλλος περιέχει η χ/2 ή 2χ ευρώ. Α κερδίσουμε από την ανταλλαγή θα κερδίσουμε χ ευρώ ενώ αν χάσουμε θα χάσουμε χ/2 ευρώ. Αφού το χ είναι μεγαλύτερο από χ/2 , το ποσό που θα κερδίσουμε θα είναι μεγαλύτερο από αυτό που θα χάσουμε **άρα ισχύει η πρόταση 1.**
Όσο αφορά την πρόταση 2. Αν Δ είναι η διαφορά των ποσών στους 2 φάκελους ή με άλλα λόγια, έστω Δ το μικρότερο από τα δυο ποσά. Αν κερδίσουμε από την ανταλλαγή θα κερδίσουμε Δ ευρώ αν χάσουμε θα χάσουμε Δ ευρώ. Άρα τα δυο ποσά είναι ίσα. Για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι ο φάκελος με το μικρότερο ποσό περιέχει 20 ευρώ. Οπότε αυτός με το μεγαλύτερο ποσό περιέχει 40 ευρώ. Αν κερδίσεις από την ανταλλαγή, σημαίνει ότι είχαμε στα χέρια μας το φάκελο με τα λιγότερα χρήματα, οπότε το κέρδος είναι 20 ευρώ. Αν όμως χάσουμε από την ανταλλαγή , αυτό σημαίνει ότι κρατούσαμε το φάκελο με τα με τα 40 ευρώ και έτσι θα χάσουμε 20 ευρώ. Άρα 20 ευρώ είναι το ποσό που θα κερδίσουμε ,αλλά και το ποσό που θα χάσουμε. Το ίδιο ισχύει και για κάθε Δ που είναι μικρότερο από τα δυο ποσά. Ο Αριθμός Δ είναι το ποσό που κερδίσουμε η θα χάσουμε. Οπότε αποδεικνύεται και η πρόταση 2, και τα ποσά είναι τελικά ισα. Ισχύει τόσο η πρόταση 1 όσο και οι πρόταση 2!!Μπερδευτηκατε;
Δεν μπορούν να αληθεύουν και οι δυο προτάσεις.

76.Τα παραγγέλματα!
Σε μια επίδειξη γυμναστικών ασκήσεων οι 105 μαθητές ενός σχολείου είναι χωρισμένοι σε τρεις ομάδες: μια ομάδα 51 μαθητών, μια ομάδα των 49 μαθητών και μια ομάδα 5 μαθητών .Ο γυμναστής με την σφυρίχτρα του επιτρέπεται να δώσει τα εξής παραγγέλματα και μόνο.<u>Με ένα σφύριγμα</u> ο γυμναστής μπορεί να δείξει δυο ομάδες και να τις συνενώσει σε μια.<u>Με δυο σφυρίγματα</u> μπορεί να επιλέξει όποια ομάδα θέλει με άρτιο πλήθος μαθητών και να την χωρίσει σε δυο ισοπληθείς ομάδες. Υπάρχει κατάλληλη ακολουθία των παραπάνω σφυριγμάτων που θα επιτρέψει στον γυμναστή να χωρίσει τους 105 μαθητές σε 105 «ομάδες» του ενός ατόμου.

77. Ο Γιαννάκης έσκισε 25 σελίδες από το βιβλίο με τίτλο *Κανόνες καλής συμπεριφοράς* (οι σελίδες δεν ήταν κατ'ανάγκη διαδοχικές). Είναι δυνατό το άθροισμα της αρίθμησης των σχισμένων σελίδων να ισούται με 1271; Μπορεί το άθροισμα να ισούται με 2446;

Αν ο Γιαννάκης είχε σχίσει 24 σελίδες από το βιβλίο (όχι απαραίτητα διαδοχικές).

Είναι δυνατό το άθροισμα των αριθμών των σελίδων να ισούται με 2446;

78.Σε μια εκδήλωση που πραγματοποιήθηκε για την καταπολέμηση της βίας στα γήπεδα παραβρέθηκαν μόνο οπαδοί (!) των δυο αιωνίων ποδοσφαιρικών αντίπαλων Αλγεβρικού Αστέρα ,Γεωμετριακού. Ομολογουμένως η προσέλευση δεν ήταν μεγάλη. Παρατηρήθηκε όμως ότι κάθε οπαδός αντάλλαξε χειραψία με ακριβώς 8 οπαδούς του Αλγεβρικού αστέρα και ακριβώς 6 οπαδούς του Γεωμετριακού .Οι χειραψίες μεταξύ οπαδών αντιπάλων ομάδων ήταν κατά πέντε λιγότερες από τις χειραψίες οπαδών των ίδιων ομάδων. Πόσοι ήταν συνολικά οι οπαδοί που παραβρέθηκαν στην εκδήλωση

79.Το πρωί της Δευτέρας ο αστυνόμος Σαΐνης κλήθηκε από την υπηρεσία του να εξιχνιάσει το εξής αδίκημα. Από το μαγαζί ηλεκτρικών ειδών "Η αφθονία" εκλάπη ένα μεγάλο χρηματικό ποσό. Από μαρτυρίες έγινε γνωστό ότι ο κλέφτης ή οι κλέφτες διέφυγαν από το μαγαζί οδηγώντας ένα αυτοκίνητο.Τρεις σεσημασμένοι κλεφτές –οι Α,Β και Γ-συνελήφθησαν ως ύποπτοι για την κλοπή. Από την ανάκριση ο αστυνόμος Σαΐνης διαπίστωσε ότι :

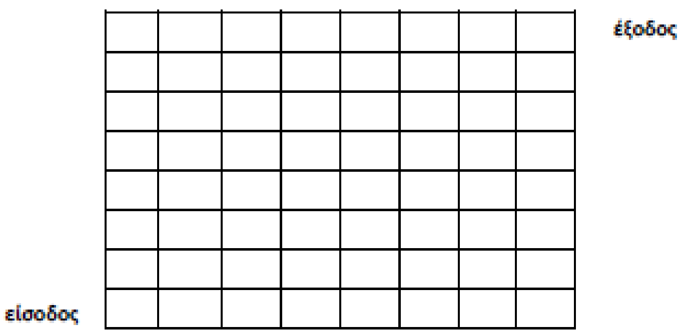
(1)Μεταξύ των Α,Β,Γ βρίσκεται ο ένοχος ή οι ένοχοι.

(2)Ο Γ ποτέ δεν κλέβει χωρίς να έχει σύνεργο τον Α και καμιά φορά και άλλους επιπλέον συνεργούς.

(3) Ο Β δεν ξέρει να οδηγήσει αυτοκίνητο.

Είναι ο Α αθώος ή ένοχος για στην κλοπή;

80. Έστω ότι έχουμε ένα λαβύρινθο σε σχήμα τετραγώνου με 64 τετραγωνικά κελιά ,κάθε κελί έχει ένα βέλος που δείχνει είτε πάνω είτε κάτω είτε αριστερά είτε δεξιά.



Το κελί που βρίσκεται πάνω δεξιά είναι αυτό που οδηγεί στην έξοδο του λαβύρινθου. Έστω ότι κάποιος εξερευνητής ξεκινά από το κελί κάτω αριστερά και κινείται με τους εξής κανόνες. Μπορεί να μετακινηθεί μόνο σε γειτονικό κελί πάντα κατά την φορά που δείχνει το βέλος ,μόλις το κάνει το βέλος περιστρέφεται κατά 90^{o} με την φορά των δεικτών του ρολογιού. Αν δεν είναι δυνατή η κίνηση του εξερευνητή γιατί το βέλος δείχνει εκτός του λαβύρινθου τότε παραμένει στο κελί και το βέλος περιστρέφεται κατά 90^{o} με την φορά των δεικτών του ρολογιού και τότε αν μπορεί κινείται,διαφορετικά επαναλαμβάνεται η διαδικασία μέχρι να μπορεί να μεταβεί σε γειτονικό κελί. Να αποδειχτεί ότι μετά από κάποιο αριθμό κινήσεων είναι βέβαιο ότι θα φτάσει στο κελί της εξόδου και θα βγεί από τον λαβύρινθο.

81. Κάθε άνδρας σε ένα χωριό ξέρει αμέσως αν η γυναίκα κάποιου άλλου είναι άπιστη αλλά ποτέ όταν πρόκειται για την δική του. Κάθε άνδρας είναι πανέξυπνος και ξέρει ότι αυτό ισχύει για όλους τους άλλους. Ο νόμος του χωριού επιτάσσει ότι, αν κάθε άνδρας μπορεί να αποδείξει ότι η γυναίκα του τον απατά πρέπει να την σκοτώσει αυθημερόν, πριν ο Ήλιος δύσει. Κάθε άνδρας είναι απόλυτα νομοταγής. Μια μέρα, ο δήμαρχος αναγγέλλει ότι υπάρχει τουλάχιστον μια μοιχαλίδα στο χωριό. Ο δήμαρχος λέει πάντα την αλήθεια και κάθε άνδρας τον πιστεύει. Αν, λοιπόν, υπάρχουν ακριβώς σαράντα μοιχαλίδες στο χωριό (κάτι που οι άνδρες αγνοούν), τι θα συμβεί μετά την ανακοίνωση του δημάρχου;

 Οι λύσεις στην σελ 166

82.Στον παρακάτω πίνακα σε κάθε κελί είναι τοποθετημένος ένας ακέραιος αριθμός διαφορετικός του μηδέν, αν είναι γνωστό ότι κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιος έχει το ίδιο γινόμενο να δείξετε ότι το γινόμενο αυτό είναι τέλειος κύβος.

α	β	γ
δ	ε	ζ
η	θ	ι

83.Ο αστυνόμος Σαίνης ανακρίνει τέσσερεις υπόπτους(Α,Β,Γ,Δ) για την διάπραξη ενός εγκλήματος. Οι τέσσερεις ύποπτοι δήλωσαν τα έξης :

Α:Ο Γ το έκανε!

Β:Δεν το έκανα εγώ.

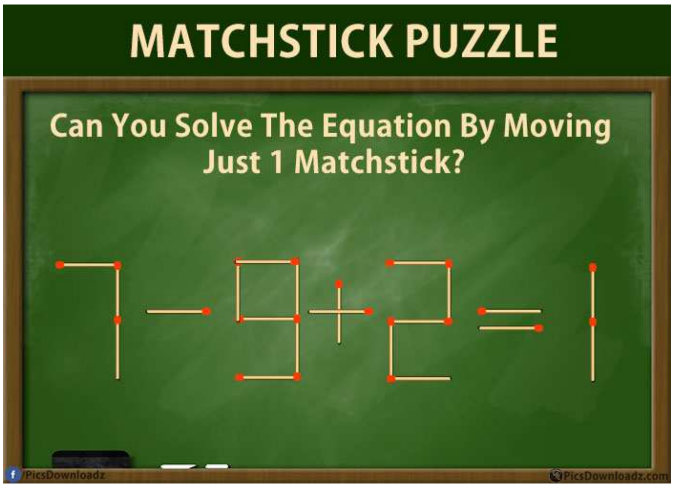
Γ:Ο Δ το έκανε.

Δ:Ο Γ λέει ψέματα όταν ισχυρίζεται ότι το έκανα εγώ:

i) Μόνο από τις τέσσερεις δηλώσεις είναι σωστή. Ποιος έκανε το έγκλημα;

ii) Αν μόνο μια από τις 4 είναι ψευδής ποιος διάπραξε τότε το έγκλημα;

Στα γρήγορα…



 Οι λύσεις στην σελ 166

Μια άσκηση ετοιμότητας,ένα απροσδόκητο διαγώνισμα,ένα παράδοξο..έκπληξης!

Ένα ενδιαφέρον παράδοξο από το χώρο της Λογικής.
Την Δευτέρα το πρωί ένα καθηγητής σε ένα σχολείο μπαίνει στην τάξη και ανακοινώνει στα παιδιά: *"Θα γράψετε ένα απροσδόκητο διαγώνισμα κάποια μέρα στην εβδομάδα. Μπορεί σήμερα,αύριο,Τετάρτη,Πέμπτη,Παρασκευή το αργότερο.Το πρωί της μέρας που θα γράψετε το διαγώνισμα,κανένας σας δεν θα το περιμένει."*

Τότε ένας από τους μαθητές σηκώνει το χέρι του και αφού παίρνει το λόγο λέει στον καθηγητή : "Προφανώς δεν πρόκειται να γράψουμε το διαγώνισμα την Παρασκευή, διότι αν δεν έχουμε γράψει το διαγώνισμα μέχρι την Πέμπτη τότε είναι σίγουρο ότι την Παρασκευή το πρωί θα το γράψουμε, αλλά θα το περιμένουμε όλοι και δεν θα είναι απροσδόκητο.Άρα βγάζουμε εκτός την Παρασκευή έτσι ξέρουμε ότι η τελευταία πιθανή μέρα για το διαγώνισμα είναι η Πέμπτη. Αν δεν το έχουμε γράψει μέχρι την Τέταρτη τότε σίγουρα θα το γράψουμε την Πέμπτη όποτε παύει πάλι να είναι απρόσμενο ,άρα εξαιρούμε την Πέμπτη.Ανάλογα μπορούμε να εξαιρέσουμε την Τέταρτη, την Τρίτη και την Δευτέρα". Άρα συνέχισε ο μαθητής "Δεν πρόκειται να γράψουμε διαγώνισμα αυτή την εβδομάδα!!","Ωραία "του είπε ο καθηγητής: "Βγάλτε τώρα μια κόλα χαρτί!! "Οι μαθητές γράψανε το διαγώνισμα και..κάνεις τους δεν το περίμενε. Ποιο ήταν το λάθος στο συλλογισμό του μαθητή; Δεκάδες άρθρα έχουν γραφεί πάνω στο διάσημο αυτό πρόβλημα.Αυτό που δεν είναι γνωστό είναι ότι η έμπνευση του παραδόξου προέρχεται από μια αληθινή ιστορία.

Κατά την διάρκεια του Β παγκοσμίου πολέμου το 1943 , η εθνική Σουηδική Ραδιοφωνία ανακοίνωσε την διεξαγωγή μιας άσκησης ετοιμότητας για την Σουηδική πολιτοφυλακή. Ανακοίνωσε ότι την ερχόμενη εβδομάδα κάποια μέρα από Δευτέρα μέχρι Σάββατο θα ηχήσουν οι σειρήνες τις άσκησης ετοιμότητας,αλλά κανένας δεν θα γνωρίζει εκ των πρότερων ποια μέρα. Όπως και πραγματικά έγινε. Ένας Σουηδός μαθηματικός, ο Lennart Ekbom παρατήρησε κάτι παράξενο σε σχέση με την ανακοίνωση της άσκησης ετοιμότητας,το έθεσε μάλιστα στην τάξη των φοιτητών του στο Ostermalms College.Ισχυρίστηκε όπως μαντεύετε λοιπόν το εξής:

« Έστω ότι είστε επικεφαλής μιας από τις ομάδες της πολιτοφυλακής,και γνωρίζετε για την διεξαγωγή της άσκησης αλλά σίγουρα δεν θα γνωρίζετε την ημέρα της εβδομάδας την οποία θα διεξαγόταν. Η άσκηση πρέπει να είναι αναπάντεχη για όλους .Σκέπτεστε λοιπόν αν έχει περάσει η εβδομάδα και έχουμε φτάσει στην Παρασκευή τότε η μοναδική μέρα που απομένει είναι το Σάββατο δεδομένου όμως ο η άσκηση πρέπει να είναι απρόσμενη εξαιρούμε το Σάββατο.Τώρα όμως η τελευταία μέρα διεξαγωγής είναι η παρασκευή αν όμως μέχρι το απόγευμα της πέμπτης δεν έχει γίνει η άσκηση τότε αποκλείεται να γίνει την Παρασκευή γιατί θα είναι αναμενόμενη από όλους.Άρα εξαιρούμε και την παρασκευή με το ίδιο συλλογισμό μπορούμε να εξαιρέσουμε όλες τις ημέρες της εβδομάδας και να συμπεράνουμε ότι δεν θα εκτελεστεί η άσκηση.Τρίτη πρωί,η άσκηση πραγματοποιείται. Υπάρχει λάθος στον συλλογισμό;

Υπάρχουν και άλλες εκδοχές του παράδοξου, η κεντρική ιδέα όμως είναι η ίδια. Απαιτούνται πάντα δυο άνθρωποι,ένας ισχυρίζεται ένα γεγονός θα συμβεί και σίγουρα θα είναι απρόσμενο. Ο δεύτερος άνθρωπος ισχυρίζεται ότι οι συνθήκες του πρώτου είναι αντιφατικές. Άρα το γεγονός δεν μπορεί να συμβεί. Αλλά παρ όλα αυτά συμβαίνει. Τόνοι μελάνης έχουν χυθεί για να παρουσιάσουν μια εξήγηση του παραδόξου, άλλα ίσως η πιο εύληπτη και κατανοητή ανάλυση δόθηκε από τον Μάρτιν Γκάρντνερ στο περιοδικό scientific American. Ο Γκάρντνερ περιγράφει ένα άνδρα ο οποίος λέει στη σύζυγο του ,ότι θα της κάνει ένα απρόσμενο δώρο για τα γενέθλια της. Ένα χρυσό ρολόι. Ο άνδρας έθεσε τους όρους.Τώρα η σύζυγος του χρησιμοποιώντας την λογική σκέφτεται ότι ο σύζυγος της δεν θα της έλεγε ψέματα. Εφόσον της είπε ότι το δώρο θα είναι απρόσμενο , τότε θα είναι απρόσμενο αλλά τώρα προσμένει ένα χρυσό ρολόι .Άρα συμπεραίνει σίγουρα δεν θα είναι ένα χρυσό ρολόι.Φυσικά όμως της δίνει ένα χρυσό ρολόι και είναι απρόσμενο για αυτή αφού με λογικό συλλογισμό είχε καταλήξει ότι δεν θα είναι ένα χρυσό ρολόι.

Ένας βιολόγος,ένας χημικός και ένας στατιστικολόγος κυνηγούν στο δάσος .

Ο βιολόγος σημαδεύει με το όπλο του ένα ελάφι και αστοχεί διότι η σφαίρα πάει 10 εκατοστά δεξιότερα από το ζώο, ο χημικός πυροβολεί το ίδιο ελάφι και αυτός αστοχεί με την σφαίρα να πέφτει 10 εκατοστά αριστερά από το ζώο .Τότε ο Στατιστικολόγος φωνάζει με χαρά :
«Το πετύχαμε!!!»

84.Μόνο δυο ψέματα

Έστω Χ ένας θετικός ακέραιος αριθμός :

1.3Χ είναι μεγαλύτερος του 35

2.7Χ είναι τουλάχιστον 43

3.2Χ είναι το πολύ 99

4.Χ είναι τουλάχιστον 21

5.5Χ είναι τουλάχιστον 51

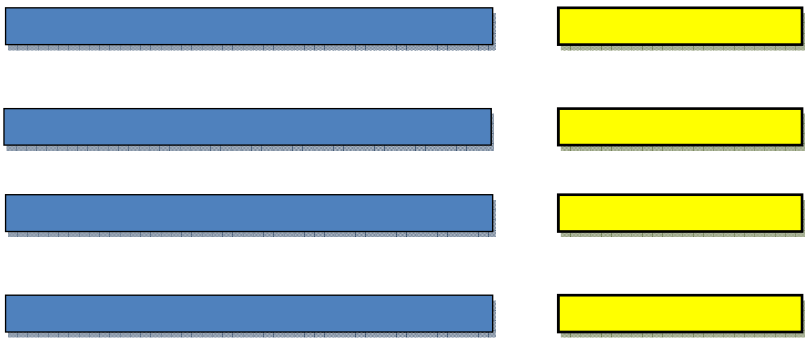
Δυο από τις παραπάνω δηλώσεις είναι ψευδείς.Ποιος είναι ο αριθμός Χ;

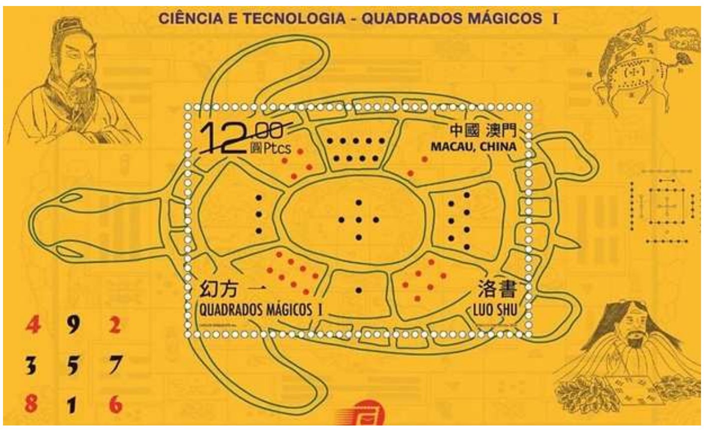
 Οι λύσεις στην σελ 166

85.Το 1957,οι Allen Newell ,J.Οι Shaw και Herbert Simon, προγραμματιστές της [Rand Corporation]δημιούργησαν ένα από τα πρώτα προγράμματα τεχνητής νοημοσύνης με την ονομασία General Problem Solver. Στρατολόγησαν μια ομάδα ατόμων που είχαν ως χόμπι την επίλυση λογικών γρίφων και τους έθεσαν δέκα λογικά προβλήματα, κατέγραψαν τον τρόπο που τα έλυσαν και συστηματοποίησαν τις ευρετικές μεθόδους που χρησιμοποίησαν για να γράψουν τον κώδικα του General Problem Solver. Ένα από τα δέκα αυτά προβλήματα άνηκε στον Μάρτιν Γκάρντνερ και είχε τίτλο *οι κανίβαλοι και οι ιεραπόστολοι. (Ενδελεχή αναφορά στο πρόβλημα με χρήση θεωρίας γράφων στο σύνδεσμο* [*Directed graphs and cannibals*]*,σελ 102).*
Το πρόβλημα ήταν το εξής :

"*Στην όχθη ενός ποταμού βρίσκονται τρεις ιεραπόστολοι και τρεις κανίβαλοι. Αντικειμενικός σκοπός είναι και τα 6 άτομα- κανίβαλοι και ιεραπόστολοι- να φτάσουν στην άλλη όχθη. Υπάρχει μια βάρκα που μπορούν χρησιμοποιήσουν, υπό την προϋπόθεση ότι σε κάθε διέλευση του ποταμού θα πρέπει να επιβαίνει τουλάχιστον ένα άτομο και το πολύ δυο. Δεν επιτρέπεται σε καμία περίπτωση σε μια από τις δυο όχθες να βρεθούν περισσότεροι κανίβαλοι από ιεραποστόλους γιατί τότε θα τους φάνε. Με ποιο τρόπο μπορούν οι τρεις ιεραπόστολοι και οι τρεις κανίβαλοι να μεταβούν στην άλλη όχθη χωρίς να υπάρξει κάποιο ατύχημα;*"

86. Ένας κλασσικός γρίφος από τον Σάμ Λόιντ .Οι μπλε ταινίες έχουν διπλάσιο μήκος από τις κίτρινες . Πως μπορούμε να τις τοποθετήσουμε στο επίπεδο χωρίς να τις κόψουμε ή να τις διπλώσουμε έτσι ώστε να σχηματίσουμε τρία ισεμβαδικά τετράγωνα;





Γραμματόσημο από τις ταχυδρομικές υπηρεσίες του Μακάο στην Κίνα για το πρώτο μαγικό τετράγωνο και τον μύθο που το περιβάλλει.

87.Στο κοσμηματοπωλείο "Το μπακίρι" τα μεσάνυχτα έγινε κλοπή. Κατόπιν ερευνών από τον αστυνόμο Σαΐνη ως κύριοι ύποπτοι θεωρήθηκαν οι σεσημασμένοι διαρρήκτες Α,Β,Γ .Οι Α και Γ ήταν δίδυμοι και ήταν γνωστό στις αρχές ότι κανένα από τα δίδυμα αδέρφια δεν θα διέπραττε οποιοδήποτε αδίκημα χωρίς σύνεργο (όχι απαραίτητα τον αδελφό του) .Ο Β από την άλλη, ήταν περισσότερο αυτόνομος και πάντα δούλευε μόνος του (χωρίς σύνεργο). Παρόλα αυτά, την ώρα που σημειώθηκε το αδίκημα αρκετοί μάρτυρες κατέθεσαν ότι είδαν τον ένα από τους διδύμους να πίνει μπύρες στο γνωστό μπαρ *Το ναυάγιο*.Αυτό που δεν είχε εξακριβωθεί ήταν ποιος από τους δίδυμους –ο Α ή ο Γ – ήταν στο μπαρ.

Ο αστυνόμος Σαίνης από την ανάκριση διαπίστωσε ότι,κανένας άλλος από τους τρεις υπόπτους δεν είχε ανάμιξη στο αδίκημα,ποιος ή ποιοι διέπραξαν την κλοπή.

88.Δίνονται δυο αυγά και ένα κτίριο 100 ορόφων το οποίο περιβάλλεται από πυκνό γρασίδι .Πως είναι δυνατό με την χρήση των δυο αυγών να βρεθεί- με τον ελάχιστο αριθμό ρίψεων- ο ψηλότερος όροφος από τον οποίο μπορούμε να ρίξουμε αυγό από το κτίριο και να μην σπάσει.

89. Σε μία φυλακή βρίσκονται 100 φυλακισμένοι και οι δεσμοφύλακες αποφασίζουν να παίξουν ένα παιχνίδι μαζί τους, τους συγκεντρώνουν λοιπόν σε ένα δωμάτιο και τους ανακοινώνουν ότι την επόμενη μέρα ,θα τους βάλουν σε μία ευθεία σειρά όπου ο καθένας βλέπει μόνο μπροστά,θα τους δέσουν τα μάτια με μαντήλια και θα τους φορέσουν ένα καπέλο είτε μαύρο είτε άσπρο. Θα τους βγάλουν τα μαντήλια και ένας δεσμοφύλακας θα ξεκινήσει από τον 1ο της σειράς (αυτόν που έχει όλους τους άλλους κρατούμενους μπροστά του) θα βάζει ένα πιστόλι στον κρόταφο του και θα ρωτάει τι χρώμα καπέλο φοράει.Ο κρατούμενος μπορεί να απαντήσει μονολεκτικά μαύρο ή άσπρο.Αν απαντήσει σωστά ελευθερώνεται αν απαντήσει λάθος εκτελείται.Όλοι οι κρατούμενοι το προηγούμενο βράδυ βρίσκονται στο ίδιο μεγάλο κελί και συζητούν.Υπάρχει βέλτιστη στρατηγική επιβίωσης;
Ο κάθε φυλακισμένος δεν μπορεί να δει τι χρώμα καπέλο φοράει ο ίδιος αλλά μπορεί να δει τι χρώμα έχουν τα καπέλα των μπροστινών του. Δεν μπορεί να κοιτάξει πίσω του όλοι κοιτάνε μπροστά.

90.Ένα απεργιακό πρόβλημα .

Όταν ρωτήθηκε ο πρόεδρος των συνδικαλιστών του κλάδου των πυρηνικών υδραυλικών για την συμμέτοχη των πυρηνικών υδραυλικών στην απεργία της Τέταρτης.

Ο πρόεδρος απάντησε όπως μόνο ένα πυρηνικός υδραυλικός μπορεί να απαντήσει:

-«Το πλήθος των απεργών είναι τετραψήφιος αριθμός,είναι τέλειο τετράγωνο και αν αυξήσουμε όλα τα ψηφία του κατά μια μονάδα,τότε ο νέος αριθμός που προκύπτει είναι επίσης τέλειο τετράγωνο!»

Πόσοι είναι οι απεργοί πυρηνικοί υδραυλικοί;

91.Έστω ότι έχουμε 25 άλογα, δεν διαθέτουμε χρονόμετρο και επιτρέπεται να τα βάλουμε να αγωνιστούν μόνο ανά πέντε.Πόσοι αγώνες απαιτούνται για να βρούμε τα τρία ταχύτερα άλογα. (Θεωρούμε πάντα ότι σε κάθε πεντάδα που αγωνίζεται η σειρά κατάταξης καθορίζει και την ταχύτητα των αλόγων).

92.Το ορθογώνιο τρίγωνο με ακέραια μήκη πλευρών 12,13,5 μονάδων παρουσιάζει την ιδιομορφία ότι το εμβαδό του ισούται με την περίμετρο του.Υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο με ακέραια μήκη πλευρών με την ίδια ιδιότητα;

 Οι λύσεις στην σελ 166

93 .Είναι πολύ γνωστά τα προβλήματα με τα κάλπικα νομίσματα ,τις ζυγίσεις και τα σταθμά. Ένα τέτοιο πρόβλημα ακολουθεί ,αρκετά δύσκολο με πολλές λύσεις μια εκ των οποίων εξαιρετικά πρωτότυπη (εφόσον εμπλέκει ένα μικρό ποιηματάκι).Το πρόβλημα έχει το εξής :

«Δίνονται 12 λίρες.Όλες τους έχουν το ίδιο βάρος έκτος από μια η οποία μπορεί να είναι είτε ελαφρύτερη είτε βαρύτερη,δεν γνωρίζουμε τι από τα δυο συμβαίνει.Με την χρήση μιας ζυγαριάς όπως αυτή του παρακάτω σχήματος πρέπει να βρεθεί η κάλπικη λίρα με το ελάχιστο πλήθος ζυγίσεων.Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος ζυγίσεων;»

94.Ο Φώτης γνωρίζει 5 γυναίκες: Άντα, Βίκυ, Γιώτα, Ντίνα και Εύα.
1.Οι 5 γυναίκες ανήκουν σε δυο ηλικιακές ομάδες : τρεις γυναίκες είναι κάτω από 30 ετών και δυο γυναίκες πάνω από 30.
2.Δυο γυναίκες είναι δασκάλες και οι άλλες τρεις είναι νοσοκόμες.
3.Η Άντα και η Γιώτα ανήκουν στην ίδια ηλικιακή ομάδα.
4.Η Ντίνα και η Εύα ανήκουν σε διαφορετικές ηλικιακές ομάδες .
5.Η Βίκυ και η Εύα ασκούν το ίδιο επάγγελμα.
6.Η Γιώτα και η Ντίνα ασκούν διαφορετικό επάγγελμα .
7.Από τις πέντε αυτές γυναίκες , ο Φώτης θα παντρευτεί μια δασκάλα πάνω από 30.
Ποιο είναι το όνομα της γυναίκας που θα παντρευτεί ο Φώτης;

95.Ένα χριστουγεννιάτικο πρόβλημα μερικής απασχόλησης !!

Ο Γιάννης και ο Κώστας είναι δυο ξωτικά από την Ελλάδα που εργάζονται με μερική απασχόληση για τα Χριστούγεννα στο εργαστήρι του Άγιου Βασίλη .Παραμονή πρωτοχρονιάς πρέπει να φορτώσουν ένα από τα έλκηθρα του Αι Βασίλη με 10 μικρά δώρα βάρους 10 κιλών το καθένα και 10 μεγάλα δώρα βάρους 20 κιλών το καθένα. Τα δυο ξωτικά δεν έχουν την ίδια απόδοση στο κουβάλημα , αυτό φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα, βλέπουμε το χρόνο που χρειάζεται το κάθε ξωτικό για να φορτώσει στο έλκηθρο ένα μικρό δώρο όσο και ένα μεγάλο.

	Γιάννης	Κώστας
Μικρό δώρο	1 λεπτό	3 λεπτά
Μεγάλο δώρο	6 λεπτά	5 λεπτά

Αν ξεκίνησαν να φορτώνουν το έλκηθρο στις 10:00 το πρωί, σε πόση ώρα το λιγότερο μπορούν να φορτώσουν τα δυο ξωτικά όλα τα δώρα ; (Crux magazine)

96.Η σκοτεινή πλευρά του φεγγαριού κατοικείται από πράσινα και κόκκινα ανθρωπάκια (!).Τα μεν πράσινα λένε πάντα την αλήθεια τα δε κόκκινα λένε πάντα ψέματα. Όταν ο Έλληνας αστροναύτης Κώτσος προσγειώθηκε με το διαστημόπλοιο του στην σκοτεινή πλευρά του φεγγαριού συνάντησε τρία από αυτά τα ανθρωπάκια-τα α,β,γ-και φυσικά δεν μπορούσε να διακρίνει το χρώμα του καθενός. Ο Κώτσος ρώτησε στην διαγαλαξιακή γλώσσα τον α αν είναι πράσινος ή κόκκινος. Αυτός απάντησε άλλα δεν ακούστηκε από τον Κώτσο.Τότε ο β λέει στον Κώτσο ότι ο α του είπε ότι είναι κόκκινος. Επεμβαίνει ο γ και λέει ότι είπε ψέματα ο β . Ο β ανταπαντά: "Ο α είναι κόκκινος!! "Ποιο είναι το χρώμα καθενός από τα τρία ανθρωπάκια;”

97. Στο πλοίο «το δελφίνι» που κάνει ο δρομολόγιο Αθήνα- Σάμος επιβαίνουν και τρία άτομα που έχουν τα ονόματα Αντωνίου, Βασιλείου και Γεωργίου. Κατά σύμπτωση ο μηχανικός , ο καπετάνιος και ο σερβιτόρος στο μπαρ του πλοίου έχουν και αυτοί τα ονόματα Αντωνίου, Βασιλείου και Γεωργίου,όχι απαραίτητα με αυτή την σειρά .Μας δίνονται τα εξής στοιχεία:

1)Ο επιβάτης Αντωνίου διαμένει στην Αθήνα.

2)Ο καπετάνιος διαμένει σε νησί μεταξύ Αθήνας και Σάμου .

3)Ο επιβάτης με το ίδιο επίθετο με τον καπετάνιο διαμένει στην Σάμο.

4)Ο επιβάτης που είναι γείτονας με τον καπετάνιο κερδίζει ακριβώς τριπλάσια χρήματα το μήνα από τον καπετάνιο.

5)Ο επιβάτης Βασιλείου κερδίζει 2800 ευρώ το μήνα.

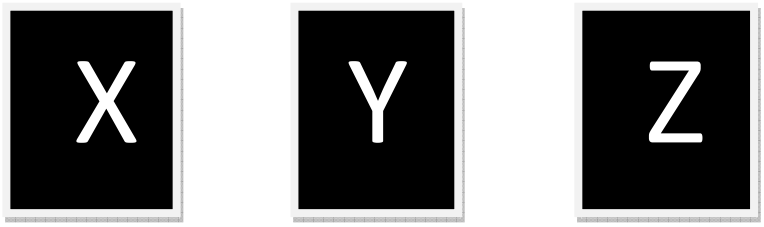
6)Ο υπάλληλος του πλοίου με το όνομα Γεωργίου πρόσφατα κέρδισε τον σερβιτόρο στο μπιλιάρδο.

Ποιο είναι το όνομα του μηχανικού;

 Οι λύσεις στην σελ 166

98. «Σε τρεις πανομοιότυπες κάρτες είναι γραμμένοι 3 θετικοί ακέραιοι αριθμοί x,y,z. Οι κάρτες είναι τοποθετημένες σε ένα τραπέζι με την όψη προς τα κάτω έτσι ώστε οι αριθμοί να είναι καλυμμένοι. Για τους τρεις αριθμούς είναι γνωστό ότι:

-Είναι διαφορετικοί.
-Έχουν άθροισμα 13.
-Είναι διατεταγμένοι κατά αύξουσα σειρά δηλαδή : $x<y<z$



Τρία παιδιά ο Αντώνης, ο Βασίλης και ο Γιάννης που γνωρίζουν τις τρεις συνθήκες αλλά όχι τους αριθμούς ενεργούν ως εξής :

-Ο Αντώνης κρυφοκοιτάζει την κάρτα με τον αριθμό χ ,βλέπει τον αριθμό , σκέπτεται λίγο και ανακοινώνει ότι δεν μπορεί να βρει τους τρεις αριθμούς,

-Ο Βασίλης ανασηκώνει την δεύτερη κάρτα χωρίς να βλέπουν τα άλλα παιδιά, κοιτάζει τον αριθμό y , σκέπτεται και ανακοινώνει ότι ούτε αυτός μπορεί να βρει τους αριθμούς.

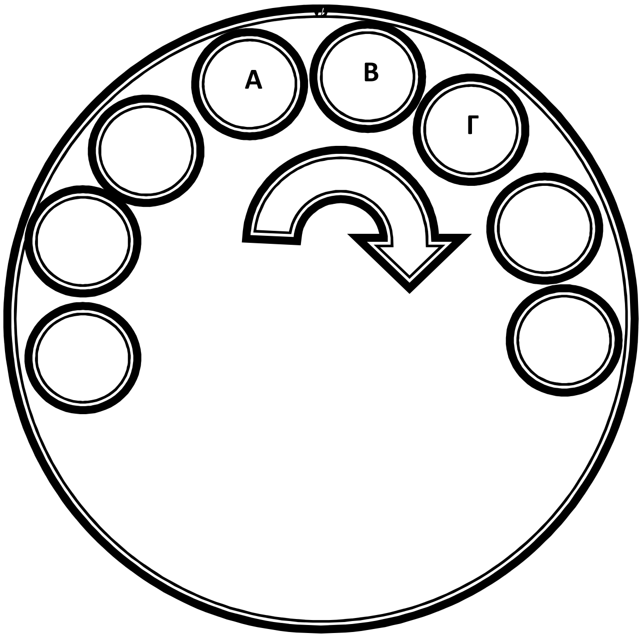
-Τέλος ο Γιάννης κατά τον ίδιο τρόπο ανασηκώνει την τρίτη κάρτα χωρίς να βλέπουν οι άλλοι δυο και κοιτάζει τον αριθμό z,σκέπτεται και αυτός και δηλώνει ότι δεν μπορεί να βρει τους αριθμούς.

Δεδομένου ότι τα τρία παιδιά έχουν απόλυτη ικανότητα στην εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων και το γνωρίζουν αυτό αμοιβαία , τίθεται το ερώτημα:

« Μπορεί να βρεθεί ποιος είναι ο αριθμός y;»

 Οι λύσεις στην σελ 166

99.Τριάντα αριθμοί είναι τοποθετημένοι κυκλικά κατά τέτοιο τρόπο ώστε κάθε αριθμός Α από αυτούς να ισούται με την απόλυτη διαφορά των αριθμών Β , Γ που ακολογθουν τον Α κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού. Το άθροισμα των 30 αριθμών ισούται με 60. Να βρείτε τους αριθμούς.



100.Ο Αντώνης και ο Βασίλης τοποθέτησαν σε ένα κουτί 2013 κέρματα και σε ένα δεύτερο κουτί 2015 κέρματα και συμφώνησαν να παίξουν το εξής παιχνίδι:

Κάθε παίχτης με την σειρά του,θα επιλέγει ένα από τα δυο κουτιά, όποιο θέλει, θα το αδειάζει από όλα τα κέρματα που περιέχει και στην συνέχεια θα μοιράζει όπως επίσης θέλει τα κέρματα του άλλου κουτιού στα δυο κουτιά ,φροντίζοντας σε κάθε κουτί να υπάρχει τουλάχιστον ένα κέρμα.Αν δεν μπορεί να χωρίσει τα κέρματα τηρώντας αυτόν τον κανόνα τότε χάνει το παιχνίδι και κερδίζει ο άλλος.Το παιχνίδι παίζεται σε συνεχόμενους γύρους με πρώτο τον Αντώνη.Υπάρχει βέλτιστη στρατηγική που θα εξασφαλίσει την νίκη σε κάποιον από τους δυο παίκτες;

101.Δίνονται 6 λίρες πανομοιότυπες εξωτερικά ,γνωρίζουμε ότι είναι πιθανό μια από αυτές να είναι κάλπικη .Η κάλπικη -αν υπάρχει- είτε θα είναι ελαφρύτερη είτε βαρύτερη.Διαθέτουμε μια ζυγαριά ακριβείας με την οποία μπορούμε να ζυγίσουμε είτε μια λίρα μεμονωμένα είτε πολλές μαζί. Είναι δυνατό να προσδιορίσουμε το βάρος κάθε λίρας με μόνο τρεις ζυγίσεις ;

American Mathematical Monthly ,Τεύχος 90 (1983)

102.Ένα βιβλίο έχει ν σελίδες αριθμημένες από το 1 μέχρι το ν. Ο αριθμός των ψηφίων που χρησιμοποιήθηκαν για την αρίθμηση των σελίδων του βιβλίου είναι 2808. Πόσες σελίδες έχει το βιβλίο;

103.Σε ένα τηλεπαιχνίδι ερωτήσεων κληρώθηκαν να λάβουν μέρος 35 διαγωνιζόμενοι, άνδρες και γυναίκες. Δυστυχώς την ημέρα του παιχνιδιού κάποιοι από τους διαγωνιζόμενους /ες αρρώστησαν και δεν προσήλθαν να διαγωνιστούν. Το παιχνίδι διεξήχθη κανονικά με τους υπόλοιπους. Οι κανόνες του τηλεπαιχνιδιού είναι απλοί. Ο παρουσιαστής του παιχνιδιού έθετε σε όλους τους παίκτες την ίδια ερώτηση και αυτοί απαντούσαν χωρίς ο καθένας να γνωρίζει τι απάντησαν οι άλλοι. Κάθε σωστή απάντηση έδινε ένα βαθμό. Ανάλογα με το πλήθος των βαθμών κάθε διαγωνιζόμενου, αυτός κερδίζει κάποια δώρα. Όταν τέλειωσε η διαδικασία παρατηρήθηκε ότι κάθε μια από τις γυναίκες που διαγωνίστηκαν απάντησε σωστά σε 5 ερωτήσεις ενώ κάθε άνδρας που διαγωνίσθηκε απάντησε σωστά σε 4 ερωτήσεις και η συνολική βαθμολογία από όλους τους παίκτες είναι τέσσερα τοις εκατό μεγαλύτερη από την συνολική βαθμολογία που θα προέκυπτε αν κάθε άνδρας απαντούσε σε 5 ερωτήσεις και κάθε γυναίκα σε 4 ερωτήσεις.Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο από όσα διαγωνίστηκαν ποια είναι η πιθανότητα να είναι γυναίκα."

104.Ένα μπουκέτο αποτελείται από κόκκινα, άσπρα και μπλε τριαντάφυλλα. Ο συνολικός αριθμός των κόκκινων και άσπρων τριαντάφυλλων είναι 100.Ο συνολικός αριθμός των άσπρων και των μπλε τριαντάφυλλων είναι 53 και ο συνολικός αριθμός των μπλε και κόκκινων τριαντάφυλλων είναι μικρότερος από των άσπρων και των μπλε μαζί. Πόσα τριαντάφυλλα από κάθε χρώμα υπάρχουν στο μπουκέτο;

105. Τοποθετούμε επτά κέρματα του ενός ευρώ σε ένα κύκλο. Μπορείτε να τα αναποδογυρίσετε ,αν το μόνο που επιτρέπεται είναι να γυρίζετε κάθε φορά πέντε διαδοχικά κέρματα; Είναι δυνατόν να πετύχετε το ίδιο γυρίζοντας μόνο τέσσερα κέρματα κάθε φορά ; Τρίγωνο με μαύρες..κορυφές!!

106. Σε ένα κύκλο σημειώνουμε 27 σημεία έτσι ώστε να αποτελούν τις κορυφές ενός κανονικού 27-γωνου.Χρωματίζουμε κάθε σημείο με κόκκινο ή με μαύρο χρώμα, φροντίζοντας όμως, ανάμεσα σε δυο κόκκινα σημεία να υπάρχουν τουλάχιστον δυο μαύρα σημεία. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τρία μαύρα σημεία που να σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο. American mathematical Monthly (1971)

107.Ο τροχός του Ιώσηπου !!

Στο τροχό του σχήματος είναι τοποθετημένοι στα κελιά στις θέσεις Α,Β,Ζ,Η οι αριθμοί 22,19,26,13. Το άθροισμα των τετραγώνων των γειτονικών κελιών Α,Β ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών στα αντιδιαμετρικά κελιά τους Ζ,Η ($22^2 + 19^2 = 13^2 + 26^2$) . Μπορείτε να συμπληρώσετε τα υπόλοιπα κελιά του σχήματος έτσι ώστε για κάθε ζεύγος γειτονικών κελιών και των αντιδιαμετρικών τους, τα τετράγωνα τους να έχουν το ίδιο άθροισμα;

Ένα έξυπνο..μαγικό κόλπο.

108. Στην ανατολική επαρχία της Λοξολάνδης έκανε περιοδεία ένας μάγος. Ο μάγος σε μια από τις παραστάσεις του έκανε την ακόλουθη ελκυστική πρόταση στο ακροατήριο του.

«Θα πληρώσω 1000 ευρώ σ όποιον καταφέρει να μου δώσει 5 ευρώ σε είκοσι κέρματα των 50, 20 ή 5 λεπτων.1000 ευρώ για 5! Ποιος θα τα κερδίσει;»

Αρχικά δεν απάντησε κανένας από το ακροατήριο. Αρκετοί προσπάθησαν να υπολογίσουν την πιθανότητα επιτυχίας .Κανείς δεν έδειχνε πρόθυμος να εμπιστευτεί τα λόγια του μάγου . «Βλέπω ότι σας φαίνεται υπερβολικό να πληρώσετε 5 ευρώ για 1000» και συνέχισε ο μάγος :

«Ας αλλάξω την προσφορά ,δέχομαι να πάρω 3 ευρώ σε είκοσι κέρματα και να σας πληρώσω 1000 ευρώ. Έλατε!»

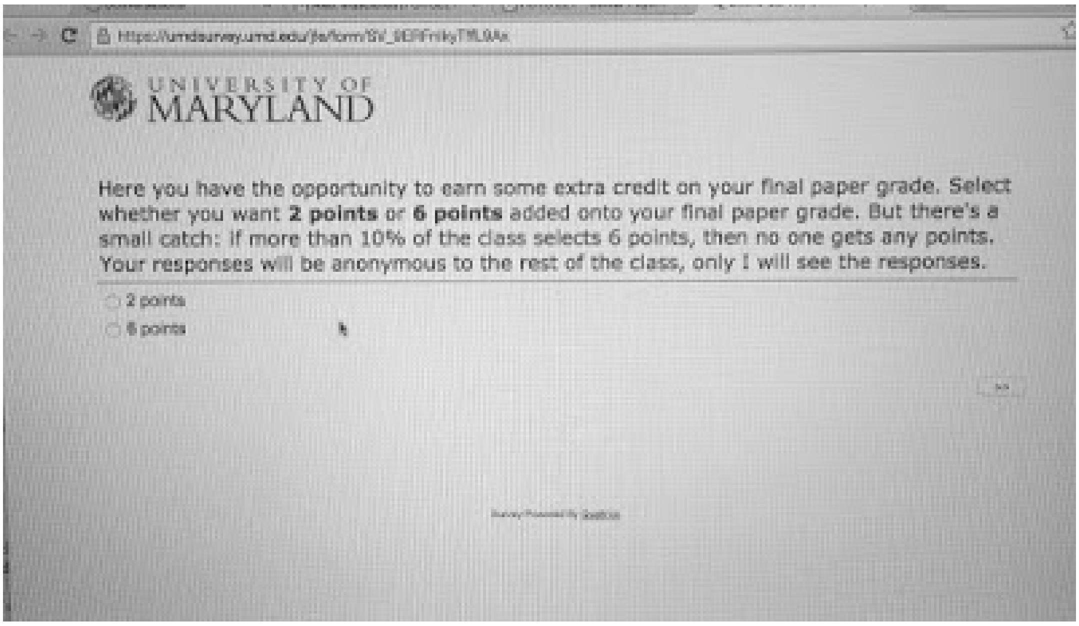
Ωστόσο , κάνεις πάλι δεν προθυμοποιήθηκε. Οι θεατές δίσταζαν να αδράξουν την ευκαιρία για να κερδίσουν « εύκολα» χρήματα.

« Λοιπόν; Ακόμη και τα 3 ευρώ σας φαίνονται πολλά; τέλος πάντων, θα μειώσω το ποσό στα 2 ευρώ σε είκοσι κέρματα. Τώρα τι λέτε;»

Αλλά και πάλι κανένας Θεατής δεν εμφανίστηκε.

Ο μάγος δεν ρισκάρισε με τις προσφορές του στο κοινό ούτε ένα ευρώ , μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

Ένα θέμα εξετάσεων,η θεωρία παιγνίων και τα εγωιστικά κίνητρα των ανθρώπων…



Πρέπει να συνεννοηθούμε για να κάνουμε αυτό που θέλω εγώ...

Ο άνθρωπος της διπλανής πόρτας

Ανέκαθεν στον θεσμό των πανελληνίων εξετάσεων η επιτυχία ή η αποτυχία των μαθητών συνοψίζονταν στο ρητό *πως θα γράψεις σε σχέση με τους άλλους*. Ένα 15 όταν η πλειοψηφία κινήθηκε στο 11 είναι πολύ καλύτερο από ένα 18 όταν όλοι έχουν γράψει 17. Αγώνας στον οποίο δεν μετράει η συμμετοχή αλλά η θέση στον τερματισμό.Μια αλήθεια την όποια δεν νομίζω ότι υπάρχει κανείς να αμφισβητήσει.Πρόκειται δηλαδή για εξετάσεις που το αποτέλεσμα για κάθε μαθητή επηρεάζεται από την απόδοση των συνυποψήφιων του. Έμμεσα κατά κάποιο τρόπο.Το αστείο είναι ότι σε τελικές εξετάσεις έχει συμβεί και άμεσα. Εξηγούμαι.Τον Ιούνιο του 2015 στο πανεπιστήμιο του Maryland στις τελικές εξετάσεις σε μάθημα κοινωνικής ψυχολογίας- αν το μεταφράζω σωστά- τέθηκε στις τελικές εξετάσεις μαζί με τα υπόλοιπα θέματα ένα επιπλέον θέμα.

«Επέλεξε αν θέλεις 2 ή 6 βαθμούς να προστεθούν στην τελική σου βαθμολογία.Αλλά πρόσεχε, αν περισσότερο από το 10% των διαγωνιζομένων επιλέξει τους 6 βαθμούς τότε ούτε ένας από τους διαγωνιζόμενους θα πάρει έξτρα βαθμολογία.»

Είναι δεδομένο ότι την ώρα της εξέτασης δεν μπορούν να συνεννοηθούν οι εξεταζόμενοι και να υιοθετήσουν κοινή στρατηγική. Την άσκηση την θέτει κατά καιρούς ο συγκεκριμένος καθηγητής από το 2008 και μόνο μια φορά οι μαθητές πήραν έξτρα βαθμολογία.βέβαια είναι προφανές ότι η καλύτερη στρατηγική θα ήταν να επιλέξουν όλοι το 2 για να έχουν με βεβαιότητα έξτρα βαθμούς.Στο διαδίκτυο αλίευσα μια παραλλαγή του συγκεκριμένου θέματος που αναδεικνύει καλύτερα το δίλημμα.

Έχετε την ευκαιρία να κερδίσετε έξτρα βαθμούς.Γράψτε στην κόλλα σας ένα ακέραιο αριθμό ανάμεσα στο 5 και το 20 –συμπεριλαμβανομένων του 5 και του 20-ο οποιος θα καθορίσει πόσοι βαθμοί θα σας δοθούν επιπλέον ως εξής:

•*Αν όλοι οι διαγωνιζόμενοι γράψουν τον ίδιο αριθμό,αυτό θα είναι και το πλήθος βαθμών που θα λάβουν επιπλέον όλοι.*

•Αν δεν γράψουν όλοι οι διαγωνιζόμενοι τον ίδιο αριθμό τότε ο καθένας θα λάβει Χ βαθμούς όπου Χ ο μικρότερος αριθμός που επιλέχτηκε από τους διαγωνιζόμενους.Με μια μικρή διαφορά. Οι διαγωνιζόμενοι που έγραψαν τον μικρότερο αριθμό Χ θα τους δοθεί ένα bonus 5 βαθμών άρα θα λάβουν συνολικά Χ+5 βαθμούς στην βαθμολογία τους.Οι διαγωνιζόμενοι που έγραψαν μεγαλύτερο αριθμό από το Χ θα λάβουν Χ-5 βαθμούς επιπλέον στην βαθμολογία τους.
Αν ήσασταν διαγωνιζόμενος τι θα κάνατε;

Έχουμε μια παρόμοια κατάσταση με το δίλημμα του κρατουμένου. Αν ο αναμενόμενος χαμηλότερος αριθμός είναι ο Υ (ανάμεσα στο 5 και το 20),τότε έχεις τις εξής επιλογές:

-Επέλεξε έναν αριθμό μεγαλύτερο από Υ και θα λάβεις Υ-5 βαθμούς.

-Επέλεξε το Υ και θα λάβεις Υ βαθμούς.

-Επέλεξε Υ-1 και θα έχεις επιλέξει τον μικρότερο αριθμό έτσι θα λάβεις Υ+4 βαθμούς.

Για κάθε μια από τις παραπάνω επιλογές αναμένετε από τους άλλους διαγωνιζόμενους να γράψουν κάποιο αριθμό και εσείς προσπαθείτε να γράψετε ένα βαθμό μια μονάδα λιγότερο.

Αν αναμένετε οι υπόλοιποι διαγωνιζόμενοι να γράψουν 5 ,τότε η καλύτερη επιλογή για σας είναι να γράψετε επίσης 5,διαφορετικά, με μεγαλύτερο αριθμό θα λάβετε μηδέν βαθμούς . Έτσι κάθε διαγωνιζόμενος στην αίθουσα θα λάβει 5 βαθμούς παρότι θα μπορούσαν να λάβουν 20 αν έγραφαν όλοι 20 στην κόλλα τους.
Τι συνιστούν όλα τα παραπάνω; Μια μικρή ιστορία για τα εγωιστικά κίνητρα των ανθρώπων.

109.Τα αρχαία

Ένα ωραίο πρόβλημα από αυτά που κατά καιρούς τίθενται σε υποψηφίους για εργασία σε μεγάλες εταιρίες σαν την Google και την Microsoft κατά την διάρκεια της συνέντευξης. Παρά το γεγονός ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα τα ΄χει τα χρονάκια του, έχει μια… φινέτσα .

«Ο Παπαδόπουλος διαθέτει ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου και θέλει να το μοιράσει στους δυο γιους του.Για κακή του τύχη η αρχαιολογική υπηρεσία τον ειδοποιεί ότι σε πολύ μικρό τμήμα του οικόπεδου (επίσης σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου) βρεθήκαν αρχαία και το κράτος θα απαλλοτριώσει αυτό το μικρό τμήμα .Το δυστύχημα είναι ότι δεν γνωρίζει σε ποιο μέρος του οικόπεδου θα «κοπεί» το τμήμα με τα αρχαία . Το ερώτημα που ανακύπτει είναι: μπορεί ο Παπαδόπουλος ανεξάρτητα από την θέση που βρίσκεται το ορθογώνιο τμήμα με τα αρχαία να χωρίσει το <u>υπόλοιπο</u> οικόπεδο σε δυο ισεμβαδικά τμήματα χαράσσοντας <u>μόνο μια</u> ευθεία γραμμή;»

110. Ένας μεταγρίφος με πολυώνυμα….

Όταν ο καθηγητής Ξερολίδης ρώτησε το Γιάννη για την ηλικία του αδελφού του, ο μικρός που ήταν σαΐνι στα μαθηματικά με στοχαστικό ύφος έγραψε σε ένα χαρτί ένα πολυώνυμο με ακεραίους συντελεστές και του είπε ότι η ηλικία του αδελφού του είναι μια ακέραια ρίζα του πολυώνυμου. Ο Ξερολίδης του απάντησε γελώντας «εύκολο είναι, με λίγες δόκιμες θα το βρω. Ας πούμε ότι θα βάλω στο πολυώνυμο όπου χ το 7.Ατυχια, η τιμή του είναι 77..»
Ο Γιάννης τον διέκοψε «Ε όχι και 7 χρονών!! Είναι μεγαλύτερος.»
Ο Ξερολίδης, φουρκισμένος απάντησε :“Ας δοκιμάσω έναν μεγαλύτερο αριθμό ...για να δούμε ..μπα βγαίνει ..85.»
Ο Γιάννης εκνευρισμένος του απάντησε: «είναι μεγαλύτερος και από τον δεύτερο αριθμό που δοκίμασες..»
Ποσών ετών είναι ο αδελφός του Γιάννη;

111. Ο πλανήτης Μπαλόνι….

« Στο γαλαξία του «Πολύ-μακριά» οι αστρονόμοι ανακάλυψαν έναν παράξενο πλανήτη Μπαλόνι.Είναι σχετικά μικρός και το σχήμα του είναι απόλυτα σφαιρικό. Το εμβαδόν της επιφάνειας του και ο όγκος του είναι τετραψήφιοι ακέραιοι, πολλαπλασιασμένοι με τον αριθμό π, οι μετρήσεις έχουν γίνει σε χιλιόμετρα. Η δεύτερη ιδιαιτερότητα του πλανήτη είναι ότι είναι… άδειος ,σαν ένα μεγάλο μπαλόνι,οι αστρονόμοι υποθέτουν ότι ο πλανήτης περιέχει μόνο αέρα. Επειδή δεν υπάρχει τίποτα άλλο στο εσωτερικό του , ο όγκος του δίνεται από την γνωστή σχέση $\frac{4}{3}\pi r^3$.Μπορείς να υπολογίσεις την ακτίνα της πλανήτη .»

112.Μια πτήση γύρω από την γη!!

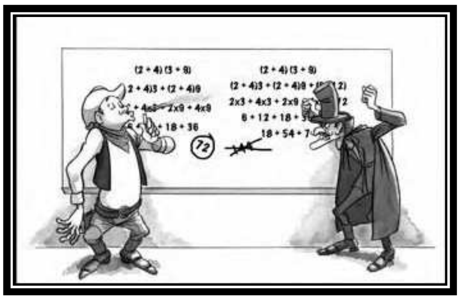
Στο Διακοπονήσι,ένα μικρό νησί της Λοξολανδης είναι γνωστό ότι σταθμεύει ένα σμήνος αεροπλάνων . Το ντεπόζιτο του τύπου αυτών των αεροπλάνων έχει αυτονομία καύσιμων για να διανύσει απόσταση ίση με την μισή ακριβώς απόσταση από το γύρο της Γης . Με την έκφραση ο γύρος της γης θεωρούμε μια πτήση με το νησί σαν αφετηρία και το αεροπλάνο πετώντας προς μια οποιαδήποτε κατεύθυνση κάνει το γύρο της γης και επιστρέφει στο νησί από την αντίθετη κατεύθυνση. Για τις ανάγκες του προβλήματος κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

- κατά την διάρκεια των πτήσεων μπορούν να μεταφερθούν όσα καύσιμα επιθυμούμε από το ντεπόζιτο του ενός αεροπλάνου στο ντεπόζιτο κάποιου άλλου .

-Η μοναδική αποθήκη καύσιμων βρίσκεται στο αεροδρόμιο του νησιού ,δεν μπορούν τα αεροπλάνα να ανεφοδιαστούν με καύσιμα πουθενά αλλού.

Με τα παραπάνω δεδομένα ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός αεροπλάνων που απαιτείται για μια πτήση γύρω από τη γη τουλάχιστον ενός αεροπλάνου.

Μια ιστορία εκδρομών και ….δειγματοχώρων!!!



Μια μέρα που ο καθηγητής Ξερολίδης είχε τα κέφια του, έθεσε στην τάξη το εξής πρόβλημα πιθανοτήτων δίνοντας την υπόσχεση ότι αν κάποιος μαθητής το έλυνε την επόμενη θα τους πήγαινε περίπατο. Ξεκίνησε λοιπόν να αφηγείται το πρόβλημα :
«*Σε ένα λάκκο υπάρχουν τρεις κάρτες απόλυτα όμοιες που διαφέρουν μονό ως προς το χρώμα , η μια από αυτές (Α) έχει λευκές και τις δυο όψεις της , η δεύτερη μια όψη λευκή και μια μαύρη (Β) και η τρίτη (Γ) δυο όψεις μαύρες .Εξάγεται τυχαία μια από αυτές και τοποθετείται στο τραπέζι ώστε να φαίνεται μονό η μια όψη της .Διαπιστώνεται ότι η όψη που φαίνεται είναι η λευκή .Ποια η πιθανότητα να είναι λευκή και η άλλη όψη;*»

Η τάξη έμεινε σιωπηλή και όλα έδειχναν να έχουν χαθεί ώσπου ο Τοτός το αστέρι της τάξης σηκώνει το χέρι .
«*Ναι παιδί μου Τοτό*». Τον ενθαρρύνει Ο Καθηγητής Ξερολιδης.
Ο Τοτός τότε απαντάει: «*Κύριε Ξερολιδη η λογική λέει ότι δεν είναι δυνατόν η κάρτα που τραβήχτηκε να είναι η Γ άρα έχουμε 50% πιθανότητα να είναι η Α και 50% πιθανότητα να είναι η Β οπότε η πιθανότητα να είναι λευκή η άλλη όψη της κάρτας είναι 1/2».*
«*Λάθος κάνεις, Τοτό*». Είπε ο καθηγητής Ξερολίδης και συνέχισε :
«*Το πρόβλημα αυτό δίνει και ένα κλασσικό παράδειγμα για το πόσο έξω μπορούμε να πέσουμε χωρίς να έχουμε ξεκαθαρίσει σωστά το δειγματικό χώρο και τις πιθανότητες των δυνατών αποτελεσμάτων . Η όλη διαδικασία της επιλογής που κάναμε , δεν επιλέγει απλά και μονό μια κάρτα από τις τρεις ,αλλά επιλέγει μια όψη κάρτας (από τις έξι που υπάρχουν) που είναι ορατή στο τραπέζι. Παρατηρούμε ότι αφού βλέπουμε μια λευκή πλευρά στο τραπέζι αυτή θα είναι είτε μια από τις δυο λευκές όψεις Α1 ,Α2 της κάρτας Α , είτε η λευκή πλευρά Β1 της κάρτας Β .Ο αντίστοιχος δειγματικός χώρος Ω περιέχει τρία ισοπίθανα αποτελέσματα :*

Ω={Α1,Α2,Β1}

Το ενδεχόμενο Α={ είναι και η άλλη όψη λευκή } αντιστοιχεί στο υποσύνολο Α={Α1,Α2} του δειγματικού χώρου .Είναι λοιπόν Ρ(Α)=2/3».

Την επόμενη μέρα έγινε κανονικά μάθημα!!!!!!

Ο Γρίφος του Αγίου Ενδμόνδου

113.ο μοναστήρι του Άγιου Ενδμόνδου πριν από πολλά χρόνια» διηγείται ο πατήρ Πέτρος στον πατήρ Παύλο «κατακλύστηκε από ποντίκια, οι χώροι του μοναστηριού γέμισαν από τρωκτικά και ο ηγούμενος του μοναστηριού έπρεπε να αντιμετωπίσει το πρόβλημα. Έδωσε οδηγίες στους μοναχούς να συγκεντρώσουν στο μοναστήρι όλες τις γάτες από τις γύρω περιοχές. Έτσι και έγινε, οι γάτες κυνήγησαν και εξολόθρευσαν όλα τα ποντίκια.»

Ο πατήρ Πέτρος συνέχισε: «Δεν θυμάμαι πόσες γάτες έφεραν στο μοναστήρι,θυμάμαι όμως πολύ καλά ότι κάθε γάτα σκότωσε τον ίδιο αριθμό ποντικών και συνολικά εξολοθρεύτηκαν 1111111 ποντίκια.»

«Μα, είναι πολύ εύκολο να υπολογίσουμε πόσες γάτες συγκεντρώθηκαν στο μοναστήρι.» Είπε ο Πατήρ Πέτρος που πριν εγκαταλείψει τα εγκόσμια ασκούσε το επάγγελμα του μαθηματικού.

Πόσες ήταν οι γάτες;

114.Τα διόδια…..

Υπάλληλος διοδίων Α: *"Πόσα αυτοκίνητα έχουν περάσει σήμερα μέχρι τις 12:00 το μεσημέρι;"*

Υπάλληλος διοδίων Β:*"Να σου πω…. Θυμάσαι, πόσα αυτοκίνητα είχαν περάσει μέχρι τις 10:00 το πρωί σήμερα;"*

Υπάλληλος διοδίων Α:*"Ναι, θυμάμαι, ήταν ένας τριψήφιος αριθμός Χ !!"*

Υπάλληλος διοδίων Β:*"Πολύ ωραία!! Αν στο πρώτο ψηφίο του Χ προσθέσεις την ηλικία του γιου μου –σε ακέραιο αριθμό ετών- από το δεύτερο και το τρίτο ψηφίο την αφαιρέσεις τότε , προκύπτει τριψήφιος αριθμός Υ που ισούται με το πλήθος των αυτοκίνητων που έχουν περάσει μέχρι τις 12:00.Ταυτόχρονα ο Υ ισούται με το γινόμενο της ηλικίας του γιου μου με τον Χ."*

Υπάλληλος διοδίων Α:*"Έχουμε και λέμε…. το βρήκα. Θα φέρεις το γιο σου στο πάρτι που κάνουμε για να γιορτάσουμε τα γενέθλια της κόρης μου, σήμερα κλείνει τα 10 ."*

Υπάλληλος διοδίων Β:*"Ναι θα τον φέρω. Ο γιος μου έχει γενέθλια σε λίγους μήνες και σίγουρα θα χρειαστώ λιγότερα κεριά για την δική του τούρτα."*

Δεδομένου ότι ο υπάλληλος Β έχει ένα παιδί ,πόσα αυτοκίνητα πέρασαν από τα διόδια μέχρι τις 10:00 το πρωί και πόσα μέχρι της 12:00 το μεσημέρι;

Το χαλασμένο τηλέφωνο και το παράδοξο του Martin Hollis !!!

Παλιότερα είχαμε αναφερθεί στο παράδοξο του απρόσμενου διαγωνίσματος ,ένα σχετικό παράδοξο διατύπωσε το 1984,στο περιοδικό Mind ο φιλόσοφος Martin Hollis:

«Δυο άνθρωποι ταξιδεύουν με το τραίνο, ο Α και ο Β, σκέπτονται ο καθένας έναν αριθμό, τον οποίο ψιθυρίζουν στο αυτί ενός τρίτου επιβάτη , του Γ. Τότε ο Γ σηκώνεται και λέει: «Αυτή είναι η στάση μου». Προτού όμως κατέβει από το τραίνο, γυρίζει και τους λέει: «Ο καθένας σας σκέφτηκε έναν διαφορετικό θετικό αριθμό. Κανείς από εσάς δεν μπορεί να συμπεράνει ποιος από τους δυο αριθμούς είναι μεγαλύτερος.» Και ο Γ φεύγει από το τραίνο.

Ο Α και ο Β συνεχίζουν το ταξίδι τους χωρίς να πουν κουβέντα,ο Α που ο αριθμός του είναι το 162,σκέπτεται: «Είναι προφανές ότι ο Β δεν διάλεξε το 1, καθώς εάν ήταν έτσι θα συμπέραινε, όταν έμαθε από τον Γ ότι οι αριθμοί μας είναι διαφορετικοί,πως ο αριθμός μου είναι μεγαλύτερος.Με το ίδιο σκεπτικό, ο Β ξέρει ότι ούτε εγώ επέλεξα το 1.Αρα, ο αριθμός 1 βγαίνει εκτός. Ο μικρότερος αριθμός που μας μένει ο 2.Όμως, αν ο Β τον είχε επιλέξει, θα ήξερε από τα λόγια του Γ ότι εγώ δεν τον είχα επιλέξει. Και το ίδιο ισχύει και για μένα άρα το 2 βγαίνει εκτός».Σύμφωνα λοιπόν με τον Hollis αν το ταξίδι διαρκούσε αρκετά , ο Α, ακολουθώντας αυτό το σκεπτικό θα συνέχιζε να απορρίπτει όλους τους αριθμούς μαζί και το 162.

Περισσότερα για το παράδοξο στο άρθρο του Timothy Chow στο περιοδικό American Mathematical Monthly.
http://arxiv.org/pdf/math/9903160.pdf

«Αισθανόμουν ένοχος στο Κέιμπριτζ που περνούσα τις μέρες μου παίζοντας παιχνίδια,ενώ υποτίθεται ότι έπρεπε να ασχολούμαι με τα μαθηματικά.Στη συνέχεια,όταν ανακάλυψα τους σουρεαλιστικούς αριθμούς,συνειδητοποίησα ότι το να παίζεις παιχνίδια ΕΙΝΑΙ μαθηματικά.»

Ο μαθηματικός John Conway για την ανακάλυψη

των σουρεαλιστικών ριθμών (surreal numbers)

115.Εύκολος Γρίφος εντόμων

"Τρεις αράχνες με τα πρωτότυπα ονόματα κ. Οκτώ, κ. Εννέα, και κ. Δέκα ζουν στο υπόγειο ενός σπιτιού. Κάποια από τις τρεις αράχνες έχει 8 πόδια, άλλη αράχνη έχει 9 πόδια και αυτή που μένει έχει 10 πόδια . Οι αράχνες κουβεντιάζουν (στους γρίφους ακόμα και τα έντομα μπορούν να μιλήσουν!!)

-«Νομίζω ότι είναι ενδιαφέρον », λέει ο κ. Δέκα,« ότι καμία αράχνη από εμάς δεν έχει τον ίδιο αριθμό από πόδια που υποδηλώνει το όνομα της ».

-« Πολύ καλή η παρατήρηση που έκανες».Απάντησε η αράχνη με τα 9 πόδια.

Πόσα πόδια έχει η αράχνη κ. Εννέα;

116.Ένα αστυνομικό .. πρόβλημα!!!!

«Σήμερα μου έτυχε μια πολύ παράξενη υπόθεση» , είπε ο αστυνόμος Σαίνης στο βοηθό του υπαστυνόμο Κλουζώ. Στο ξενοδοχείο «Η ξάπλα» διεπράχθη ένας φόνος με δηλητήριο .Γνωρίζαμε ότι το θύμα δηλητηριάστηκε πίνοντας κρασί από ένα ποτήρι κατά την διάρκεια μιας γιορτής .Το ερώτημα ήταν ποιο ποτήρι;»

«Είχαμε όλα τα ποτήρια μισογεμάτα, και τοποθετημένα σε σειρές στην κουζίνα του ξενοδοχείου. Μόνο ένα από αυτά περιείχε δηλητήριο θέλαμε να βρούμε ποιο είναι, για να το εξετάσουμε για δακτυλικά αποτυπώματα. Το εργαστήριο μας θα μπορούσε να εξετάσει το περιεχόμενο κάθε ποτηριού χωριστά αλλά όπως ξέρεις λογω περικοπής κονδυλίων και επειδή κοστίζουν οι αναλύσεις, θέλαμε να κάνουμε όσο το δυνατό λιγότερες δόκιμες. Τηλεφωνήσαμε λοιπόν στο πανεπιστήμιο και έστειλαν έναν καθηγητή μαθηματικών να μας βοηθήσει .Αυτός μέτρησε τα ποτήρια, γέλασε και είπε: « Διάλεξε οποιοδήποτε ποτήρι θέλετε, αστυνόμε.Θα το εξετάσουμε πρώτο.» «Μα δεν χάνουμε έτσι μια δόκιμη;» Ρώτησα. «Όχι» μου απάντησε.» είναι κι αυτό μέρος της πιο σύντομης διαδικασίας.Θα εξετάσουμε ένα ποτήρι στην αρχή. Δεν έχει σημασία ποιο.»

«πόσα ήταν τα ποτήρια ;» ρώτησε τότε ο υπαστυνόμος Κλουζώ.

«Δεν θυμάμαι .Ήταν αρκετά κάπου μεταξύ 500 και 600.»

Ποιος ήταν ακριβώς ο αριθμός των ποτηριών; (υποτίθεται βεβαία ότι μια ομάδα ποτηριών μπορεί να ελεγχτεί ως προς το αν περιλαμβάνει το δηλητηριασμένο ποτήρι, αντλώντας λίγο κρασί από κάθε ποτήρι και φτιάχνοντας ένα μείγμα.)

117.Προβλήματα διαγραφής

I) 12345678910111213….37383940

II) ΔΑΑΕΛΜΚΙΑΓΚΡΕΑΜΠΑΜΛΑΠΠΤΙΑ

Οι λύσεις στην σελ 166

i)Στον πινάκα του σχήματος να διαγράψετε 60 ψηφία κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να είναι ο μικρότερος δυνατός. (ο αριθμός δεν μπορεί να έχει ως πρώτο ψηφίο το 0 και δεν επιτρέπεται να αναδιατάξετε τα ψηφία)

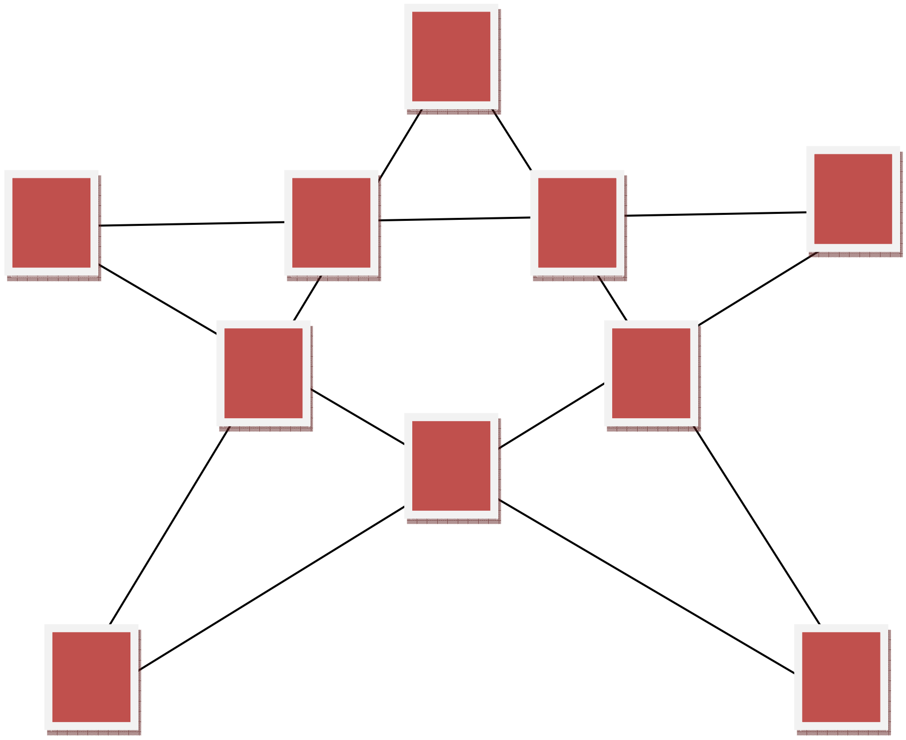
ii)Από την παραπάνω ακολουθία γραμμάτων να διαγράψετε 13 γράμματα ώστε να μείνουν 10 γράμματα.

118. Μαντεύοντας

«Σε ένα τηλεπαιχνίδι με τον ευφάνταστο τίτλο «βρες τον αριθμό και κέρδισε», λαμβάνουν μέρος δυο παίκτες .Σε κάθε παίκτη έχει δοθεί μυστικά ένας ακέραιος αριθμός από το 1 μέχρι το 100 , οι δυο παίκτες γνωρίζουν ότι οι αριθμοί που έχουν είναι διαδοχικοί .Ο σκοπός για κάθε παίκτη είναι να μαντέψει τον αριθμό του άλλου παίκτη.
Οι κανόνες του παιχνιδιού είναι οι εξής :
-Οι δυο παίκτες βρίσκονται σε ένα δωμάτιο όπου ένα ρολόι τοίχου κτυπάει κάθε λεπτό.
-Οι παίκτες απαγορεύεται να επικοινωνήσουν μεταξύ τους με οποιοδήποτε τρόπο .
-Οι παίκτες παραμένουν στο δωμάτιο μέχρι κάποιος από τους δυο να μαντέψει σωστά τον αριθμό του άλλου παίκτη. Μόλις οποιοσδήποτε από τους δυο μαντέψει τον αριθμό περιμένει τον χτύπο του ρολογιού να τον ανακοινώσει.
-Το παιχνίδι συνεχίζεται μέχρι κάποιος από τους δυο ανακοινώσει τον αριθμό που νομίζει ότι έχει ο άλλος .
-Οι διαγωνιζόμενοι κερδίζουν 10000 ευρώ αν μαντέψουν σωστά και τίποτα αν μαντέψουν λάθος .
Υπάρχει στρατηγική νίκης στο παραπάνω παιχνίδι;
(Θεωρούμε ότι οι δυο διαγωνιζόμενοι είναι εξίσου ικανοί να κάνουν απόλυτα λογικούς συλλογισμούς και το γνωρίζουν αυτό αμοιβαία)

 Οι λύσεις στην σελ 166

119. Ένα «κίτρινο» δημοσίευμα !!
Δυο φίλοι συζητούν.
Α: «Διάβασα στην εφημερίδα ότι στα υψίπεδα της Λοξολάνδης αρχαιολόγοι ανακάλυψαν σε ένα αρχαίο τάφο ένα πολύ παράξενο κτέρισμα..
Β: «Τι το παράξενο είχε;»
Α: «Ήταν ένα πεντάγραμμο αστέρι όπου σε κάθε σημείο που τέμνονται δυο πλευρές του (στο σχήμα τα κόκκινα τετράγωνα) ήταν σκαλισμένοι όλοι οι ακέραιοι αριθμοί από το 1 μέχρι το 10.»
Β: «Ε και ; που είναι το παράξενο ;»
Α : « Το άθροισμα οποιωνδήποτε τεσσάρων αριθμών που βρίσκονται σε συνεχόμενα τετράγωνα στην ίδια γραμμή είναι σταθερό.»
Β: « Το δημοσίευμα είναι ψεύτικο!!»
Δεδομένου ότι ο Β δεν γνώριζε τίποτα για την αξιοπιστία του δημοσιογράφου ή της εφημερίδας ή των αρχαιολόγων που ανακάλυψαν το κτέρισμα .Πως κατάλαβε ότι το δημοσίευμα είναι ψεύτικο;



120.Η πολυκατοικία

Στην οδό τσιφούτη 37 υπάρχει μια πολύ γνωστή πολυκατοικία με τέσσερα διαμερίσματα σε κάθε όροφο , τα οποία είναι αριθμημένα διαδοχικά. Οι ένοικοι ενός ορόφου αποφάσισαν να βάλουν νέους αριθμούς στις πόρτες τους .Για να γίνει αυτό χρειάστηκαν επτά ψηφία , τα οποία παρήγγειλλαν σε μια εταιρεία που χρέωνε το ψηφίο ν με ν ευρώ (για παράδειγμα το ψηφίο 6 έκανε 6 ευρώ ενώ το ψηφίο μηδέν ήταν δωρεάν). Οι ένοικοι συγκέντρωσαν 3 ευρώ από κάθε διαμέρισμα του ορόφου , και το ποσό που συγκεντρώθηκε κάλυψε ακριβώς το κόστος των νέων ψηφίων. Ποια ήταν τα ψηφία που παρήγγειλαν;

121.Η εκδρομή, ένα πρόβλημα χρημάτων !!!

Ένα ακόμη πρόβλημα από το βιβλίο του Αλί Νταρ Νασάθ «Προβλήματα για δύσκολες ώρες» που παρ ‘ότι μοιάζει αρκετά απλό ,δεν.. είναι.

« Ο Παπαδόπουλος, πρόεδρος του συλλόγου «ο Περιηγητής» αποφάσισε να διοργανώσει μια εκδρομή για τα μέλη του συλλόγου. Η μετακίνηση των εκδρομέων θα πραγματοποιούνταν μισθώνοντας ένα λεωφορείο και ο Παπαδόπουλος ρώτησε τα μέλη του συλλόγου ποιος θα συμμετείχε στην εκδρομή. Περισσότερα από 20 άτομα του απάντησαν ότι θα συμμετείχαν. Ο Παπαδόπουλος τότε υπολόγισε το κόστος του εισιτηρίου για τον καθένα διαιρώντας το συνολικό κόστος της μίσθωσης του λεωφορείου με το πλήθος των συμμετεχόντων και διαπίστωσε ότι το αποτέλεσμα ήταν ένας ακέραιος αριθμός.

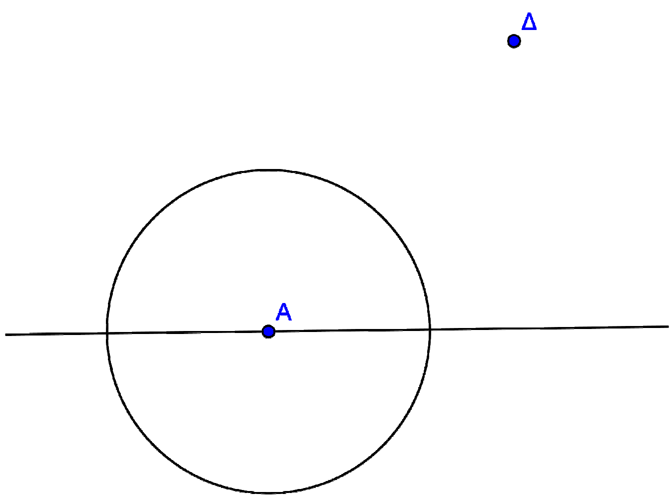
Όταν ανακοίνωσε στους συμμετέχοντες το κόστος του εισιτηρίου τότε 4 από αυτούς κρίνοντας ότι είναι υπερβολικό (ένεκα η οικονομική κρίση) δήλωσαν ότι τελικά δεν θα έρθουν. Ο Παπαδόπουλος τότε διαίρεσε ξανά το ίδιο συνολικό κόστος με το νέο μειωμένο πλήθος εκδρομέων. Ανακοινώσε το ποσό και όλοι έμειναν σύμφωνοι να φέρουν τα χρήματα την ημέρα της εκδρομής. Την ημέρα όπως που θα έφευγαν δυο συμμετέχοντες αρρώστησαν και δεν μπόρεσαν να έρθουν ,για να καλύψει το κόστος των εισιτηρίων τους ο Παπαδόπουλος αναγκάστηκε να πάρει τρία επιπλέον ευρώ από κάθε συμμετέχοντα. Έτσι και έγινε, η εκδρομή πραγματοποιήθηκε. Το ερώτημα είναι ποιο ήταν τελικά το κόστος του εισιτηρίου ,καθώς επίσης ποιο ήταν τελικά το πλήθος των εκδρομέων ;»

122.Πρόβλημα ..ηλικίας !!!!!

Ο Κώστας και η Άννα είναι παιδιά του Βασίλη και της Γεωργίας .Τα δυο παιδιά είναι μεταξύ 10 και 20 ετών. Στον κύβο της ηλικίας του Κώστα , αν προστεθεί το τετράγωνο της ηλικίας της Άννας , δίνει την χρονολογία που γεννήθηκε η Γεωργία .Ο Βασίλης είναι 5 χρόνια μεγαλύτερος από την γυναίκα του .Πόσων χρονών ήταν ο καθένας το 1945;

123.Προβληματάκι του 1978 από το περιοδικό Old Farmer's Almanac

“Δίνεται ένας κύκλος και μια ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του ,αν Δ ένα σημείο εκτός του κύκλου που δεν ανήκει στην ευθεία. Με την χρήση μόνο του κανόνα –δηλαδή ενός αδιαβάθμητου χάρακα- να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα ΔΚ κάθετο στην ευθεία.”



Οι λύσεις στην σελ 166

Το παράδοξο της ωραίας κοιμωμένης , halfers εναντίον thirders !!!

Edward Frederick Brewtnall (1846-1902)

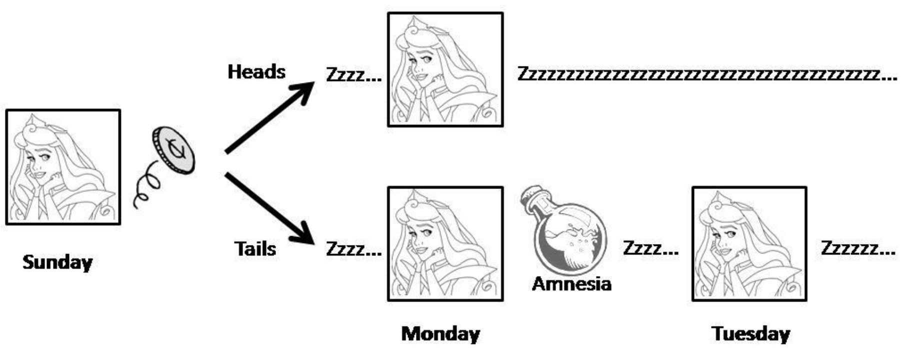
Όλοι γνωρίζουν το πρόβλημα του Monty Hall και το μύθο που το συνοδεύει , ένα παρόμοιο πρόβλημα που εγείρει ανάλογες έριδες είναι το παράδοξο της Ωραίας Κοιμώμενης .

Η διατύπωση του έχει ως εξής:

Την Κυριακή θα δώσουν ένα φάρμακο στην ωραία κοιμωμένη που την κοιμίζει .Θα στρίψουν ένα νόμισμα, αν δείξει κορώνα, θα την ξυπνήσουν την Δευτέρα , θα τις κάνουν κάποιες ερωτήσεις και το πείραμα θα τελειώσει .Αν δείξει γράμματα , θα την ξυπνήσουν την Δευτέρα , θα της κάνουν ερωτήσεις και μετά θα της δώσουν άλλη μια δόση από το φάρμακο. Μετά θα την ξυπνήσουν την Τρίτη και το πείραμα θα τελειώσει. Παρότι έχουν εξηγήσει στην ωραία κοιμωμένη όλες τις λεπτομέρειες του πειράματος , δεν θα έχει τρόπο να γνωρίζει στην διάρκεια των ερωτήσεων , ποια μέρα είναι. Το φάρμακο , επίσης ,προκαλεί μια ελαφρά απώλεια μνήμης οπότε γνωρίζει ότι δεν θα είναι δυνατό να θυμάται τυχόν προηγούμενο ξύπνημα στην διάρκεια του πειράματος (αν συμβεί τέτοιο)

Στην διάρκεια των ερωτήσεων , την ρωτούν μόνο μια ερώτηση :

Κατά την εκτίμηση της, πόσες είναι οι πιθανότητες ότι το νόμισμα έδειξε κορώνα;



 Οι λύσεις στην σελ 166

Το πρόβλημα της ωραίας κοιμώμενης , όπως αποκαλείται το πείραμα, είναι ένας σχετικά περίπλοκος γρίφος της θεωρίας των πιθανοτήτων. Έχει τις ρίζες του σε ένα παλιότερο πρόβλημα που έκανε την εμφάνιση του ,το 1997 , στο περιοδικό Games and Economic Behaviour με τον τίτλο «Ο αφηρημένος οδηγός »(TheAbsent Minded Driver).Το πρόβλημα είναι δημιουργία των οικονομολόγων Michele Piccione και Ariel Rubinstein .

Υπάρχουν δυο μονοπάτια σκέψης που μπορούμε να ακολουθήσουμε όσο αφορά την ερώτηση. Στο πρώτο εστιάζουμε στο γεγονός ότι η πορεία του πειράματος – είτε την ξυπνήσουν μια είτε δυο φορές – θα καθοριστεί από μια και μοναδική ρίψη ενός νομίσματος .Στο δεύτερο παρατηρούμε το μοτίβο με το οποίο θα την ξυπνήσουν: μια φορά αν έρθει κορώνα και δυο φορές αν έρθει γράμματα.

Ειδικότερα: Στην πρώτη προσέγγιση σκεπτόμαστε ότι υπάρχει 50% πιθανότητες το νόμισμα να έρθει κορώνα, το σκεπτικό εδώ είναι ότι η Ωραία κοιμωμένη όταν ξυπνά γνωρίζει μόνον ότι της έχουν στρίψει ένα νόμισμα, και ότι έφερε κορώνα ή γράμματα .Τίποτα στην κατάσταση που βρίσκεται δεν της δίνει καινούργια στοιχεία ως προς τις πιθανότητες , οπότε θα πρέπει να υποθέσει ότι οι πιθανότητες να δείξει κορώνα το νόμισμα είναι 1 προς 2 .

Στην δεύτερη προσέγγιση η Ωραία Κοιμωμένη πρέπει να καταλήξει ότι οι πιθανότητες να έρθει κορώνα είναι 1 στις 3. Φανταστείτε ότι αυτό το πείραμα έχει διεξαχθεί 200 φορές .Ένα νόμισμα αναμένεται θα φέρει 100 φορές κορώνα και 100 φορές γράμματα. Εδώ ο κρίσιμος παράγων είναι ότι από την οπτική της ωραίας κοιμώμενης , θα ξυπνήσει δυο φορές πιο συχνά αν το νόμισμα δείξει γράμματα από ότι αν δείξει κορώνα.

Αποτέλεσμα ρίψης	Αριθμός ρίψεων	Ξυπνήματα την δευτέρα	ξυπνήματα την τρίτη	Σύνολο ξυπνημάτων
ΚΟΡΩΝΑ	100	100	-	100
ΓΡΑΜΜΑΤΑ	100	100	100	200

Ο πίνακας μας δείχνει ότι αν το πείραμα διεξήχθη 200 φορές , η Ωραία κοιμωμένη θα ξυπνήσει 100 φορές αν έρθει κορώνα , σε σύγκριση με 200 φορές αν έρθει γράμματα .Αυτό μας υποδεικνύει ότι πρέπει η ωραία κοιμωμένη να υπολογίσει ότι η πιθανότητα το νόμισμα να έδειξε κορώνα είναι 1 στις 3. Όπως και το πρόβλημα του Monty Hall οι γνώμες διχάζονται μάλιστα σε ένα ιστότοπο χαρακτήριζε τους υποστηρικτές του ½ , halfers και τους υποστηρικτές του 1/3 ,thirders.

Ένα παιχνίδι προσομοίωσης του προβλήματος:

http://www.roma1.infn.it/~dagos/sleeping/play_sleeping.html

Σχετικοί σύνδεσμοι:

http://www.maproom.co.uk/sb.html http://blog.tanyakhovanova.com/?p=356

http://barryispuzzled.com/zbeauty.htm http://arxiv.org/pdf/1110.6437v2.pdf

124.Κρυπτόγραμμα!!!!!!!

Δίνεται το παρακάτω ανάγωγο κλάσμα και η περιοδική δεκαδική μορφή του, όπου κάθε γράμμα αντιστοιχεί σε μοναδικό αριθμητικό ψηφίο .

$$\frac{OKO}{MHM} = 0.\Pi A\Lambda I\Pi A\Lambda I\Pi A\Lambda I\Pi A\Lambda I\Pi A\Lambda I....$$

Να βρεθεί για κάθε γράμμα ποιο είναι το αριθμητικό ψηφίο στο οποίο αντιστοιχεί.

125. Ο γλυκατζής Ευτύχιος και ένα πρόβλημα τούρτας

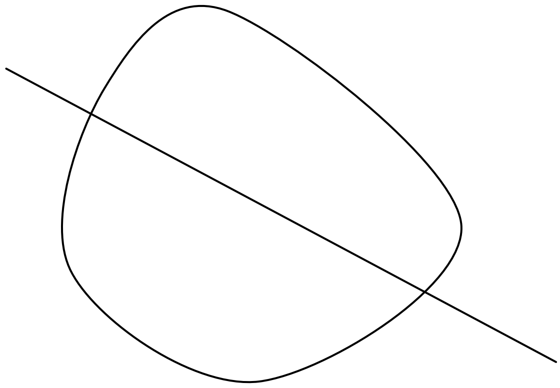
Ο Ευτύχιος κάνει μια συγκέντρωση για να γιορτάσει τα ενενηκοστά όγδοα γενέθλια του, έχει 200 καλεσμένους και παρήγγειλε στο ζαχαροπλαστείο και του έφτιαξαν με μεγάλη τούρτα σχήματος ορθογώνιου παραλληλόγραμμου. Τοποθέτησε τα κεριά μόνος του στην τούρτα ακολουθώντας τρεις βασικούς κανόνες, ανά τρία τα κεριά δεν είναι συνευθειακά ,κανένα τους δεν είναι στην ίδια ευθεία με μια από τις τέσσερις γωνίες της τούρτας, δεν υπάρχουν δυο κεριά που να είναι συνευθειακά με κάποια γωνία της τούρτας .Στην συνέχεια, έκοψε την τούρτα σε τριγωνικά κομμάτια με κορυφές τις θέσεις των κεριών και τις τέσσερεις γωνίες της τούρτας .Προσοχή, κανένα από τα ευθεία κοψίματα που έκανε με το μαχαίρι δεν έτεμνε προηγούμενο κόψιμο.

Θα πάρουν όλοι οι καλεσμένοι τουλάχιστον ένα κομμάτι τούρτα;

126. Στο παρακάτω κρυπτόγραμμα διαφορετικά γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά αριθμητικά ψηφία και το αντίστροφο. Μπορείτε να τα βρείτε;

$$\begin{array}{r} ABCDACF \\ BCDACF \\ CDACF \\ DACF \\ ACF \\ CF \\ +\quad F \\ \hline FFFFFF2 \end{array}$$

127.Ένα θεώρημα πολλών…σημείων !!!
Στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης του παρακάτω σχήματος βρίσκονται άπειρα διακριτά σημεία .



Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε τυχαία ένα εκατομμύριο από αυτά .Είναι δυνατό να τοποθετήσουμε μια ευθεία γραμμή στο εσωτερικό της καμπύλης με τροπή ώστε Α) να τέμνει την καμπύλη

Β) να μην αγγίζει κανένα από τα σημεία που διαλέξαμε .

Γ) Να χωρίζει το σύνολο των σημείων σε δυο υποσύνολα , το καθένα από τα οποία θα περιέχει 500000 σημεία και θα βρίσκεται από το ένα και από το άλλο σημείο της ευθείας ;

Αν η απάντηση σας είναι θετική πρέπει να την αποδείξετε .

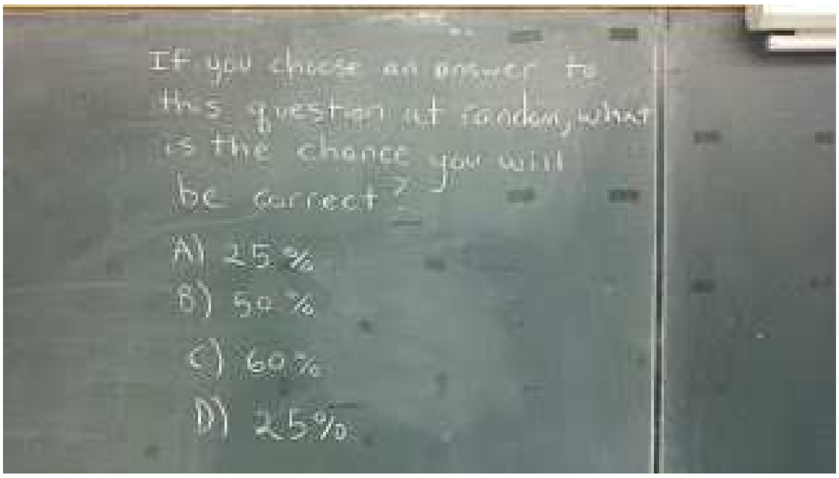
128.Ένα μεγάλο κερί καίγεται σε μια ώρα και κοστίζει 0.60 ευρώ .Ένα μικρό κερί καίγεται σε 11 λεπτά και κοστίζει 0.11 ευρώ . Μπορείς να μετρήσεις ακριβώς ένα λεπτό ξοδεύοντας όχι περισσότερα από 1.5 ευρώ;»
Προσθέτουμε δυο επιπλέον συνθήκες :
1) Δεν μπορούμε να κόψουμε τα κεριά .
2)Δεν επιτρέπεται να ανάψουμε κάποιο κερί και από τα δυο άκρα ταυτόχρονα.

129.Στο παρακάτω κρυπτόγραμμα διαφορετικά γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά αριθμητικά ψηφία και το αντίστροφο, τα ερωτηματικά αντιστοιχούν επίσης σε αριθμητικά ψηφία. Μπορείτε να τα βρείτε;

$$(\mathbf{ΕΠΤΑ})^2 = \mathbf{????ΕΠΤΑ}$$

(Ε διάφορο του μηδέν)

Πρόβλημα στον μαυροπίνακα..



Υπάρχει ένα πολύ γνωστό παράδοξο που αφορά ένα αρχαίο Κρητικό φιλόσοφο ,τον Επιμενίδη.Ο Επιμενίδης ο Κρητικός είπε : «Όλοι οι κρητικοί λένε ψέματα». Το παράδοξο είναι προφανές .Αν ο Επιμενίδης <u>λέει αλήθεια</u> τότε η πρόταση που είπε είναι αληθής , ο Επιμενίδης όμως είναι Κρητικός άρα λέει <u>ψέματα</u> . Δείτε τώρα μια παρόμοια αυτοαναφορική πρόταση που βρήκα σε μια φωτογραφία γραμμένη σε ένα μαυροπίνακα και εμπλέκει πιθανότητες .

«Αν επιλέξεις τυχαία την απάντηση σε αυτήν την ερώτηση ,ποια είναι η πιθανότητα να είναι σωστή;

Α:25% Β:50% Γ: 60% Δ:25%

Παρατηρούμε ότι έχουμε τέσσερις απαντήσεις , άρα μπορεί να δοθεί στην τύχη σωστή απάντηση με πιθανότητα 25% .Όμως το 25% υπάρχει δυο φορές .Είναι η σωστή απάντηση το 50% ; Όχι βέβαια δεν είναι ,το 50% υπάρχει στις απαντήσεις μόνο μια φορά. Άρα καμιά από τις τέσσερις απαντήσεις δεν είναι σωστή οπότε η πιθανότητα που ζητείται είναι 0.

130.Λογικοχώρι

"Ένας ταξιδιώτης επισκέφτηκε το Λογικοχώρι. Το Λογικοχώρι ειναι ένα χωριό που κάθε κάτοικος του <u>είτε λέει πάντα την αλήθεια είτε λέει πάντα ψέματα και μόνο</u>. Όταν έφτασε στο χωριό βρέθηκε μπροστά σε μια περίεργη σκηνή .Όλοι οι κάτοικοι του χωριού είχαν σχηματίσει ένα κύκλο (με μέτωπο στο κέντρο του κύκλου) και ο καθένας τους με την σειρά ανακοίνωνε αν ο διπλανός του (στα δεξιά) έλεγε <u>πάντα ψέματα</u> ή <u>πάντα αλήθεια</u>. Ο ταξιδιώτης παρακολούθησε έναν-έναν τους κάτοικους του χωριού να ανακοινώνουν το "τύπο" του διπλανού τους και μπόρεσε να συμπεράνει το ποσοστό των ψευτών επί του συνόλου των κάτοικων του χωριού. Ποιο ήταν αυτό το ποσοστό;"

Tournament of towns

 Οι λύσεις στην σελ 166

131.ΠΙΝΑΚΑΣ……..

Έστω ότι έχουμε ένα τετράγωνο το οποίο αποτελείται από τελείες χρώματος μπλε ή κόκκινου .Το τετράγωνο έχει 20 γραμμές και 20 στήλες . Για κάθε δυο γειτονικές τελείες είτε σε γραμμή είτε σε στήλη γνωρίζουμε ότι ενώνονται με ένα ευθύγραμμο τμήμα του κοινού τους χρώματος ,για παράδειγμα αν βρίσκονται δίπλα - δίπλα δυο κόκκινες τελείες τότε είναι ενωμένες με ένα ευθύγραμμο τμήμα κόκκινου χρώματος . Αλλά, κάθε δυο τελείες με διαφορετικό χρώμα είναι συνδεμένες με ένα ευθύγραμμο τμήμα μαύρου χρώματος . Γνωρίζουμε ότι στο σχήμα έχουμε 219 κόκκινες τελείες , 39 από αυτές στα «σύνορα» του πινάκα(με τον όρο σύνορα εννοούμε την $1^η$ και την $20^η$ γραμμή καθώς την $1^η$ και την $20^η$ στήλη) αλλά καμία από αυτές δεν βρίσκεται στις 4 «γωνίες» του πίνακα. Στο σχήμα υπάρχουν 237 μαύρα ευθύγραμμα τμήματα. Πόσα είναι τα ευθύγραμμα τμήματα μπλε χρώματος;

133.Μια κλασσική σπαζοκεφαλιά του Sam Loyd

" Ένας κτηνοτρόφος εκπαιδεύει μια γάτα και ένα σκύλο να τρέξουν σε ένα αγώνα 100 ποδιών σε ευθεία και επιστροφή πίσω. Ο σκύλος σε κάθε βήμα του καλύπτει μια απόσταση 3 ποδιών και η γάτα με κάθε βήμα καλύπτει απόσταση 2 ποδιών , αλλά η γάτα κάνει 3 βήματα για κάθε 2 βήματα που κάνει ο σκύλος.Κάτω από αυτές τις συνθήκες , ποιο ζώο θα νικήσει στον αγώνα;"

134.Παπαδόπουλος και … φίλοι

Ο Παπαδόπουλος και 22 φίλοι του συγκεντρώθηκαν να παίξουν ένα αγώνα ποδοσφαίρου. Οι εικοσιτρείς φίλοι έχουν ο καθένας σωματικό βάρος ακέραιο αριθμό κιλών. Επιλέγεται ένας από αυτούς με κλήρωση ως διαιτητής και οι υπόλοιποι χωρίζονται σε δυο ομάδες των 11 ατόμων κατά τέτοιο τρόπο ώστε το συνολικό βάρος των παικτών της μιας ομάδας είναι ίσο με το συνολικό σωματικό βάρος της άλλης ομάδας. Γνωρίζουμε ότι ,ανεξάρτητα από την επιλογή του διαιτητή πάντα είναι δυνατό οι υπόλοιποι 22 παίκτες να χωριστούν σε δυο ομάδες με ίσο συνολικό βάρος.

Να δείξετε ότι όλοι οι παίκτες έχουν ίδιο σωματικό βάρος .

(Από τα μαθήματα προετοιμασίας του P.Zeitz)

 Οι λύσεις στην σελ 166

135. Όταν ο Παπαδόπουλος πήγε στην εφορία για να τακτοποιήσει κάποιες εκκρεμότητες είδε ότι υπήρχε μόνο ένα γκισέ και μια μεγάλη ουρά. Κάθισε λοιπόν στο τέλος της ουράς και περίμενε. Παρατήρησε λοιπόν ότι, αν του επέτρεπαν οι άλλοι φορολογούμενοι να μετακινηθεί σε όποιο σημείο της ουράς ήθελε τότε ανεξάρτητα από το πλήθος και την σύνθεση φύλου των ατόμων της ουράς, θα μπορούσε πάντα να μπει σε κάποιο σημείο της ουράς όπου το πλήθος των ανδρών μπροστά του να είναι το ίδιο με το πλήθος των γυναικών πίσω του.

Έχει δίκιο;

136. Στο τέλος του Β΄ Παγκοσμίου πολέμου σε ένα στρατόπεδο βρίσκονται 1997 αιχμάλωτοι: 998 Ιταλοί και 999 Γερμανοί. Ο διοικητής του στρατοπέδου αποφασίζει να απελευθερώσει σταδιακά τους κρατούμενους, εκτός από έναν τον οποίο θα κρατήσει για λίγο καιρό ακόμα στο στρατόπεδο. Επιλέγονται τυχαία τρεις κρατούμενοι και φεύγουν οι δύο. Αν και οι τρεις είναι της ίδιας εθνικότητας, ο ένας από αυτούς επιστρέφει, ενώ αν είναι διαφορετικής εθνικότητας, επιστρέφει αυτός που έχει διαφορετική εθνικότητα από τους άλλους δύο. Ποιας εθνικότητας θα είναι ο "άτυχος" κρατούμενος;

137. Ένα πρόβλημα θηραμάτων

Όταν ρωτήθηκε ο Παπαδόπουλος, ο διάσημος κυνηγός αν απέδωσε το σαφάρι στο τελευταίο του ταξίδι στην Αφρική ,αυτός αφού σκέφτηκε λίγο, είπε σκωπτικά:

«Σκότωσα λιοντάρια , τίγρεις και κροκόδειλους .Το πλήθος από το κάθε είδος είναι πρώτος αριθμός και τα τρία πλήθη είναι διαφορετικοί αριθμοί .Μπερδεύω λίγο τους αριθμούς αλλά θυμάμαι πολύ καλά ,ότι μου είχε κάνει εντύπωση το γεγονός ότι αν πολλαπλασιάσουμε το πλήθος των λιονταριών με το άθροισμα των λιονταριών και των τίγρεων το αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός κατά 120 μονάδες μεγαλύτερος από το πλήθος των κροκοδείλων.»

Να βρεθεί το πλήθος από κάθε είδος ζώου. (American Mathematical Monthly ,1989)

138. Σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό δόθηκαν για λύση τρία προβλήματα, τα Α,Β,Γ. Είκοσι πέντε από τους μαθητές που διαγωνιστήκαν έλυσαν τουλάχιστον ένα πρόβλημα ο καθένας .Ο αριθμός εκείνων που πήραν μέρος στην Ολυμπιάδα και δεν έλυσαν το πρόβλημα Α , έλυσαν όμως το πρόβλημα Β, ήταν διπλάσιος του αριθμού εκείνων που δεν έλυσαν το πρόβλημα Α και έλυσαν το Γ.Ο αριθμός των μαθητών που έλυσαν μόνο το Α είναι κατά ένα μεγαλύτερος από τον αριθμό εκείνων που έλυσαν το Α και αλλά προβλήματα. Από όλους τους μαθητές που έλυσαν μόνο ένα πρόβλημα, οι μισοί δεν έλυσαν το πρόβλημα Α. Πόσοι μαθητές έλυσαν μόνο το πρόβλημα Β;

139.Η αντιπροσωπεία αυτοκίνητων *Η Χελώνα* πούλησε 225 αυτοκίνητα κατά την διάρκεια του έτους 2013.Αρχικα, πουλούσε 25 αυτοκίνητα το μήνα , στην συνέχεια 16 αυτοκίνητα το μήνα και τελικά 20 αυτοκίνητα το μήνα. Πόσους μήνες πουλούσε 25 αυτοκίνητα το μήνα;

140.Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$

(Thadeous *Gorian College*)

141. Δίνεται το κλάσμα 6/7.Μια κίνηση θεωρείται είτε η αύξηση του αριθμητή κατά 7 είτε η αύξηση του παρονομαστή κατά 6,αλλά όχι και τα δυο μαζί. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων που απαιτείται για να επανέλθει το κλάσμα στην αρχική του τιμή το 6/7.

142.

Μαθηματικός Α: «Που μένεις;»

Μαθηματικός Β:» Στην οδό Ανωνύμου!»

Μαθηματικός Α: «Σε ποιο νούμερο ;»

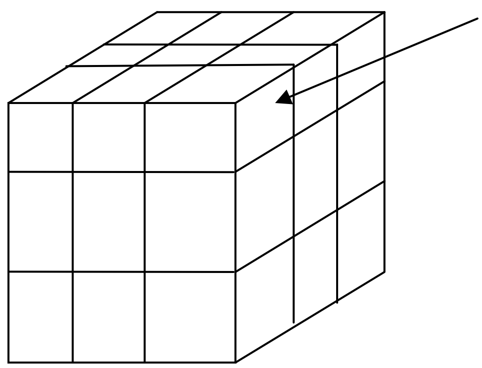
Μαθηματικός Β: «Μα είναι απλό. Σκέψου ότι το γινόμενο των ψηφίων του αριθμού της οδού που μένω αυξημένο κατά 22 μονάδες είναι ίσο με το τετράγωνο του αριθμού ελαττωμένο κατά το δεκαπλάσιο του.

Μαθηματικός Α : Μα ναι, τώρα είναι σαφές ποιος αριθμός είναι;

Σε ποιον αριθμό της οδού ανωνύμου μένει ο μαθηματικός Β;

143.Ο δρόμος του….τυριού !

Ένα ποντίκι «τρώει» το δρόμο του σε ένα 3x3x3 κυβικό τυρί διασχίζοντας διαδοχικά και τους 27 μικρούς κύβους που αποτελούν το κυβικό τυρί. Το ποντίκι μπορεί να προχωρεί «τρώγοντας» μόνο σε κάποιο γειτονικό μικρό κύβο που δεν έχει φάει ,δεν μπορεί να επιστρέψει σε «φαγωμένο» μέρος και δεν μπορεί να κινηθεί διαγώνια. Το ερώτημα είναι : αν το ποντίκι ξεκινήσει από ένα κύβο στην γωνία όπως φαίνεται στο σχήμα μπορεί να ακολουθήσει μια διαδρομή που θα καταλήγει στο κέντρο του τυριού;



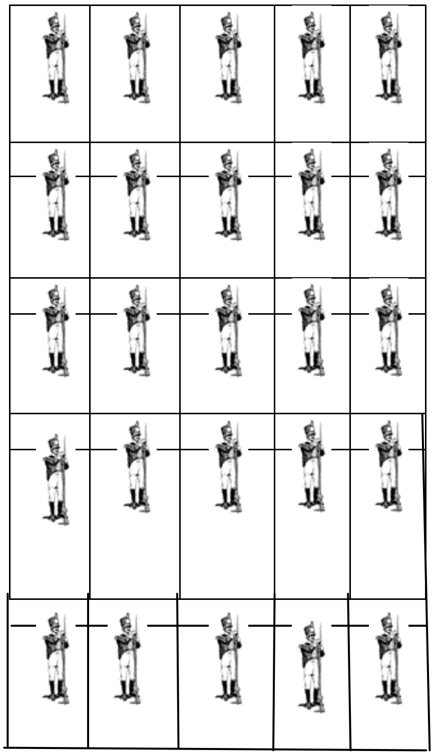
144.Οι μονομαχίες στην Λοξολάνδη σπανίως είναι θανάσιμες. Όταν ένας κάτοικος της Λοξολάνδης προκαλέσει σε μονομαχία κάποιον άλλο, ορίζουν την μέρα και τον χώρο της μονομαχίας και ο καθένας τους προσέρχεται την μέρα αυτή ,κάποια στιγμή τυχαία μεταξύ 5 και 6 το απόγευμα ,παραμένει ακριβώς 5 λεπτά, αν η παραμονή του συμπέσει με τον ερχομό του άλλου μονομάχου τότε μονομαχούν. Το ερώτημα είναι, ποιο είναι το ποσοστό των μονομαχιών που καταλήγουν στην βία;

(F.Mosteller,"Fifty challenging problems in probability")

145.Μια παραλλαγή της ακρωτηριασμένης σκακιέρας και ένα pin κινητού τηλεφώνου.

Ο Συνταγματάρχης Παπαδόπουλος είναι διοικητής του στρατοπέδου της Λοξολάνδης και αντιμετωπίζει το εξής πρόβλημα: Εικοσιπέντε αξιωματικοί είναι τοποθετημένοι (ένας –ένας) στα τετραγωνικά (μοναδιαία) δωμάτια του 5 × 5 τετραγωνικού οικοδομικού συγκροτήματος που αποτελεί τις κατοικίες των αξιωματικών.

Στο σχήμα, βλέπουμε κάτοψη του τετραγωνικού συγκροτήματος των κατοικιών.

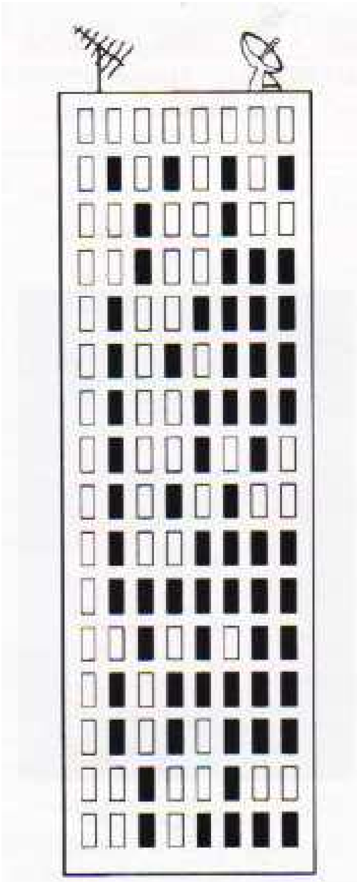


Καθένας από αυτούς νομίζει ότι, κάθε γείτονας του, που συνορεύει μαζί του οριζοντίως ή καθέτως, βρίσκεται σε καλύτερο δωμάτιο από αυτόν.

•Είναι δυνατόν όλοι τους να τοποθετηθούν με τέτοιο τρόπο, ώστε καθένας να καταλήξει σε κάποιο από τα γειτονικά δωμάτια ενός πρώην γείτονά του και να είναι όλοι ευχαριστημένοι;

•Το Πάσχα , ο συνταγματάρχης ανακοίνωσε ότι θα δώσει τιμητική άδεια στον αξιωματικό που θα μαντέψει το Pin του κινητού του τηλεφώνου. Τα μόνα στοιχεία που τους έδωσε είναι ότι αν διαιρεθεί (το Pin) με το 131 αφήνει υπόλοιπο 112 ενώ αν διαιρεθεί με το 132 αφήνει υπόλοιπο 98.Ποιο είναι το pin του Παπαδόπουλου;

146.Στο παρακάτω σχήμα βλέπετε ένα δεκαεξαοροφο κτίριο με μερικά φωτισμένα και μερικά σκοτεινά παράθυρα. Ο σχηματισμός των φωτεινών και σκοτεινών παραθύρων υπακούει σε έναν συγκριμένο νόμο. Βρείτε ποιος είναι, και σβήστε σύμφωνα με αυτόν τα φώτα του τελευταίου ορόφου.



147.Τα εγγόνια του Ευτυχίου και οι καραμέλες

Ο Ευτύχιος έχει μια σακούλα με καραμέλες και με τα τρία εγγόνια του, τον Αντώνη ,τον Βασίλη και τον Γιώργο παίζουν το εξής παιχνίδι. Σε καθεμία από τρεις κάρτες είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος. Αυτοί οι τρεις ακέραιοι ,έστω p,q,r ικανοποιούν την σχέση $p<q<r$.Οι τρεις κάρτες ανακατεύονται και μοιράζονται από τον Ευτύχιο στα εγγόνια του, από μια κάρτα σε κάθε εγγονό .Στην συνέχεια ,κάθε εγγονός παίρνει από την σακούλα καραμέλες ίσες σε αριθμό με αυτόν που είναι γραμμένος στην κάρτα του. Τότε οι κάρτες ανακατεύονται ξανά ,ενώ οι καραμέλες παραμένουν στα τρία εγγόνια .Η παραπάνω διαδικασία γίνεται τουλάχιστον δυο γύρους . Μετά τον τελευταίο γύρο , ο Αντώνης έχει 20 καραμέλες συνολικά, ο Βασίλης έχει 10 και ο Γιώργος έχει 9 καραμέλες συνολικά. Κατά τον τελευταίο γύρο ο Βασίλης πήρε r καραμέλες. Να βρείτε ποιος εγγονός πήρε q καραμέλες στον πρώτο γύρο.

148.Ένα πρόβλημα με .. πλοία!!!

«Στο πλοίο «το δελφίνι» που κάνει ο δρομολόγιο Αθήνα- Σάμος επιβαίνουν και τρία άτομα που έχουν τα ονόματα **Αντωνίου**, **Βασιλείου** και **Γεωργίου**. Κατά σύμπτωση ο **μηχανικός** , ο **καπετάνιος** και ο **σερβιτόρος** στο μπαρ του πλοίου έχουν και αυτοί τα ονόματα **Αντωνίου**, **Βασιλείου** και **Γεωργίου** , όχι απαραίτητα με αυτή την σειρά . Μας δίνονται τα εξής στοιχεία:

1)Ο επιβάτης Αντωνίου διαμένει στην Αθήνα.

2)Ο καπετάνιος διαμένει σε νησί μεταξύ Αθήνας και Σάμου .

3)Ο επιβάτης με το ίδιο επίθετο με τον καπετάνιο διαμένει στην Σάμο.

4)Ο επιβάτης που είναι γείτονας με τον καπετάνιο κερδίζει ακριβώς τριπλάσια χρήματα το μήνα από τον καπετάνιο.

5)Ο επιβάτης Βασιλείου κερδίζει 2800 ευρώ το μήνα.

6)Ο υπάλληλος του πλοίου με το όνομα Γεωργίου πρόσφατα κέρδισε τον σερβιτόρο στο μπιλιάρδο.

Ποιο είναι το όνομα του μηχανικού;

149.Ένας μεταγρίφος με ετικέτες !!!!

Τέσσερεις άνθρωποι ο Α , ο Β , Γ και ο Δ λαμβάνουν μέρος στο εξής παιχνίδι .Στον καθένα αφού του έχουν δέσει τα μάτια με ένα μαντίλι δίνεται ένα κουτί . Τα τέσσερα κουτιά είναι όμοια και κλειστά . Γνωρίζουν ότι το ένα από τα κουτιά περιείχε τρεις μαύρες σφαίρες ,ένα άλλο περιείχε δυο μαύρες σφαίρες και μια άσπρη σφαίρα, άλλο περιείχε μια μαύρη σφαίρα και δυο άσπρες σφαίρες και το τελευταίο κουτί περιείχε τρεις άσπρες σφαίρες. Στο κάθε κουτί ήταν κολλημένη μια ετικέτα που έγραφε είτε «τρεις μαύρες» είτε « δυο μαύρες και μια άσπρη» είτε« μια μαύρη και δυο άσπρες» είτε «τρεις άσπρες».Γνώριζαν όμως ότι καμία από τις ετικέτες δεν ανταποκρινόταν στο περιεχόμενο.

Ο καθένας από τους τέσσερεις ανθρώπους διαδοχικά έπρεπε να ανοίξει το κουτί του και να πάρει δυο σφαίρες , στην συνέχεια να βγάλει τα μαντίλι από τα μάτια του και να κοιτάξει το χρώμα των σφαιρών που έβγαλε όσο και την ετικέτα στο κουτί του. Σημειώνουμε ότι ο κάθε παίκτης μπορούσε να δει μόνο τις δικές του σφαίρες και την ετικέτα του δικού του κουτιού. Ο σκοπός ήταν οι παίκτες να μαντέψουν το χρώμα της τρίτης σφαίρας στο κουτί τους .

Το παιχνίδι εξελίχθηκε ως εξής :

Ο Α τράβηξε δυο μαύρες σφαίρες και έβγαλε το μαντήλι του , κατόπιν είπε δυνατά :«Γνωρίζω το χρώμα της τρίτης σφαίρας.»

Ο Β τράβηξε μια άσπρη και μια μαύρη σφαίρα έβγαλε το μαντήλι του και ανακοίνωσε: «Γνωρίζω ποιο είναι το χρώμα της τρίτης σφαίρας .»

Ο Γ τράβηξε δυο άσπρες σφαίρες έβγαλε το μαντήλι του μόλις κοίταξε την ετικέτα στο κουτί του και ανακοίνωσε « Δεν μπορώ να πω ποιο είναι το χρώμα της τρίτης σφαίρας ,».

 Οι λύσεις στην σελ 166

Ο Δ ακούγοντας τις προηγούμενες ανακοινώσεις χωρίς να βγάλει το μαντήλι είπε : « δεν χρειάζεται να βγάλω το μαντήλι ούτε να ανοίξω το κουτί μου για να βρω ποιες σφαίρες περιέχει , έχω ήδη καταλάβει το χρώμα τους , καθώς επίσης και το χρώμα των σφαιρών σε κάθε κουτί.»

Δεδομένου ότι και οι τέσσερεις παίκτες μπορούσαν να ακούσουν ο ένας τι δήλωσαν οι υπόλοιποι , πως κατάφερε ο Δ να εξάγει συμπέρασμα για τις σφαίρες τόσο στο δικό του κουτί όσο και στα κουτιά των υπολοίπων.

150. Στο μακρινό βασίλειο της Ρεμούλας….

Στο μακρινό βασίλειο της Ρεμούλας ,δυο απατεώνες συλλαμβάνονται να κλέβουν .Η ετυμηγορία των δικαστών είναι ισόβια φυλάκιση. Όμως η μέρα που γινόταν η δίκη ήταν εθνική εορτή για αυτό οι δικαστές αποφάσισαν να τους υποβάλλουν σε ένα τεστ που θα τους επέτρεπε να γλυτώσουν την φυλάκιση. Τους έδειξαν μια κάλπη της οποίας το περιεχόμενο δεν φαινόταν και τους είπαν ότι περιείχε άσπρες και μαύρες σφαίρες . Θα τους έκλειναν σε δυο κελιά όπου δεν θα είχαν καμία επικοινωνία, θα τους έφερναν την κάλπη και θα διάλεγαν μια σφαίρα στην τύχη. Στην συνέχεια ο καθένας θα έκανε μια πρόβλεψη για το χρώμα της σφαίρας που θα τύχαινε στον άλλο .Αν έκαναν λάθος στην πρόβλεψη είτε ο ένας τους ,είτε και οι δυο θα γλύτωναν την φυλακή ,αν έκαναν και οι δυο σωστές προβλέψεις θα φυλακίζονταν ισόβια. Οι δικαστές πριν τους κλείσουν στα κελιά τους επέτρεψαν να συζητήσουν για μερικά λεπτά. Υπάρχει στρατηγική να γλυτώσουν;

151.Οι εφοριακοί

Σε μια ιδανική χώρα , δυο εφοριακοί συζητούν:

-“Θυμάσαι το ΑΦΜ (αριθμός φορολογικού μητρώου) του Παπαδόπουλου;”

-“ Είναι ένας 9 -ψηφιος θετικός ακέραιος πολλαπλάσιο του 9. Ο συγκεκριμένος όμως αποτελείται από κάθε αριθμητικό ψηφίο από το 1 μέχρι το 9. Αν διαγράψουμε το ψηφίο των μονάδων ο αριθμός που απομένει είναι πολλαπλάσιο του 8, αν διαγράψουμε το ψηφίο των μονάδων και των δεκάδων ο αριθμός που απομένει είναι πολλαπλάσιο του 7 , αν διαγράψουμε τα ψηφία των μονάδων ,δεκάδων, εκατοντάδων ο αριθμός που απομένει είναι πολλαπλάσιο του 6 και ούτω καθεξής μέχρι που να μείνει ένα ψηφίο από τον αρχικό αριθμό. Μπορείς να βρεις τον αριθμό;” (Περιοδικό Komal)

152.(κλασσικό) Ένας απογραφέας μπαίνει σε ένα σπίτι και ρωτάει την νοικοκυρά πόσοι άνθρωποι μένουν εκεί. Εκείνη του απαντάει πως μένει αυτή με τις τρεις κόρες της. Ο απογραφέας την ρωτάει τις ηλικίες των κορών της και εκείνη του λέει: Το γινόμενο των ηλικιών τους, του λέει, είναι ο αριθμός 36. Ο απογραφέας της λέει πως χρειάζεται και άλλα στοιχεία. Το άθροισμα των ηλικιών τους, προσθέτει, είναι ο αριθμός της σημερινής μέρα του μήνα. Ο απογραφέας διαμαρτύρεται πως ούτε και πάλι μπορεί να υπολογίσει τις ηλικίες τους. Η μεγάλη μου κόρη φέτος δίνει πανελλήνιες, συμπληρώνει η κυρία. Ο απογραφέας την ευχαριστεί πολύ και φεύγει.

Ποιες είναι οι ηλικίες των τριών κορών της;

153.Προβληματάκι σούπα...

Ο Παπαδόπουλος είναι ικανός και έμπειρος ποδηλάτης ,μπορεί να διανύσει με το ποδήλατο του μεγάλες αποστάσεις κατορθώνοντας να διατηρεί σταθερή την ταχύτητα του. Την Δευτέρα το πρωί ξεκίνησε να μεταβεί με το ποδήλατο του από την κωμόπολη Ανω Πλατάνια στην πόλη Κάτω πλατανιά. Στις 9:00 το πρωί πέρασε δίπλα από μια πινακίδα με χιλιομετρικό δείκτη ΑΒ χλμ χωρίς να κάνει στάση και με σταθερή ταχύτητα συνεχίζει και στις 10:00 περνάει δίπλα από μια πινακίδα χιλιομετρικού δείκτη ΒΑ χιλιόμετρα, συνεχίζει και σε μια ώρα περνάει δίπλα από μια πινακίδα χιλιομετρικού δείκτη ΑΓΒ χιλιόμετρα.

Με ποια σταθερή ταχύτητα κινείται ο Παπαδόπουλος από τις 9:00 μέχρι 11:00;

Το ποδήλατο του Παπαδόπουλου ανήκει σε μια συλλεκτική έκδοση διότι ο σειριακός αριθμός του είναι ακέραιος πενταψήφιος τέλειο τετράγωνο με τα δυο τελευταία ψηφία του ισα. Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν;

Σημειώνουμε ότι όλη η διαδρομή έγινε με την ίδια σταθερή ταχύτητα .

154. Προσοχή σκύλος!!

Δυο προβλήματα, το πρώτο είχε προταθεί από τον G.Polya σε σεμινάριο για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σε σχέση με την διδασκαλία της ευρετικής, το δεύτερο τέθηκε σε συνεντευξιαζόμενο για εργασία την Microsoft,αν και για να πω την αμαρτία μου το δεύτερο είναι πολύ ανοικτό, θα μπορούσε να έχει περισσότερες λύσεις από αυτή που δίνει το εγχειρίδιο της Microsoft.

•Τρεις φίλοι, ο Αλέκος ,ο Βασίλης και ο Γιάννης οργάνωσαν μια εκδρομή στην εξοχή. Ο καθένας τους ξόδεψε 9 δολάρια και αγόρασε σάντουιτς ,παγωτό και αναψυκτικά. Για κάθε είδος δαπάνησαν συνολικά 9 δολάρια, αν και το κάθε παιδί ξόδεψε τα χρήματα του με διαφορετικό τρόπο, και κανείς δεν πλήρωσε το ίδιο ποσό για δυο διαφορετικά είδη.Η μεγαλύτερη ατομική δαπάνη ήταν αυτή που πλήρωσε ο Αλέκος για παγωτό ενώ ο Βασίλης ξόδεψε για σάντουιτς τα διπλά από ότι για παγωτό. Πόσα πλήρωσε ο Γιάννης για τα αναψυκτικά που αγόρασε ;

(όλα τα ποσά εκφράζονται με ακέραιο ποσό δολαρίων)

•Διηγείται ο Αλέκος στους δυο φίλους του.

"Πέρυσι το καλοκαίρι είχα πάει για ψάρεμα στο χωριό του πάτερα μου. Εκεί βρίσκεται μια μικρή λίμνη απόλυτα κυκλική με διάμετρο μόλις 200 μέτρα. Βρίσκομαι στο κέντρο της με την βάρκα και ψαρεύω με το καλάμι. Ξαφνικά ακούω γαβγίσματα, ένα άγριο σκυλί βρίσκεται την όχθη της λίμνης .Το κινητό τηλέφωνο μου δεν έχει σήμα ,το σκυλί ευτυχώς φοβάται το νερό αλλά γνωρίζω ότι αν βγω στην όχθη θα μου επιτεθεί. Εγώ με την βάρκα μπορούσα να κωπηλατήσω με ταχύτητα μόλις το ένα τέταρτο της ταχύτητας του σκύλου. Όπου και αν δοκίμασα να κινηθώ με την βάρκα ο σκύλος με ακολουθούσε παράλληλα στην όχθη. Ο σκύλος είναι εξαιρετικά πείσμων και δεν πρόκειται να βαρεθεί και να φύγει. Αν όμως κατάφερνα να βγω σε κάποιο σημείο της όχθης και ο σκύλος δεν βρισκόταν εκεί να με περιμένει θα μπορούσα να γλιτώσω γιατί θα προλάβαινα να ανέβω σε κάποιο δέντρο ,να πάρω τηλέφωνο με το κινητό ,να έρθουν να μαζέψουν το σκύλο και να σωθώ. Ήμουν σε δύσκολη θέση, όμως μπόρεσα χωρίς βοήθεια να βγω στην όχθη και να ανέβω στο δέντρο.Πως τα κατάφερα;

155. Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε τους παρακάτω ποδοσφαιριστές σε ένα κύκλο έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών δυο οποιωνδήποτε διαδοχικών ποδοσφαιριστών στον κύκλο να είναι πρώτος αριθμός; Τι ισχύει, αν οι ποδοσφαιριστές ήταν 16;

156.Μόνο σε ένα από τα παρακάτω ταμπελάκια η αναγραμμένη δήλωση είναι αληθής. Σε ποιο;

1^o	**Σε όλα τα παρακάτω ταμπελάκια έχουν αναγραφεί αληθείς δηλώσεις .**
2^o	**Σε όλα τα παρακάτω ταμπελάκια έχουν αναγραφεί ψευδείς δηλώσεις .**
3^o	**Σε ένα τα παραπάνω ταμπελάκια έχει αναγραφεί αληθής δήλωση.**
4^o	**Σε όλα τα παραπάνω ταμπελάκια έχουν αναγραφεί αληθείς δηλώσεις .**
5^o	**Σε όλα τα παραπάνω ταμπελάκια έχουν αναγραφεί ψευδείς δηλώσεις .**
6^o	**Σε όλα τα παραπάνω ταμπελάκια έχουν αναγραφεί ψευδείς δηλώσεις.**

157. Ο πολλαπλασιασμός με το 9 αναστρέφει έναν τετραψήφιο αριθμό (δημιουργεί δηλαδή ,έναν άλλο τετραψήφιο με τα ίδια ψηφία σε ανάστροφη σειρά). Ποιος είναι ο αριθμός ;

158. Ενα κατάστημα πουλάει αναπτήρες. Έχει δυο μεγέθη αναπτήρων, τον μεγάλο και τον μικρό.Κάθε μεγάλος αναπτήρας κοστίζει τα δίπλα από έναν μικρό.Ο Παπαδόπουλος αγόρασε πέντε μεγάλους αναπτήρες και τρεις μικρούς. Αν,αντίθετα είχε αγοράσει τρεις μεγάλους αναπτήρες και πέντε μικρούς, θα είχε ξοδέψει 2 ευρώ λιγότερα. Πόσο κοστίζει κάθε αναπτήρας.

158β. Εφόσον κάθε μεγάλος αναπτήρας κοστίζει όσο δυο μικροί ,οι πέντε μεγάλοι αναπτήρες κοστίζουν όσο δέκα μικροί. Άρα ,πέντε μεγάλοι αναπτήρες και τρεις μικροί κοστίζουν όσο δεκατρείς μικροί αναπτήρες. Από την, άλλη τρεις μεγάλοι αναπτήρες και πέντε μικροί αναπτήρες κοστίζουν όσο έντεκα μικροί. Οπότε η διαφορά της αγοράς πέντε μεγάλων και τριών μικρών αναπτήρων από την αγορά τριών μεγάλων και πέντε μικρών είναι η ίδια με την διαφορά της αγοράς δεκατριών μικρών αναπτήρων από την αγορά έντεκα μικρών αναπτήρων. Ξέρουμε ότι αυτή η διαφορά είναι 2 ευρώ .Οπότε δυο μικροί αναπτήρες κοστίζουν 2 ευρώ, άρα ο ένα μικρός αναπτήρας κοστίζει ένα ευρώ και ο μεγάλος δυο ευρώ.

 Οι λύσεις στην σελ 166

159. Ο Μήτσος με το φορτηγό του μετέφερε ένα φορτίο με ροδάκινα .Το βάρος του φορτίου σε κιλά ηταν ακέραιος αριθμός. Ο Μήτσος λοιπόν παρατήρησε ότι αν διαιρεθεί το βάρος (Β) του φορτίου με το 11 τότε το πηλίκο ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του Β.Ειναι γνωστό στην πιάτσα ότι το φορτηγό του Μήτσου είναι μάρκα *με έκαψες* και δεν μπορεί να μεταφέρει φορτίο βάρους περισσότερο από ένα τόνο ,επίσης ότι δεν νοειται μεταφορά φορτίου βάρους μικρότερου από 100 κιλα.Πόσα κιλά ροδάκινα μετέφερε ο Μήτσος με το φορτηγό του;

160. Χθες, η γυναίκα μου και εγώ χρησιμοποιήσαμε την κυλιόμενη σκάλα στο πολυκατάστημα Χ για να ανεβούμε στο δεύτερο όροφο. Παράλληλα με την κυλιόμενη ανάβαση της σκάλας ανεβαίναμε τα σκαλιά περπατώντας.Εγώ χρειάστηκε να ανεβώ 20 σκαλιά για να φτάσω στην κορυφή της σκάλας και μου πήρε 60 δευτερόλεπτα,η γυναίκα μου ανέβηκε 16 σκαλιά για να φτάσει στην κορυφή και έκανε 72 δευτερόλεπτα.
Σήμερα το πρωί, πήγαμε ξανά στο πολυκατάστημα Χ και η κυλιόμενη σκάλα ήταν χαλασμένη και δεν λειτουργούσε, εξυπηρετούσε το κοινό ως μια απλή σκάλα. Πόσα σκαλιά θα έπρεπε να ανεβούμε η γυναίκα μου και εγώ και για να φτάσουμε στον δεύτερο όροφο του εμπορικού Χ ;

161. Μια αριθμητική πρόοδος έχει μόνο ακεραίους όρους.Το άθροισμα των πρώτων ν όρων είναι δύναμη του 2.Να δείξετε ότι και ο ν είναι επίσης δύναμη του 2.

162. Δυο παιδιά θέλουν να περάσουν ένα ποτάμι.Ο μόνος τρόπος για να περάσουν απέναντι είναι με βάρκα.Η βάρκα παίρνει μόνο ένα άτομο την φορά.Δεν υπάρχει τρόπος η βάρκα να κινηθεί χωρίς επιβάτη και δεν υπάρχουν σκοινιά ή κάτι άλλο παρόμοιο.
Παρόλα αυτά τα δυο παιδιά μπορούν να να διασχίσουν το ποτάμι; Πως γίνεται αυτό;

163. Ο εξπρεσιονιστής ζωγράφος Λένος Πινέλος δημιούργησε την μοναδική του σύνθεση «*Μπλε σκακιέρα κομμέν»* με την εξής τεχνοτροπία:

Ζωγράφισε μια συνηθισμένη σκακιέρα και ύστερα την χώρισε σε όσο το δυνατόν περισσότερα μη αλληλεπικαλυπτόμενα ορθογώνια ακολουθώντας δυο κανόνες :

1) Κάθε ορθογώνιο έχει τον ίδιο αριθμό άσπρων και μαύρων τετραγώνων.

2) Αν $α_i$ είναι το πλήθος των άσπρων τετραγώνων του i ορθογωνίου τότε ισχύει :

$$α_1<α_2<α_3<\ldots\ldots$$

Ύστερα χρωμάτισε κάθε ορθογώνιο χρησιμοποιώντας μια διαφορετική απόχρωση του μπλε. Τα ερωτήματα είναι :

Α) Πόσες διαφορετικές αποχρώσεις του μπλε χρησιμοποίησε ο Λένος Πινέλος;

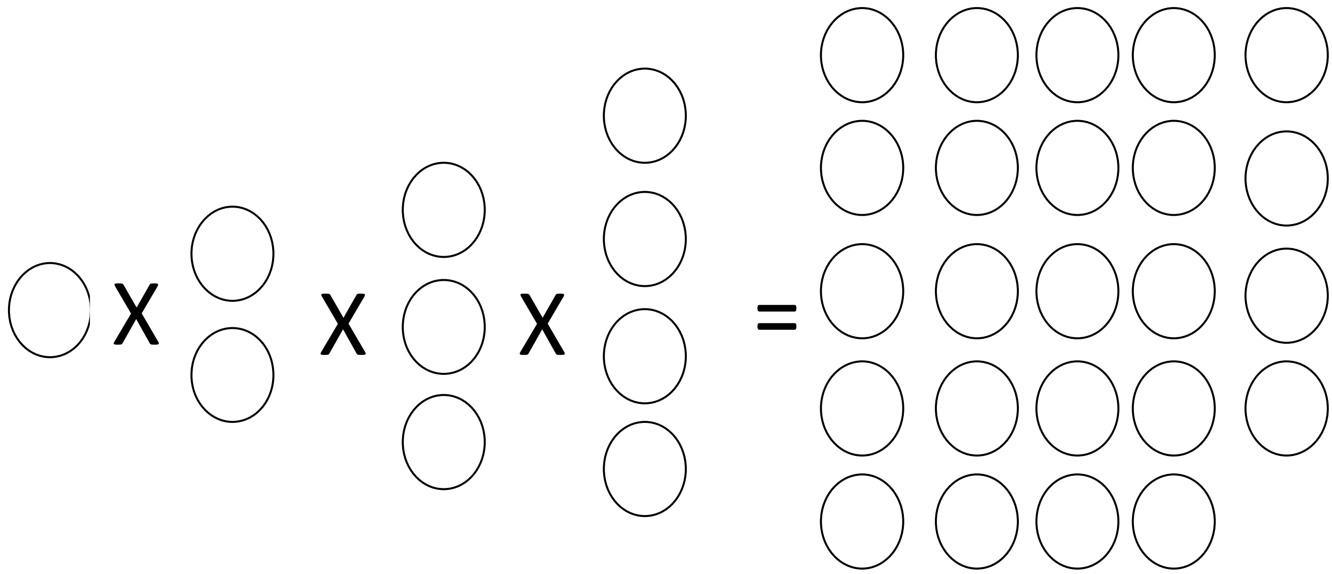
Β) Πόσους διαφορετικούς πίνακες θα μπορούσε να κατασκευάσει ο Λένος Πινέλος με τις αποχρώσεις του μπλε του παραπάνω ερωτήματος προφανώς ακολουθώντας τους κανόνες 1 και 2;

 Οι λύσεις στην σελ 166

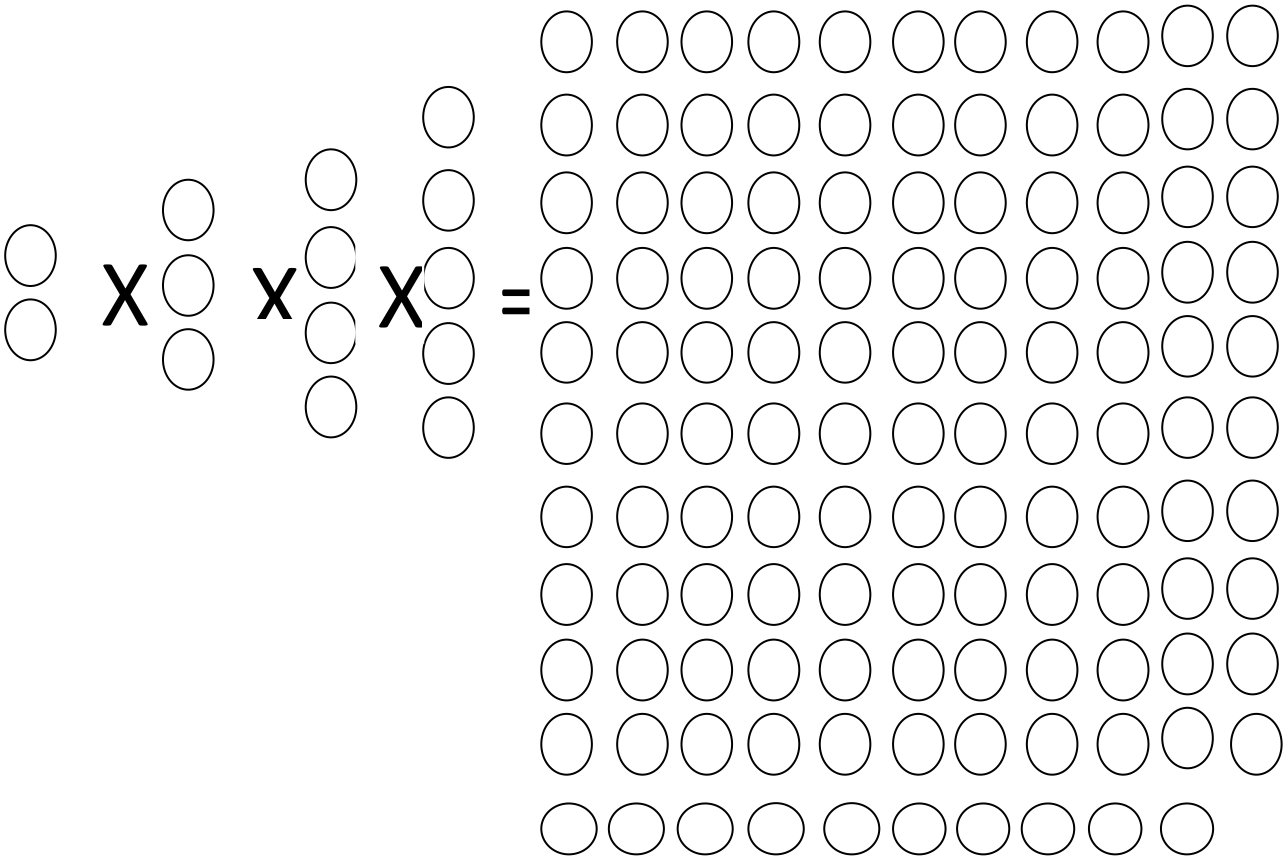
164. Ο Τοτος έλαβε μέρος στο μαθηματικό διαγωνισμό *είσαι πιο έξυπνος από έναν πεντάχρονο Αϊνστάιν* και ήρθε αντιμέτωπος με το εξής πρόβλημα:

Στο νησιωτικό σύμπλεγμα Ούμπα-Λούμπα στο νησί Κουραμπιές κατά μήκος μια ευθείας οδού βρίσκονται διαδοχικά τα χωριά Α,Β,Γ,Δ. Οι αποστάσεις ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ σε χλμ αποτελούν διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς . Είναι γνωστό το γινόμενο των αποστάσεων ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ αυξημένο κατά ένα ισούται με 43681 .Μπορείτε να βρείτε πόσο απέχουν τα χωριά Α,Β,Γ,Δ;

Στο διαγωνισμό δεν επιτρεπόταν χρήση αριθμομηχανής ή αλλού ηλεκτρονικού βοηθήματος ,παρόλα αυτά ο Τοτός-κολοσσός στα μαθηματικά- κατάφερε να λύσει το πρόβλημα. Στο γραπτό του Τοτού μεταξύ άλλων υπήρχαν τα εξής σχήματα:



 Οι λύσεις στην σελ 166



Δεδομένων όλων των παραπάνω , μπορείτε να λύσετε το πρόβλημα κάτω από τις ίδιες συνθήκες που το έλυσε και ο Τοτός; (χωρίς την χρήση αριθμομηχανής)

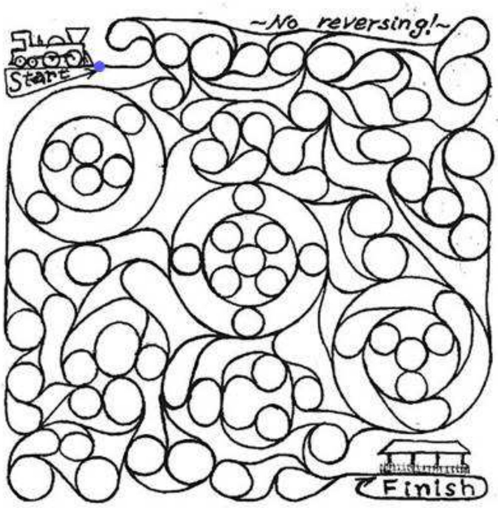
165.Ο Κώστας πάει σ' ένα επώνυμο πολυκατάστημα και ξοδεύει τα μισά χρήματα απ' όσα είχε στο πορτοφόλι του, για αγορά ρούχων. Τελικά διαπιστώνει ότι έχει πλέον τόσα λεπτά, όσα ευρώ είχε αρχικά. Επίσης τα ευρώ που έχει τώρα είναι τα μισά από τα λεπτά που είχε αρχικά (π.χ. είχε 12,10 και έχει 5,12). Πόσα χρήματα είχε αρχικά πριν πάει στο πολυκατάστημα;

(από το ιστολόγιο http://papaveri48.blogspot.gr/)

166. Ο Νίκος την συλλογή φωτογραφιών από τις διακοπές του, την έχει τοποθετήσει σε τρία φωτογραφικά άλμπουμ. Το πρώτο άλμπουμ περιέχει τα δυο δέκατα των φωτογραφιών , το δεύτερο περιέχει κάποια έβδομα αυτών, ενώ στο τρίτο άλμπουμ υπάρχουν 303 φωτογραφίες. Πόσες φωτογραφίες έχει ο Νίκος στην συλλογή του;

(Stanford 1957)

167.Ξεκινήστε την διαδρομή με το τραίνο από την αφετηρία(Start) πάνω δεξιά με σκοπό να τερματίσετε στην κάτω δεξιά στο τέλος. Το τραίνο δεν έχει οπισθοπορεία (όπισθεν) ,η κίνηση γίνεται μόνο προς τα εμπρός ακολουθώντας τις φυσικές καμπύλες των σιδηροτροχιών και δεν κάνει απότομες στροφές, όπως ένα τραίνο οφείλει να κινείται! (R.Penrose)



168.Το ηλιακό σύστημα Κ-1973 αποτελείται από 1973 πλανήτες. Οι αποστάσεις μεταξύ των πλανητών ανά δυο είναι διαφορετικές. Σε κάθε πλανήτη υπάρχει ένα αστεροσκοπείο με πανίσχυρο τηλεσκόπιο που έχει ως αποστολή-και την υπηρετεί απαρέγκλιτα- να παρακολουθεί κάθε τετραγωνικό μέτρο του πλησιέστερου πλανήτη. Ο Τοτός-82 είναι φοροφυγάς και τον αναζητά η διαγαλαξιακή εφορία να πληρώσει τον ΕΝΦΙΑ. Ο λογιστής του για να τον γλυτώσει- οι λογιστές έχουν την ίδια νοοτροπία σε κάθε μήκος και πλάτος του σύμπαντος- του σφύριξε ότι υπάρχει ένας πλανήτης του Κ-1973 που δεν παρακολουθείται από κανένα τηλεσκόπιο.

Αληθεύει αυτό; Αιτιολογήστε.

169. Η Άλικη και ο Βρασίδας σε ένα παιχνίδι με διαδοχικούς γύρους επιλέγουν εναλλάξ ακεραίους αριθμούς από το 1 μέχρι το 9.Κάθε αριθμός μπορεί να επιλεγεί μια φορά .Ο πρώτος που οι αριθμοί του έχουν άθροισμα 15 κερδίζει. Υπάρχει στρατηγική νίκης για την Αλίκη;

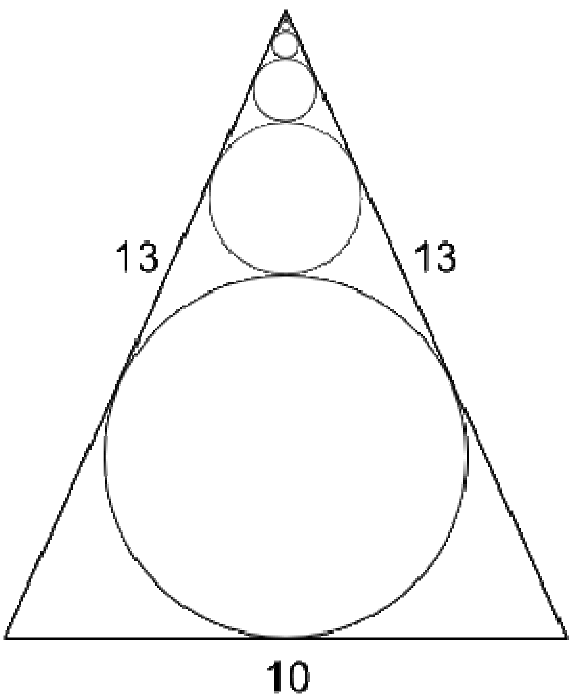
170. Στο δάσος της Λοξολάνδης υπάρχουν οχτώ τρύπες σε μια σειρά. Σε μια τρύπα από τις οχτώ έχει λουφάξει μια αλεπού. Κάθε νύχτα, η αλεπού μετακινείται και λουφάζει στην επομένη ή στην προηγούμενη τρύπα, κάθε πρωί ένας κυνηγός έχει την δυνατότητα να ελέγξει μόνο μια από τις οχτώ τρύπες για να βρει την αλεπού.Υπάρχει στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει για να βρει σίγουρα την αλεπού.

171. Ο Παπαδόπουλος έχει κατάστημα ποδηλάτων, τον μήνα Οκτώβριο πούλησε 100 ποδήλατα, ενώ τον μήνα Σεπτέμβριο πούλησε 168 ποδήλατα. Είναι γνωστό ότι το μήνα Νοέμβριο, ο αριθμός των ποδηλάτων που πούλησε αν προστεθεί στον αριθμό των πωλήσεων του Οκτώβριου προκύπτει τέλειο τετράγωνο, το ίδιο συμβαίνει αν προστεθεί στις πωλήσεις του Σεπτέμβριου. Πόσα ποδήλατα πούλησε τον Νοέμβριο.

172. Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε όλους τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 29 σε ένα κύκλο, ώστε το άθροισμα δυο διαδοχικών αριθμών να είναι πρώτος αριθμός;

173. Απείρου πλήθους κύκλοι βρίσκονται εγγεγραμμένοι σε ισοσκελές τρίγωνο με μήκη πλευρών 13,13 και 10.(βλέπε παρακάτω σχήμα)

Να βρεθεί το άθροισμα των μηκών όλων των κύκλων.



174. Να συμπληρώσετε τον επόμενο όρο στην παρακάτω ακολουθία:

ΕΕΕ,ΚΚΕ,ΕΕΕ,….

175.Γρίφος για πολυάσχολους μαθητές.

• Λέει ο Γιαννάκης στον πατέρα του:

-«Αν το καλοσκεφτείς ,δεν έχω χρόνο να πάω σχολείο.Πρέπει να κοιμάμαι 8 ώρες κάθε μέρα, υποθέτοντας ότι κάθε μέρα έχει 24 ώρες,συνολικά μας κάνουν 122 μέρες το χρόνο.Δεν πηγαίνω σχολείο το Σάββατο ή την Κυριακή,οπότε όλα τα σαββατοκύριακα της χρονιάς είναι 104 μέρες το χρόνο. Το καλοκαίρι έχω δυο μήνες περίπου 60 μέρες διακοπές.Χρειάζομαι τρεις ώρες την ημέρα για να τρώω και να πηγαίνω στα Αγγλικά περίπου 45 ήμερες στο χρόνο. Χρειάζομαι τουλάχιστον 2 ώρες κάθε μέρα για να ξεκουράζομαι, περίπου 30 μέρες το χρόνο.»

Αυτά τα είπε ο Γιαννάκης και έβγαλε ένα χαρτί από την τσέπη του που τα είχε σημειώσει αναλυτικά:

Υπνος(8 ώρες την ημέρα)	122
Σάββατα και Κυριακές	104
Καλοκαιρινές διακοπές	60
Γεύματα-Αγγλικά (3 ώρες την ημέρα)	45
Ξεκούραση (2 ώρες την ημέρα)	30
Σύνολο	361 μέρες

«Δηλαδή, μου μένουν μόνο 4 ημέρες και δεν έλαβα υπόψη ούτε τις επίσημες αργίες ούτε ότι μπορεί κατά την διάρκεια της χρονιάς να συναχωθώ. Όπως βλέπεις, δεν έχω χρόνο να πηγαίνω σχολείο!!»

Ο πατέρας του Γιαννάκη τον κοίταξε. Κάτι δεν του πήγαινε καλά. Μπορείτε να βρείτε το λάθος στους συλλογισμούς του Γιαννάκη.

.

Οι λύσεις στην σελ 166

176.Σοκολατομοιρασιές!!

Ο Παπαδόπουλος όταν γύρισε σπίτι και έμαθε ότι ο γιος του ο Γιαννάκης είχε αριστεύσει σε ένα διαγωνισμό μαθηματικών, θέλοντας να τον ανταμείψει, του αγόρασε ένα τεράστιο τετραγωνικό κομμάτι σοκολάτα ,και του ζήτησε να το μοιραστεί με τους φίλους του, την επόμενη μέρα στο σχολείο.

Την άλλη μέρα ,όταν ρώτησε το Γιαννάκη αν μοιράστηκε την σοκολάτα με τους φίλους του, ο Γιαννάκης του είπε ότι έκοψε την σοκολάτα σε ίσα τετραγωνικά πλακίδια και οι φίλοι του πήραν ο καθένας από τρία κομμάτια ενώ για τον Γιαννάκη περίσσεψαν δυο κομμάτια.

Ο Παπαδόπουλος δεν ήξερε πόσοι ήταν οι φίλοι του Γιαννάκη, όμως κατάλαβε ότι η μοιρασιά δεν έγινε όπως την περιέγραψε ο Γιαννάκης.

Πως το κατάλαβε;

176. Εφόσον η σοκολάτα έχει σχήμα τετραγώνου, ο Γιαννάκης και η φίλοι του την έκοψαν σε X^2 τετραγωνικά κομμάτια (Χ θετικός ακέραιος), σύμφωνα με τα λεγόμενα του Γιαννάκη αν έχει κ φίλους τότε θα ισχύει:

$$X^2 = 3κ+2 \quad (1)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το Χ σε σχέση με το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το 3.

•Αν $X=3λ$, τότε η (1) παίρνει την μορφή: $9λ^2 = 3κ+2$ ή $9λ^2 - 3κ = 2$ ή $3(3λ^2 - κ) = 2$, άτοπο, το 2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

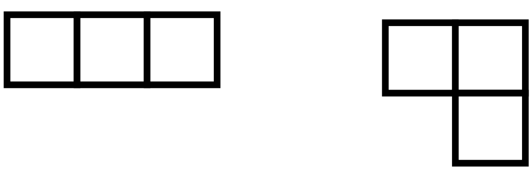
•Αν $X=3λ+1$, τότε η (1) παίρνει την μορφή: $9λ^2+6λ+1 = 3κ+2$ ή $9λ^2 + 6λ - 3κ = 1$ ή $3(3λ^2 + 2λ - κ) = 1$, άτοπο, το 1 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

•Αν $X=3λ+2$, τότε η (1) παίρνει την μορφή: $9λ^2+12λ+4 = 3κ+2$ ή $9λ^2+12λ-3κ = -2$ ή $3(3λ^2 + 4λ - κ) = -2$, άτοπο, το -2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

Σε κάθε περίπτωση η μοιρασιά δεν έγινε όπως ισχυρίζεται ο Γιαννάκης. Όταν επέμεινε ο Παπαδόπουλος, ο Γιαννάκης ομολόγησε ότι δωροδόκησε με την σοκολάτα την δασκάλα των αρχαίων για να του βάλει καλό βαθμό!!

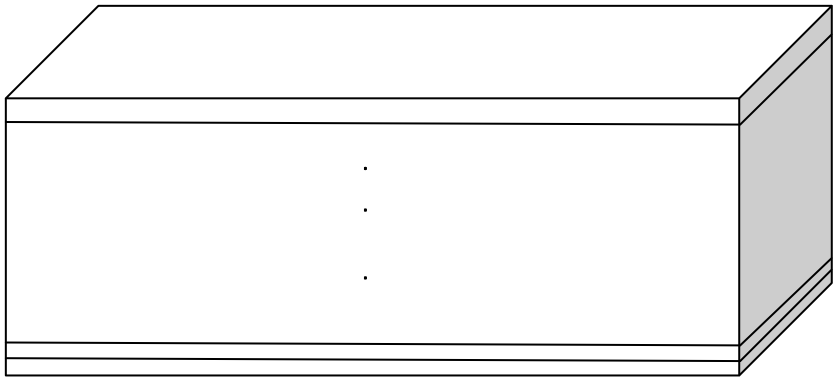
Η αρχική διατύπωση του προβλήματος-υπάρχει σε κάθε βιβλίο που αφορά την συνδυαστική γεωμετρία- είναι η εξής :

Αν δοθεί μια τετραγωνική σκακιέρα νxν. Είναι δυνατόν να καλυφτεί από τετραγωνικά τριόμινα(σχήμα) για κάποια τιμή του ν; Η κάλυψη πρέπει να γίνει χωρίς κάποιο μέρος των τριομίνων που θα χρησιμοποιηθούν να «εξέχει» της σκακιέρας.



Αν υιοθετήσουμε μια οπτική *εκτός κουτιού* και ένα νυστέρι, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι θα μπορούσε η σοκολάτα να κοπεί στον αριθμό κομματιών που ζητά η εκφώνηση «εγκάρσια».

 Οι λύσεις στην σελ 166



177.Προβληματάκι πιθανοτήτων με χρωματιστά ζάρια

Ο Αντώνης και ο Βασίλης παίζουν ένα παιχνίδι με δυο εξαεδρικά ζάρια λίγο διαφορετικά από αυτά που γνωρίζουμε, κάθε έδρα τους δεν έχει νούμερο αλλά είναι χρωματισμένη είτε μπλε είτε κόκκινη.

Παίζουν σε διαδοχικούς γύρους με τους εξής κανόνες :Ο Αντώνης κερδίζει αν το αποτέλεσμα της ρίψης των δυο ζαριών είναι το ίδιο χρώμα στις πάνω έδρες ενώ αντίθετα ο Βασίλης κερδίζει αν το αποτέλεσμα της ρίψης στα δυο ζάρια είναι διαφορετικά χρώματα στις πάνω έδρες.

Είναι γνωστό ότι σε κάθε ρίψη είναι ισοπίθανο να κερδίσει ο καθένας από τους δυο παίκτες.

Το πρώτο ζάρι έχει 5 κόκκινες έδρες και 1 μπλε έδρα .

Ποια είναι τα χρώματα των εδρών στο δεύτερο ζάρι;

178.Μεταγρίφος.Το ναυάγιο του Τοτού!!

▪ Ο Τοτός ήταν επιβάτης στο υπερωκεάνιο *Σκυλοπνίχτης* με κατεύθυνση τα νησιά του Πάσχα. Ο καπετάνιος του *Σκυλοπνίχτη* τα κατάφερε και ναυάγησε ανοικτά του νησιού του Μπουλ. Ο Τοτός –άριστος κολυμβητής- κατόρθωσε να φτάσει στην ακτή του νησιού του Μπουλ. Στο νησί αυτό οι κάτοικοι μιλούσαν ελληνικά αλλά όπως συνηθίζεται σε γρίφους λογικής κάθε κάτοικος έλεγε μόνο αλήθεια ή μόνο ψέματα. Ο Τοτός το γνώριζε αυτό και άρχισε να κινείται στο εσωτερικό του νησιού όπου και συνάντησε μια παρέα από 5 ιθαγενείς και τους ρώτησε αν ο έλληνας πρόξενος βρίσκεται στο νησί, όλοι οι κάτοικοι του νησιού γνωρίζουν αν βρίσκεται ο Έλληνας πρόξενος στο νησί.Οι απαντήσεις που έλαβε ήταν :

Α:*Ο έλληνας πρόξενος είναι σήμερα στο νησί.*

Β: *Ο έλληνας πρόξενος δεν είναι στο νησί .*

Γ: *Ο έλληνας πρόξενος ήταν στο νησί χθες.*

Δ: *Ο έλληνας πρόξενος δεν είναι στο νησί σήμερα αλλά ούτε και χθες ήταν .*

Ε: *Ο Δ λέει ψέματα ή ο Γ λέει αλήθεια.*

Ο Τοτός -απόλυτα λογικό ον ικανό να εξάγει λογικούς συλλογισμούς χωρίς να κάνει ποτέ λάθος -δεν μπόρεσε να βγάλει συμπέρασμα. Γυρίζει στην παρέα των πέντε ιθαγενών και ρωτάει: *Θα κάνει κάποιος από εσάς κάποια άλλη δήλωση.*

Ο Α τότε λέει: *Ο Ε λέει ψέματα ή ο Γ λέει την αλήθεια.*

Τελικά, ο Έλληνας πρόξενος βρίσκεται σήμερα στο νησί;

▪ Όταν ο Τοτός τελικά συνάντησε τον Έλληνα πρόξενο αυτός του είπε ότι θα τον φιλοξενούσε στο νησί για δέκα μέρες περίπου μέχρι να περάσει πλοίο που θα τον μετέφερε στην Ελλάδα. Ο Τοτός κάθε μέρα για να σκοτώσει τον χρόνο του,έκανε μεγάλους περιπάτους στο νησί. Κάθε πρωί ξεκινούσε από το σπίτι του πρόξενου περπατούσε επί πέντε ώρες (αυτός και αν είναι περίπατος!!) ως εξής :αρχικά σε οριζόντιο δρόμο, μετά σε μια πλαγιά και έπειτα επέστρεφε μέσω του ίδιου δρόμου στο σημείο από όπου ξεκίνησε . Αν στο ίσιωμα διανύει 4 χιλιόμετρα την ώρα , στην ανηφόρα 3 χιλιόμετρα την ώρα και στην κατηφόρα 6.Μπορειτε να βρείτε την απόσταση που διανύει καθημερινά;

179. Το 2014,η εταιρεία *Ο Μπάρμπα Μήτσος* έκανε δωρεά μια μεγάλη ποσότητα ποδηλάτων-μιλάμε για πενταψήφιο νούμερο- στα 41 σχολεία ενός νομού της χώρας έτσι ώστε να πάρει το κάθε σχολείο τον ίδιο αριθμό ποδηλάτων.Το 2015, η εταιρεία διαθέτει πάλι πενταψήφιο αριθμό ποδηλάτων, για την ακρίβεια, ο αριθμός προκύπτει αν στον αριθμό των ποδηλάτων του 2014 το πρώτο ψηφίο μεταφερθεί στο τέλος.

Μπορούν να μοιραστούν τα ποδήλατα πάλι, εξίσου στα 41 σχολεία;

180.Μαθηματικός γρίφος έξω από το κουτί ,της παλιάς ρώσικης σχολής!

Ο πρόγονος του Τοτού ,Δον Τοτός ,Ντε Μπίρλας Ντε Κόρκος υπήρξε εξέχουσα φυσιογνωμία ,πολιτικός και χριστιανικός ηγέτης ,πολεμιστής, διπλωμάτης που έζησε στο παρελθόν. Όταν ρώτησαν τον Τοτό πότε γεννήθηκε ο πρόγονος του, αυτός (βαθιά λογικό και μαθηματικό ον) απάντησε με ένα γρίφο:

Γεννήθηκε το έτος ΚΛΠΡ τον αιώνα ΛΡ!!

Ποτέ γεννήθηκε ο πρόγονος του Τοτού;

Να σημειώσουμε ότι διαφορετικά γράμματα παριστάνουν διαφορετικά ψηφία, και ίδια γράμματα παριστάνουν ίδια ψηφία

181.Είστε ένα ον απόλυτα λογικό που μπορεί κάθε στιγμή να κάνει λογικούς συλλογισμούς χωρίς λάθος και βρίσκεστε σε ένα σταυροδρόμι που έχει δυο πιθανές κατευθύνσεις,θέλετε να μάθετε ποιος από τους δυο δρόμους οδηγεί το χωριό Άνω Ραχούλα.Στο σταυροδρόμι βρίσκονται τρεις άγνωστοι άνθρωποι.Είναι γνωστό ότι ο ένας τους λέει πάντα την αλήθεια, ο άλλος λέει πάντα ψέματα και ο τρίτος άπαντάει στην τύχη πότε ψέματα ,πότε αλήθεια αλλά δεν γνωρίζουμε με ποια σειρά και ποια συχνότητα.Εσείς δεν γνωρίζετε την συμπεριφορά κανενός (ψέμα-αλήθεια). Μπορείτε με δυο ερωτήσεις που θα έχουν απάντηση ναι ή όχι με σιγουριά να καταλάβετε ποιος είναι ο δρόμος που οδηγεί την Άνω Ραχούλα;

182. Οι τρεις από τους αδελφούς Ντάλτον, ο Τζο, ο Τζακ και ο Ουίλιαμ αναγκάστηκαν λόγω της οικονομικής κρίσης στην Άγρια Δύση να ακολουθήσουν σόλο καριέρα. Ένας από αυτούς έκλεψε ένα άλογο, ένας άλλος έκλεψε ένα γαϊδούρι και ο τελευταίος μια χήνα. Ο Σερίφης τους συνέλαβε και τους τρεις όμως δεν γνώριζε ποιος έκλεψε τι. Έγινε δίκη, και οι τρεις κατηγορούμενοι δήλωσαν:

Τζο: *Ο Τζακ έκλεψε το άλογο.*

Ουίλιαμ:*Όχι ,ο Τζακ έκλεψε το γαϊδούρι.*

Τζακ:*Ψεύδονται και οι δυο. Δεν έκλεψα ούτε το άλογο ούτε το γαϊδούρι.*

Ο δικαστής διαπίστωσε ότι αυτός που έκλεψε την χήνα είπε ψέματα και αυτός που έκλεψε το άλογο είπε την αλήθεια. Ποιος αδελφός Ντάλτον έκλεψε το άλογο, ποιος έκλεψε το γαϊδούρι και ποιος την χήνα;

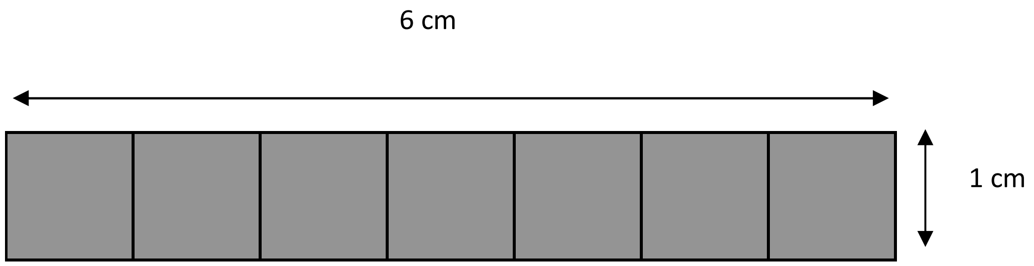
• Όταν οι τρεις αδελφοί φυλακίστηκαν από τον δικαστή για τις κλοπές που έκαναν, βρήκαν στο κελί που τους έκλεισαν χαραγμένο στον τοίχο ένα κανονικό εξάγωνο χωρισμένο σε οχτώ όμοια τετράπλευρα. Μπορείτε εσείς να χωρίστε ένα κανονικό εξάγωνο σε οχτώ όμοια τετράπλευρα;

183.Η φάρμα εκτροφής αγελάδων *Μπάρμπα Μήτσος* αποτελείται από 15 χωράφια σχήματος ορθογωνίου και ένα επίσης ορθογώνιο οικόπεδο στο οποίο έχει χτιστεί το υποστατικό της φάρμας.Είναι γνωστό το εμβαδό των επτά χωραφιών από τα δεκαπέντε.Στο σχήμα βλέπετε την διάταξη των δεκαπέντε χωραφιών καθώς και το εμβαδό επτά χωραφιών.Είναι δυνατό να υπολογίσουμε το εμβαδό του οικόπεδου που βρίσκεται το υποστατικό;

	20	14	
12			
8		15	
	25		21

• Στην φάρμα μια φορά το χρόνο διοργανώνονται αγώνες δρόμου «Τα καρδάρεια» με συμβολικό έπαθλο μια καρδάρα γάλα.Στα Καρδάρεια λαμβάνουν μέρος όλοι οι δρομείς των γύρω χωριών.Στο αγώνα που έγινε την προηγούμενη Κυριακή, ο Παπαδόπουλος τερμάτισε στην μεσαία θέση της κατάταξης,ο Γεωργίου κατετάγει στην δέκατη θέση και είναι γνωστό ότι ο Παπαδόπουλος τον ξεπέρασε ενώ ο Προκοπίου τερμάτισε δέκατος έκτος.Πόσοι δρομείς έλαβαν μέρος;

•Το συμβολικό δώρο για τον καθένα από τους μετέχοντες στον αγώνα ήταν ένα μπρελόκ για κλειδιά .Το καθένα από αυτά τα μπρελόκ τοποθετήθηκε σε ένα χάρτινο κυβικό κουτί με ακμή ένα εκατοστό. Το περίεργο ήταν ότι κάθε κουτί δημιουργήθηκε από μια λωρίδα χαρτιού σαν την λωρίδα του σχήματος μόνο με δίπλωμα χωρίς κόψιμο ή σκίσιμο του χαρτιού. Πως είναι δυνατόν να διπλωθεί το παρακάτω χαρτί ώστε να σχηματιστεί κύβος ακμής ενός εκατοστού;



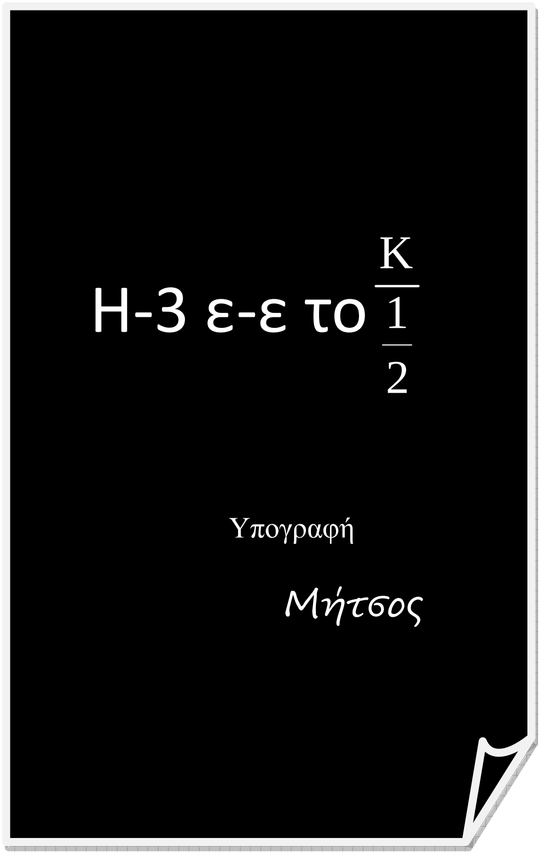
184. Τα γυμνάσια του Αι Βασίλη,η εκδίκηση του Μήτσου και λοιπές Αγιοβασιλιάτικες αριθμητικές ιστορίες!!!

Ο Αϊ Βασίλης,εν όψει της μεγάλης νύχτας της πρωτοχρονιάς αποφάσισε να γυμνάσει λίγο τα ξωτικά και τους τάρανδους του.Τους συγκέντρωσε όλους ,και τους συνέταξε κατά δυάδες , η μια πίσω από την άλλη. Σε κάθε φάλαγγα τοποθέτησε εξίσου ξωτικά και τάρανδους, ενώ φρόντισε ο αριθμός των δυάδων που απαρτίζονται από ένα τάρανδο και ένα ξωτικό είναι ίσος με τον αριθμό των υπολοίπων δυάδων. Αφού τους έβαλε να περπατήσουν περίπου μισή ώρα αποφάσισε να αλλάξει την σύνταξη τους. Μπορεί να τους συντάξει ανά οκτάδες χωρίς να περισσέψει κανένας τάρανδος ή ξωτικό;

•Όταν τέλειωσε τα γυμνάσια ο Αη Βασίλης ζήτησε από ένα ξωτικό, το Μήτσο να του φέρει ένα έλκηθρο.«Ποιο από όλα;» τον ρώτησε ο Μήτσος. Ο Αη Βασίλης του ζήτησε να φέρει το έλκηθρο που ο αριθμός κυκλοφορίας του είναι ένας τετραψήφιος αριθμός με διαφορετικά ψηφία τέτοιος ώστε τα δυο πρώτα του ψηφία σχηματίζουν έναν διψήφιο αριθμό που ισούται με το γινόμενο των τεσσάρων ψηφίων του αρχικού αριθμού, και τα δυο τελευταία σχηματίζουν έναν διψήφιο αριθμό που ισούται με το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού.

Ο Μήτσος τον κοίταξε με απορία, μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει τον αριθμό κυκλοφορίας του ελκήθρου;

•Το επόμενο πρωί, ο Αι Βασίλης άνοιξε την ντουλάπα του για να πάρει την στολή του,όμως έλειπε το πουκάμισο. Στην κρεμάστρα, στην θέση που έπρεπε να βρίσκεται, το πουκάμισο βρήκε ένα σημείωμα που έγραφε:



Δεν κατάλαβε τι σήμαινε; Εσείς μπορείτε;

185.Που μένει ο Θωμάς;
-«Ο Γιάννης προσπαθεί να καταλάβει σε ποιο νούμερο της οδού Ξερολίδου μένει ο Θωμάς, το μονό που ξέρει είναι ότι ο δρόμος έχει συνεχόμενη αρίθμηση από το 8 μέχρι το 100.

-«Είναι ο αριθμός μεγαλύτερος από 50?» Ρωτάει ο Γιάννης .ο Θωμάς του απάντησε μα έλεγε ψέματα ,ο Γιάννης στην συνέχεια τον ρώτησε: « Είναι πολλαπλάσιο του 4;». Ξανά ο Θωμάς του απάντησε αλλά πάλι έλεγε ψέματα. Ο Γιάννης επέμεινε:

- «Είναι τέλειο τετράγωνο ο αριθμός του σπιτιού σου;»

Ο Θωμάς του απάντησε αλλά αυτή φορά ευτυχώς είπε την αλήθεια. Τελικά ο Γιάννης απηυδισμένος τον ξαναρωτά:

-«Είναι το πρώτο ψηφίο του αριθμού το 3;»Ο Θωμάς του απάντησε αλλά αυτή φορά δεν γνωρίζουμε αν είπε αλήθεια η ψέματα.

Ο Γιάννης τότε του λέει έναν αριθμό που νομίζει ότι είναι ο αριθμός του σπιτιού του .Αλλά έκανε λάθος !!!!Μπορείς να βρεις τον αριθμό που μένει ο Θωμάς

186.Τριάντα υπουργοί είναι διατεταγμένοι σε πέντε γραμμές και έξι στήλες στο προαύλιο του πρωθυπουργικού μεγάρου για να ορκιστούν στην νέα κυβέρνηση. Η ορκωμοσία μεταδίδεται από την τηλεόραση και ο δημοσιογράφος που κάνει την μετάδοση για το κανάλι PARAPLHROFORHSH-TV,Τίτος Τσιτσιφρίγκος παρατηρεί :

-«Από το ψηλότερο άτομο κάθε στήλης ο πιο κοντός είναι ο υπουργός Γεωργίας» και συνεχίζοντας την σοβαρή δημοσιογραφία λέει :«από το πιο κοντό άτομο κάθε γραμμής ο πιο ψηλός είναι ο υπουργός οικονομικών» .

Γνωρίζουμε ότι τα ύψη των τριάντα υπουργών είναι διαφορετικοί αριθμοί ανά δυο . Ποιος είναι πιο ψηλός ο υπουργός γεωργίας ή ο υπουργός οικονομικών;

187.Στο παρακάτω κρυπτόγραμμα διαφορετικά γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά αριθμητικά ψηφία και το αντίστροφο. Μπορείτε να τα βρείτε;

ΠΟΤΟ

ΠΟΤΟ

ΠΟΤΟ

ΠΟΤΟ

ΠΟΤΟ

ΠΟΤΟ

ΠΟΤΟ

ΠΟΤΟ

ΠΟΤΟ

ΠΟΤΟ

ΠΟΤΟ

ΠΟΤΟ

ΠΟΤΟ

ΠΟΤΟ

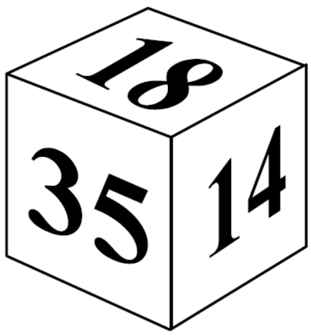
\+ ΠΟΤΟ

ΒΥΤΙΟ

188.Σε ένα τραπέζι είναι τοποθετημένα δυο κλειστά κουτιά και γνωρίζουμε ότι σε κάθε κουτί υπάρχει είτε ένα κόκκινο ή ένα μαύρο χαρτί της τράπουλας και επιπλέον το ένα από τα δυο κουτιά περιέχει και ένα ζάρι.Ο σκοπός είναι να προσδιοριστεί το κουτί που έχει το ζάρι.Λοιπόν,στο καπάκι κάθε κουτιού έχει γραφεί μια πρόταση.Αν το τραπουλόχαρτο που βρίσκεται στο κουτί είναι κόκκινο, τότε η πρόταση είναι αληθής,αλλά αν είναι μαύρο τότε η πρόταση είναι ψευδής.Δεν γνωρίζουμε πόσα τραπουλόχαρτα είναι κόκκινα.

Ποιο κουτί περιέχει το ζάρι;

• Όταν τελικά ανοίχτηκε το κουτί με το ζάρι διαπιστώθηκε ότι δεν πρόκειται για συνηθισμένο ζάρι.Στο σχήμα βλέπουμε μια πρόσοψη του ζαριού με αθέατες τρεις έδρες.



Είναι γνωστό ότι το άθροισμα των αριθμών στις απέναντι έδρες είναι το ίδιο. Καθώς επίσης ότι οι αριθμοί στις έδρες που δεν φαίνονται στο σχήμα είναι πρώτοι αριθμοί.Μπορείτε να βρείτε τον αριθμό της έδρας απέναντι από την έδρα που έχει το 14;

189.Στο παρακάτω σχήμα στην πίσω όψη καθεμιάς από τις κάρτες είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Ο κάθε αριθμός στην πρόσοψη κάθε κάρτας ισούται με το γινόμενο των αριθμών που βρίσκεται στις πίσω όψεις των άλλων τριών καρτών.
Το ερώτημα είναι:
Ποιο είναι το γινόμενο των αριθμών στις πίσω όψεις των τεσσάρων καρτών;

190.Να λύσετε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων για φυσικούς αριθμούς Δ,Υ,Ο

$$Δ-Υ-Ο=Δ/Υ/Ο=2$$

191.Ένα πρόβλημα για πολλή μελέτη!!!

•Ο Κώστας , η Ντόρα, ο Αλέξης και ο Αντώνης είναι τέσσερεις μαθητές που μελετούν για τις εξετάσεις από τα σχολικά τους εγχειρίδια .Τα αντικείμενα που μελετούν είναι Άλγεβρα, Φυσική , Χημεία και Οικονομικά .Ο καθένας τους μελετά αντικείμενο στο οποίο έχει κλίση και ονειρεύεται να το υπηρετήσει επαγγελματικά .Τα εξώφυλλα των βιβλίων έχουν όλα διαφορετικά χρώματα. Τα χρώματα είναι πράσινο, άσπρο, κίτρινο και μπλε. Είναι γνωστό ότι:

Α) Το βιβλίο της Ντόρας είναι πράσινο.

Β)Ο Κώστας ονειρεύεται να γίνει ένας διάσημος οικονομολόγος.

Γ) Το εξώφυλλο του βιβλίου της φυσικής δεν είναι άσπρο.

Δ) Ο Αλέξης και ο Αντώνης θέλουν να γίνουν μηχανικοί.

Ε) Ο Αντώνης έχει τελειώσει την μελέτη του στην φυσική και τρώει ένα σάντουιτς..

Ζ) Κανένας μελλοντικός μηχανικός δεν μελετά από βιβλίο με εξώφυλλο χρώματος μπλε.

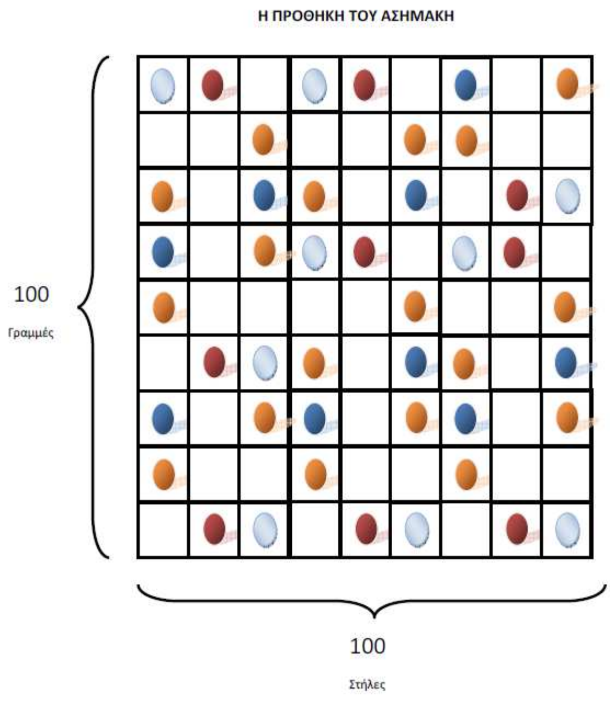
Μπορείτε να προσδιορίσετε ποιος μαθητής μελετά ποιο αντικείμενο και ποιο χρώμα έχει το εξώφυλλο κάθε βιβλίου.

•Μετά το πέρας των εξετάσεων οι βαθμοί που πήραν οι τρεις μαθητές (Κώστας ,Αλέξης , Αντώνης κατά φθίνουσα διάταξη) ήταν τρεις διαδοχικοί πρώτοι αριθμοί που το άθροισμα τους υπολείπεται κατά μια μονάδα από ένα πρώτο αριθμό.

Ποιες είναι οι βαθμολογίες των τριών μαθητών;

192.Μια ομάδα από παιδιά είναι συγκεντρωμένα έξω μια σχολική τάξη.Το κάθε παιδί φορά καπέλο είτε κόκκινο είτε μπλε αλλά δεν γνωρίζει το χρώμα.Τα παιδιά δεν επιτρέπεται να επικοινωνήσουν μεταξύ τους με κανένα τρόπο και το καθένα τους μπορεί να δει τα καπέλα όλων των άλλων.Ένα-ένα μπαίνει στην τάξη και όταν θα έχουν μπει όλα θα πρέπει να έχουν τοποθετηθεί σε μια γραμμή χωρισμένα ανά χρώμα καπέλου-στην γραμμή αυτή μόνο ένα το πολύ ζεύγος διαδοχικών παιδιών θα έχουν διαφορετικό χρώμα καπέλου- δηλαδή στο ένα μέρος της γραμμής θα βρίσκονται συγκεντρωμένα τα παιδιά με τα κόκκινα καπέλα και στο άλλο τα παιδιά με τα μπλε. Είστε δάσκαλος τους,αλλά,απών την συγκεκριμένη μέρα.Τι οδηγίες θα τους δίνατε την προηγουμένη μέρα για να κατορθώσουν να μπουν στην σειρά ακολουθώντας τους παραπάνω κανόνες;

193. Ο Ασημάκης είναι ζαχαροπλάστης.Η ειδικότητα του,είναι τα σοκολατένια πασχαλινά αυγά μινιατούρες.Εν όψει του Πάσχα,για να προβάλει την δουλειά του,τοποθέτησε στην βιτρίνα του ζαχαροπλαστείου μια τεράστια γυάλινη προθήκη τετραγωνικού σχήματος που αποτελούνταν από 10000 κελιά.Σε κάθε κελί τοποθέτησε ένα αυγό.Σημειώνουμε ότι σε κάθε κελί χωρά μόνο ένα αυγό.Ο Ασημάκης,τελειομανής καθώς ήταν,μόλις είδε την γυάλινη προθήκη,σε κάθε κελί ένα αυγό, αποφάσισε να κάνει κάποιες αλλαγές.Στις αλλαγές που έκανε ακολούθησε απαρέγκλιτα τους εξής κανόνες:Επέλεγε μια γραμμή όποια ήθελε και από το πρώτο κελί μέχρι το τελευταίο της γραμμής έκανε το εξής:αν έβρισκε αυγό το αφαιρούσε,αν ήταν άδειο έβαζε ένα αυγό. Ομοίως έπραττε αν επέλεγε μια στήλη.Μπορούσε να επαναλάβει την παραπάνω διαδικασία όσες φορές ήθελε.Κάθε φορά όμως σε νέα γραμμή ή στήλη,δηλαδή ποτέ δεν επενέβαινε δυο φορές ή περισσότερες στην ίδια γραμμή ή στην ίδια στήλη.Όταν τέλειωσε μετά από αρκετή ώρα παρατήρησε το αποτέλεσμα και έμεινε ικανοποιημένος.
Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε ακολουθία κινήσεων και αν ακολούθησε ο Ασημάκης σύμφωνα με τους παραπάνω κανόνες η προθήκη δεν θα είχε ποτέ 2014 άδεια κελιά.



194. (Χακί προβλήματα)

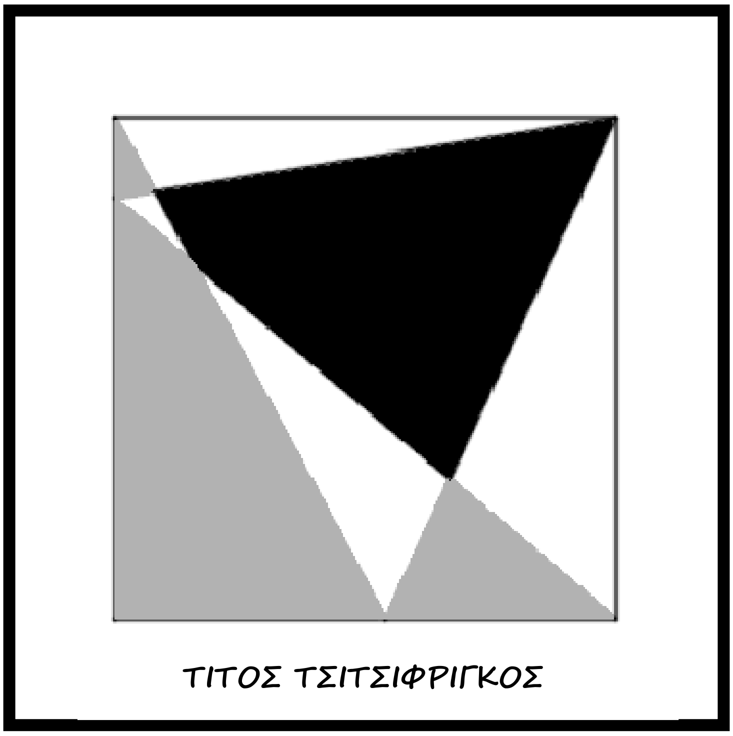
•Μια ομάδα από νεοσύλλεκτους είναι παραταγμένοι σε μια γραμμή μπροστά στο λοχία τους. Δυστυχώς είναι εντελώς ανεκπαίδευτοι. Με την εντολή κλίνατε επ΄αριστερά (να στρίψουν αριστερά). Άλλοι στρίβουν αριστερά, άλλοι στρίβουν δεξιά και κάποιοι κάνουν μεταβολή στρέφοντας τα νώτα τους στο λοχία.Είναι δυνατό ο λοχίας να μπει σε κάποιο σημείο της γραμμής έτσι ώστε το πλήθος των νεοσύλλεκτων που τον κοιτούν και είναι δεξιά του να είναι το ίδιο με το πλήθος αυτών που τον κοιτούν και είναι αριστερά του;

•Στο φυλάκιο Κόκκινο ποτάμι,η σκοπιά στην πύλη υπάρχει η δυνατότητα να διαμορφωθεί ως εξής: <u>Είτε από τις 6 π.μ έως τις 6 μ.μ</u> είτε <u>από τις 6μ.μ μέχρι τις 6 π.μ</u> είτε <u>από τις 6 π.μ μέχρι τις 6 π.μ την άλλη μέρα</u>. Στην πρώτη περίπτωση,το διάστημα ανάπαυλας μέχρι την επόμενη σκοπιά πρέπει να είναι τουλάχιστον 24 ώρες, στην δεύτερη περίπτωση τουλάχιστον 36 ώρες και στην τρίτη τουλάχιστον 60 ώρες. Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος στρατιωτών που χρειάζονται για να καλύπτεται η σκοπιά του φυλακίου επί εικοσιτετραώρου βάσεως;

•Ο διοικητής του στρατοπέδου Συνταγματάρχης Καραβανόγλου είναι αντιμέτωπος με ένα μεγάλο μυστήριο. Το ρολόι τοίχου (κλασικό ρολόι με λεπτοδείκτες)στο γραφείο του παρουσιάζει μια παράδοξη ανωμαλία. Στην διάρκεια του πρώτου ημιώρου οποιασδήποτε ώρας πηγαίνει δυο λεπτά μπροστά, και στην διάρκεια του δευτέρου ημιώρου πηγαίνει δυο λεπτά πίσω. Πως είναι δυνατόν να συμβαίνει αυτό;

•Στο γραφείο του Διοικητή Καραβανόγλου δεσπόζει ο μεταμοντέρνος πίνακας του ζωγράφου Τίτου Τσιτσιφρίγκου «Γκριιιιι». Ο Καραβανόγλου είναι πολύ περήφανος για τον πίνακα του. Τα μελαγχολικά απογεύματα που έχει υπηρεσία όταν δεν προβληματίζεται για το τι είναι ο άνθρωπος κοιτά τον πίνακα και αναρωτιέται:

Ποιο τμήμα του τετραγώνου έχει μεγαλύτερο εμβαδό το μαύρο ή το γκρι;



 Οι λύσεις στην σελ 166

195. Ένα αστρονομικό πρόβλημα αριθμών

Αστρονόμος Α:*Ανακαλυψα ένα νέο πλανητικό σύστημα που το ονόμασα Σείριο 1974.*

Αστρονόμος Β : *Τι μεγέθους;Από πόσους πλανήτες αποτελείται;*

Αστρονόμος Α: *Το πλήθος των πλανητών του είναι τέλειο τετράγωνο και μάλιστα αν διαγράψουμε τα δυο τελευταία ψηφία του, ο αριθμός που προκύπτει επίσης είναι τέλειο τετράγωνο.*

Αστρονόμος Β: *Αυτό δεν μου λέει τίποτε.Υπάρχουν πολλοί τέτοιοι αριθμοί.*

Αστρονόμος Α: *Ναι ,αλλά ο αριθμός στον οποίο αναφέρομαι,δεν είναι πολλαπλάσιο του 100 και είναι ο μεγαλύτερος αριθμός με όλες αυτές τις ιδιότητες.*

Αστρονόμος Β: *Τώρα,μπορώ να βρω τον αριθμό.* (Εσείς μπορείτε;)

Αστρονόμος Α: *Τα νέα δεν σταματούν εδώ. Ένας πλανήτης του Σείριος 1974 κατοικείται και μάλιστα έχει την μορφή κυρτού πολυέδρου ,κάθε έδρα του πλανήτη αποτελεί και μια διαφορετική χώρα του πλανήτη.*

Αστρονόμος Β: *Ενδιαφέρον, τότε είναι σίγουρο ότι σε αυτό στον πλανήτη, δυο τουλάχιστον χώρες συνορεύουν με τον ίδιο αριθμό χωρών.*

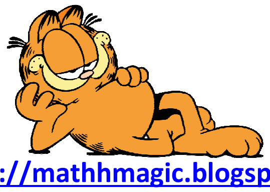
(Αιτιολογείστε γιατί το είπε αυτό, ο αστρονόμος Β;) (Thaddeus Gorian College)

Ένα αγόρι και ένα κορίτσι κάθονται μαζί στο προαύλιο του σχολείου.

-«Είμαι αγόρι». Λέει το παιδί με τα καστανά μαλλιά.

-«Είμαι κορίτσι». Λέει το παιδί με τα ξανθά μαλλιά.

Τουλάχιστον ένα από τα δυο παιδιά λέει ψέματα. Ποιο είναι το χρώμα των μαλλιών του κοριτσιού;



196.«*..στις ερήμους της Δύσης σώζονται ακόμα κουρελιασμένα υπολείμματα του χάρτη, που κατοικούνται από αγρίμια και νομάδες ,σε ολόκληρη την χώρα δεν υπάρχει άλλο κειμήλιο των Γεωγραφικών επιστημών.»*

Παγκόσμια ιστορία της Ατιμίας Χ.Λ.Μπορχες.

Ο Αργεντινός συγγραφέας Χ. Λ. Μπόρχες στην *Παγκόσμια ιστορία της ατιμίας* περιγράφει τον υπερβατικό χάρτη μιας αυτοκρατορίας με κλίμακα 1:1.Ενα χάρτη που οι διαστάσεις του συμπίπτουν με την έκταση την οποία καλύπτει. Ο χάρτης σύμφωνα με το αφήγημα του Μπόρχες είχε αρχικά τοποθετηθεί επί του εδάφους αλλά σύντομα καταστράφηκε από τον Ήλιο και τις θεομηνίες. Μια καλή ιστορία αφορμή για ένα ωραίο προβληματάκι ευκλείδειας γεωμετρίας για τους μικρούς φίλους του ιστολογίου.

• Φανταστείτε την Λοξολάνδη, μια μεγάλη χώρα με 200 εκατομμύρια κατοίκους ,οπότε είναι λογικό να υποθέσουμε ότι σ ένα χάρτη με κλίμακα 1: 50000 (1 εκατοστό προς 50 χιλιόμετρα) θα υπάρχει αρκετός χώρος για 1/50000 του συνολικού πληθυσμού δηλαδή για περισσοτέρους από 40 ανθρώπους. Όμως σε ένα τέτοιο χάρτη είναι αρκετά δύσκολο να χωρέσουν μόλις 5 άνθρωποι ακόμα και να αγκαλιαστούν . Γιατί συμβαίνει αυτό;

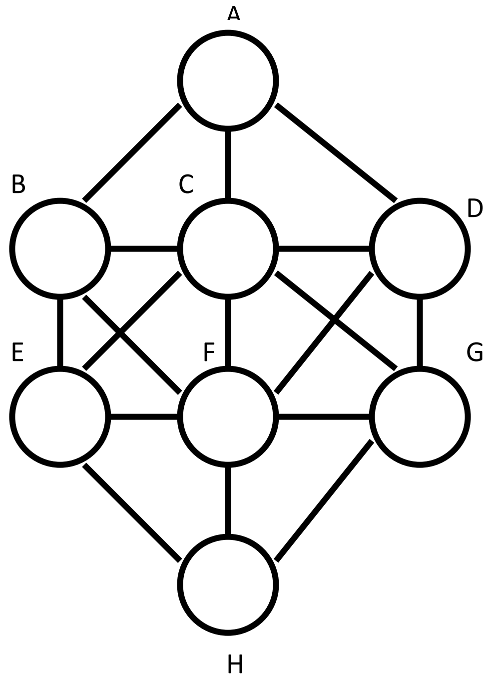
• Αν τωρα, εχουμε δυο αντίτυπα του παραπάνω χαρτη και τα τοποθετησουμε το ένα πάνω στο άλλο με το τρόπο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.Το ορατό τμήμα του κάτω αντιτύπου έχει μικρότερο ή μεγαλύτερο εμβαδό από το καλυμμενο;

•οι τρεις μεγαλύτερες πόλεις της Λοξολάνδης πάνω στον χάρτη σχηματίζουν ένα τρίγωνο με δυο ύψη μεγαλύτερα ή ίσα από τις πλευρές προς τις οποίες άγονται .Πόσες μοίρες είναι οι γωνίες του τριγώνου;

197. Ένα προβληματάκι με αριθμούς γείτονες ….

Παλιό προβληματάκι από το περιοδικό Mathematics Magazine που καταδεικνύει την χαώδη διαφορά της κομψής μαθηματικής προσέγγισης με την ωμή δύναμη της υπολογιστικής ισχύος.

Στους κύκλους του παρακάτω σχήματος πρέπει να τοποθετήσετε τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6,7,8 μια φορά τον καθένα κατά τέτοιο τρόπο ώστε για οποιοδήποτε ζεύγος κύκλων που συνδέονται με ένα ευθύγραμμο τμήμα οι αριθμοί που περιέχουν να μην διαφέρουν κατά μια μονάδα. Για παράδειγμα αν στον κύκλο Α τοποθετήσουμε το 3 δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε τους κύκλους B,C,D το 2 ή το 4.



198.Ποιος αντέγραψε στον Αμπραγιάζ Λογισμό;

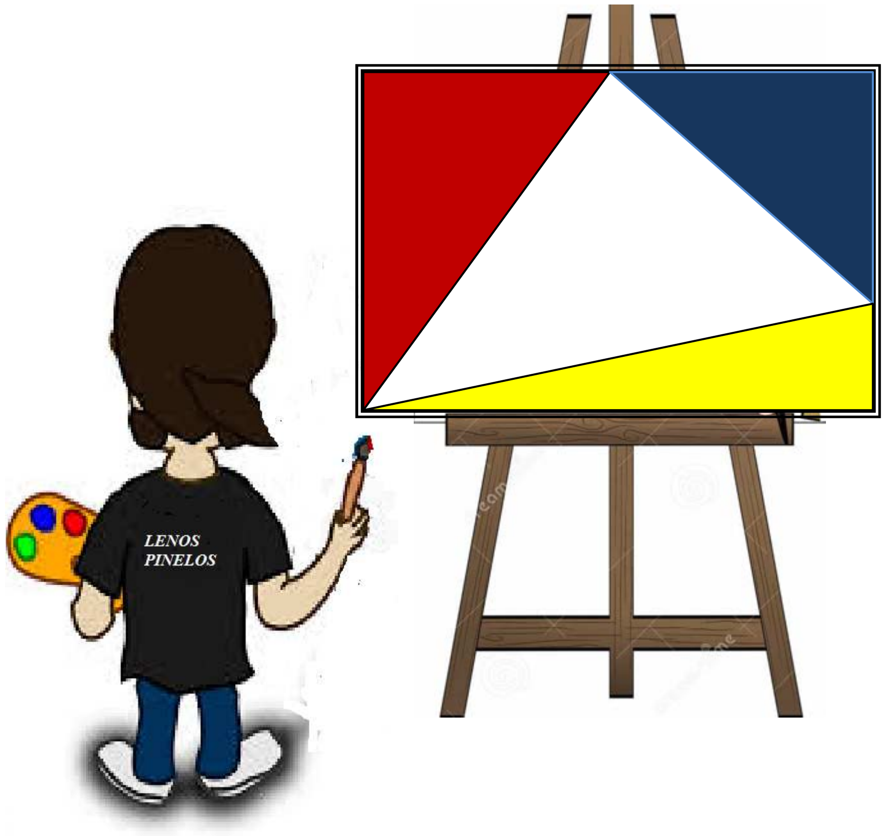
Από έξι φοιτητές του μαθηματικού τμήματος της Λοξολάνδης που εξεταστήκαν στον μάθημα του Αμπραγιάζ Λογισμού είναι γνωστό ότι δυο αντέγραψαν. Οι έξι φοιτητές γνωρίζουν τους ενόχους. Ανακρίθηκαν. Οι δηλώσεις των φοιτητών ήταν :

Χάρης : «Τάσος και Γιώργος »
Κώστας: «Νίκος και Θωμάς »
Νίκος: «Θωμάς και Τάσος »
Γιώργος : «Χάρης και Τάσος »
Τάσος : «Νίκος και Κώστας»
Ο Θωμάς δεν απάντησε.

Για τις παραπάνω δηλώσεις γνωρίζουμε ότι: Τέσσερεις από τους φοιτητές υπέδειξαν δυο φοιτητές ως ένοχους όμως διαπιστώθηκε ότι καθένας από αυτούς τους τέσσερεις φοιτητές ονόμασε έναν αθώο και έναν ένοχο ενώ ο πέμπτος φοιτητής ονόμασε δυο φοιτητές ως ενόχους αλλά είπε ψέματα και στα δυο ονόματα.

Ποιοι φοιτητές αντέγραψαν στις εξετάσεις;

199. Ο ιμπρεσιονιστικός πίνακας *Τρίγωνα* του διακεκριμένου ζωγράφου Λένου Πινέλου αποτελείται από τέσσερα τρίγωνα .Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του κόκκινου, μπλε και κίτρινου τριγώνου είναι 5,4 και 3 dm^2 αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του λευκού τριγώνου.



200. Στο τελευταίο επεισόδιο του 26^{ου} κύκλου της δημοφιλούς cartoon σειράς *The Simpsons* με τίτλο Mathlete's Feat παρουσιάζεται το εξής πρόβλημα.

Δίνεται το γράμμα Μ,να φέρετε 3 ευθείες γραμμές έτσι ώστε να σχηματιστούν 9 τρίγωνα ξένα μεταξύ τους. Δηλαδή, τα τρίγωνα δεν θα πρέπει να έχουν κοινά εσωτερικά σημεία.

200. Ένα πρόβλημα εκλογικών παροχών….

Παραλλαγμένο προβληματάκι για μικρές τάξεις από μαθήματα προετοιμασίας για μαθηματικούς διαγωνισμούς.

Σε ένα παράλληλο ιδεατό συμπάν γίνονται εκλογές. Οι πρόεδροι τριών μικρών κομμάτων ερίζουν για τις ψήφους των κατοίκων του χωριού *Κάτω μηλιά*. Είθισται, ο καθένας τους σε τέτοιες περιπτώσεις να διαθέτει ένα χρηματικό ποσό ως «παροχή» για να εξασφαλίσει τις ψήφους των κατοίκων. Ο Α διαθέτει 724 ευρώ (καταξοδεύτηκε), ο Β διαθέτει 857 ευρώ και ο Γ διαθέτει 1503 ευρώ. Συζητούν οι τρεις τους. Ο Α λέει: «*Αν μοιράσω εξίσου τα χρήματα στις οικογένειες του χωριού και η καθεμία λάβει ακέραιο αριθμό ευρώ τότε θα μου περισέψουν μερικά ευρώ.»* Ο Β ξέρει πόσες είναι οι οικογένειες κάνει τον υπολογισμό και του λέει *«…αν προσθέσω τα ευρώ που σου περισσεύουν στα δικά μου μπορώ να μοιράσω τα χρήματα εξίσου στις οικογένειες του χωριού και να μην περισσέψει κανένα ευρώ.* »

Ο Γ τότε λέει: *«….το ίδιο ακριβώς θα μπορούσε να γίνει και στην δική μου περίπτωση. »*

Πόσες οικογένειες ζουν στο χωριό Κάτω Μηλιά;

201. Ο Τοτος στο νησί του Μπουλ φτάνει σε ένα σταυροδρόμι με 6 πιθανές κατευθύνσεις. Μόνο ένας από τους 6 δρόμους οδηγεί στο ξενοδοχείο που πρόκειται να καταλύσει. Στην άκρη, στέκεται ένας κάτοικος του νησιού. Κάθε κάτοικος του νησιού λέει είτε πάντα αλήθεια είτε πάντα ψέματα. Ποια θα είναι η ερώτηση που πρέπει να θέσει ο Τοτος στον κάτοικο για να εξακριβώσει ποιος από τους έξι δρόμους οδηγεί στο ξενοδοχείο;

202. Διαθέτουμε 4 σωρούς από βόλους που αποτελούνται από 6,8,8 και 9 βόλους αντίστοιχα. Πέντε παίχτες που τους συμβολίζουμε 1,2,3,4,5 αντίστοιχα παίζουν σε διαδοχικούς γύρους με αυτήν την σειρά, σε κάθε γύρο διαλέγουν ένα σωρό από βόλους και τον χωρίζουν σε δυο μικρότερους. Χαμένος είναι ο παίκτης που δεν θα μπορεί να το κάνει αυτό. (Μίζερη εκδοχή

Ένα παράδοξο ακόμα

Ο φιλόσοφος Άρθουρ Νόρμαν Πράιορ (1914 – 1969) , καθηγητής στο πανεπιστήμιο της Οξφόρδης διασκεύασε ένα λογικό παράδοξο που έχει τις ρίζες του στους σχολαστικούς φιλοσόφους του Μεσαίωνα ως εξής :

Τέσσερεις άνθρωποι Α,Β,Γ,Δ ,σε μια συνάντηση που είχαν:

Ο Α δήλωσε: «2+2=4»

Ο Β δήλωσε : «3+3=6»

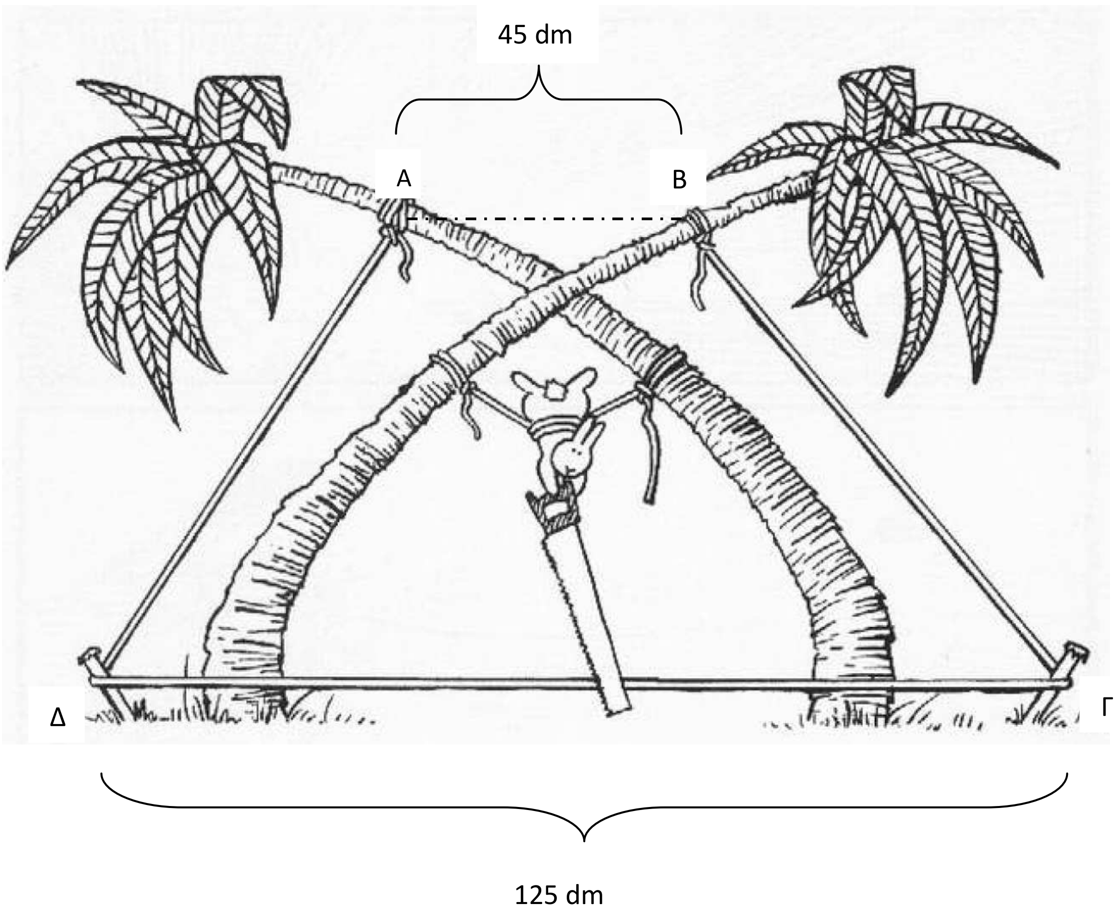
Ο Γ δήλωσε : «3+3=8»

Ο Δ δήλωσε: «Το πλήθος των αληθών δηλώσεων είναι το ίδιο με το πλήθος των ψευδών δηλώσεων » ;

Ο Πράιορ ισχυρίζεται ότι: αν ο Δ λέει αλήθεια τότε έχουμε 3 αληθείς δηλώσεις και 1 ψευδή δήλωση οπότε λέει ψέματα .Αντίθετα αν ο Δ λέει ψέματα τότε έχουμε δυο αλήθειες και δυο ψέματα που είναι αλήθεια.

 Οι λύσεις στην σελ 166

203.Μια γεωμετρική άσκηση αυτοχειρίας



Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ=45 dm και ΓΔ=125 dm .Να υπολογίσετε την ακτίνα του εγγεγραμμένου-στο τραπέζιο- κύκλου.

Ο γάιδαρος του Μπουριντάν

Ένας πεινασμένος γάιδαρος βρίσκεται στο μέσο μιας γέφυρας,στο κάθε άκρο της γέφυρας είναι στοιβαγμένο ένα δεμάτι σανό.Ο γάιδαρος κοιτά πότε το ένα δεμάτι ,πότε το άλλο αλλά δεν μπορεί να αποφασίσει προς τα που θα κινηθεί,έτσι συνεχίζει να κάθεται εκεί μέχρι που πεθαίνει από την πείνα...

Ζαν Μπουριντάν (Jean Buridan,1292 - 1363)

Ο γάιδαρος του Μπουριντάν ξεμπέρδεψε από το γνωστό πρόβλημα που τον ταλάνιζε . Έριξε ένα κέρμα και αποφάσισε.Όμως,βρέθηκε αντιμέτωπος με ένα άλλο πρόβλημα υλικής φύσεως.

Ο γάιδαρος βρίσκεται στην βάση μιας μεγάλης ανηφόρας.Δίπλα του υπάρχουν εκατό δεμάτια σανό,τα όποια πρέπει να μεταφερθούν στην κορυφή της ανηφόρας.Είναι γνωστό ότι ο γάιδαρος μπορεί να φορτώσει μόνο ένα δεμάτι σανό την φορά,από το οποίο και πρέπει να καταναλώνει για έχει δυνάμεις να κινηθεί στην ανηφόρα.Για να ανέβει την ανηφόρα χρειάζεται να καταναλώσει <u>ακριβώς ένα</u> πλήρες δεμάτι σανό.Ερωτηματικό.Πως είναι δυνατόν να μεταφερθεί κάποια ποσότητα σανού στην κορυφή της ανηφόρας.Πόση είναι θεωρητικά η μέγιστη ποσότητα σανού που μπορεί να μεταφερθεί επάνω.Υποθέτουμε ότι στην κατηφόρα ο γάιδαρος δεν καταναλώνει σανό.

Η βασική σκέψη πίσω από το πρόβλημα είναι ότι πρέπει να μεταφερθούν τα δεμάτια ένα-ένα μέχρι κάποια ή κάποιο ενδιάμεσο σημείο της ανηφόρας,να αναταχτούν πάλι ως πλήρη δεμάτια εκεί,και κατόπιν να συνεχίσει ο γάιδαρος με αυτά προς τα επάνω, ώστε να μην φτάσει στο τέρμα χωρίς καθόλου φορτίο (κάτι που θα συνέβαινε αν ο γάιδαρος ανέβαινε όλη την ανηφόρα με το ίδιο δεμάτι σανό).Μια λύση θα ήταν λοιπόν ο γάιδαρος να μετέφερε και τα 100 δεμάτια μέχρι την μέση και κατόπιν,φτιάχνοντας από τα 100 μισά δεμάτια 50 πλήρη δεμάτια να κάνουμε 50 διαδρομές,τερματίζοντας έτσι με 25 πλήρη δεμάτια. Υπάρχουν όμως καλύτερες λύσεις; Ουσιαστικά, πρόκειται για το ζητούμενο του δευτέρου ερωτήματος. Μια δεύτερη βασική σκέψη είναι ότι μας συμφέρει ο γάιδαρος να προχωρεί με όσο το δυνατόν περισσότερες ενδιάμεσες στάσεις συγκέντρωσης εναπομείναντος σανού.

Δηλαδή, πρέπει να κάνουμε συχνά στάσεις και να φτιάχνουμε σωρούς από πλήρη δεμάτια

▪ Κάνοντας δυο στάσεις τερματίζουμε με:

$$(100-100(1/2))-[100-100(1/2)](1/2)= (100-100(1/2))(1-(1/2))=$$

$$= (100-100(1/2)^2=100(1-1/2)^2 =25$$ δεμάτια

▪ Κάνοντας τρεις στάσεις τερματίζουμε με:

$(100-100(1/3))-[(100-100(1/3))-(100-100(1/3))(1/3)]-[(100-100(1/3))-(100-100(1/3))(1/3)-(100-100(1/3))-(100-100(1/3))(1/3))(1/3)]=..=100(1-1/3)^3 =29,62$ περίπου πλήρη δεμάτια

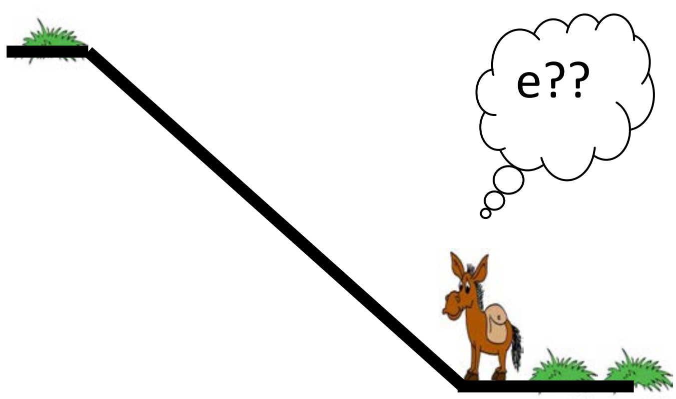
(Όποιος δει την παραπάνω αριθμητική παράσταση και συνεχίσει να διαβάζει μπορεί να περηφανεύεται ότι ζει επικίνδυνα!!)

▪ Κάνοντας τέσσερις στάσεις τερματίζουμε με $100(1-1/4)^4 =31.64$ περίπου πλήρη δεμάτια

Κάνοντας ν στάσεις θα τερματίσουμε με $100(1-1/\nu)^\nu$ δεμάτια.Όμως,καθώς το ν μεγαλώνει απεριόριστα (λέμε ότι τείνει στο άπειρο) η παράσταση $100(1-1/\nu)^\nu$ τείνει στο 100/e=36,7879.

Υπενθυμίζουμε ότι e=2,71.. ο γνωστός υπερβατικός αριθμός.

Άρα όσες ενδιάμεσες στάσεις και να κάνουμε δεν πρόκειται η μέγιστη ποσότητα σανού που θα μεταφερθεί στο τέρμα να ξεπεράσει τα 37 πλήρη δεμάτια.



204.Ταξί,επταεδρικά ζάρια και τάβλι …

• Ο Κλεόβουλος έχει μια εταιρεία ταξί. Τα ταξί του κυκλοφορούν στους δρόμους της Λοξολάνδης. Βέβαια,ο Κλεόβουλος πάντα ήταν ιδιαίτερος άνθρωπος διότι αναγκάστηκε να βγει από μικρός στο μεροκάματο οπότε δεν είχε την ευκαιρία να σπουδάσει.Το όνειρο του ήταν να γίνει μαθηματικός άλλα η ζωή τον διέψευσε για αυτό λοιπόν όλοι στην Λοξολάνδη γνωρίζουν ότι τα ταξί του έχουν μια ιδιορρυθμία. Οι πινακίδες των αριθμών κυκλοφορίας τους είναι παραγγελία. Ο θετικός τετραψήφιος σε καθένα από αυτά είναι τέλειο τετράγωνο και αποτελείται μόνο από άρτια ψηφία.

Πόσα ταξί έχει στην ιδιοκτησία του ο Κλεόβουλος;

• Ο Κλεόβουλος φέτος έγινε χορηγός σε μαθητικό τουρνουά Τάβλι (Πλακωτό) Στην φετινή διοργάνωση έλαβαν μέρος αρκετοί μαθητές συμπεριλαμβανομένων και των δυο γιων του Κλεόβουλου. Ο καθένας από τους συμμετέχοντες έπαιξε με όλους τους υπόλοιπους διαγωνιζόμενους. Το άθροισμα των βαθμολογιών των δυο γιων του Κλεόβουλου ήταν οκτώ βαθμοί ενώ για τους υπολοίπους συμμετέχοντες γνωρίζουμε ότι ο καθένας τους συγκέντρωσε τον ίδιο αριθμό βαθμών. Όλοι βέβαια στην Λοξολανδη γνωρίζουν ότι σε αυτού του είδους τα μαθητικά τουρνουά δίνεται ένας βαθμός για την νίκη ,για την ισοπαλία μισός βαθμός ενώ για την ήττα κανένας βαθμός.

Πόσοι μαθητές έλαβαν μέρος στον τουρνουά Τάβλι;

• Ένας από τους συμμετέχοντες ο Κορνήλιος είχε στην κατοχή του ένα επταεδρικό ζάρι, όπως φαντάζεστε στις έδρες του υπήρχαν οι αριθμοί 1,2,3,4,5,6,7 .Ο Κορνήλιος ζήτησε από ένα άλλο συμμετέχοντα τον Πασχάλη να επιλέξει νοερά 5 από τις 7 έδρες του ζαριού και να πολλαπλασιάσει τους αριθμούς των επιλεγμένων εδρών. Του ζήτησε να του πει το γινόμενο. Από το γινόμενο ο Κορνήλιος δεν είναι δυνατό να συμπεράνει αν το άθροισμα των 5 αριθμών είναι άρτιος η περιττός.

Ποιο είναι το γινόμενο των πέντε αριθμών;

205.Γριφοι παράπλευρης σκέψης

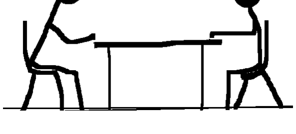
Ο Ντε Μπόνο ήταν υπεύθυνος και για την δημιουργία του όρου *παράπλευρη σκέψη* την δεκαετία του 70.Ορος που περιέγραφε ένα είδος λογικής που υιοθετούσε μια μη τετριμμένη προοπτική του προβλήματος. Δημιούργησε προβλήματα –γρίφους που αποτέλεσαν αγαπημένο παιχνίδι σε φοιτητικά πάρτι ή κοσμικές συγκεντρώσεις νεαρών επαγγελματιών. Παραθέτω μερικά από τα αγαπημένα μου προβλήματα τέτοιου είδους:

1)Δυο μαθηματικοί κάθονται απέναντι σε ένα τραπέζι και πίνουν καφέ ,κοιτούν και οι δυο μια αριθμητική σχέση που είναι γραμμένη σε ένα φύλλο χαρτί

Ο ένας λέει :είναι λάθος!»

Ο άλλος λέει : «είναι σωστό!»

Έχουν και οι δυο δίκιο. Πως είναι δυνατόν να συμβαίνει αυτό.

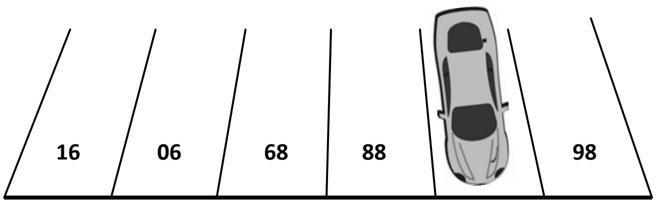


Οι λύσεις στην σελ 166

2)Ένα φορτηγό πρόκειται να περάσει μέσα από μια οδική σήραγγα με ύψος 4 μέτρα , το φορτηγό έχει ύψος 4 μέτρα και 4 εκατοστά .Παρόλα αυτά καταφέρνει να περάσει .Πως έγινε αυτό;

3) Ο οδηγός του προηγούμενου φορτηγού μπήκε ανάποδα σε δρόμο μονής κυκλοφορίας ,πέρασε μπροστά από ένα περιπολικό της τροχαίας , οι αστυνομικοί τον είδαν ,αλλά δεν τον σταμάτησαν για του δώσουν κλήση, Τι συνέβη;

4)(πολύ γνωστό και viral στο διαδίκτυο)Ποιο είναι το νούμερο στην θέση που εχει παρκάρει το αυτοκίνητο;



5) Να σχεδιάσετε μονοκονδυλιά (χωρίς να σηκώσετε το μολύβι από το χαρτί) ένα κύκλο και το κέντρο του.

6)Ποιοι είμαστε;

Έξι και άλλα έξι είναι δεκατρία από μας.

Ενώ έξι είναι τρία από εμάς.

Εννέα είναι πέντε από εμάς.

Τι είμαστε;

Θες να μάθεις και άλλα για εμάς.

Έτσι και εγώ θα σου πω παραπάνω.

Δώδεκα είναι έξι από εμάς

Ενώ δυο είναι τρία από εμάς;

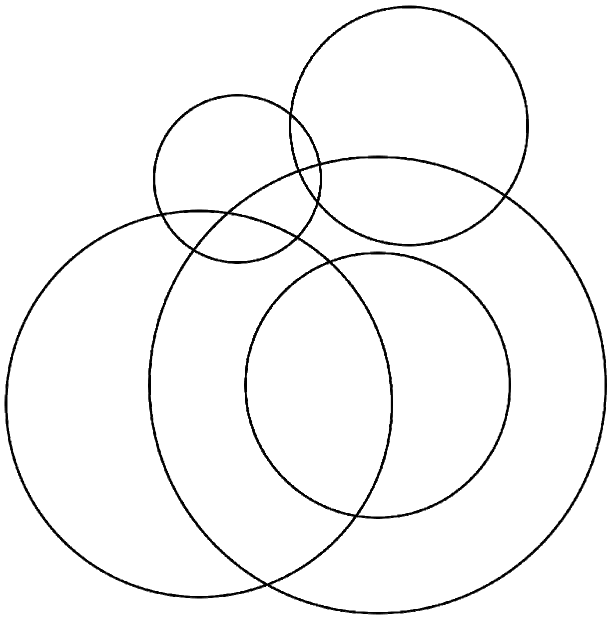
Τι είμαστε;

206.Στην Λοξολάνδη, τα τριψήφια προθέματα κλήσης των τηλεφωνικών αριθμών έχουν μια ιδιαιτερότητα, είναι γεωμετρικά προοδευτικοί αριθμοί. Ονομάζουμε ένα τριψήφιο θετικό ακέραιο αριθμό **«γεωμετρικά προοδευτικό»** αν αποτελείται από διαφορετικά ψηφία τα όποια αν διαβαστούν από τα αριστερά προς τα δεξιά αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Για παράδειγμα ο αριθμός 421,οι αριθμοί 4,2,1 προκύπτουν διαδοχικά ο καθένας από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό με το 1/2 .Ο υπουργός άμυνας Παπαδόπουλος και ο υπουργός πολιτισμού Λ.Πινέλος έχουν προθέματα τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο γεωμετρικά προοδευτικό τριψήφιο αριθμό.

Να τα βρείτε.
•Τωρα που βρήκατε τα προθέματα μάθετε και το εξής περιστατικό.Ο υπουργός πολιτισμού Λ.Πινέλος καθόταν στο γραφείο του και περίμενε να συναντηθεί με τους απεργούς υπαλλήλους του μουσείου της Λοξολάνδης, και για να σκοτώσει την ώρα του έκανε το εξής:
Έσκισε τρεις σελίδες από το κείμενο των αιτημάτων των απεργών και έκοψε όλες τις σελίδες ή κάποιες από τις τρεις σε τρία κομμάτια.Επανέλαβε την διαδικασία πολλές φορές μέχρι που χτύπησε το τηλέφωνο από την γραμματέα του που τον ειδοποίησε ότι οι απεργοί έφτασαν στο υπουργείο,γρήγορα-γρήγορα μέτρησε τα κομμάτια και τα βρήκε 100.
Είχε μετρήσει σωστά;

207.Μια μικρή πρόκληση .Ο χάρτης της Κυκλολάνδης

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε το γεωγραφικό χάρτη της μακρινής Κυκλολάνδης. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτείται για να χρωματιστεί ένας τέτοιος χάρτης χωρίς δυο νομοί που συνορεύουν να έχουν το ίδιο χρώμα; Δυο νομοί έχουν σύνορα τόξα και όχι μεμονωμένα σημεία.



208.

209. Κοιτώντας με άλλο… μάτι

-*«Βλέπεις το παρακάτω σχήμα.»* Είπε ο Παπαδόπουλος στον γιο του τον Τοτό.

-*«Αν μετακινήσω ένα σπίρτο θα δημιουργήσω ένα τετράγωνο.»*

-*«Υπάρχει άλλος τρόπος να μετακινήσω ένα σπίρτο και να δημιουργήσω ένα τετράγωνο;*

Ο Τοτός σκέφτηκε λίγο και κατόρθωσε να βρει τρόπο. Εσείς;

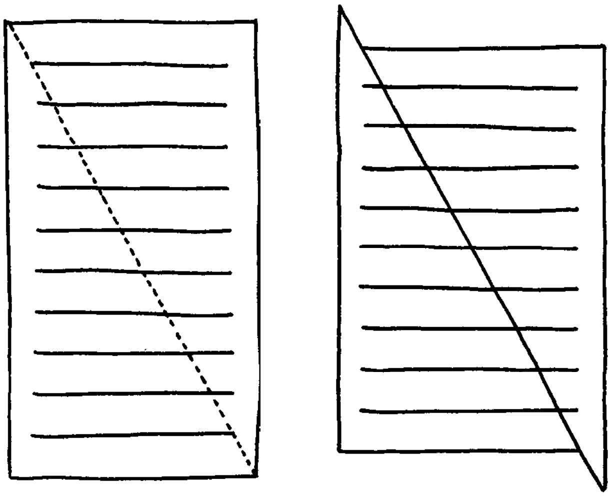
210.Σατανικές συμπτώσεις……

$$\eta\mu(666^o) = -\frac{\Phi}{2}$$

(Wang 1994)

211.Ένα χαμένο ευθύγραμμο τμήμα….

Αν σχεδιάσουμε σε ένα ορθογώνιο φύλλο χαρτί 10 ίσα ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα μεταξύ τους και στην συνέχεια κόψουμε το φύλλο κατά μήκος της διαγωνίου του και μετακινήσουμε το πάνω μισό του φύλου κατά μήκος της διαγωνίου, τότε αν μετρήσουμε τα ευθύγραμμα τμήματα θα δούμε ότι είναι εννέα. Που πήγε το ευθύγραμμο τμήμα ;



212. Δεκαέξι τραπουλόχαρτα. Γρίφος για ..χαρτόμουτρα.

Διατάξτε τους βαλέδες, τις ντάμες ,τους ρηγάδες και τους άσσους μια τράπουλας σε ένα τετράγωνο, έτσι ώστε να μην εμφανίζεται ένα χρώμα ή μια φιγούρα (βαλες, ντάμα ,ρήγας και άσσος)δυο φορές σε μια γραμμή ή στήλη ή διαγώνιο του τετραγώνου.

3,14 χρόνια δωρεάν πίτσα από την Pizza Hut προς τιμή της ημέρας εορτασμού του π

Η γνώστη αμερικανική αλυσίδα Pizza Hut την Κυριακή 13 Μαρτίου 2016 σε συνεργασία με τον διακεκριμένο μαθηματικό του Princeton John H. Conway σχεδίασαν ένα διαγωνισμό που έχει ως έπαθλο 3,14 χρόνια δωρεάν πίτσα. Πως γίνεται; Ο Conway κατασκεύασε τρία απαιτητικά μαθηματικά προβλήματα κλιμακούμενης δυσκολίας,τα οποία θα ανακοινωθούν την Δευτέρα 14 Μαρτίου 2016 παγκόσμια μέρα του π.Ο πρώτος που θα τα λύσει και θα στείλει τις απαντήσεις στο επίσημο ιστολόγιο της εταιρείας ,θα έχει την ευκαιρία να εξασφαλίσει δωρεάν πίτσες για 3,14 χρόνια.

Ο σύνδεσμος του ιστολογίου της Pizza Hut που αναρτήθηκαν τα προβλήματα:
http://blog.pizzahut.com/flavor-news/national-pi-day-math-contest-problems-are-here-2/

 Οι λύσεις στην σελ 166

213. Ένα κουΐζ ιδιότυπης λογικής έξι ερωτήσεων.

-Ένα αεροπλάνο μεταφέρει 5000 τούβλα .Ο πιλότος πέταξε ένα από τα τούβλα έξω από το αεροπλάνο. Πόσα τούβλα μεταφέρει τώρα το αεροπλάνο;
-Αυτό είναι ευκολο:4999!
-Σωστά. Επομένη ερώτηση.Πως μπορεί να βάλεις μια καμηλοπάρδαλη σε ένα ψυγείο;
-Ανοίγεις το ψυγείο , βάζεις μέσα την καμηλοπάρδαλη και κλείνεις την πόρτα του ψυγείου.
-Καλώς. Επομένη ερώτηση .Πως βάζεις έναν ελέφαντα στο ψυγείο;
-Ανοίγεις το ψυγείο βγάζεις έξω την καμηλοπάρδαλη, βάζεις μέσα τον ελέφαντα και κλείνεις την πόρτα του ψυγείου.
-Σωστά. Ο Βασιλιάς των ζώων, το λιοντάρι κάνει πάρτι για τα γενέθλια του και όλα τα ζώα πάνε για να του ευχηθούν-έκτος από ένα .Ποιο είναι αυτό;
-Ο ελέφαντας δεν μπόρεσε να πάει γιατί είναι στο ψυγείο.
-Πολύ σωστά. Επομένη ερώτηση. Ένας άνδρας πρέπει να διασχίσει ένα ποτάμι που ζουν κροκόδειλοι και δεν έχει βάρκα. Τι πρέπει να κάνει;
-Μπορεί απλά να κολυμπήσει : όλα τα ζώα παρευρίσκονται στο πάρτι του λιονταριού.
-Πολύ σωστά. Τελευταία ερώτηση. Ο άνδρας κολυμπά κατ πλάτος του ποταμού και, σκοτώνεται. Τι συνέβη;

214. Γύρω-γύρω από την Γη

Αν υποθέσουμε ότι τοποθετούμε ένα σκοινί στο έδαφος γύρω από την Γη κατά μήκος του ισημερινού. Αυξάνουμε το μήκος του σχοινιού κατά ένα μέτρο ποιο θα είναι το ύψος του σχοινιού από το έδαφος. Υποθέτουμε ότι ο ισημερινός έχει μήκος 240225 χλμ .

215. Στις δημοτικές εκλογές της Puzzleland συμμετέχουν Α ψηφοφόροι και Β υποψήφιοι. Ο καθένας μπορεί να ψηφίσει όσους θέλει, ή και να μην ψηφίσει κανέναν, δεν υπάρχει περιορισμός
Απαντήστε αν είναι δυνατό να συμβαίνει τουλάχιστον μία από τις δύο παρακάτω περιπτώσεις:
1.Όλοι οι ψηφοφόροι να έχουν ψηφίσει λιγότερους από τους μισούς υποψήφιους και όλοι οι υποψήφιοι να έχουν ψηφιστεί από περισσότερους από τους μισούς ψηφοφόρους.
2.Κανένας ψηφοφόρος δεν έχει ψηφίσει λιγότερους από τους μισούς υποψήφιους και κανένας υποψήφιος δεν έχει ψηφιστεί από περισσότερους από τους μισούς ψηφοφόρους.
(πρόβλημα συνεντεύξεων)

216. 10 Ευρω χαμενα;

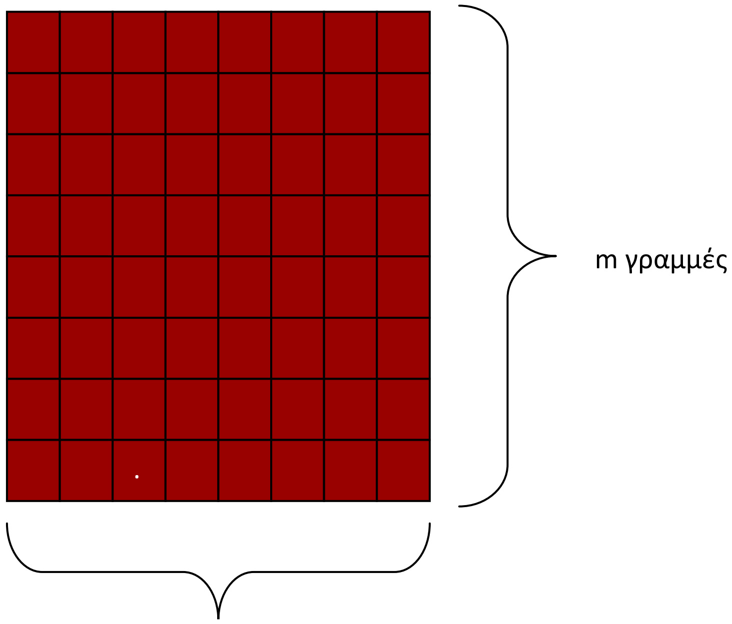
Ο Παπαδόπουλος κοιτάζει το χαρτί και δεν μπορεί να καταλάβει τι συνέβη. Είχε την εντύπωση ότι είχε 1000 ευρώ υπόλοιπο στον τραπεζικό του λογαριασμό του και στην διάρκεια του προηγουμένου μήνα έκανε έξι αναλήψεις με συνολικό άθροισμα 1000 ευρώ , όμως υπολογίζοντας το τραπεζικό του υπόλοιπο ανάληψη-ανάληψη διαπίστωσε ότι υπάρχει μια διαφορά 10 ευρώ, ήταν βέβαιος ότι οι προσθέσεις που έκανε είναι απόλυτα σωστές.Δείτε το χαρτί και βοηθήστε τον καταλάβει τι συμβαίνει; Χρωστάει 10 ευρώ στην τράπεζα ή όχι;

Ποσά αναλήψεων	Ποσό που απομένει τον τραπεζικό λογαριασμό
500	500
250	250
100	150
80	70
50	20
+ 20	+ 0
1000 ευρώ	990 ευρώ

217. θεωρία σοκολατοπαίγνιων για γλυκατζήδες

Στην Λοξολάνδη δεν βλέπουν Euro διότι το εθνικό σπορ τους είναι οι σοκολατομπουκιές. Παιχνίδι μείζονος παχυσαρκίας που ενδείκνυται για φανατικούς γλυκατζήδες.

Δυο παίκτες κάθονται στις απέναντι θέσεις ενός τραπεζιού και μπροστά τους βρίσκεται ένα ορθογώνιο κομμάτι σοκολάτας που αποτελείται από mxn τετραγωνικά πλακίδια.



Ρίχνουν ένα κέρμα ποιος θα παίξει πρώτος. Ο πρώτος παίκτης επιλέγει ένα από τα τετραγωνικά πλακίδια **όποιο θέλει και τρώει αυτό καθώς και όλα τα τετραγωνικά πλακίδια που βρίσκονται πάνω και δεξιά από αυτό.** Ο δεύτερος παίκτης επιλέγει και αυτός ένα τετραγωνικό πλακίδιο και **τρώει αυτό καθώς και όλα τα τετραγωνικά πλακίδια που βρίσκονται πάνω και δεξιά**. Νικητής είναι αυτός που θα αναγκάσει τον άλλο να φάει το τελευταίο κομμάτι σοκολάτας.(Μίζερη εκδοχή)

Τα πρώτα χρόνια που παιζόταν το παιχνίδι οι διοργανωτές επέλεγαν ένα τετράγωνο κομμάτι σοκολάτας νxν πλακιδίων αλλά κάποιος από τους ειδήμονες της θεωρίας σοκολατοπαιγνίων – φήμες λένε ότι ήταν διαβητικός και μισούσε το παιχνίδι-παρατήρησε ότι υπάρχει στρατηγική νίκης για ένα από τους δυο παίκτες. Ποια είναι αυτή και ποιος παίκτης θα κερδίζει συνέχεια και γιατί;

Μετά το φιάσκο του τετραγώνου όπως ονομάστηκε στα χρονικά των σοκολοτομαχιών, οι διοργανωτές άλλαξαν το σχήμα του αρχικού κομματιού σοκολάτας και το έκαναν ορθογώνιο 2xn οπού ν τόσα πλακίδια όσα το μέγεθος του τραπεζιού που παιζόταν.

Τζίφος ,ο μεγάλος-πάνω από 90 ετων- παιγνιοθεωρητικος Τιφκιάνεις Εκί απέδειξε ότι και εδώ υπήρχε στρατηγική νίκης για ένα από τους δυο παίκτες .Ποια ήταν αυτή; Ποιος παίκτης θα κερδίζει συνέχεια;

218.Δημοψηφίσματα στην Άνω ραχούλα και πρώτοι που είναι τέλεια τετράγωνα..

Στην Λοξολάνδη διεξήχθη δημοψήφισμα για την φίμωση των ροζ παπαγάλων. Στο χωριό Άνω ραχούλα ψήφισαν κ άτομα όπου κ είναι τετραψήφιος αριθμός και παράλληλα τέλειο τετράγωνο, ενώ στο διπλανό χωριό την Κάτω ραχούλα ψήφισαν λ άτομα όπου ο λ είναι επίσης τέλειο τετράγωνο και προκύπτει αν αυξήσουμε τα ψηφία του α κατά μια μονάδα.

i)Πόσοι ψήφισαν σε κάθε χωριό;

Ο δήμαρχος της Άνω ραχούλας Μπόρις Καλοχαιρέτας ρωτήθηκε από τους δημοσιογράφους για το αποτέλεσμα του δημοψηφίσματος και ως συνήθως απάντησε κάτι άλλο.

«Κοιτάξτε η ηλικία μου είναι πρώτος αριθμός που όταν διαιρεθεί με την ηλικία του εξάχρονου εγγονού μου δίνει πηλίκο 14»

ii)Ποια είναι η ηλικία του δήμαρχου Καλοχαιρέτα;

219.Προβλήματα από το πηγάδι με τους άσσους.

Ο Περικλής Πατομπούκαλος-εγνωσμένου κύρους αστρονόμος- έκανε μια σημαντική ανακάλυψη.Πίσω από τον Σείριο 1974 και ανατολικά του Σειρίου 1975 εντόπισε ένα νέο γαλαξία και σκοπεύει να του δώσει το όνομα του. Γαλαξίας Πατομπούκαλος (Φρίκη!!)

• Ο Πατομπούκαλος για την προσφορά του στην επιστήμη των αστεριών τιμήθηκε με το βραβείο Τζένη Αλικάκη και πιστώθηκε στον λογαριασμό του εξαψήφιο χρηματικό ποσό ευρώ ,τέτοιο ώστε, το $1^{ο}$ ψηφίο είναι ίσο με το $4^{ο}$,το $2^{ο}$ με το $5^{ο}$ και το $3^{ο}$ με το $6^{ο}$ ψηφίο.*Να αποδείξετε ότι αν θέλει ο Πατομπούκαλος μπορεί να μοιράσει το ποσό εξίσου (σε ακέραια ποσά ευρώ) είτε στα 7 παιδιά του,είτε στα 13 εγγόνια του είτε στις 11 γάτες του.*

•Πόσα αστέρια αποτελούν το νέο Γαλαξία; Ο Πατομπούκαλος έγραψε στο ημερολόγιο του:

«…Πόσα είναι τα αστέρια; Είναι ένας πρώτος αριθμός από αποτελείται από διαδοχικά 1 και 0 αρχίζει και τελειώνει σε 1….Περίεργο…»

Ποιο είναι το πλήθος των αστεριών του Γαλαξία Πατομπούκαλου;

(*Για την ιστορία ,το δεύτερο μέρος του προβλήματος χωρίς την ευγενική συμμετοχή του Πατομπούκαλου πιστώνεται στον Πωλ Έρντος και το αναφέρει ο Α.Σοιφερ στο εξαιρετικό βιβλίο του με διαγωνιστικά προβλήματα The Colorado Mathematical Olympiad and Further Explorations.Όλα βέβαια ελέγχονται.Τα προβλήματα είναι σαν τα ανέκδοτα άπαξ και ειπωθούν όλοι ασχολούνται με το πρόβλημα και όχι με το δημιουργό του.)*

220. Ένα παιχνίδι με γύρους και ολίγη από ευκλείδεια γεωμετρία…

Στην Λοξολάνδη το μπαρμπούτι είναι απαγορευμένο, στην θέση του, ο νομοθέτης Λέων Μαντρόσκυλος καθιέρωσε ένα παιχνίδι με την ονομασία *Τα τρία τρίγωνα* .Το παιχνίδι αυτό παίζεται με τρεις τριγωνικές κάρτες .Η μια όψη κάθε κάρτας είναι χρωματισμένη με κόκκινο χρώμα ενώ στην άλλη όψη καθεμιάς είναι τυπωμένος ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Οι τρεις αριθμοί είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Οι κανόνες του παιχνιδιού είναι απλοί.

Οι τρεις παίκτες ξεκινούν με μηδενικό σκορ πόντων. Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού οι κάρτες ανακατεύονται και μοιράζονται, μια σε κάθε παίκτη. Ο αριθμός κάθε κάρτας προστίθεται ως πλήθος πόντων στο σκορ του κάθε παίκτη και ξεκινά ο επόμενος γύρος.

Σε μια σκοτεινή χαρτοπαικτική λέσχη τρεις ύποπτοι τύποι, ο Αντωνίου, ο Βασιλείου και ο Γεωργίου έπαιξαν ένα παιχνίδι .Παίχτηκαν διαδοχικοί γύροι, τουλάχιστον δυο. Όταν τέλειωσε το παιχνίδι ο Αντωνίου είχε συγκεντρώσει 20 πόντους , ο Βασιλείου 10 πόντους και ο Γεωργίου 9 πόντους. Επίσης είναι γνωστό ότι ο Βασιλείου είχε την κάρτα με τον μεγαλύτερο αριθμό στον τελευταίο γύρο.

1.Ποιος από τους τρεις παίκτες είχε στην κατοχή του, την κάρτα με τον μεσαίο από τους τρεις αριθμούς στο πρώτο γύρο;

2. Οι προδιαγραφές για την κατασκευή των τριγωνικών καρτών είναι συγκεκριμένες ως προς τις διαστάσεις, είναι επιβεβλημένο τα μήκη των πλευρών κάθε τριγωνικής κάρτας να είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί (από cm) και μια γωνία να είναι διπλάσια από μια άλλη. Ποιες είναι οι διαστάσεις (σε cm) κάθε κάρτας;

221. Κατά την διάρκεια του Α Παγκόσμιου Πολέμου(1914-1918) στην κοιλάδα του Πω στην Ιταλία,βρέθηκαν ένας σκελετός, μια στραπατσαρισμένη στολή και μια αλαβάρδα.Οι αρχαιολόγοι αποφάνθηκαν ότι αυτά τα αντικείμενε άνηκαν σε Γάλλο αξιωματικό.Το μήκος, σε ακέραιο αριθμό ποδών της αλαβαρδας, πολλαπλασιασμένο επί τον αριθμό των ημερών του μήνα που σκοτώθηκε ο Γάλλος αξιωματικός,πολλαπλασιασμένο με τον μισό αριθμό των ετών που μεσολάβησαν από τον θάνατο του αξιωματικού έως την ανακάλυψη του σκελετού και πολλαπλασιασμένο με το μισό της ηλικίας του αξιωματικού την χρόνια που πέθανε,μας δίνει τον αριθμό 451066.Σε ποια μάχη σκοτώθηκε ο αξιωματικός;

Α. Τορίνο, Φεβρουάριος 1522

Β. Κρεμόνα Μάρτιος 1712

Γ. Παβία Φεβρουάριος 1512

Δ. Μαρένγκο Ιανουάριος 1800

Ε. Καστιλιόνε Αύγουστος 1796

222. Μια μαφιόζικη μοιρασιά…..

Άν μπεις στο δωμάτιο και δεν εντοπίσεις αμέσως το κορόιδο τότε πιθανότατα είσαι εσύ..
Βίτο Κορλεόνε

Ένα προβληματάκι νικητήριας στρατηγικής,μαφιόζικων εκτελέσεων και λογική «οπισθοπορείας»…

Μια ομάδα από 5 μαφιόζους πρόκειται να μοιραστεί τα έσοδα από τις ημερήσιες «εισπράξεις» τους.Μόνο 500 χρυσές λίρες,ακόμα και η μαφία περνάει οικονομική κρίση.
Είναι γνωστό,ότι οι συγκεκριμένοι μαφιόζοι είναι μια απόλυτα λογική και πειθαρχημένη ομάδα και υπάρχει συγκεκριμένος τρόπος μοιρασιάς της λείας.
Οι 5 μαφιόζοι (Α,Β,Γ ,Δ και Ε) έχουν μια αυστηρή σχέση ιεραρχίας.Ο αρχιμαφιόζος Α είναι ανώτερος όλων και ακολουθούν όσο αφορά την ιεραρχία ο Β , κατόπιν ο Γ, μετά είναι ο Δ και κατώτερος όλων ο Ε.
Η διαδικασία της μοιρασιάς ακολουθεί τους εξής κανόνες:
1.Ο αρχιμαφιόζος (ο Α) προτείνει ένα τρόπο να μοιραστούν οι 500 χρυσές λίρες ,μπορεί να πει για παράδειγμα: «*440 λίρες εγώ , 25 λίρες ο Β,15 λίρες ο Γ , 10 λίρες ο Δ και 10 λίρες ο Ε.*»
2.Όλοι οι μαφιόζοι(συμπεριλαμβανομένου και αυτού που προτείνει ψηφίζουν ΝΑΙ ή ΟΧΙ αν αποδέχονται ή δεν αποδέχονται την μοιρασιά.
3.Αν πλειοψηφήσει η αποδοχή της μοιρασιάς τότε γίνεται, αν υπάρξει ισοπαλία τότε υπερισχύει η πλευρά στην οποία βρίσκεται ο ανώτερος μαφιόζος στην ιεραρχία.
4.Αν δεν πλειοψηφήσει το ΝΑΙ τότε ο μαφιόζος που πρότεινε την μοιρασιά με συνοπτικές διαδικασίες (πιστόλι; μαχαίρι;) «απομακρύνεται» από την ομάδα.
5.Αν απορριφτεί μια πρόταση μοιρασιάς τότε ο επόμενος στην ιεραρχία μαφιόζος κάνει την δική του πρόταση πως θα μοιραστούν οι 500 λίρες και ακολουθούνται οι παραπάνω κανόνες.
Σημειώνεται ότι κάθε μαφιόζος πρωτίστως ενδιαφέρεται να σώσει την ζωή του και δευτερευόντως να πάρει χρυσές λίρες. Επίσης, αν ένας μαφιόζος του είναι αδιάφορο να ψηφίσει ΝΑΙ ή ΟΧΙ , τότε, ψηφίζει ΟΧΙ για να ξεφορτωθεί ανωτέρους του μαφιόζους και να μειώσει τον ανταγωνισμό.
Υπάρχει στρατηγική νίκης για τον μαφιόζο Α;
Σημειώνουμε ότι ,οι 5 μαφιόζοι είναι όντα απόλυτα λογικά που μπορούν κάθε στιγμή να κάνουν λογικούς συλλογισμούς χωρίς λάθος.

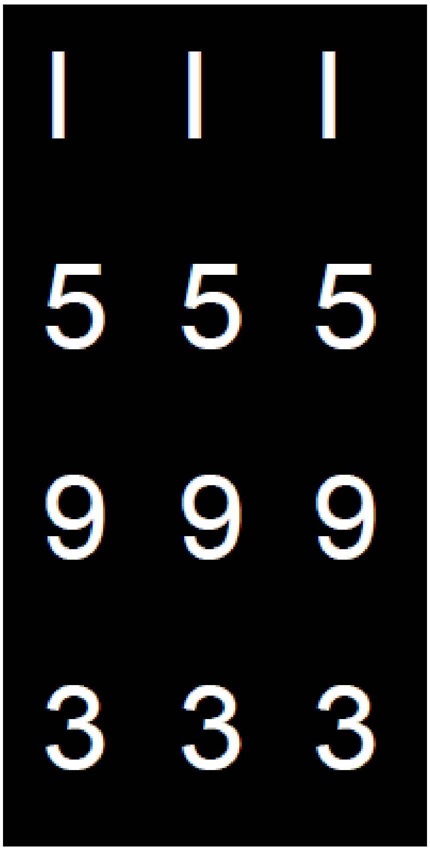
 Οι λύσεις στην σελ 166

223. Από το 01 μέχρι το 31….

Το 1957,ο Τζον Σίνγκλετον κατασκεύασε ένα ασυνήθιστο ημερολόγιο με κύβους. Το κατοχύρωσε ως δική του ευρεσιτεχνία, όμως, αργότερα το 1965 απέσυρε την πατέντα και άφησε τα δικαιώματα χρήσης ελεύθερα.Η ημερομηνία φαίνεται απλώς με κατάλληλη τοποθέτηση των προσθίων εδρών δυο κύβων.Σε κάθε έδρα των δυο κύβων έχει σχεδιαστεί ένα ψηφίο από το 0 έως το 9,ετσι ώστε να είναι δυνατό να σχηματιστεί οποιαδήποτε ημερομηνία από το 01,02,03,..μεχρι το 31.Δειτε το σχήμα.
Ποια είναι τα ψηφία στις έδρες των κύβων που δεν φαίνονται στο σχήμα;

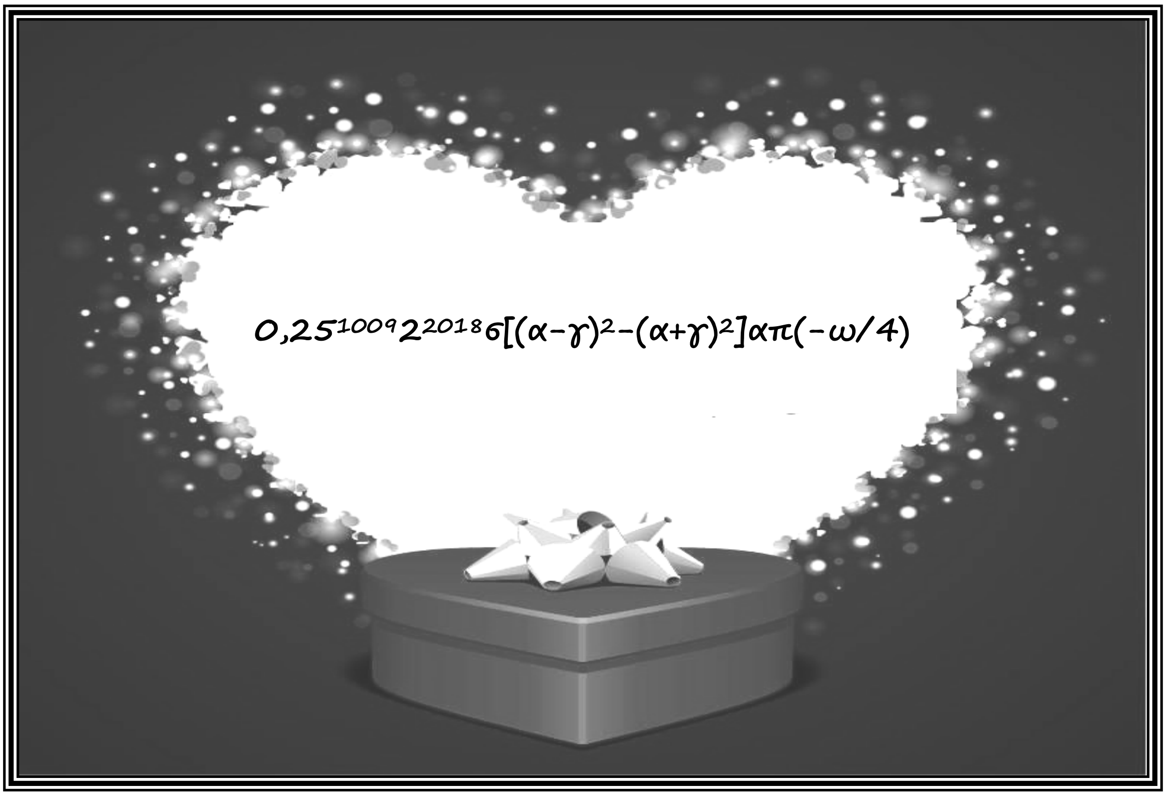
224. Τελείως «έξω» από το κουτί….

Στο παρακάτω φύλλο χαρτί κυκλώστε 6 αριθμούς όποιους θέλετε έτσι ώστε το άθροισμα τους να ισούται με 21.



225.Μαθηματική κάρτα για ερωτευμένους

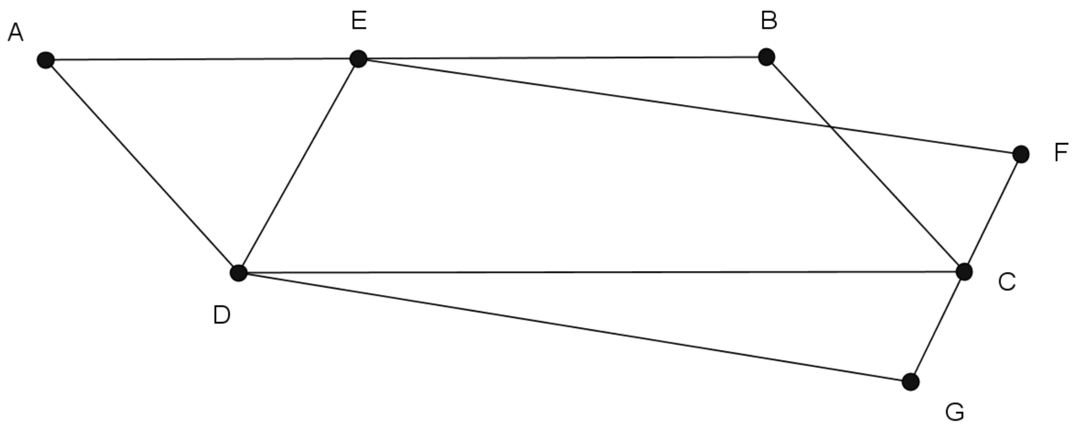
Αν ω,σ,π,α πραγματικοί αριθμοί,να βρείτε το μήνυμα που αναγράφεται στην παρακάτω *αγαπησιάρικη* κάρτα.



https://www.youtube.com/watch?v=k90epVUzG9A

 Οι λύσεις στην σελ 166

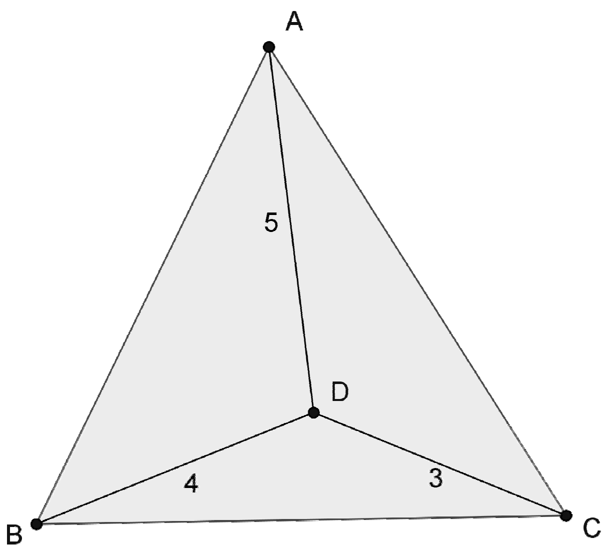
226.Μια γεωμετρική σπαζοκεφαλιά



Στο παραπάνω σχήμα το εμβαδό του παραλληλογράμμου ABCD είναι 20 τετραγωνικές μονάδες. Να Βρείτε το εμβαδό του παραλληλόγραμμου EFGD.

227.Ένα γεωμετρικό πρόβλημα…

Στα υψίπεδα της Λοξολάνδης τρία χωριά η Άνω πλατάνια (A), η Κάτω πλατάνια (B) και η Περά πλατάνια (C) ισαπέχουν μεταξύ τους . Σχηματίζουν δηλαδή ένα ισόπλευρο τρίγωνο .Στο εσωτερικό του ισόπλευρου τρίγωνου υπάρχει μια πηγή (D) που απέχει 3 ,4 και 5 χλμ από τις κορυφές του τριγώνου και κατ επέκταση από τα χωριά.Πόσο απέχουν τα τρία χωριά μεταξύ τους;



 Οι λύσεις στην σελ 166

228.Έξι…

•Σε ένα τηλεοπτικό διαγωνισμό τραγουδιού, οι θεατές από το σπίτι κατέταξαν με τις ψήφους τους στις τέσσερεις πρώτες θέσεις τους τραγουδιστές: Αντωνίου, Βασιλείου,Γεωργίου και Δημητρίου,αλλά δεν είναι γνωστό ποιος κατέλαβε ποια θέση. Όμως, το άθροισμα των θέσεων που κατέλαβαν οι Αντωνίου, Βασιλείου και Δημητρίου ισούται με 6.Με 6 επίσης ισούται και το άθροισμα των θέσεων που κατέλαβαν οι Βασιλείου και Γεωργίου. Σημειώνεται ότι ο Βασιλείου κατέλαβε καλύτερη θέση από τον Αντωνίου.

Ποια ήταν οι θέση που κατέλαβε ο κάθε αοιδός;

•Ο αριθμός των ψήφων που πήρε από το κοινό ο Δημητρίου και ο αριθμός των ψήφων που πήρε ο Γεωργίου είναι κατοπτρικοί. Ο πρώτος προκύπτει από τον δεύτερο αν διαβαστεί από τα αριστερά προς τα δεξιά. Επίσης το γινόμενο τους ισούται με 92565.

Πόσους ψήφους πήρε ο Γεωργίου και πόσους πήρε ο Βασιλείου;

229.*Το πρώτο τριήμερο του 2016 (1,2,3 Ιανουαρίου) στην ορεινή Μαγνησία, οι θερμοκρασίες (σε C^o)στις 12:00 το μεσημέρι είχαν καταγραφεί και ήταν διαδοχικοί ακέραιοι γεγονός που επαναλήφτηκε και το τελευταίο τριήμερο του Φεβρουαρίου (27,28,29). Αν στο γινόμενο των τριών ανωτέρω θερμοκρασιών του Ιανουαρίου προσθέσουμε το γινόμενο των τριών ανωτέρω θερμοκρασιών του Φεβρουαρίου τότε ο αριθμός που προκύπτει είναι γινόμενο δυο πρώτων αριθμών. Να βρείτε τις θερμοκρασίες των έξι ημερών.*
Σημειώνεται ότι οι θερμοκρασίες στις 2 Ιανουαρίου και 28 Φεβρουαρίου είναι μη αρνητικές.

230.Υπάρχουν 5 σπίτια, 5 διαφορετικών ανθρώπων. Σε κάθε ένα σπίτι ζει ένας άνθρωπος διαφορετικής εθνικότητας. Οι 5 ιδιοκτήτες πίνουν ένα συγκεκριμένο είδος ποτού ,καπνίζουν μια συγκεκριμένη μάρκα τσιγάρων και έχουν ένα συγκεκριμένο κατοικίδιο. Όλοι έχουν μεταξύ τους διαφορετικά κατοικίδια, διαφορετικές μάρκες τσιγάρων και διαφορετικά είδη ποτών.
Η ερώτηση είναι ποίος έχει το ψάρι????
Στοιχεία:
• Ο Άγγλος μένει στο κόκκινο σπίτι.
• Ο Σουηδός έχει ένα σκύλο.
• Ο Δανός πίνει τσάι.
• Το πράσινο σπίτι είναι αριστερά από το άσπρο σπίτι.
• Ο ιδιοκτήτης του πράσινου σπιτιού πίνει καφέ.
• Αυτός που καπνίζει Pall Mall τσιγάρα έχει πουλιά για κατοικίδια.
• Ο ιδιοκτήτης του κίτρινου σπιτιού καπνίζει Dunhill.
• Αυτός που μένει στο μεσαίο σπίτι πίνει γάλα.
• Ο Νορβηγός μένει στο 1ο σπίτι.
• Αυτός που καπνίζει Blends μένει δίπλα σε αυτόν που έχει γάτες.
• Αυτός που έχει το άλογο μένει δίπλα σε αυτόν που καπνίζει Dunhill.
• Ο ιδιοκτήτης που καπνίζει Bluemasters πίνει μπίρα.
• Ο Γερμανός καπνίζει Prince.
• Ο Νορβηγός μένει δίπλα στο μπλε σπίτι.
• Αυτός που καπνίζει Blends έχει ένα γείτονα που πίνει νερό.

 Οι λύσεις στην σελ 166

231.Πρωινό λατινικό τετράγωνο

Να συμπληρώσετε το παρακάτω Λατινικό τετράγωνο έτσι ώστε σε κάθε γραμμή και στήλη να υπάρχουν τα ίδια 5 γράμματα της Ελληνικής αλφαβήτου και στην τελευταία γραμμή μια κοινή λέξη της ελληνικής γλώσσας.

Σ				
			Φ	
		Α		
	Κ		Σ	
Κ				Σ

232.Ένα χαλασμένο ασανσέρ....και μια γραμμική διοφαντική εξίσωση!

Ένα ωραίο πρόβλημα που βρήκα σε ενα μαθηματικό δελτίο που εκδίδει το τμήμα μαθηματικών του Augsburg είναι το εξής :

Το ασανσέρ ενός ουρανοξύστη 65 οροφών έχει χαλάσει .Όταν κάποιος θέλει να ανέβει , μπορεί να το κάνει ανεβαίνοντας μόνο 8 ορόφους (ούτε λιγότερο ούτε περισσότερο). Αν δεν μπορεί να ανέβει 8 ορόφους παραμένει ακινητοποιημένο.
Για παράδειγμα, αν το ασανσέρ βρίσκεται στο όροφο 61 και πατήσουμε το κουμπί να ανέβει τότε παραμένει στον όροφο 61.
Όταν πάλι κάποιος θέλει να κατέβει πρέπει να έχει υπ όψι του ότι το ασανσέρ κατεβαίνει μόνο 11 ορόφους (ούτε λιγότερο ούτε περισσότερο) αν δεν μπορεί να κατέβει 11 ορόφους παραμένει ακινητοποιημένο. Για παράδειγμα, αν το κουβούκλιο του ασανσέρ βρίσκεται στον όροφο 5 και πατήσουμε το κουμπί για κάτω τότε παραμένει ακινητοποιημένο.

Για ευκολία μπορούμε να φανταστούμε ότι υπάρχουν μόνο δυο κουμπιά ,ένα για άνοδο και ένα για κάθοδο.
Το ασανσέρ βρίσκεται στο πρώτο όροφο.Το ερώτημα που τίθεται είναι αν με τις συνθήκες που προαναφέραμε,μπορούμε να έχουμε πρόσβαση σε κάθε όροφο;

233.ψηφιακό άθροισμα

Σκεφτείτε τρεις μονοψήφιους διαδοχικούς θετικούς ακεραίους και υψώστε τον καθένα τους στον κύβο. Τώρα, για καθένα από τους κύβους πρόσθεσε τα ψηφία τους ξανά και ξανά μέχρι να καταλήξετε πάλι σε τρεις μονοψήφιους. Διατάξτε τους τρεις μονοψήφιους κατά αύξουσα σειρά.Ο αριθμός που προκύπτει είναι πάντα, ο 189 .

Π.χ οι αριθμοί 3,4,5

3	4	5
3^3=27,	4^3=64	5^3=125
2+7=9	6+4=10	1+23+5=8
9	1+0=1	8
9	1	8

189

Χρησιμοποιήσαμε μονοψήφιους για ευκολία τις πράξεις ,το τρικ όμως δουλεύει για οποιουσδήποτε διαδοχικούς θετικούς ακεραίους. Αιτιολογήστε.

234.Εστω δυο τριψήφιοι ακέραιοι αριθμοί Α και Β.Ο Β προκύπτει από τον Α με εναλλαγή του πρώτου με το τρίτο ψηφίο και είναι μεγαλύτερος από τον Α κατά 594.Επιπλεον,αν από τον Α αφαιρέσουμε 12,προκυπτει ένα αριθμός που ισούται με 16 φόρες το άθροισμα των ψηφίων του Α. Ποιος είναι ο αριθμός Β;

235. Πάλι πρώτοι….

Η οικογένεια Παπαδόπουλου ταξιδεύει με το αυτοκίνητο για ολιγοήμερη εκδρομή στο χωριό. Στο αυτοκίνητο επιβαίνουν, ο κ. Παπαδόπουλος, η κ. Παπαδοπούλου και τα έξι παιδιά τους.Είναι γνωστό ότι οι ηλικίες των παιδιών είναι διαδοχικοί πρώτοι αριθμοί,πρώτος είναι και το άθροισμα τους.Είναι γνωστό,επίσης ότι, παιδιά ενός έτους δεν ταξιδεύουν με αυτοκίνητο.
• Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών.
Κατά την διάρκεια του ταξιδιού,ο Γιαννάκης το μικρότερο παιδί της οικογένειας ζήτησε γλυκό,έτσι η κ. Παπαδοπούλου εμφάνισε ένα κουτί με σοκολατάκια.Το κουτί αρχικά περιέχει σοκολατάκια γάλακτος και σοκολατάκια με καραμέλα.Ο κ. Παπαδόπουλος όταν είδε το περιεχόμενο του κουτιού,πήρε ένα σοκολατάκι γάλακτος και το έφαγε,λέγοντας:
"Αν ο Γιαννάκης κλείσει τα μάτια και επιλέξει στην τύχη ένα σοκολατάκι από το κουτί, η πιθανότητα να επιλέξει σοκολατάκι γάλακτος θα είναι 1/7."
και συνέχισε:
"..αν αρχικά είχα επιλέξει να φάω δυο σοκολατάκια καραμέλα και ο Γιαννάκης έκλεινε τα μάτια και επέλεγε στην τύχη ένα σοκολατάκι από το κουτί η πιθανότητα σε αυτήν την περίπτωση να επιλέξει σοκολατάκι γάλακτος θα ήταν 1/5 ."
• Πόσα σοκολατάκια γάλακτος περιείχε αρχικά το κουτί;

236. Ένα συμπαθητικό πρόβλημα....

Ο κόσμος του Heavy Metal στην Λοξολανδη είναι παράξενος.Χαρακτηριστικό παράδειγμα Τα Ροκαλιαράκια.Τα Ροκαλιαράκια είναι μια μουσική μπάντα που αποτελείται από έξι μουσικούς με πολύ ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Ανά δυο, οι μουσικοί της μπάντας είτε έχουν αμοιβαία συμπάθεια είτε αμοιβαία αντιπάθεια. Όχι μεσοβέζικες καταστάσεις. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι δεν υπάρχει ομάδα τριών μουσικών που να έχουν αμοιβαία συμπάθεια. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον μια ομάδα τριών μουσικών της μπάντας έχουν αμοιβαία αντιπάθεια.

237. Ένα αριθμητικό τρικ με τετράγωνα….

Ο παρακάτω πίνακας με τους αριθμούς έχει μια περίεργη ιδιότητα. Επιλέξετε τυχαία ένα αριθμό , κατόπιν διαγράψτε κάθε αριθμό που βρίσκεται στην ίδια γραμμή και στην ίδια στήλη. Επαναλάβετε μέχρι να μην μείνει άλλος αριθμός στον πίνακα. Θα το κάνετε 6 φορές.

28	26	30	27	29	25
34	32	36	33	35	31
16	14	18	15	17	13
4	2	6	3	5	1
10	8	12	9	11	7
22	20	24	21	23	19

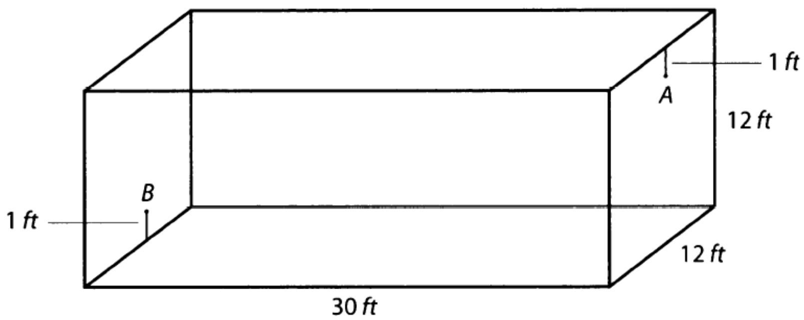
~~28~~	26	~~30~~	~~27~~	~~29~~	~~25~~
~~34~~	~~32~~	~~36~~	~~33~~	35	~~31~~
~~16~~	~~14~~	~~18~~	15	~~17~~	~~13~~
4	~~2~~	~~6~~	~~3~~	~~5~~	~~1~~
~~10~~	~~8~~	12	~~9~~	~~11~~	~~7~~
~~22~~	~~20~~	~~24~~	~~21~~	~~23~~	19

Όποιους αριθμούς και να επιλέξετε πάντα το άθροισμα των **έξι αριθμών** θα είναι το ίδιο(111).
Γιατί συμβαίνει αυτό; (Martin Gardner ,Scientific American 1957)

238. Η αράχνη και η μύγα

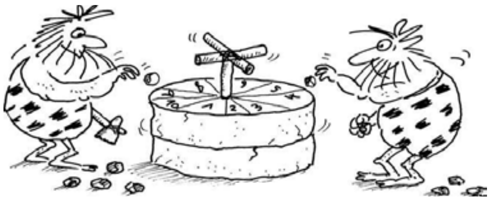
Μέσα σε ένα δωμάτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου,μήκους 30 ποδιών, πλάτους και ύψους 12 ποδιών,βρίσκονται μια αράχνη,σε ένα σημείο επί της μεσοκαθέτου ενός πλευρικού τοίχου το ποιο απέχει 1 πόδι από την οροφή (σημείο Α),και μια μύγα,σε ένα σημείο επί της μεσοκαθέτου του απέναντι τοίχου το οποίο απέχει 1 πόδι από το δάπεδο (σημείο Β).Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή που μπορεί να διανύσει η αράχνη για να φτάσει την μύγα,η οποία στέκει ακίνητη;

Φυσικά, η αράχνη δεν ρίχνει ούτε χρησιμοποιεί τον ιστό της αλλά έρπει πάνω στους τοίχους του δωματίου.



Υπενθυμίζουμε ότι το πόδι είναι μονάδα μέτρησης μήκους.(1 πόδι=0,3048 μέτρα)

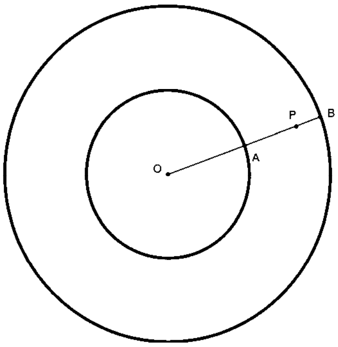
239. Γεωμετρικές πιθανότητες που παραπλανούν…..



Δίνονται δυο ομόκεντροι κύκλοι με την ακτίνα του ενός να είναι διπλάσια του άλλου.Να βρεθεί η πιθανότητα ένα σημείο του μεγάλου κυκλικού δίσκου να ανήκει και στον μικρό.

•Ο **Τοτος** – κολοσσός στα μαθηματικά και ιδίως στις πιθανότητες – όταν κλήθηκε να απαντήσει στο παραπάνω πρόβλημα είπε τα εξής:

Αν P είναι ένα τυχαίο σημείο του μεγάλου κυκλικού δίσκου τότε σίγουρα θα ανήκει σε μια ακτίνα του OAB όπου A είναι το μέσο του OAB. Η πιθανότητα το P να ανήκει στο τμήμα OA (να ανήκει στον μικρό κυκλικό δίσκο) είναι 1/2 ,άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 1/2 .



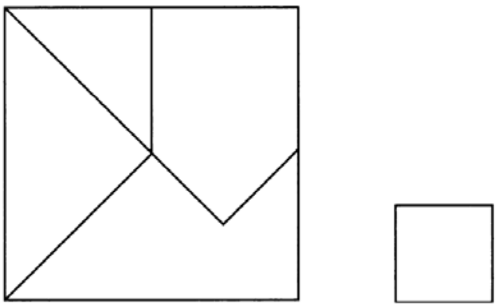
•***Η Μαρία* έδωσε διαφορετική λύση:**

Αν R είναι η ακτίνα του μεγάλου κύκλου και r η ακτίνα του μικρού κύκλου και ισχύει R=(1/2)r .Το εμβαδό E1 του μεγάλου κυκλικού δίσκου είναι

$E_1 = \pi R^2 = \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}E_2$ με E2 το εμβαδό του μικρού κυκλικού δίσκου άρα η ζητούμενη πιθανότητα να επιλέξουμε ένα τυχαίο σημείο στον μεγάλο κυκλικό δίσκο και να ανήκει και στον μικρό είναι ¼

Ποιος έχει δίκιο και γιατί;

240.Δίνονται ένα μικρό τετράγωνο και ένα μεγαλύτερο τετράγωνο που συντίθεται από 4 άνισα κομμάτια και πρέπει να τα συνδυάσουμε έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα μεγαλύτερο τετράγωνο.



241. Μια απόδειξη ότι 14=15 (*)


Hugo Steinhaous
(1887-1972)

Στο Wroclaw της Πολωνίας,το 1952 κατά την διάρκεια μιας συνάντησης των συμμετεχόντων για την μαθηματική ολυμπιάδα, ο μαθηματικός J.Mikusinski παρουσίασε μια διαμέριση του επιπέδου σε κυρτά επτάγωνα έτσι ώστε κάθε κορυφή του «μωσαϊκού» να συνορεύουν ακριβώς τρία επτάγωνα. Ο Πολωνός μαθηματικός Hugo Steinhaous –γνωστός μας από το πρόβλημα των ίσων μεριδίων- με αφετηρία το παραπάνω συμπέρασμα παρουσιάζει μια «*ψευδοαπόδειξη*» ότι ισχύει 14=15.Ο Steinhaous ισχυρίζεται:
«…συμβολίζουμε $P=180^o$.Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού επταγώνου είναι (7-2)P=5P, άρα, το μέσο μέτρο (σε μοίρες) μιας γωνίας στο τυχαίο επτάγωνο της κάλυψης είναι 5P/7.Ομως όλο το επίπεδο είναι καλλυμενο με επτάγωνα, κατά συνέπεια, το μέσο μέτρο σε μοίρες μιας γωνίας στο «μωσαϊκό» του επιπέδου είναι επίσης 5P/7.Αλλα σε κάθε κορυφή του μωσαϊκού τέμνονται 3 τέτοιες γωνίες όπου το μέσο μέτρο μιας γωνίας είναι 2P/3.Ειναι προφανές ότι κάθε γωνία ανήκει σε κάποια κορυφή του μωσαϊκού. Δηλαδή, ισχύει:

2P/3=5P/7 ή 2/3=5/7 ή 14=15!!

Που βρίσκεται το λάθος στον παραπάνω συλλογισμό;»

241. *"Όμορφο και αγαπητό υπέροχο κορίτσι με μάτια σαν του ζαρκαδιού!Αν είσαι ικανή στον πολλαπλασιασμό,πες μου,πόσο κάνει 135 φορές το 12;"*

Bhaskara ,Lilavati

Ο Ινδός μαθηματικός Bhaskara,το 1150,έγραψε ένα βιβλίο με τίτλο Lilavati (η όμορφη) για να παρηγορήσει την κόρη του, που αστρονόμοι αποφάνθηκαν ότι δεν έπρεπε να παντρευτεί. Σε αυτό το βιβλίο,υπάρχει το εξής πρόβλημα:

Η φωλιά ενός φιδιού βρίσκεται στην βάση ενός στύλου 15 μέτρων,στην κορυφή του οποίου κουρνιάζει ένα παγωνι.Το παγωνι,βλέποντας το φίδι σε απόσταση τριπλάσια από το ύψος του στύλου να έρπει προς την φωλιά του,επιτίθεται αιφνιδιαστικά με σκοπό να το αρπάξει.
Πείτε γρήγορα,στα πόσα μέτρα από την φιδοφωλιά θα συναντηθούν,αν και τα δυο κινηθούν κατά την ίδια απόσταση.

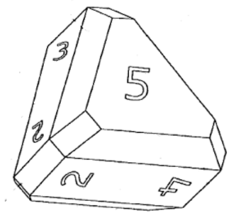
242. Ένα πρόβλημα με πολλά..μηδενικά

Ενα ωραίο πρόβλημα από τον P. Halmos που λύνεται αρκεί να θέσουμε τα σωστά ερωτήματα.

Να βρείτε το πλήθος των μηδενικών του αριθμού 1000000! (παραγοντικό)

(Υπενθύμιση 1000000!=1*2*3*4*5*….*999999*1000000)

243.Ένα αμερόληπτο πενταεδρικό ζάρι



Ενα ενδιαφέρον αλγοριθμικό προβληματάκι από αυτά που ταλαίπωροι υποψήφιοι για θέσεις εργασίας σε πολυεθνικές αιχμής καλούνται να απαντήσουν.

Υπάρχουν ζάρια πολλών διαφορετικών σχημάτων και είναι εύκολο να φανταστούμε τετράεδρικα, εξαεδρικά , οχταεδρικά,δωδεκαεδρικά ζάρια,όλα τους να είναι αμερόληπτα ,δηλαδή,κάθε έδρα σε πολύ μεγάλο αριθμό ρίψεων είναι αναμενόμενο να έχει την ίδια συχνότητα εμφάνισης.
Πως μπορεί να κατασκευαστεί ένα πεντάεδρικό ζάρι;
Το δίπλωμα ευρεσιτεχνίας με αριθμό US6926275 κατοχυρώνει ένα πενταεδρικό αμερόληπτο ζάρι.
Αποτελείται από δυο τριγωνικές έδρες και τέσσερις έδρες σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου.Αν πραγματοποιήσουμε ρίψη ενός τέτοιου ζαριού και προσγειωθεί σε μια από τις δυο τριγωνικές έδρες λαμβάνουμε ως αποτέλεσμα της ρίψης τον αριθμό στην ορατή τριγωνική έδρα.Αν προσγειωθεί σε μια από τις τρεις έδρες σχήματος ορθογώνιου τότε λαμβάνουμε ως αποτέλεσμα της ρίψης τον άνω αριθμό σε κάθε μία από τις άλλες ορατές ορθογώνιες έδρες (είναι ο ίδιος).

Το αποτέλεσμα της ρίψης είναι το 3

Το πρόβλημα.

Πως μπορούμε με την χρήση ενός πενταεδρικού ζαριού να επιλέξουμε τυχαία μια από τις ημέρες της εβδομάδας (με όσο το δυνατό λιγότερες ρίψεις).

244. Στα γρήγορα.. Κάποιος θέλει να ψήσει τρία μπιφτέκια σε ένα μπάρμπεκιου που χωράει μόνο δύο. Χρειάζονται 5 λεπτά για να ψηθεί η κάθε πλευρά του μπιφτεκιού, οπότε υπολογίζει πως χρειάζεται 10 λεπτά για να ψήσει τις δύο πλευρές των δύο πρώτων μπιφτεκιών και άλλα 10 για να ψήσει το τρίτο.

Υπάρχει συντομότερος τρόπος;

245.Μόλις έχω μετακομίσει σε διαμέρισμα του 5ου ορόφου μιας πολυκατοικίας, η οποία έχει 7 ορόφους και κάθε όροφος 3 διαμερίσματα.

Τα κουδούνια στην είσοδο της πολυκατοικίας είναι ανακατεμένα κι εγώ δεν ξέρω ποιο αντιστοιχεί στο δικό μου θυροτηλέφωνο.

Είμαι μόνος μου κι έχω στη διάθεσή μου μόνο ένα κασετόφωνο και μια άγραφη κασέτα.

Πώς μπορώ να εντοπίσω το κουδούνι που αντιστοιχεί στο διαμέρισμά μου;

246.(All time classic)Συναντιόνται δύο φίλοι ο *Σπύρος* και ο *Χάρης* και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:
- Τι κάνεις Χάρη; Πως είναι οι υιοί σου; Έχεις 3 γιους αν θυμάμαι καλά, όμως έχω ξεχάσει τις ηλικίες τους.
- Καλά είμαι Σπύρο, ναι έχω τρεις γιους που το γινόμενο των ηλικιών τους είναι 36 και το άθροισμα των ηλικιών τους ισούται με το αριθμό της οδού που μένεις .
- Ο Σωτήρης σκέπτεται και λέει: « Λυπάμαι δεν μπορώ να το βρω…»
- Με συγχωρείς λέει ο Χρήστος, ξέχασα να σου πω ότι ο μεγαλύτερος γιος μου είναι παίζει πολύ καλό σκάκι.
- Τώρα εντάξει, μπορώ να βρω τις ηλικίες τους!"

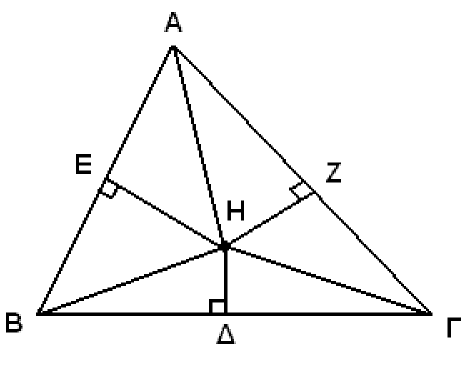
247.Γεωμετρική ψευδοαπόδειξη…

Γεωμετρικό παράδοξο που πιστώνεται στον Lewis Carroll ,τον συγγραφέα της *Άλικης στην χώρα των θαυμάτων .*

Κάθε τρίγωνο είναι ισοσκελές

Απόδειξη

Έστω τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ,φέρνουμε την διχοτόμο της γωνίας Α και την μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.Το σημείο τομής τους το ονομάζουμε Η. Από το Η φέρουμε καθετές προς τις άλλες δυο πλευρές.



Παρατηρούμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΗ και ΑΕΗ είναι ίσα, διότι έχουν την πλευρά ΑΗ κοινή και ίσες τις γωνίες ΕΑΗ και ΖΑΗ. Άρα ΑΕ=ΑΖ (1)

•Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΗ και ΓΔΗ είναι ίσα, διότι έχουν την πλευρά ΔΗ κοινή και ίσες τις πλευρές ΒΔ και ΔΓ.Άρα ΒΗ=ΗΓ (2)

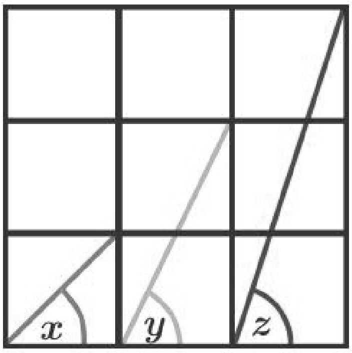
•Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΗ και ΗΖΓ είναι ίσα, διότι έχουν ίσες αντίστοιχα τις πλευρές ΒΗ και ΓΗ και από την πρώτη σύγκριση τριγώνων ΕΗ=ΗΖ. Άρα ΒΕ=ΖΓ (3)

Προσθέτουμε κατά μέλη (1),(3) και λαμβάνουμε

ΑΕ+ΒΕ =ΑΖ+ ΖΓ δηλαδή ΑΒ=ΑΓ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

Που βρίσκεται το λάθος;

248.Προβληματάκι

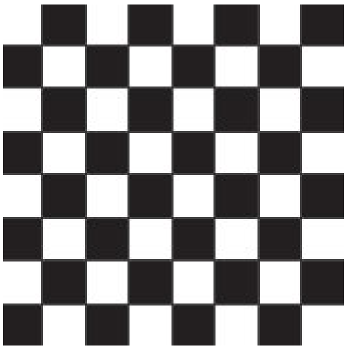


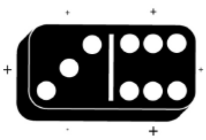
$$x + y + z = ?$$

249. Στα γρήγορα.. Είναι δυνατό να κατασκευάσουμε ένα μαγικό τετράγωνο 8x8 που να αποτελείται από τους 64 μικρότερους πρώτους αριθμούς;

250.Εχετε πέντε μεγάλα χαρτιά και ένα ψαλίδι. Τα κόβετε όλα ή κάποια από αυτά σε πέντε κομμάτια. Μπορείτε να επαναλάβετε την διαδικασία όσες φορές θέλετε .Μπορείτε να έχετε συνολικά 2016 κομμάτια;

251. Αν αφαιρέσουμε ένα μαύρο και ένα άσπρο τετραγωνάκι από μια συνηθισμένη σκακιέρα. Τότε το μέρος της σκακιέρας που απομένει μπορεί να καλυφτεί με 31 ντόμινο διαστάσεων 2x1.





252. Ένας τέλειος γρίφος για τέλειους αριθμούς….

«Το έξι είναι τέλειος αριθμός αφ 'αυτού και όχι επειδή ο Θεός δημιούργησε τον κόσμο σε εξι ημέρες,μάλλον το αντίστροφο ισχύει.Ο Θεός δημιούργησε τον κόσμο σε έξι ημέρες επειδή ο αριθμός έξι είναι τέλειος..»

Η πολιτεία του Θεού, Άγιος Αυγουστίνος (354-430)

Ένας αριθμός λέγεται **τέλειος** όταν το άθροισμα των διαιρετών του (εκτός του ίδιου) μας δίνει τον αριθμό.
Για παράδειγμα,ο αριθμός 28 είναι τέλειος γιατί οι διαιρετές του 28 είναι 1,2,4,7,14 και το άθροισμα αυτών:

$$1+2+4+7+14=28$$

Μέχρι το 1952 ήταν γνωστοί μόνο 12 τέλειοι αριθμοί, όλοι άρτιοι, και οι τρεις πρώτοι από αυτούς ήταν οι 6,28 και 496.Ο Ευκλείδης στα στοιχεία του απέδειξε ότι όλοι οι τέλειοι αριθμοί είναι πάντοτε γινόμενο μιας δύναμης του 2 επί την επόμενη δύναμη του 2 μείον 1. ($2^{\nu-1}(2^{\nu}-1)$ τέλειος)

Για παράδειγμα:

$$6 = 2^1.(2^2-1) \quad , \quad 28 = 2^2.(2^3-1) \quad , \quad 496 = 2^4.(2^5-1)$$

Βέβαια ισχύει ότι ο αριθμός $2^{\nu-1}(2^{\nu}-1)$ είναι τέλειος αν ο $2^{\nu}-1$ να είναι πρώτος και κατ επέκταση πρώτος είναι και ο ν.
Πολλά χρόνια μετά τον Ευκλείδη, ο Όιλερ (Euler) απέδειξε ότι ο τύπος $2^{\nu-1}(2^{\nu}-1)$ μας δίνει όλους τους άρτιους τέλειους αριθμούς.

Στα 1952 με την βοήθεια του υπολογιστή της εποχής SWAC και τον τύπο του Ευκλείδη ανακαλύφθηκαν 5 ακόμα τέλειοι αριθμοί για ν= 521,607,1729,2203 και 2281
Στα 1957 με τον Σουηδικό υπολογιστή BESK βρέθηκε άλλος ένας για ν= 3217 και στα 1961 με έναν υπολογιστή IBM 7090 βρέθηκαν άλλοι δυο για ν=4253 ,4423, Δεν υπάρχουν άλλοι τέλειοι αριθμοί για ν<5000.Εκτοτε,αποδείχτηκε ότι οι τιμές για ν=9689,9941,11213,19937,21701,23209 και 44497 δίνουν τέλειους αριθμούς.

Ο G.Hardy έγραφε: *«Οι* τέλειοι αριθμοί *είναι τόσο σπάνιοι όσο και οι* τέλειοι άνθρωποι.*»* Δεν ξέρω για ανθρώπους αλλά σίγουρα οι τέλειοι αριθμοί είναι εξαιρετικά σπάνιοι αφού υπάρχουν μόνο 3 τέτοιοι αριθμοί μικρότεροι του 1.000, ένας τέλειος μεταξύ 1001 – 10.000, ενώ μεταξύ 10.001 – 100.000.000 εντοπίζουμε μόνο ένα τέλειο. Μέχρι το 2016 έχουν βρεθεί 49 τέλειοι αριθμοί,όλοι με τον τύπο του Ευκλείδη και την βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών καθώς έχουν εκατομμύρια ψηφία.Ο 49^{ος} για παράδειγμα έχει 44,677,235 ψηφία.
https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_perfect_numbers

Άλυτα ερωτήματα

1.Υπαρχουν άπειροι τέλειοι αριθμοί;

2.Υπαρχει περιττός τέλειος αριθμός;

Προβληματάκι

Να αποδείξετε ότι οι τέλειοι αριθμοί αν είναι άρτιοι τότε έχουν τελευταίο ψηφίο 6 ή 8.

http://mathhmagic.blogspot.gr/ **Οι λύσεις στην σελ 166**

Η εικασία του Gilbreath!!!!

Το 1958,εν μέσω καλοκαιρινής ραστώνης ο Αμερικανός μαθηματικός και ερασιτέχνης ταχυδακτυλουργός Norman L.Gilbreath εμπνεύστηκε μια εικασία που αφορά ένα από τα μεγαλύτερα μυστήρια των μαθηματικών , τους πρώτους αριθμούς .

Ο Gilbreath έγραψε σε ένα χαρτί διαδοχικούς πρώτους αριθμούς ξεκινώντας από το 2. Στην συνέχεια έγραψε τις διαφορές των διαδοχικών αυτών αριθμών δημιουργώντας νέες σειρές:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,...

1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, ...

1, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, ...

1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 2, ...

1, 2, 0, 0, 0, 0, 2, ...

1, 2, 0, 0, 0, 2, ...

1, 2, 0, 0, 2, ...

1, 2, 0, 2, ...

1, 2, 2, ...

1, 0, ...

1,...

Ο Gilbreath λοιπόν ισχυρίστηκε ότι στην πρώτη στήλη εκτός από το πρώτο στοιχείο πάντα θα προκύπτει ο αριθμός 1. Μέχρι σήμερα κανένας δεν κατόρθωσε να βρει μια εξαίρεση (ένα αντιπαράδειγμα). Ο μαθηματικός Richard Guy αναφέρει χαρακτηριστικά: *« Δεν φαίνεται στον ορίζοντα μια απόδειξη της εικασίας του Gilbreath στο εγγύς μέλλον παρ ότι πιθανότατα ισχύει!»* Οι μαθηματική κοινότητα δεν έχει καν την βεβαιότητα αν η εικασία αφορά τους πρώτους αριθμούς ή μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε ακολουθία αριθμών η οποία αρχίζει με το 2 και συνεχίζει με περιττούς αριθμούς που αναπτύσσονται με κάποιο τρόπο που δεν γνωρίζουμε. Παρ ότι σαν ερώτημα η εικασία δεν αποτελεί σημαντικό πρόβλημα των μαθηματικών είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα προβλήματος που μπορεί να θέσει ακόμα και ένας ερασιτέχνης αλλά απαιτούνται αιώνες μέχρι να αποδειχτεί. Θυμηθείτε την εικασία του Goldbach , την εικασία του Collatz.Ο Πωλ Έρντος πίστευε ότι η εικασία του Gilbreath ισχύει ,αλλά απαιτούνται περισσότερα από 200 χρόνια μέχρι να αποδειχθεί.

Η μέρα των Χριστουγέννων και ένα πρόβλημα του μαθηματικού διαγωνισμού Putnam

Φέτος τα Χριστούγεννα πέφτουν Παρασκευή. Πέρυσι ήταν Πέμπτη , εν γένει η μέρα των Χριστουγέννων αλλάζει κάθε χρόνο. Είναι εύλογο λοιπόν να υποτεθεί ότι κάθε μέρα της εβδομάδας έχει τις ίδιες πιθανότητες να είναι η μέρα των Χριστουγέννων. Όμως αυτό δεν είναι σωστό!! Δεν έχουν όλες οι μέρες της εβδομάδας την ίδια πιθανότητα να πέφτουν Χριστούγεννα . Ένα ανάλογο πρόβλημα τέθηκε το 1950 , στον μαθηματικό διαγωνισμό Putnam. Η διατύπωση του είναι η εξής :

«Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα η μέρα των Χριστουγέννων να είναι Κυριακή δεν είναι 1/7».

Για να είμαστε ακριβείς το πρόβλημα αφορά το Γρηγοριανό ημερολόγιο και οι κανόνες που καθορίζουν τα δίσεκτα και τα μη δίσεκτα έτη είναι:

1. Τα έτη που δεν είναι δίσεκτα έχουν 365 μέρες ενώ τα έτη που είναι δίσεκτα έχουν 366 μέρες .
2.Τα μη δίσεκτα έτη δεν είναι πολλαπλάσια του 4 ή διαιρούνται με το 100 αλλά όχι με το 400(για παράδειγμα τα 1700,1800 και 1900 δεν ήταν δίσεκτα έτη.)
3.Τα δίσεκτα έτη διαιρούνται με το 4 αλλά όχι με το 100 ή διαιρούνται με το 400(για παράδειγμα τα έτη 1600 και 200 ήταν δίσεκτα)

Επανερχόμαστε στο αρχικό ερώτημα: « να αποδειχτεί ότι η πιθανότητα η μέρα των Χριστουγέννων να είναι Κυριακή δεν είναι 1/7»

Καταρχήν, ας δούμε γιατί αλλάζει κάθε χρόνο η μέρα των Χριστουγέννων. Ένα έτος με 365 ημέρες έχει 52 εβδομάδες και 1 επιπλέον ημέρα .Αυτή η μέρα είναι η αιτία που κάθε ερχόμενο έτος θα ξεκινήσει μια μέρα αργότερα από ότι ξεκίνησε το προηγούμενο (αν το 2011 ξεκίνησε με Σάββατο ,το 2012 θα ξεκινήσει με Κυριακή) .Άρα η διαδικασία αυτή το επόμενο έτος θα «σπρώξει» και την ημέρα των Χριστουγέννων κατά μια μέρα.

Είναι αναμενόμενο λοιπόν ύστερα από ένα συγκεκριμένο αριθμό ετών θα υπάρξει ταύτιση όλων των ημερών ενός έτους με τις ημέρες κάποιου από τα προηγούμενα. Ποιος είναι αυτός ο χρονικός κύκλος .Για το Γρηγοριανό ημερολόγιο ο χρονικός κύκλος είναι 400 χρόνια .

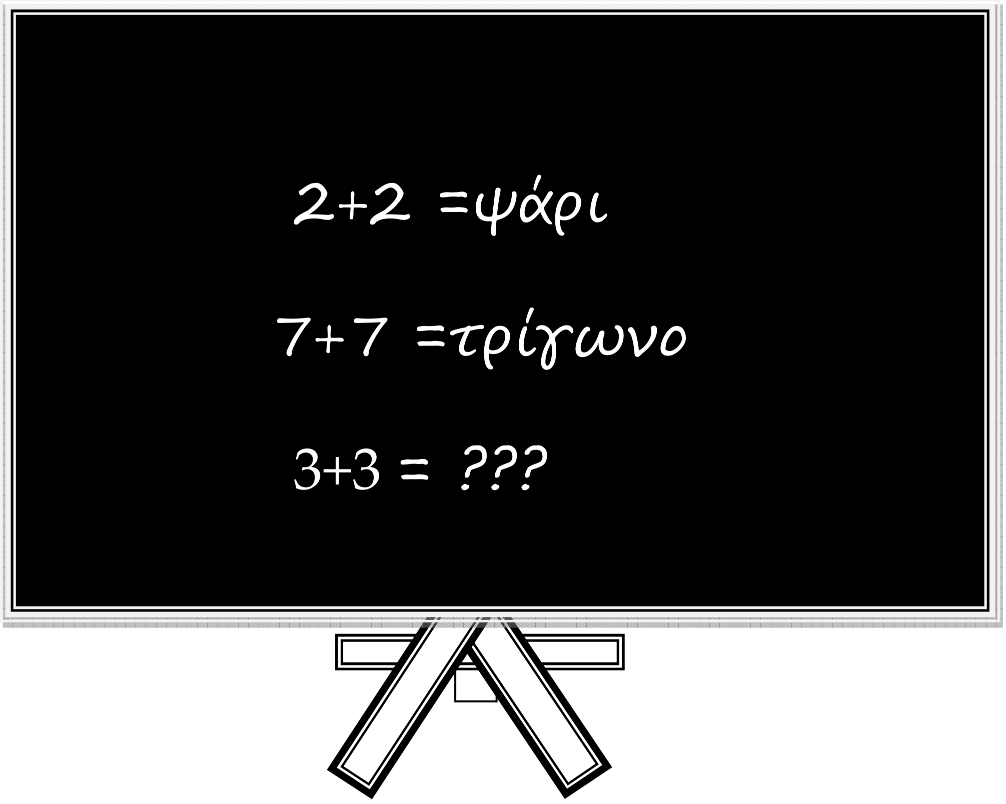
Δείτε, κάθε 400 χρόνια έχουμε 303 μη δίσεκτα έτη και 97 δίσεκτα έτη, ένα σύνολο από 303x365+97x366= 146097 μέρες .Ο αριθμός αυτός διαιρείται ακριβώς με το 7, αυτό σημαίνει ότι 400 χρόνια είναι ακριβώς 146097 /7=20871 εβδομάδες .Χωρίς υπόλοιπο <u>καμία μέρα</u>,η μέρα της εβδομάδας που θα πέσουν τα Χριστούγεννα καθώς και όλες οι άλλες μέρες θα είναι οι ίδιες κάθε 400 χρόνια. Τώρα όσο αφορά τη ζητούμενη πιθανότητα .Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε διάστημα 400 ετών υπάρχουν Ε έτη που τα Χριστούγεννα θα πέφτουν Κυριακή,τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι Ε/400 αλλά για καμία φυσική τιμή του Ε το κλάσμα Ε/400 δεν ισούται με το 1/7.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η συχνότητα εμφάνισης κάθε ημέρας στην γιορτή των Χριστουγέννων σε διάστημα 400 ετών, αποδεικνύεται ότι:

Κυριακή 58
Δευτέρα 56
Τρίτη 58
Τέταρτη 57
Πέμπτη 57
Παρασκευή 58
Σάββατο 56

Άρα είναι πιθανότερο η μέρα των Χριστουγέννων να πέσει Κυριακή ,Τρίτη ή Παρασκευή.

Οι προληπτικοί θα είναι καλό να γνωρίζουν ότι η 13 κάθε μήνα είναι πιθανότερο να πέσει παρασκευή παρά οποιαδήποτε άλλη μέρα της εβδομάδας.



Ενας γράφος για την διαιρετότητα με το 7

Σε παλιότερη ανάρτηση (http://mathhmagic.blogspot.gr/2011/11/7.html) έκανα αναφορά στο κριτήριο διαιρετότητας του επτά.

Δείτε μια σχηματική απεικόνιση του κριτηρίου με χρήση ενός γράφου για οπτικούς τύπους.

Θεωρούμε ένα θετικό ακέραιο αριθμό.Εφαρμόζουμε διαδοχικά τα παρακάτω βήματα.

1.Με αφετηρία το Ναι.

2.Μετακινούμαστε δεξιόστροφα ακολουθώντας τα μαύρα βέλη τόσες φορές όσες και το πρώτο ψηφίο (από αριστερά) του αριθμού.

3.Μετακινούμαστε κατά το πράσινο βέλος και θεωρούμε το επόμενο ψηφίο (δεξιότερα) του αρχικού αριθμού.

4.Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 για κάθε ψηφίο. (εκτός από το τελευταίο)

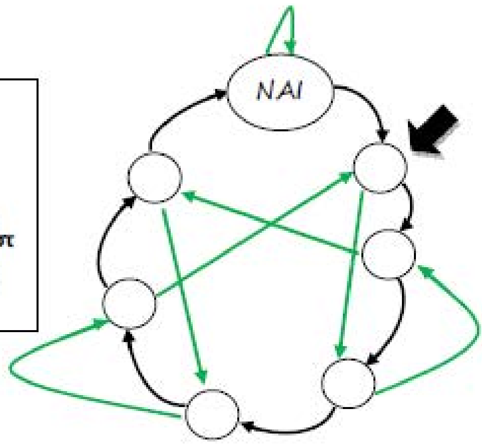
5.Αν καταλήξουμε στο Ναι τότε ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 7.

Παράδειγμα ο αριθμός 133

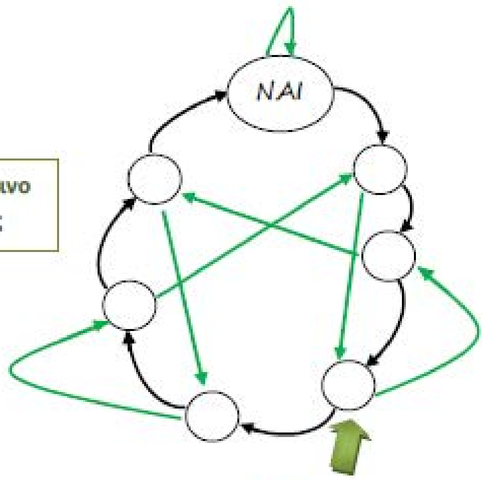
ΔΟΚΙΜΗ ΜΕ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟ 133

1

Μια θέση δεξιόστροφα



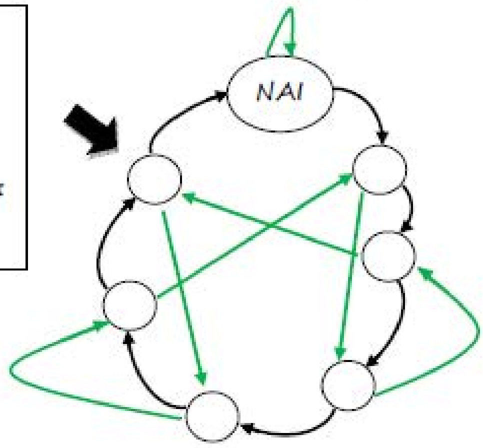
Πράσινο βέλος

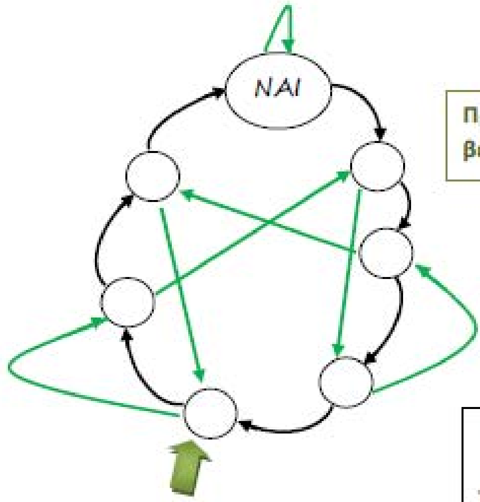


3

Τρεις θέσεις

δεξιόστροφα



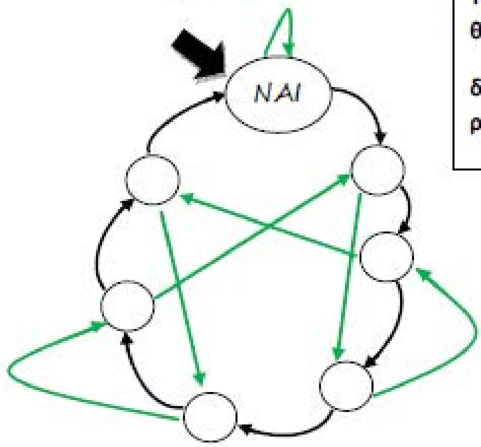


Πράσινο βέλος

3

Τρεις θέσεις

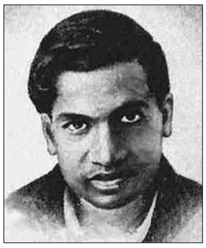
δεξιόστροφα



ΚΑΤΑΛΗΞΑΜΕ ΣΤΟ ΝΑΙ ΑΡΑ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ 133 ΕΙΝΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ ΤΟΥ ΕΠΤΑ.

Το σχήμα επιμελήθηκε ο Αλί Μπαμπά και ο έβδομος από τους κλέφτες του.

Γρίφος Ραμανουτζάν



Το Δεκέμβριο του 1914 στη στήλη «Σπαζοκεφαλιές» του αγγλικού περιοδικού Strand δημοσιεύθηκε μια ιστορία-γρίφος που απασχόλησε τον Ραμανουτζάν και τον φίλο του, Πρασάντα Τσάντρα Μαχαλανόμπις. Το πρόβλημα είχε κεντρίσει αρχικά το ενδιαφέρον του Μαχαλανόμπις, ο οποίος στη συνέχεια το έδειξε στον Ραμανουτζάν, προκαλώντας τον να βρει την απάντηση.

Η ιστορία-γρίφος
«Είχα πιάσει συζήτηση τις προάλλες», είπε ο Γουίλιαμ Ρότζερ στην ομήγυρη των χωριανών που είχαν μαζευτεί γύρω από τη φωτιά του πανδοχείου, «σε έναν κύριο σχετικά με την πόλη που λέγεται Λουβέν, και την οποία κατέκαψαν οι Γερμανοί (*στον 1^{o} παγκόσμιο πόλεμο)*. Μου είπε ότι τη γνώριζε καλά – επισκέπτονταν συχνά εκεί έναν βέλγο φίλο. Είπε ότι το σπίτι του φίλου του βρισκόταν σε μια οδό με πολλά νούμερα, τα οποία ξεκινούσαν από τη μια μεριά με ένα, δυο, τρία και ούτω καθεξής, και **ότι όλα τα νούμερα πριν από το σπίτι του είχαν ακριβώς το ίδιο άθροισμα με όλα τα νούμερα μετά το σπίτι του**. Αστείο πράμα! Ισχυρίστηκε πως ήξερε ότι **υπήρχαν περισσότερα από 50 σπίτια σε αυτή τη μεριά του δρόμου, αλλά λιγότερα από 500**. Ανέφερα το θέμα στον εφημέριό μας, και εκείνος με ένα μολύβι έβγαλε τον αριθμό του σπιτιού που ζούσε ο Βέλγος. Δεν ξέρω πως το έκανε».Μήπως μπορείτε να βρείτε αυτόν τον αριθμό;

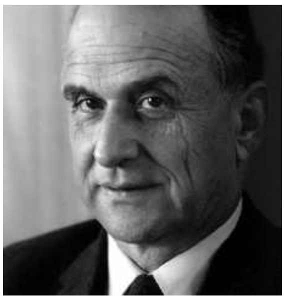
Μέσω της μεθόδου δοκιμής και σφάλματος, ο Μαχαλανόμπις βρήκε τη λύση μέσα σε λίγα λεπτά. Και ο Ραμανουτζάν τη βρήκε, αλλά με έναν ελιγμό. «Γράψε τη λύση σε παρακαλώ», είπε – και υπαγόρευσε στη συνέχεια ένα συνεχές κλάσμα. Δεν επρόκειτο απλώς για τη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος, αλλά για τη λύση μιας ολόκληρης κλάσης προβλημάτων που υπαινισσόταν ο γρίφος. Με τον τρόπο με τον οποίο διατυπώθηκε, το πρόβλημα δεν είχε παρά μια λύση – **το σπίτι με τον αριθμό 204 σε ένα δρόμο με 288 σπίτια**:
1 + 2 + 3 + … + 203 = 205 + 206 + … + 288. Χωρίς τον περιορισμό 50 και 500, υπήρχαν και άλλες λύσεις. Για παράδειγμα σε ένα δρόμο με 8 σπίτια, η σωστή απάντηση θα ήταν το υπ’ αριθμόν 6 σπίτι:
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 7 + 8
Το συνεχές κλάσμα του Ραμανουτζάν περιείχε μέσα σε μια και μοναδική έκφραση όλες τις ορθές απαντήσεις. Ο Μαχαλανόμπις έμεινε άλαλος. Πως το έκανες αυτό; ρώτησε τον Ραμανουτζάν. «Μόλις άκουσα το πρόβλημα ήμουν βέβαιος ότι η λύση έπρεπε προφανώς να είναι ένα συνεχές κλάσμα· στη συνέχεια σκέφτηκα, ποιο συνεχές κλάσμα; Και η απάντηση μου ήρθε αμέσως».

Οι λύσεις στην σελ 166

Ενα τέχνασμα λογικής του φιλοσόφου Νέλσον Γκούντμαν.

Έστω ένα ιδεατό παράλληλο συμπάν όπου κάθε κάτοικος λέει πάντα ψέματα είτε λέει πάντα αλήθεια. Με την βοήθεια του φιλόσοφου Νέλσον Γκούντμαν, μπορούμε να ανακαλύψουμε την αλήθεια ή την αναλήθεια κάθε πρότασης υποβάλλοντας στον οποιοδήποτε μόνο μια ερώτηση.Το παράξενο είναι μετά την απάντηση που θα πάρουμε δεν θα είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε αν είναι αληθινή ή ψεύτικη.

Φανταστείτε ότι ζείτε σε αυτό το ιδεατό αυτό συμπάν και θέλετε να μεταβείτε στο εκλογικό σας τμήμα, το τμήμα Α να ψηφίσετε.Οδοιπορείτε ανυπόμονοι να ασκήσετε το εκλογικό σας δικαίωμα. Φτάνετε σε ένα σταυροδρόμι.Είστε βέβαιοι ότι ένας από τους δυο δρόμους οδηγεί στο εκλογικό σας τμήμα.Το τμήμα Α, αλλά δεν γνωρίζετε ποιος. Στο σταυροδρόμι ρακένδυτος μεσοαστός κάθεται και παίζει φλογέρα. Δεν γνωρίζετε αν είναι από αυτούς που λένε πάντα ψέματα(αενάως ανειλικρινής) ή πάντα αλήθεια (αενάως ειλικρινής).Πρέπει να του κάνετε μια ερώτηση και από την απάντηση να συμπεράνετε ποιος είναι ο δρόμος που οδηγεί στο τμήμα Α.



Nelson Goodman (1906-1998)

Ο φιλόσοφος Νελσον Γκούντμαν στο συγκεκριμένο πρόβλημα προτείνει την ερώτηση.

Είσαι από αυτούς που θα ισχυρίζονταν ο αριστερός δρόμος οδηγεί στο τμήμα Α;

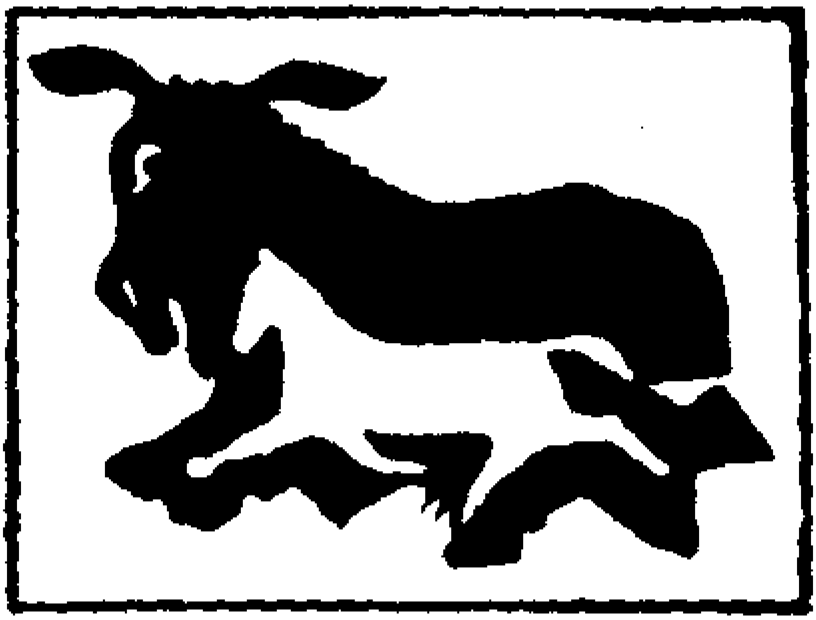
Αφού σας απαντήσει δεν θα είστε σε θέση να γνωρίζετε αν είναι ψεύτης ή ειλικρινής όμως θα γνωρίζετε ποιο δρόμο θα πάρετε.

Σκεφτείτε το λίγο.Αν υποθέσουμε ότι απάντησε Ναι.Αν είναι ειλικρινής έχει πει την αλήθεια και είναι από αυτούς που θα ισχυρίζονταν ότι ο αριστερός δρόμος οδηγεί στο τμήμα Α. Συνεπώς, πρέπει να ακολουθήσετε τον αριστερό δρόμο. Από την άλλη μεριά, αν είναι απατεώνας , έδωσε ψεύτικη απάντηση , πράγμα που σημαίνει ότι δεν είναι από εκείνους που θα ισχυρίζονταν πως ο αριστερός δρόμος οδηγεί στο τμήμα Α, μόνο κάποιος του αντιθέτου τύπου -ένας ειλικρινής – θα ισχυριζόταν κάτι τέτοιο .Εφόσον όμως , ένας ειλικρινής θα υποστήριζε ότι ο αριστερός δρόμος οδηγεί στο τμήμα Α,τότε πράγματι ο αριστερός δρόμος οδηγεί εκεί. Ανεξάρτητα του αν η απάντηση είναι *ναι* είναι αληθής ή ψευδής , ο αριστερός δρόμος οδηγεί στο τμήμα Α.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι σας απάντησε *Όχι*. Αν είναι είναι ειλικρινής , τότε σίγουρα δεν ανήκει σε εκείνους που θα ισχυρίζονταν πως ο αριστερός δρόμος οδηγεί στο τμήμα Α. Μόνο ένας ανειλικρινής θα ισχυριζόταν κάτι τέτοιο . Από την στιγμή,όμως ,που θα έκανε αυτήν την δήλωση ένας ανειλικρινής, η δήλωση θα ήταν ψευδής , όποτε ο αριστερός δρόμος δεν οδηγεί στο τμήμα Α.Αν ,πάλι αυτός που ρωτάτε ψεύδεται, τότε ουσιαστικά ισχυρίζεται πως ο αριστερός δρόμος οδηγεί στο τμήμα Α(αφού δηλώνει ότι δεν οδηγεί εκεί), αλλά,αφού είναι απατεώνας , ο ισχυρισμός του θα ήταν ψευδής , πράγμα που σημαίνει και εδώ πως ο αριστερός δρόμος δεν οδηγεί στο τμήμα Α. Όλα αυτά δείχνουν ότι, αν η απάντηση είναι Όχι, πρέπει να ακολουθήσετε το δεξιό δρόμο ανεξάρτητα αν αυτός που ρωτήσατε λέει αλήθεια η ψέματα.

ΛΥΣΕΙΣ

1)



2)Αν χ είναι ο αριθμός των καρυδών αρχικά και y ο αριθμός των καρυδών που πηρέ ο κάθε ναύτης το πρωί.

Όταν ο πρώτος ναύτης ξυπνά τότε δίνει μια καρύδα στον πίθηκο και κρύβει το ένα πέμπτο άρα υπολείπονται τα υπόλοιπα τέσσερα πέμπτα:

$$\frac{4}{5}(x-1)$$

Όταν ξυπνά ο δεύτερος ναύτης ομοίως με τον πρώτο δίνει μια καρύδα και κρύβει το ένα πέμπτο άρα υπολείπονται τα υπόλοιπα τέσσερα πέμπτα:

$$\frac{4}{5}(\frac{4}{5}(x-1)-1)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για τους πέντε ναύτες τελικά μένουν συνολικά:

$$\frac{4}{5}(\frac{4}{5}(\frac{4}{5}\{\frac{4}{5}[(\frac{4}{5}(x-1)-1)]-1\}-1)-1)-1)$$

Ο καθένας από τους πέντε ναύτες παίρνει το ένα πέμπτο :

$$y=\frac{1}{5}(\frac{4}{5}(\frac{4}{5}(\frac{4}{5}\{\frac{4}{5}[(\frac{4}{5}(x-1)-1)]-1\}-1)-1)-1))$$

Και καταλήγουμε σε μια εξίσωση με δυο αγνώστους η οποία μοιάζει πολύ δύσκολη η τουλάχιστον να έχει άπειρες λύσεις,δεν έχουμε χρησιμοποιήσει όμως ένα δεδομένο ότι χ, y είναι ακέραιοι αριθμοί .

Ας δουλέψουμε λίγο την παραπάνω εξίσωση:

$$y=\frac{1}{5}(\frac{4}{5}(\frac{4}{5}(\frac{4}{5}\{\frac{4}{5}[(\frac{4}{5}(x-1)-1)]-1\}-1)-1)-1))\Leftrightarrow y=\frac{1}{5}(\frac{4^5}{5^5}x-\frac{4^5}{5^5}-\frac{4^4}{5^4}-\frac{4^3}{5^3}-\frac{4^2}{5^2}-\frac{4}{5})\Leftrightarrow$$

$$y=\frac{1}{5}(\frac{4^5}{5^5}x-\frac{4^5}{5^5}-\frac{4^4}{5^4}-\frac{4^3}{5^3}-\frac{4^2}{5^2}-\frac{4}{5})\Leftrightarrow y=\frac{1}{5}(\frac{4^5}{5^5}(x-1)-\frac{4^4}{5^4}-\frac{4^3}{5^3}-\frac{4^2}{5^2}-\frac{4}{5})$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{5}(\frac{4^5}{5^5}(x-1)-(\frac{4^4}{5^4}+\frac{4^3}{5^3}+\frac{4^2}{5^2}+\frac{4}{5})^{\frac{4^4}{5^4}+\frac{4^3}{5^3}+\frac{4^2}{5^2}+\frac{4}{5}\ \textit{διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{5}(\frac{4^5}{5^5}(x-1)-(\frac{4}{5}\frac{\frac{4^4}{5^4}-1}{\frac{4}{5}-1})\Leftrightarrow y=\frac{1}{5}(\frac{4^5}{5^5}(x-1)-(\frac{4}{5}\frac{\frac{4^4}{5^4}-1}{-\frac{1}{5}})$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{5}(\frac{4^5}{5^5}(x-1)+4(\frac{4^4}{5^4}-1))\Leftrightarrow y=\frac{4^5}{5^5}(x-1)+4(\frac{4^4}{5^4}-1))$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{4^5}{5^5}(x-1)+\frac{4^5}{5^4}-4\Leftrightarrow y=\frac{4^5}{5^5}(x-1)+5\frac{4^5}{5^5}-4\Leftrightarrow y=\frac{4^5}{5^5}(x-1+5)-4$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{4^5}{5^5}(x+4)-4\Leftrightarrow y+4=\frac{4^5}{5^5}(x+4)\Leftrightarrow \frac{5^5}{4^5}(y+4)-4=x$$

Τελικά $x=\frac{5^5}{4^5}(y+4)-4$ αλλά τόσο το χ όσο και το y είναι ακέραιοι αριθμοί και μάλιστα το y είναι σίγουρα πολλαπλάσιο του 5 καθώς είναι ο αριθμός των καρυδων το πρωί και οι ναύτες το χώρισαν σε πέντε ισα μερίδια άρα $y=5k$ η εξίσωση γίνεται: $x=\frac{5^5}{4^5}(5k+4)-4$ από την οποία είναι σαφές ότι για να βγαίνει ο χ ακέραιος πρέπει ο αριθμός $5k+4$ να διαιρείται ακριβώς με το $4^5=1024$.Ο $5k+4$ γράφεται $5k+4=5(4\theta)+4=4(5\theta+1)$ και $\frac{4(5\theta+1)}{1024}=\frac{5\theta+1}{256}\in\mathbb{Z}$ ο μικρότερος θ για τον οποίο ισχύει είναι ο θ =51 άρα ο κ=204 οπότε τελικά το χ=3121.

3) Αν οι τρεις αριθμοί είναι Α,Α+1,Α+2 τότε το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 3:

Α+(Α+1)+(Α+2)+3κ=3(Α+κ+1)

Πολλαπλασιάζουμε με το 67 και λαμβάνουμε:

201(Α+κ+1)

Αλλά Α<59 και 3κ<100 ή κ<34. Έτσι (Α+κ+1) είναι σίγουρα διψήφιος αριθμός ,τα δυο τελευταία ψηφία του 201(Α+κ+1) είναι (Α+κ+1).Αφαιρωντας κ+1 τότε λαμβάνουμε το αριθμό που σκεφτήκαμε αρχικά το Α. Τελικά τα υπόλοιπα δυο ή τρία ψηφία του 201(Α+κ+1) είναι 2(Α+κ+1).

4)Συμβολίζουμε με $α_1$ το βάρος του πρώτου ελέφαντα που βρίσκεται στην αριστερή άκρη και με $α_2,α_3,…,α_{15}$ τα βάρη των ελεφάντων που βρίσκονται διαδοχικά δεξιότερα από αυτόν. Σύμφωνα με τα δεδομένα ισχύει:

$$α_1+2α_2=15,\ α_2+2α_3=15,..,α_{14}+2α_{15}=15$$

Από τις εξισώσεις αυτές συμπεραίνουμε ότι τα βάρη των ελεφάντων $α_1$ έως και $α_{14}$ είναι περιττοί αριθμοί. Διακρίνουμε περιπτώσεις για το $α_1$:

-Για $α_1=1$ προκύπτει ότι $α_2=7$ και $α_3=4$.Η τιμή όμως $α_3=4$ είναι άρτια. Συνεπώς η λύση $α_1=1$ απορρίπτεται.

-Για $α_1=3$ προκύπτει ότι $α_2=6$ λύση η οποία απορρίπτεται.

-Για $α_1=5$ προκύπτει ότι $α_2=5$, $α_3=5$ και γενικά όλα τα βάρη των ελεφάντων είναι ίσα με 5 τόνους .

-Για $α_1=7$ προκύπτει $α_2=4$ λύση που απορρίπτεται.

-Για $α_1=9$ προκύπτει $α_2=3$ και $α_3=6$ λύση που απορρίπτεται.

-Για $α_1=11$ προκύπτει $α_2=2$ λύση που απορρίπτεται.

-Για $α_1=13$ προκύπτει $α_2=1,α_3=7$ και $α_4=4$ λύση που απορρίπτεται. Η μόνη λύση είναι $α_1=α_2=α_3=…=α_{14}=α_{15}=5$

5)Αν ο Αντώνης είναι ο έντιμος τότε από την δήλωση (2) θα γίνει πρωθυπουργός άλλα από την (ΙΙ) δεν θα γίνει υπουργός. Αν ο Αντώνης δεν είναι ο έντιμος από την (1) δεν θα γίνει υπουργός και από την (ΙΙ) θα γίνει πρωθυπουργός.
-Αν ο Γιάννης είναι ο έντιμος βουλευτής τότε από την (4) θα γίνει υπουργός αλλά από την (ΙΙ) δεν θα γίνει πρωθυπουργός . Αν ο Γιάννης δεν είναι ο έντιμος τότε από την (3) δεν θα γίνει πρωθυπουργός και από την (ΙΙ) δεν θα γίνει υπουργός .
-Ανάλογα αν ο Κώστας είναι έντιμος τότε από την (6) δεν θα γίνει υπουργός και από την (ΙΙ) δεν θα γίνει πρωθυπουργός .Αν ο Κώστας είναι ο έντιμος τότε από την (5) δεν θα γίνει υπουργός και από την (ΙΙ) δεν θα γίνει πρωθυπουργός.
Κατασκευάζουμε τον πίνακα:

Αν	**τότε θα μπορεί να γίνει μόνο :**
-Ο Αντώνης είναι έντιμος	πρωθυπουργός
-Ο Αντώνης δεν είναι έντιμος	πρωθυπουργός
-Ο Γιάννης είναι έντιμος	υπουργός
-Ο Γιάννης δεν είναι έντιμος	υπουργός
-Ο Κώστας είναι έντιμος	υπουργός
-Ο Κώστας δεν είναι έντιμος	πρωθυπουργός

Όμως ο Αντώνης δεν μπορεί να είναι ο έντιμος βουλευτής διότι σε αυτήν την περίπτωση και ο Αντώνης και ο Κώστας θα είχαν κατορθώσει να γίνουν πρωθυπουργοί ,άτοπο από την (Ι). Ο Κώστας δεν μπορεί να είναι ο έντιμος βουλευτής γιατί τότε και ο Γιάννης και ο Κώστας θα γίνονταν και οι δυο πρωθυπουργοί , άτοπο από την (Ι). Άρα τελικά ο Γιάννης είναι ο έντιμος βουλευτής εφόσον έχει γίνει υπουργός ικανοποιώντας την (Ι) και δεν έχει γίνει πρωθυπουργός ικανοποιώντας την (ΙΙ).

Κάθε ομοιότητα με την πραγματικότητα είναι τυχαία και πέραν των προθέσεων του γρίφου!!

6) Η μέγιστη βαθμολογία που μπορεί να λάβει ένας αθλητής είναι 5x5=25 .Εφόσον ο αθλητής Α συγκέντρωσε 24 βαθμούς συγκέντρωσε 5 βαθμούς σε καθένα από 4 αγωνίσματα και 4 βαθμούς σε 1 αγώνισμα. Εφόσον ο Ε συγκέντρωσε 5 βαθμούς στο αγώνισμα W τότε ο Α πρέπει να πήρε 4 βαθμούς στο αγώνισμα W και 5 βαθμούς στα υπόλοιπα. Κατασκευάζουμε ένα βοηθητικό πίνακα :

	V	W	X	Y	Z	Σύνολο
Α	5	4	5	5	5	24
Β						
Γ						
Δ	4					
Ε		5	3			

Δεν υπάρχει καμιά ισοπαλία κατά συνέπεια οι συνολικοί βαθμοί που θα μοιραστούν στους 5 αθλητές θα είναι 5(1+2+3+4+5)=75. Ποια είναι η ελάχιστη βαθμολογία που μπορεί να συγκεντρώσει ο αθλητής Ε ; Ο Ε μπορεί να πάρει τουλάχιστον 1 σε καθένα από τα υπόλοιπα τρία αθλήματα άρα συγκεντρώνει: 1+1+1+5+3=11.

Θα μπορούσε ο Ε να συγκεντρώσει 12 ή περισσότερους βαθμούς; Αν ο Ε συγκεντρώσει 12 βαθμούς τότε ο Δ θα συγκεντρώσει τουλάχιστον 13, ο Γ τουλάχιστον 14 , ο Β τουλάχιστον 13 βαθμούς ,θυμίζουμε ότι δεν υπάρχουν ισοβαθμίες ούτε στα αγωνίσματα ούτε στην τελική κατάταξη. Σε αυτήν την περίπτωση η συνολική βαθμολογία των 5 αθλητών θα ηταν:24+15+14+13+12=78 , το οποίο είναι αδύνατο.

Άρα ο Ε θα πρέπει να έχει σύνολο 11 βαθμούς ,1 βαθμό σε τρία αγωνίσματα. Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

	V	W	X	Y	Z	Σύνολο
Α	5	4	5	5	5	24
Β						
Γ						
Δ	4					
Ε	1	5	3	1	1	11

Έτσι οι αθλητές Ε και Α έχουν συγκεντρώσει 24+11=35 βαθμούς αφήνοντας 40 βαθμούς για τους υπόλοιπους τρεις αθλητές Β,Γ,Δ ο καθένας από τους οποίους θα έχει τουλάχιστον 12 βαθμούς .Δεν έχουμε ισοβαθμίες την τελική κατάταξη και γνωρίζουμε την τελική κατάταξη (ίδια με την αλφαβητική σειρά των ονομάτων) άρα οι αθλητές Β,Γ,Δ θα έχουν αντίστοιχα 12,13,15 βαθμούς .Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

	V	W	X	Y	Z	Σύνολο
Α	5	4	5	5	5	24
Β						15
Γ						13
Δ	4					12
Ε	1	5	3	1	1	11

Γνωρίζουμε ότι ο αθλητής Γ έχει την ίδια βαθμολογία σε 4 αγωνίσματα (που δεν μπορεί όμως να είναι 1 ,4 και 5 τα έχουμε ήδη δυο φορές το καθένα στον πίνακα). Απομένουν οι τιμές 2 και 5 ,η 2 απορρίπτεται (2+2+2+2+5=13) αρ ο αθλητής Γ έχει πάρει 3 βαθμούς σε 4 αγωνίσματα και 1 βαθμό στο $5^{ο}$ αγώνισμα .Όμως αποκλείεται να έχει πάρει ένα βαθμό στα αγωνίσματα V ,Y,Z θα είχαμε ισοβαθμία, και στο αγώνισμα X ο αθλητής Γ δεν μπορεί να πήρε 3 βαθμούς –επίσης ισοβαθμία άρα συμπληρώνουμε τον πίνακα:

	V	W	X	Y	Z	Σύνολο
Α	5	4	5	5	5	24
Β						15
Γ	3	3	1	3	3	13
Δ	4					12
Ε	1	5	3	1	1	11

Από τον πίνακα είναι σαφές ότι ο αθλητής Δ συγκέντρωσε 8 βαθμούς στα αγωνίσματα W,X,Y,Z , ειδικότερα 1 ή 2 βαθμούς στο αγώνισμα W , 2 ή 4 βαθμούς στα αγωνίσματα X,Y,Z. Όμως ο αθλητής Δ δεν μπορεί να έχει πάρει μόνο σε ένα αγώνισμα περιττό πλήθος βαθμών και παράλληλα να έχει συνολικό άθροισμα βαθμών άρτιο αριθμό(12) άρα έχει συγκεντρώσει 2 βαθμούς στο αγώνισμα W και επίσης 2 βαθμούς για καθένα από τα υπόλοιπα αγωνίσματα για να έχει σύνολο 12 βαθμούς . (αν είχε σε κάποιο αγώνισμα 4 θα ξέφευγε η συνολική του βαθμολογία πέρα από το 12)Ο πινάκας παίρνει την μορφή:

	V	W	X	Y	Z	Σύνολο
Α	5	4	5	5	5	24
Β						15
Γ	3	3	1	3	3	13
Δ	4	2	2	2	2	12
Ε	1	5	3	1	1	11

Προσέχοντας τώρα να μην έχουμε ισοβαθμία σε κανένα αγώνισμα και παράλληλα άθροισμα 15 συμπληρώνουμε τις επιδόσεις του αθλητή Β :

	V	W	X	Y	Z	Σύνολο
A	5	4	5	5	5	24
B	2	1	4	4	4	15
Γ	3	3	1	3	3	13
Δ	4	2	2	2	2	12
E	1	5	3	1	1	11

7) Από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι γνωστό ότι:

$$(30\alpha+40\beta)^2+(40\alpha+30\beta)^2=(50\alpha+\kappa\beta)^2 \Leftrightarrow 4800\alpha\beta+2500\beta^2=100\alpha\beta\kappa+\kappa^2\beta^2$$

Όμως $\beta>0$ άρα μπορούμε να διαιρέσουμε με το β και τα δυο μέλη της (1) και έτσι προκύπτει:

$$4800\alpha+2500\beta=100\alpha\kappa+\kappa^2\beta \Leftrightarrow 2500\beta-\kappa^2\beta=100\alpha\kappa-4800\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \beta(2500-\kappa^2)=100\alpha(\kappa-48) \Leftrightarrow \beta(50^2-\kappa^2)=100\alpha(\kappa-48) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \beta(50-\kappa)(50+\kappa)=100\alpha(\kappa-48)\ (2)$$

Από την σχέση (2) προκύπτει ότι οι όροι (κ-48) και (50-κ) είναι ομοσημοι.(α,β,κ>0)

$$\begin{cases}50-\kappa<0 \Leftrightarrow 50<\kappa\\ \kappa-48<0 \Leftrightarrow \kappa<48\end{cases}$$ άτοπο !!

$$\begin{cases}50-\kappa>0 \Leftrightarrow 50>\kappa\\ \kappa-48>0 \Leftrightarrow \kappa>48\end{cases} \Leftrightarrow 50>\kappa>48 \Leftrightarrow \kappa=49$$ (κ θετικός ακέραιος)

Για κ=49 η σχέση (2) γίνεται $99\beta=100\alpha \Leftrightarrow \frac{99}{100}=\frac{\alpha}{\beta}$ όμως οι αριθμοί 99 και 100 δεν έχουν άλλο κοινό διαιρέτη εκτός από το 1 οπότε οι μικρότερες τιμές για τα α,β είναι α=99 και β=100. Άρα η μικρότερη τριάδα τιμών για το (α,β,κ)=(99,100,49).

8)Έστω α:το πλήθος των ανδρών

β:ο αριθμός των γυναικών

x:η τιμή σε λεπτά του ευρώ για το μπουκάλι μπύρα

y: η τιμή σε λεπτά του ευρώ για το ένα ποτήρι κρασί (x,y ακέραιοι)

Συνολικό ποσό λογαριασμού της πρώτης μέρας : αx+βy

Συνολικό ποσό λογαριασμού της δεύτερης μέρας : αγ+βx

$$ax+\beta y = ay+\beta x+1 \Leftrightarrow ax+\beta y - ay-\beta x = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a(x-y)+\beta(y-x)=1 \Leftrightarrow a(x-y)-\beta(x-y)=1 \Leftrightarrow (a-\beta)(x-y)=1$$

Αλλά a,β,x,y θετικοί ακέραιοι και x>y οπότε πρέπει $x-y=1$ και $a-\beta=1 \Leftrightarrow \alpha=\beta+1$.

Άρα οι άνδρες είναι περισσότεροι από τις γυναίκες κατά 1 άτομο.

9)Οι κρυπτάριθμοι ως επί το πλείστον λύνονται με έξυπνες δοκιμές .
Αρχικά, $KISS < \sqrt{10000000} \approx 3162...$ άρα το K είναι κάποιο από τα ψηφία 1,2,3 ,όμως αν το K=3 τότε $I \leq 1$. Πιθανοί υποψήφιοι αριθμοί 3100,3011,3022,3044,3055,3066,3077,3088,3099,3122,3144,3155, κανένας τους όμως δεν μας κάνει καθώς ,τα τετράγωνα τους είτε τελειώνουν σε δυο ίδια ψηφία (PASSI<u>ON</u>). είτε το τρίτο και το τέταρτο ψηφίο του τετραγώνου δεν είναι το ίδιο (PA<u>SS</u>ION).Άρα K σίγουρα είναι 2 ή 3.Το S θα πρέπει να είναι ένα από τα 2,3,4,7,9 διότι η λέξη PASSION δεν τελειώνει σε S (εξαιρέσαμε και το 8 διότι $88 \cdot 88 = 7744$).

Επειδή το SS^2 τελειώνει σε ΟΝ και το ISS^2 τελειώνει σε ION , έχουμε τον ακόλουθο πίνακα με όλες τις δυνατές περιπτώσεις :

S	ON	I	K	KISS
2	84	-		
3	89	0	1 ή 2	1033 ή 2033
		2	1 ή 2	1233 ή 2233
		4	1 ή 2	1433 ή 2433
		6	1 ή 2	1633 ή 2633
4	36	-		
7	29	-		
9	01	6	1 ή 2	1699 2699

Από όλες τις δυνατές περιπτώσεις για το KISS μόνο ο αριθμός 2033 δίνει PASSSION 4133089. Πραγματικά $\sqrt{4133089} = 2033$

10) Έστω ότι ο παίκτης που απάντησε ότι έπαιξε σε 5 παιχνίδια ήταν από την Ξαπλοχώρα .Τότε συμπεραίνουμε από τις υπόλοιπες απαντήσεις ότι κάθε παίκτης της Χουζουροχώρας έπαιξε σε 3,6 και 9 παιχνίδια, και έτσι το πλήθος των παιχνιδιών που δηλώνουν οι παίκτες της Χουζουροχώρας διαιρείται με το 3. Όμως κάθε φορά που έπαιζε ένας κάτοικος της Χουζουροχώρας είχε αντίπαλο ένα κάτοικο της Ξαπλοχώρας . Άρα το πλήθος των παιχνιδιών που έλαβαν μέρος οι παίκτες της Ξαπλοχώρας διαιρείται επίσης από το 3. Το συνολικό πλήθος των παιχνιδιών είναι 6x3+1x5+4x6+1x9=56 , και τα μισά , 28 έγιναν από κάτοικους της Χουζουροχώρας . Το 28 όμως δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 , άρα μια τουλάχιστον απάντηση που δόθηκε ήταν ψευδής, Ανάλογα αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα αν στην αρχή υποθέσουμε ότι στα 5 παιχνίδια έλαβε μέρος παίκτης από την Χουζουροχώρα.

11)Για το πρώτο ερώτημα αρκεί να βρούμε ποιο πλήθος είναι μεγαλύτερο, Έλληνες άρρενες υπάλληλοι ή Γερμανίδες υπάλληλοι. Συνοψίζουμε τα παραπάνω δεδομένα σε ένα πίνακα.

	Υπάλληλοι Ελληνικής υπηκοότητας	Υπάλληλοι Γερμανικής υπηκοότητας	Άλλη υπηκοότητα	Σύνολο
Άνδρες	α	β	4	Σ-24
Γυναίκες	γ	δ	4	24
Σύνολο	15	Σ-23	8	Σ

(Σ: σύνολο υπάλληλων της εταιρείας)

Από τον πίνακα προκύπτει:

γ+δ=20 (1) α+γ=15 (2) .Απο(1),(2) με απαλοιφή του γ προκύπτει δ=α+5. Οπότε οι Γερμανίδες υπάλληλοι είναι περισσότερες από τους Έλληνες άνδρες υπάλληλους, άρα την εταιρεία την συμφέρει να δώσει αύξηση στους Έλληνες άνδρες υπαλλήλους .

Για το δεύτερο ερώτημα από την πρώτη γραμμή του πίνακα έπεται ότι:

α+β+4=Σ-24 ή α+β=Σ-28 (3) Αλλά επειδή ο Παπαδόπουλος από την Λαμία εργάζεται στην εταιρεία σίγουρα $a \geq 1 \Leftrightarrow a+\beta \geq 1+\beta \overset{a+\beta=\Sigma-28}{\Leftrightarrow} \Sigma-28 \geq 1+\beta \Leftrightarrow \Sigma \geq 29+\beta$ το β όμως θα μπορούσε να είναι 0 ,τελικά $\Sigma \geq 29$. Ο ελάχιστος αριθμός των υπαλλήλων είναι 29.

12)Εφόσον τα διαμάντια μπορούσαν αρχικά να τοποθετηθούν έτσι ώστε να σχηματίζουν τετράγωνο , θα πρέπει να είναι στο πλήθος όσο το τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού , έστω $χ^2$.Αφού ο Βούτας και τα δυο αδέλφια του δεν μπόρεσαν να μοιραστούν τα διαμάντια επειδή περίσσευαν 2 θα πρέπει να είναι στο πλήθος 3y+2. Άρα έχουμε $χ^2$=3y +2 (1) Εξετάζουμε αν υπάρχει ζεύγος φυσικών χ,y που να ικανοποιεί την (1).Για τον αριθμό χ υπάρχουν τρεις περιπτώσεις :

Α) Να διαιρείται με το 3.

Β) Να διαιρείται με το 3 και να αφήνει υπόλοιπο 1.

Γ) Να διαιρείται με το 3 και να αφήνει υπόλοιπο 2.

Ας δούμε μια- μια τις περιπτώσεις:

Α) Αν χ=3κ(κ φυσικός αριθμός) , τότε $χ^2$=9$κ^2$=3y+2 Άτοπο διότι ο αριθμός 3y+2 δεν διαιρείται με το 3.

Β) Αν $χ=3κ+1$, τότε $χ^2=9κ^2+6κ+1=3y+2$. ή $9κ^2+6κ=3y+1$ ή $3(3κ^2+2κ)=3y+1$ Άτοπο ,διότι ο αριθμός 3y+1 δεν διαιρείται με το 3.

Γ) Αν $χ=3κ+2$, τότε $χ^2=9κ^2+12κ+4=3y+2$. ή $9κ^2+12κ=3y-2$ ή $3(3κ^2+4κ)=3y-2$ Άτοπο ,διότι ο αριθμός 3y-2 δεν διαιρείται με το 3.

Άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη οπότε ο βοηθός του Λαμόγιου έλεγε ψέματα.

13)Έστω x ο μικρότερος από τους 8 αριθμούς (με $x \geq 1$) τότε το γινόμενο Γ είναι:

$$Γ = [x(x + 7)][(x + 1)(x + 6)][x + 2)(x + 5)][(x + 3)(x + 4)] =$$
$$= (x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12).$$

Θέτουμε $x^2 + 7x + 6 = y$ και έχουμε :

$$Γ = (y – 6)(y)(y+ 4)(y + 6) = (y^2 – 36)(y^2 + 4y) = y^4 + 4y(y+ 3)(y – 12).$$
Αν $y = x^2 + 7x + 6$ και $x \geq 1$ τότε προκύπτει $y – 12 >0$. $(y \geq 14)$

Έτσι $Γ > y^4$. (1)

Όμως, $Γ = y^4 + 4y^3 – 36y^2 – 144y$ και$(y + 1)^4 = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1$.
Οπότε $Γ< (y+ 1)^4$ (2)

Από (1),(2) έπεται ότι: $y^4 < Γ < (y + 1)^4$

Τελικά για κάθε φυσικό αριθμό y το γινόμενο Γ πάντα θα είναι ανάμεσα σε δυο τέταρτες δυνάμεις.

14)• Σύμφωνα με την συνθήκη (Α) η Χαρά δεν μπορεί να είναι η μεγαλύτερη σε ηλικία ,επομένως, λογω του (Β) η Αντωνία είναι η νεότερη. Στην συνέχεια λόγω του (Α) η Αντωνία δεν είναι η μεγαλύτερη σε ηλικία συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η μεγαλύτερη σε ηλικία είναι η Άννα. Τελικά η Άννα είναι η μεγαλύτερη και η Αντωνία είναι η νεότερη.

• Αφήνουμε την Αντωνία να επιλέξει πρώτη ένα από τα 3 κομμάτια .Θα επιλέξει σύμφωνα με την μέτρηση της δικής της ζυγαριάς ένα κομμάτι η άξια του οποίου δεν θα είναι μικρότερη από 4 ευρώ ή διαφορετικά δεν θα είναι μικρότερη από το 1/3 του τυριού. Τέτοιο κομμάτι προφανώς υπάρχει ,όταν, χωρίζουμε το αρχικό κομμάτι στα τρία αποκλείεται και τρία κομμάτια να έχουν βάρος μικρότερο από το 1/3 του αρχικού.

Στην συνέχεια επιτρέπουμε στην Άννα να διαλέξει ένα από τα δυο εναπομείναντα κομμάτια , σύμφωνα με την μέτρηση της ζυγαριάς του μπακάλη ότι και να διαλέξει η Αντωνία θα απομένει ένα κομμάτι που δεν είναι μικρότερο από το 1/3 του τυριού .

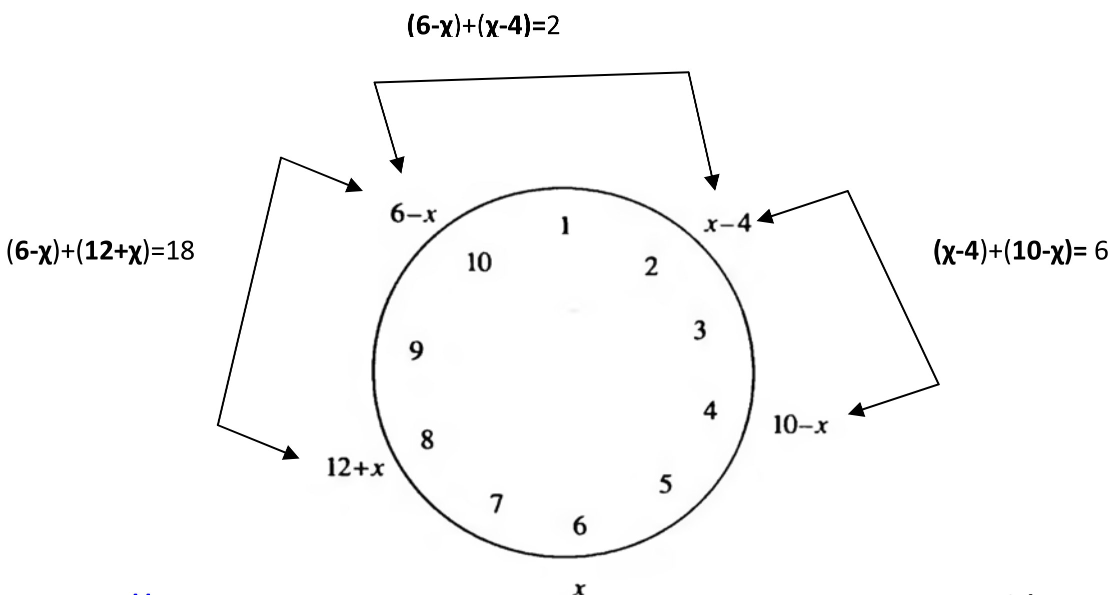
Τέλος παίρνει η Χαρά το τελευταίο κομμάτι και σίγουρα θα είναι ικανοποιημένη καθώς ήταν αυτή που μοίρασε το τυρί αρχικά και έκρινε ότι τα 3 κομμάτια είναι ισοβαρή!!

15) Εφόσον 300 και 198 είναι και οι δυο άρτιοι , μόνο ένας άρτιος αριθμός από ευρώ μπορεί να κατατίθεται ή να αποσύρεται από την τράπεζα.Παρατηρούμε επίσης ότι 300 και 198 είναι πολλαπλάσια του 3 κατά συνέπεια δεν είναι δυνατό με οποιαδήποτε ακολουθία αναλήψεων –καταθεσεων να αποσύρει και τα 500 ευρώ από την τράπεζα.

Αρα το μέγιστο ποσό που μπορεί να αποσυρθεί από την τράπεζα είναι τα 498 ευρώ.
Πως επιτυγχάνεται αυτό;Ανο πρωτος πελατης αποσύρει αρχικά 300 ευρώ στην συνέχεια καταθέτει 198 ευρώ και στην συνέχειά κάνει ανάληψη 300 ευρώ τότε θα έχουν μείνει στην τράπεζα 98 ευρώ. Αν στην συνέχεια πραγματοποιήσει τις εξής συναλλαγές +198+198-300+198-300 τότε θα έχουνε μείνει στην τράπεζα 92 ευρώ. Κάθε φορά που θα επαναλαμβάνει την παραπάνω ακολουθία αναλήψεων –καταθεσεων θα μένουν στην τράπεζα 6 ευρώ λιγότερα.Οπότε με συνεχή εφαρμογή της παραπάνω ακολουθίας τραπεζικών συναλλαγών θα μείνουν τελικά στην τράπεζα 2 ευρώ και θα έχει γίνει ανάληψη 498 ευρώ.
16)Με άτοπο. Αν υπήρχε τέτοιο μαγικό τετράγωνο, τότε :

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Ισχύει: b+e+h=d+e+f ή b+h=d+f (1)
Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι d είναι ο μικρότερος από τους b,h,d,f .
Υποθέτουμε ότι $d \neq 0$ (αν d=0 τότε ο παρακάτω ισχυρισμός θα εφαρμοστεί για τους αριθμούς a,c,g,i)
.Υποθέτουμε ότι $b \leq h$ τότε $d \leq b$ και για να ισχύει η (1) πρέπει: $f \geq h$.Ισχύει $d \leq b \leq h \leq f$.Επειδή $d \neq 0$ και υπάρχουν μόνο δυο ίσοι όροι(f1=f2=1) θα ισχύει $d \leq b < h \leq f$. Όμως b,h είναι διαφορετικοί όροι Fibonacci μικρότεροι από τον f άρα θα ισχύει $b+h \leq f$ (*) .Τότε όμως $b+h \leq f < f+d \Rightarrow b+h < f+d$ Άτοπο από (1) . Άρα είναι αδύνατο να κατασκευαστεί μαγικό τετράγωνο 3x3 που να αποτελείται από διαφορετικούς όρους της ακολουθίας Fibonacci.
(*)Η ισότητα ισχύει όταν οι b,h είναι οι δυο προηγούμενοι όροι του f .)
17) Προφανώς το άθροισμα των αριθμών που άκουσε ο κάθε παίκτης ισούται με το διπλάσιο του αριθμού που ανακοίνωσε .Εφόσον ανακοινώθηκαν με την σειρά των παικτών οι αριθμοί 1,2,3,4,…, 9,10 τότε ο παίκτης που ανακοίνωσε τον αριθμό 5 θα έχει ακούσει από τους γειτονικούς του παίκτες δυο αριθμούς με άθροισμα 10 (οι γειτονικοί του παίκτες είναι αυτοί που ανακοίνωσαν 4 και 6). Έτσι ,αν ο παίκτης(ο Χασογκόλης) που ανακοίνωσε το 6 σκέφτηκε το χ τότε ο παίκτης που ανακοινώσε το 4 σκέφτηκε το 6-χ. Ας δούμε το παρακάτω σχήμα και ας «κινηθούμε» ανάποδα από την φορά των δεικτών του ρολογιού.



Έστω ο παίκτης που ανακοίνωσε το 3.Αυτο σημαίνει ότι άκουσε από τους γειτονικούς του παίκτες άθροισμα 6 , άρα από τον παίκτη που ανακοίνωσε το 2 άκουσε τον αριθμό χ-4. Ανάλογα ,ο παίκτης που ανακοίνωσε το 10 πρέπει να σκέφτηκε τον αριθμό 6-χ, και όμοια, ο παίκτης που ανακοίνωσε το 8 πρέπει να σκέφτηκε τον αριθμό 12+χ.(βλέπε σχήμα)

Τελικά , ο παίκτης που ανακοίνωσε το 7 πρέπει να άκουσε από τους γειτονικούς του παίκτες δυο αριθμούς με άθροισμα 14, έτσι: (12+χ)+χ=14 , άρα χ=1

18)Ο δεύτερος παίκτης έχει πάντα το πλεονέκτημα εφόσον μπορεί να βελτιστοποιήσει τις πιθανότητες νίκης του έναντι του αντιπάλου ως έξης .

Αν ο $1^{ος}$ παίκτης επιλέξει το κόκκινο ζάρι , ο $2^{ος}$ επιλέγει το μπλε.

Αν ο$1^{ος}$ παίκτης επιλέξει το μπλε ζάρι , ο $2^{ος}$ επιλέγει το κίτρινο .

Αν ο $1^{ος}$ παίκτης επιλέξει το κίτρινο ζάρι , ο $2^{ος}$ επιλέγει το κόκκινο .

	$1^{ος}$ παίκτης	$2^{ος}$ παίκτης
$1^{η}$ περίπτωση	ένδειξη κόκκινου ζαριού	ένδειξη μπλε ζαριού
	3	**4** **6** **8**
	5	4 **6** **8**
	10	4 6 8
$2^{η}$ περίπτωση	ένδειξη μπλε ζαριού	ένδειξη κίτρινου ζαριού
	4	2 **7** **9**
	6	2 **7** **9**
	8	2 7 **9**
$2^{η}$ περίπτωση	ένδειξη κίτρινου ζαριού	ένδειξη κόκκινου ζαριού
	2	**3** **5** **10**
	7	3 5 **10**
	9	3 5 **10**

Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις στις 5 από τις 9 φορές (έντονα γράμματα) κερδίζει ο δεύτερος παίκτης.

19) Αν χ είναι οι κάτοικοι του νησιού που λένε πάντα ψέματα τότε 200-χ είναι το πλήθος των κάτοικων που λένε πάντα αλήθεια. Παρατηρούμε ότι:

Κάθε κάτοικος του νησιού που λέει πάντα ψέματα θα απαντήσει στις τρεις ερωτήσεις με μια αρνητική απάντηση (για το κόμμα που όντως ψήφισε) και με δυο καταφατικές απαντήσεις (για τα δυο κόμματα που δεν ψήφισε). Άρα το σύνολο των καταφατικών απαντήσεων που δόθηκαν από αυτούς που λένε πάντα ψέματα είναι 2χ. Ανάλογα , κάθε κάτοικος που λέει πάντα αλήθεια θα απαντήσει με δυο αρνητικές απαντήσεις (για τα δυο κόμματα που δεν ψήφισε) και μια καταφατική (για το κόμμα που ψήφισε). Άρα το σύνολο των καταφατικών απαντήσεων που δόθηκαν από αυτούς που λένε πάντα αλήθεια είναι 200-χ .Το συνολικό πλήθος των καταφατικών απαντήσεων που δόθηκαν είναι 150+50+(200-130)=270.Εχουμε λοιπόν την εξίσωση:

2χ+200-χ=270 ή χ=70

Άρα 70 κάτοικοι του νησιού λένε πάντα ψέματα.

20) Ας υποθέσουμε ότι ο Παπαδόπουλος στοιχημάτισε :

Α ευρώ στον Αννίβα

Β ευρώ στον Βουκεφάλα

Γ ευρώ στον Θρίαμβο

Γ ευρώ στον Πετεφρή (τα δυο τελευταία έχουν την ίδια απόδοση για αυτό έβαλε το ίδιο ποσό).

Τότε, εξετάζοντας όλα τα δυνατά αποτελέσματα παρατηρούμε:

Νικητής ο Αννίβας: $A+\frac{5}{2}A=\frac{7}{2}A$
Νικητής ο Βουκεφάλας : $B+2B=3B$
Νικητής ο Θρίαμβος: $\Gamma+6\Gamma=7\Gamma$
Νικητής ο Πετεφρής: $\Gamma+6\Gamma=7\Gamma$
Θα πρέπει ο Παπαδόπουλος ,όποιο άλογο και αν τερματίσει πρώτο να έχει ως έσοδο το ίδιο ποσό:

$$(1)\ \frac{7}{2}A=3\mathrm{B}=7\Gamma \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{7}{2}A=7\Gamma\\ \kappa\alpha\iota\\ 3\mathrm{B}=7\Gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=2\Gamma\\ \kappa\alpha\iota\\ 3\mathrm{B}=7\Gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=2\Gamma\\ \kappa\alpha\iota\\ \mathrm{B}=\frac{7}{3}\Gamma\end{cases}.$$

Έτσι ο Παπαδόπουλος <u>θα πληρώσει</u> $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Gamma=2\Gamma+\frac{7}{3}\Gamma+\Gamma+\Gamma=\frac{19}{3}\Gamma$ ευρώ ,και <u>θα εισπράξει</u> 7Γ ευρώ.

Προφανώς $7\Gamma>\frac{19}{3}\Gamma$, ο Παπαδόπουλος θα έχει <u>κέρδος</u> $7\Gamma-\frac{19}{3}\Gamma=\frac{2}{3}\Gamma$ ευρώ.

Άρα αρκεί ο Παπαδόπουλος να στοιχηματίσει ποσά Α,Β,Γ ευρώ που να ικανοποιούν την σχέση (1) και θα έχει πάντα κέρδος .

21)Δυο λύσεις :

Α	Β	Γ
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

Α	Β	Γ
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

22)Η απάντηση είναι ο αριθμός 9 υψωμένος στην ένατη δύναμη του 9 δηλαδή 9^{9^9} .

Αν υπολογίσουμε με την βοήθεια του WolphramAlpha δυνάμεις του 9 παρατηρούμε ότι τα δυο τελευταία ψηφία ακολουθούν ένα επαναλαμβανόμενο κύκλο δέκα τιμών δείτε:

$$\begin{cases} 9^1 = \underline{09} \\ 9^2 = \underline{81} \\ 9^3 = 7\underline{29} \\ 9^4 = 65\underline{61} \\ 9^5 = 590\underline{49} \\ 9^6 = 5314\underline{41} \\ 9^7 = 47829\underline{69} \\ 9^8 = 430467\underline{21} \\ 9^9 = 3874204\underline{89} \\ 9^{10} = 34867844\underline{01} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9^{11} = 313810596\underline{09} \\ 9^{12} = \ldots.\underline{81} \\ . \\ . \\ 9^{19} = \ldots\underline{89} \\ 9^{20} = \ldots.\underline{01} \end{cases}$$

(θα μπορούσαμε εναλλακτικά να πολλαπλασιάσουμε μόνο τα δυο τελευταία ψηφία όλων των παραπάνω αριθμών για να βρούμε τον κύκλο.)

Το 9^9 ισούται με 987420489 σύμφωνα με τον παραπάνω κύκλο ο αριθμός $9^{9^9} = 9^{987420489}$ τελειώνει σε 89.

Ο αριθμός αποτελείται από 369 εκατομμύρια ψηφία και θα απαιτούνταν 500 μίλια χαρτιού και πολλά χρόνια για να γραφτεί .

23)Υπάρχουν άπειρα ζεύγη αριθμών που το γινόμενο τους ισούται με το άθροισμα τους .

Αν x ένας τυχαίος αριθμός ($x \neq 1$) τότε για το ζεύγος x , $\frac{x}{x-1}$ ισχύει:

$$x + \frac{x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} + \frac{x}{x-1} = \frac{x^2 - x}{x-1} + \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

$$x \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

24)Τα παραπάνω στοιχεία τα γράφουμε συμβολίζοντας τα επώνυμα Σωτηρόπουλος (Σ) , Παπαδόπουλος (Π) και Κωνσταντόπουλος (Κ) ενώ τις ιδιότητες αστυνομικοί (Αστ) , απατεώνες (Απ) ως εξης :

Αστ, Αστ, Αστ, Αστ, Αστ,Αστ	Απ , Απ , Απ Απ
Π Σ Σ Π	Π , Σ , Κ

Στον παραπάνω πίνακα συμπληρώνουμε τα ονόματα των τριών Παπαδόπουλων που δεν αναφέρονται , από υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 6 άτομα με επώνυμο Παπαδόπουλος. Τελικά τέσσερεις αστυνομικοί έχουν το επώνυμο Παπαδόπουλος και δυο αστυνομικοί έχουν το επώνυμο Σωτηρόπουλος ,οπότε δυο απατεώνες έχουν το επώνυμο Παπαδόπουλος, ένας απατεώνας το επώνυμο Σωτηρόπουλος και ένας απατεώνας το επώνυμο Κωνσταντόπουλος.

25)Το βαρέλι των 20 λίτρων περιέχει μπύρα . Η αιτιολόγηση είναι η εξής:

Οι δυο πελάτες αγόρασαν την συνολική ποσότητα του κρασιού .Ακόμα και αν πρώτος πελάτης αγόρασε τα δυο βαρέλια με τις μικρότερες χωρητικότητες τότε για να προκύψει η διπλάσια ποσότητα για τον επόμενο ,απαιτούνται σίγουρα τρία ακόμα βαρέλια ,κατά συνέπεια οι δυο πελάτες αγόρασαν όλο το κρασί. Η συνολική ποσότητα του κρασιού είναι σίγουρα πολλαπλάσιο του 3 (Αν x λίτρα η ποσότητα του $1^{ου}$ πελάτη τότε 2x λίτρα η ποσότητα του $2^{ου}$ πελάτη ,έτσι x+2x=3 x) .Το συνολικό άθροισμα των ψηφίων των χωρητικοτήτων είναι επίσης πολλαπλάσιο του 3 , το άθροισμα των ψηφίων είναι 38 .Οπότε το βαρέλι που περιέχει την μπύρα αν διαιρεθεί με το 3 αφήνει υπόλοιπο 2 . Το βαρέλι των 20 λίτρων είναι η μόνη περίπτωση.

Άρα ο πρώτος πελάτης αγόρασε τα βαρέλια των 15 και 18 λίτρων ενώ ο δεύτερος των 16 19 και 31 λίτρων.

26)Παρατηρούμε ότι εφόσον ο τετραψήφιος αριθμός αποτελείται από δυο ψηφία μόνο, έστω τα α, β , οι δυνατές περιπτώσεις είναι:

αaββ, αββα, , βαβα

Ο αριθμός διαιρείται με το 9 άρα το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού είναι πολλαπλάσιο του 9 .

Οπότε 2α+2β=9κ (1) για κάποιο θετικό ακέραιο κ, Επειδή όμως το άθροισμα 2α+2β=2(α+β) είναι άρτιος τότε ο αριθμός 9κ είναι άρτιος άρα κατ επέκταση και ο κ είναι άρτιος .Γνωρίζουμε επίσης ότι τα α και β είναι διαφορετικά ψηφία από το 0 μέχρι το 9:

$$\begin{cases} 0 \le a \le 9 \ \acute{\eta} \ 0 \le 2a \le 18 \\ 0 \le \beta \le 9 \ \acute{\eta} \ 0 \le 2\beta \le 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le 2a \le 18 \\ 0 \le 2\beta \le 18 \end{cases} (+)$$

$$0 \le 2(a+\beta) \le 36 \ \acute{\eta} \ 0 \le a+\beta \le 18 \ \acute{\eta} \ 0 \le 9\kappa \le 18 \ \acute{\eta} \ 0 \le \kappa \le 2$$

Αφού όμως ο αριθμός κ άρτιος τότε κ=2.Τελικα με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει : α+β=9 . Ο κ. Παπαδόπουλος έχει 8 παιδιά διαφορετικών ηλικιών με το μεγαλύτερο 9 άρα σίγουρα έχει ένα παιδί είτε 4 ετών είτε 8 ετών είτε και τα δυο. Σε κάθε μια από τις δυο περιπτώσεις ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 4 άρα τα δυο τελευταία ψηφία είναι πολλαπλάσιο του 4.Εξεταζουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις διψήφιων με ίδια ψηφία που είναι πολλαπλάσια του 4 (00,44,88) και δημιουργούν τετραψήφιους της μορφής ααββ καθώς επίσης και τους τετραψήφιους της μορφής αββα και βαβα που ο αριθμός βα είναι παράλληλα πολλαπλάσιο του 4 και του 9 .

Οι αριθμοί που πληρούν τις παραπάνω προϋποθέσεις είναι οι :9900, 5544, 1188, 3636, 6336, 2772, 7272.

Μόνο ο αριθμός 9900 διαιρείται με το 5 άλλα αποκλείεται να είναι ο ζητούμενος αριθμός καθ ότι δεν μπορεί η ηλικία του Παπαδόπουλου να είναι 00.Απο τους υπόλοιπους αριθμούς μόνο ο 5544 είναι πολλαπλάσιο όλων των υπολοίπων 8 αριθμών 1,2,3,4,6,7,8,9.

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 5544. Στο πρόβλημα αυτό χρησιμοποιήθηκαν τα κριτήρια διαιρετότητας δηλαδή προτάσεις που μας υποδεικνύουν πότε αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρείται ακριβώς από έναν άλλο.

27)Ας υποθέσουμε ότι ο i υποψήφιος βουλευτής είναι ο πρώτος που δηλώνει σωστά το πλήθος των ψεμάτων που ακούστηκε μέχρι την στιγμή που μίλησε. Τότε προφανώς όλες οι δηλώσεις από την χρονική στιγμή αυτή και μετά είναι ψευδείς άρα ο συνολικός αριθμός των ψεμάτων που ειπώθηκαν συνολικά θα είναι i+(12-i)=12.

28) Ας υποθέσουμε ότι κάποια στιγμή ο έμπορος έχει χ Μπορχ και ψ Κορχ .

Αν ο έμπορος βρίσκεται στο Μποραχ και ανταλλάξει κ Μπορχ με Κορχ , τότε θα έχει :

χ-κ Μπορχ και ψ+10κ Κορχ

Η διαφορά των Μπορχ και Κορχ σε αυτή την περίπτωση είναι :

(χ-κ)-(ψ+10κ)=χ-ψ-11κ (1)

Αν ο έμπορος βρίσκεται στο Κοραχ και ανταλλάξει κ Κορχ , τότε θα έχει :

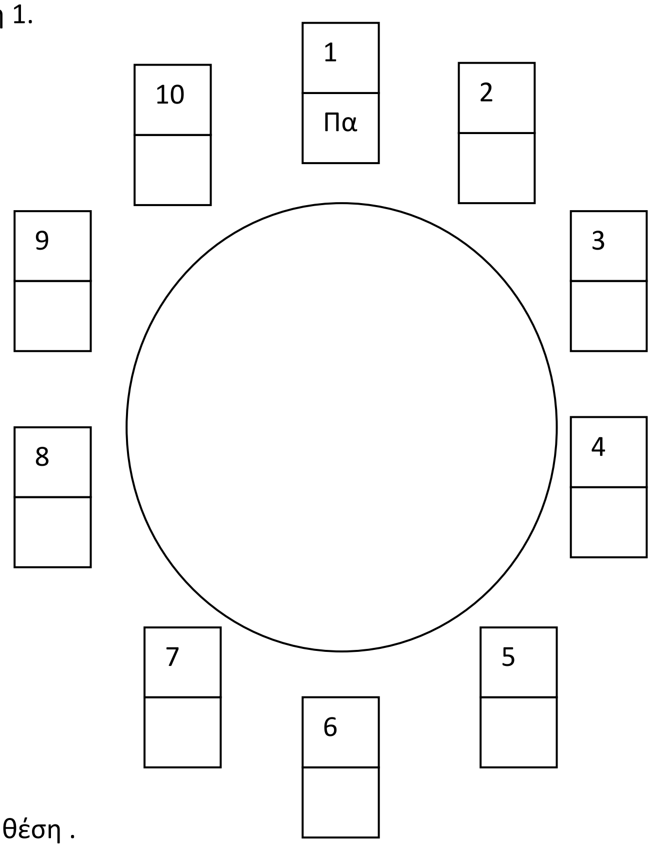
χ+10κ Μπορχ και ψ-κ Κορχ

Η διαφορά των Μπορχ και των Κορχ είναι τώρα:

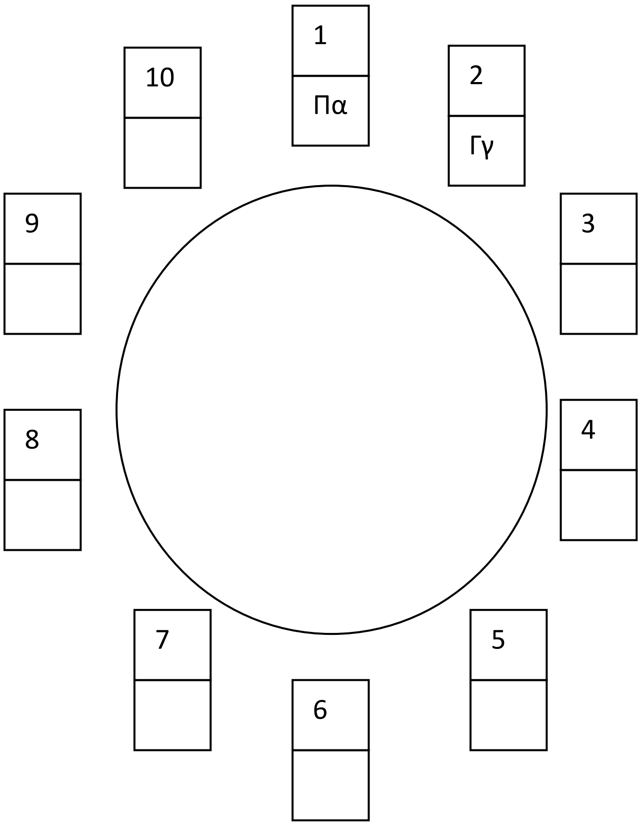
χ+10κ-(ψ-κ)=χ-ψ+11κ (2)

Από (1) ,(2) παρατηρούμε ότι σε κάθε ανταλλαγή νομισμάτων που έγινε ουσιαστικά προσθέτουμε ή αφαιρούμε πολλαπλάσια του 11 , αρχικά όμως χ-ψ=1 που διαιρούμενο με το 11 αφήνει υπόλοιπο 1 . Άρα ποτέ η διαφορά χ-ψ δεν θα γίνει 0 δηλαδή χ=ψ. Ότι και να κάνει ο έμπορος δεν πρόκειται να έχει τον ίδιο αριθμό από Μπορχ και Κορχ.

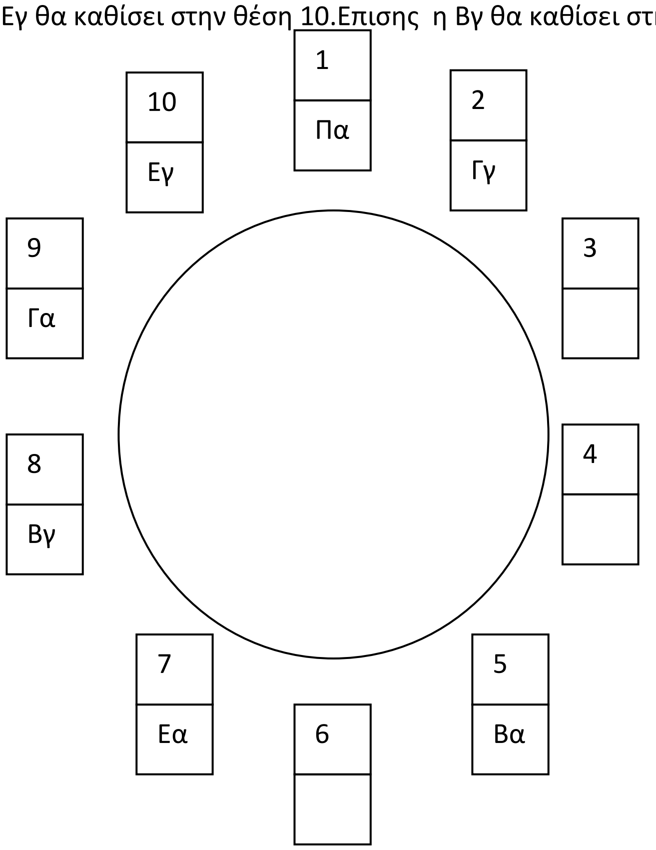
29)Θα συμβολίσουμε με α: κύριος ,γ: κυρία. Έτσι **Πα** σημαίνει «ο κύριος Παπαδόπουλος (Π)», ενώ **Βγ** σημαίνει «κυρία Βασιλείου ». Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κυκλική διάταξη του τραπεζιού με αριθμημένες θέσεις από 1 έως. Τοποθετούμε το άτομο Πα στην θέση 1.



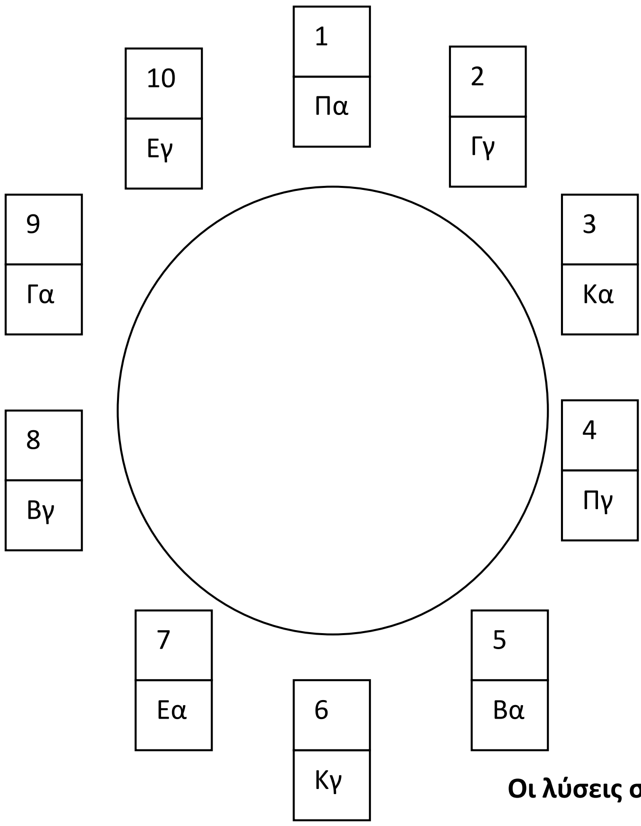
Η Γγ θα καθίσει υποχρεωτικά στην δεύτερη θέση .



Αν η Πγ καθίσει στην θέση 4 τότε για τον Γα υπάρχουν οι θέσεις 5 ή 9. Στην περίπτωση που ο Γα καθίσει στην 5 καταλήγουμε σε αδιέξοδο διότι <u>δεν μπορεί να καθίσει κάπου ο Εα</u>. Άρα ο Γα θα καθίσει στην θέση 9.Τοτε ο Εα θα καθίσει στη θέση 7(δυο θέσεις αριστερά από τον Γεωργίου) .Η Εγ θα καθίσει είτε στην 10 είτε στην 4,στην 4 όμως καταλήγουμε σε αδιέξοδο άρα η Εγ θα καθίσει στην θέση 10.Επισης η Βγ θα καθίσει στην θέση 8 και ο Βα στην θέση 5.



Είναι τότε προφανές ότι ο Κα θα καθίσει στην θέση 3 και η Κγ στην θέση 6.Αρα τελικά η κύρια Πγ κάθεται δεξιά του κυρίου Κα.



Άρα το ζευγάρι Κολιόπουλου

έφυγε εσπευσμένα.

30)Οι αγώνες που πραγματοποιήθηκαν ήταν $\frac{4\cdot 5}{2}=10$.

Θα ανασυνθέσουμε τα αποτελέσματα συμπληρώνοντας τον πίνακα:

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Α					
Β					
Γ					
Δ					
Ε					

Η κύρια διαγώνιος παραμένει κενή διότι κανένας παίκτης δεν μπορεί να παίξει με τον εαυτό του.

Ο νικητής ο παίκτης Α έχασε τουλάχιστον ένα αγώνα (από την δήλωση του Β) οπότε έχει το πολύ τρεις βαθμούς(έπαιξε συνολικά 4 παιχνίδια). Δεν είναι δυνατόν να έχει λιγότερους από 3 βαθμούς διότι τότε το άθροισμα των βαθμών όλων των παικτών θα ήταν το πολύ 2.5+2++1.5+1+0.5=7.5<10.Αρα Ο Α έχασε ένα αγώνα και κέρδισε τους υπολοίπους. Αφού ο Β δεν ηττήθηκε, ο Α έχασε στον αγώνα με τον Β και κέρδισε τους άλλους παίκτες .

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Α		0	1	1	1
Β	1				
Γ	0				
Δ	0				
Ε	0				

Παρατηρούμε ότι 3+2.5+2+1.5+1=10.Επεται ότι οι βαθμολογίες των Β,Γ,Δ και Ε ήταν 2.5,2,1.5 και 1(όλες οι βαθμολογίες ήταν διαφορετικές). Αυτό είναι δυνατόν μόνο αν ο Β είχε, εκτός από την νίκη, τρεις ισοπαλίες – με όλους τους παίκτες εκτός του Α. Αν αφαιρέσουμε από το τα αποτελέσματα των Γ,Δ και Ε τις ισοπαλίες με τον Β, βρίσκουμε ότι η βαθμολογία που συγκέντρωσαν στους μεταξύ τους αγώνες ήταν 1.5 ,1 και 0.5, αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι αυτό συμβαίνει μόνο με τα αποτελέσματα του πίνακα:

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Α		0	1	1	1
Β	1		0.5	0.5	0.5
Γ	0	0.5		1	0.5
Δ	0	0.5	0		1
Ε	0	0.5	0.5	0	

(S.Kuba)

31)Ο Α θα κερδίζει πάντα.Καταρχήν βλέπουμε ότι :
-Οι αριθμοί 1,7,13 έχουν την μορφή 3α+1 ,α ακέραιος .
-Οι αριθμοί 2 και 200 έχουν την μορφή 3β+2, όπου β ακέραιος.
Θα δείξουμε ότι ο Α έχει την δυνατότητα <u>να αφήνει στον Β αριθμό θυρίδων που να είναι πολλαπλάσιο του 3</u> (οπότε ότι κίνηση και αν κάνει ο Β 1,2,7,13 πάντα θα παίζει τελευταίος ο Α)και έτσι ο Α να κερδίσει το παιχνίδι.
Για τον Α υπάρχει η εξής στρατηγική νίκης:
Ανοίγει πρώτος 2 θυρίδες .Άρα μένουν 200-2=198=πολλαπλασιο του 3
Αν ο Β ανοίξει 1 ή 7 ή 13 θυρίδες αυτός θα ανοίξει 2 θυρίδες <u>. Έτσι για τον Β θα μένουν κάθε φορά :</u>

3β-(3α+1)-2=3β-3α-3=3(β-α-1) = πολλαπλάσιο του 3

-Αν ο Β ανοίξει 2 θυρίδες , τότε αυτός θα ανοίξει 1 ή 7 ή 13 θυρίδες .<u>Έτσι για τον Β θα μένουν :</u>

3β-2-(3α+1)=3β-3α-3=3(β-α-1)= πολλαπλάσιο του 3

32)<u>Μόνο δυο γύροι</u> απαιτούνται για να είναι σε θέση να βρει ο Γιάννης τους αριθμούς.

Αρχικά ο Γιάννης δίνει τους αριθμούς $β_1=β_2=β_3=…=β_6=1$ τότε ο Γιώργος θα υπολογίσει:

$Σ= x_1+x_2+x_3+…+x_6$. Το ανακοινώνει στον Γιάννη, στην συνέχεια ο Γιάννης του δίνει τους αριθμούς $α_1=1$, $α_2=Σ+1$, $α_3=(Σ+1)^2$,…, $α_6=(Σ+1)^5$

Ο Γιώργος τότε υπολογίζει :

$$N= χ_1 + χ_2(Σ+1) +χ_2 (Σ+1)^2+..+ χ_6 (Σ+1)^5$$

Τώρα για να βρει ο Γιάννης τους αριθμούς αρκεί να γράψει το αριθμό Ν με βάση το Σ+1 .Τα ψηφία του Ν με βάση το Σ+1 είναι οι ζητούμενοι αριθμοί .

Ας δούμε ένα παράδειγμα :Ας πούμε ότι αρχικά ο Γιώργος επιλέγει 1,1,2,2,2,3. Αρχικά

$Σ=1+1+2+2+2+3=11$, $N= 1+1(12)+2 (12)^2+2 (12)^3+ 2 (12)^4+ 3(12)^5=1+12+288+3456+41472+746496=791725$

Ο Γιάννης θα γνώριζε μόνο του αριθμούς 11 και 791725.Αρκεί να γράψει τον 791725 με βάση το 12 .Αυτό το κατορθώνει με συνεχείς διαιρέσεις όπου κρατά τα υπόλοιπα.

791725 | 12

65977

υπόλοιπο 1

65977 | 12

5498

υπόλοιπο 1

5498 | 12

458

υπόλοιπο 2

458 | 12

38

υπόλοιπο 2

38 | 12

3

υπόλοιπο 2

3 | 12

0

υπόλοιπο 3

1,1,2,2,2,3 τα υπόλοιπα των διαιρέσεων ει αι οι ζητούμενοι αριθμοί.

Φυσικά το παιχνίδι μπορεί να γενικευτεί για οποιοδήποτε πλήθος αριθμών και όχι μόνο για 6.

33)Για να υπολογίσουμε το ποσό της επιταγής σκεπτόμαστε ως εξής :
Αν χ είναι ο αριθμός των ευρώ και ψ ο αριθμός των λεπτών αρχικά, τότε μετά το λάθος του ταμείου και το πεντάλεπτο που δόθηκε στο ζητιάνο προκύπτει η εξίσωση:

$$100ψ+χ-5=2(100χ+ψ)$$

Η οποία μετά από πράξεις γίνεται:
$98ψ-199χ=5$ μια εξίσωση με λύσεις θετικούς ακεραίους η οποία ονομάζεται διοφαντικη και λύνεται με ένα τρόπο που ονομάζεται μέθοδος των συνέχων κλασμάτων.
Αλλά υπάρχει και μια λύση η οποία δεν απαιτεί παρά μόνο τα μαθηματικά του γυμνασίου. Υποθέσαμε ότι χ είναι ο αριθμός των ευρώ και ψ ο αριθμός των λεπτών αρχικά. Μετά τα 5λεπτα που δόθηκαν στο ζητιάνο ο Παπαδόπουλος έφυγε για το σπίτι του έχοντας στο πορτοφόλι του 2χ+2ψ .Τα ρέστα που του έμειναν από τα χ λεπτά που του έδωσε ο ταμίας θα είναι χ-5.
Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός ψ σίγουρα θα είναι μικρότερος από 100 λεπτά (1 ευρώ =100 λεπτά) αλλά δεν ξέρουμε αν είναι μικρότερος από 50 . Αν είναι μικρότερος από 50 λεπτά, προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:
$2χ=ψ$
$2χ=χ-5$ όμως αν λύσουμε το σύστημα προκύπτουν αρνητικές τιμές, άρα σίγουρα
το ψ είναι 50 λεπτά η παραπάνω σε αυτή την περίπτωση ο Παπαδόπουλος θα έχει στο πορτοφόλι του το ποσό των 2ψ λεπτών που θα είναι ένα ευρώ η και περισσότερα. Αν πάρουμε 100 λεπτά από τα 2ψ ευρώ τότε για να το ισοσταθμίσουμε προσθέτουμε 1 στο 2χ και έχουμε τις εξισώσεις.

$$2χ+1=ψ$$
$$2ψ-100=χ-5$$

Λύνουμε το σύστημα και τελικά παίρνουμε τις τιμές χ=31 , ψ=63.Αρα η επιταγή αρχικά ανέγραφε το ποσό των 31 ευρώ και 63 λεπτών.

34)Το πρόβλημα λύνεται χωρίς να είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την ώρα που πηρέ το τραίνο , ούτε την χρονική διάρκεια της διαδρομής από το σταθμό στο σπίτι .

<u>Α(Σταθμός)</u> → <u>Γ(σημείο που ο Παπαδόπουλος έφτασε περπατώντας)</u> → <u>Β(σπίτι)</u>

Ας υποθέσουμε ότι ο Παπαδόπουλος κάθε μέρα φτάνει στο σταθμό Α, ώρα Ω. Ακόμη , έστω ότι η γυναίκα του κάνει Υ ωρα για να έρθει από το σπίτι στον σταθμο και έστω ότι ο Παπαδόπουλος περπάτησε επί Χ ώρα για να φτάσει στο Γ. Τότε:

<u>Κάθε μέρα :</u>

Η γυναίκα του Παπαδοπούλου ξεκινά ώρα Ω-Υ από το σπίτι και γυρίζει πίσω ώρα Ω+Υ. δηλαδή κάνει 2Υ ώρες με το αυτοκίνητο.

<u>Εκείνη την μέρα:</u>

Η γυναίκα του έκανε 2Υ-0.5 ώρες για να κάνει 2 φόρες την απόσταση ΓΒ.

Δηλαδή έκανε (2Υ-0.5)/2 ώρες μόνο για την απόσταση ΓΒ.

Κατά συνέπεια εκείνη την μέρα η γυναίκα του επέστρεψε σπίτι ώρα Ω+Τ-0.5 (1)

Ο Παπαδόπουλος φτάνει ώρα Ω-1 .Έφτασε στο Γ ύστερα από Χ ώρα , δηλαδή έφτασε στο Γ ώρα Ω-1+Χ και για να φτάσει σπίτι εκείνη την ημέρα έγινε η ώρα

Ω-1+χ+(2Υ-0.5)/2 (2)

Επειδή και οι δυο επέστρεψαν σπίτι μας την ίδια ώρα από (1) και (2) έχουμε:

Ω+Υ-0.5 =Ω-1+χ+(2Υ-0.5)/2

.

.

.

Χ=0.75 ώρες

Άρα τελικά ο Παπαδόπουλος περπάτησε για 45 λεπτά.

35)Η πιο συχνή απάντηση είναι: « 10 τίμιοι και 10 διεφθαρμένοι. Μια άλλη ,αρκετά συχνή» 11 τίμιοι και 9 διεφθαρμένοι».
Και οι δυο απαντήσεις είναι εσφαλμένες !! Ας δούμε όμως πως βρίσκουμε την σωστή απάντηση.
Έχουμε ως δεδομένο ότι τουλάχιστον ένας είναι τίμιος. Ας επιλέξουμε έναν από τους τίμιους, ας τον ονομάσουμε Κώστα.
Επιλεγούμε τώρα οποιονδήποτε από τους υπόλοιπης 19 , ας πούμε τον Γιάννη. Σύμφωνα με το δεύτερο δεδομένο του προβλήματος, τουλάχιστον ένας από τους δυο, τον Κώστα και τον Γιώργο είναι διεφθαρμένος. Αφού ο Κώστας δεν είναι διεφθαρμένος , θα πρέπει να είναι ο Γιώργος .Επειδή στην θέση του Γιώργου θα μπορούσε να ήταν ο οποιοσδήποτε από τους υπόλοιπους 99, ο καθένας από αυτούς τους 19 πρέπει να είναι διεφθαρμένος .
Επομένως απάντηση στο πρόβλημα μας είναι «ένας είναι ο τίμιος και 19 οι διεφθαρμένοι».
Εναλλακτικά μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής:
Η συνθήκη ότι οποιοδήποτε ζεύγος περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα διεφθαρμένο, λέει ακριβώς ότι ανάμεσα σε δυο οποιουσδήποτε πολιτικούς δεν είναι και οι δυο τίμιοι .Με αλλά λόγια δεν υπάρχει ζεύγος τίμιων. Αυτό σημαίνει ότι το πολύ ένας είναι τίμιος .Επίσης (από την πρώτη συνθήκη) τουλάχιστον ένας είναι τίμιος .Άρα μονό ένας είναι τίμιος .
36.• Παρατηρούμε ότι αν τοποθετηθούν ανά τετράδες τα πρόσημα + - - + ξεκινώντας από το 2 :

$$A=1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+(10-11-12+13)+\ldots+(2006-2007-2008+2009) =1+0+0+0+\ldots+0=1<5$$

- Αν θεωρήσουμε 4 διαδοχικούς αριθμούς α,α+1,α+2,α+3 και βάλουμε την σειρά προσήμων + - - + τότε:

$$\alpha^2-(\alpha+1)^2-(\alpha+2)^2+(\alpha+3)^2=\ldots= 4$$

Αν πάρουμε τους επομένους 4 αριθμούς α+4,α+5,α+6,α+7 και αλλάξουμε κάθε πρόσημο της προηγουμένης τετράδας - + + - τότε:

$$-(\alpha+4)^2+(\alpha+5)^2+(\alpha+6)^2-(\alpha+7)^2=\ldots= -4$$

Ο αριθμός 2009 αν διαιρεθεί με το 8 αφήνει υπόλοιπο 1 έτσι:

$$B=1^2+(2^2-3^2-4^2+5^2-6^2+7^2+8^2-9^2)+\ldots+(2002^2-2003^2-2004^2+2005^2-2006^2+2007^2+2008^2-2009^2)=1+0+\ldots+0<5$$

37)

			Α			Δ	
Δ			Γ				
		Β			Β		Α
						Γ	
	Γ						
Α		Β			Β		
				Γ			Δ
	Δ				Α		

38) Από τις συνθήκες του προβλήματος βλέπουμε ότι ο αριθμός των ανδρών στο μαγαζί ελαττώνονται κατά 0 (αν δυο γυναίκες ή ένας άνδρας και μια γυναίκα φύγουν) ή κατά 2 (αν φύγουν δυο άνδρες) . Όταν αρχικά μπήκε μέσα η παρέα των τεσσάρων, υπήρχε περιττός αριθμός από άνδρες στο μαγαζί και ακόλουθα με κάθε μετακίνηση το πλήθος των ανδρών θα παρέμενε περιττός .Τελικά όταν μόνο η παρέα τους έμεινε στο μαγαζί επίσης πρέπει ο αριθμός των ανδρών να είναι περιττός .Εφόσον έχουν ήδη δυο άνδρες (Γιάννης και Γιώργος) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένα από τα δυο πρόσωπα θα είναι άνδρας και το άλλο γυναίκα

39) Όσο και αν φαίνεται παράξενο ο ταξιδιώτης θα γλυτώσει από τις ορέξεις των κανίβαλων .

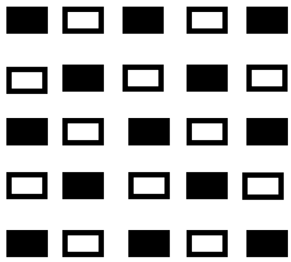
Η εξήγηση είναι η εξής : Αν υποθέσουμε ότι υπήρχε μόνο ένας κανίβαλος τότε είναι προφανές ότι ο ταξιδιώτης δεν θα γλυτώσει καθ' ότι ο κανίβαλος θα τον έτρωγε χωρίς καμία ανησυχία.

Αν όμως οι κανίβαλοι ήταν δυο τότε ο πρώτος κανίβαλος που θα έτρωγε τον ταξιδιώτη θα ήταν ανυπεράσπιστος στις ορέξεις του άλλου κανίβαλου. Αυτή την σκέψη θα κάνουν και οι δυο κανίβαλοι άρα κανένας δεν θα τολμήσει να πειράξει τον ταξιδιώτη οπότε θα γλυτώσει.

Αν οι κανίβαλοι ήταν τρεις τότε , ο πλησιέστερος κανίβαλος θα επιτεθεί στον περιηγητή και θα τον φάει .Ο κανίβαλος αυτός θα είναι ανυπεράσπιστος στις ορέξεις των άλλων δυο κανίβαλων παρ όλα αυτά είναι ασφαλής διότι όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη περίπτωση αν έχουμε δυο πεινασμένους κανίβαλους και ένα υποψήφιο θύμα κανένας τους δεν θα κάνει καμία κίνηση φοβούμενος τον άλλο.

Γενικά αποδεικνύεται ότι αν έχουμε περιττό αριθμό κανίβαλων ο πλησιέστερος θα φάει τον ταξιδιώτη με ασφάλεια , αν όμως το πλήθος των κανίβαλων είναι άρτιο τότε κανένας δεν θα τολμήσει να κάνει καμία κίνηση και ο ταξιδιώτης θα γλυτώσει. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα με τους 10 κανίβαλους ο ταξιδιώτης θα ξεφύγει από το τσουκάλι!!!

40) Ας κάνουμε ένα σχήμα με τα 25 θρανία , χρωματίζοντας εναλλάξ τα γειτονικά θρανία άσπρο- μαύρο. Παρατηρούμε ότι έχουμε 13 θρανία μαύρου χρώματος και 12 θρανία άσπρου χρώματος .Σύμφωνα με τις οδηγίες της δασκάλας , ο κάθε μαθητής θα μετακινούνταν σε θρανίο διαφορετικού χρώματος. Την πρώτη μέρα αυτό ήταν δυνατό γιατί υπήρχαν 12 μαθητές σε άσπρα θρανία και 12 μαθητές σε 12 μαύρα. Την δεύτερη μέρα όμως θα υπάρχουν 13 μαθητές σε θρανίο μαύρου χρώματος και 12 μαθητές άσπρου χρώματος οπότε είναι αδύνατο κατά τις οδηγίες της δασκάλας , κάθε μαθητής να μεταβεί σε γειτονικό θρανίο διαφορετικού χρώματος . Άρα είχε δίκιο ο Γιάννης ότι ήταν αδύνατο .



41)Ο Κωστάκης σκέφτηκε ως έξης:

Μεταξύ 18 αριθμών σίγουρα υπάρχει ένας που είναι πολλαπλάσιο του 18 άρα σίγουρα θα είναι και πολλαπλάσιο του 9 , ταυτόχρονα ο ίδιος αριθμός θα είναι άρτιος κατά συνέπεια το τελευταίο ψηφίο του θα είναι άρτιος αριθμός. Έστω Σ το άθροισμα των ψηφίων του συγκεκριμένου αριθμού, τότε ,εφόσον όλοι οι αριθμοί είναι τριψήφιοι η μέγιστη τιμή του Σ θα είναι 9+9+8=26. Άρα οι δυνατές τιμές για το Σ είναι 9 και 18 .Σε κάθε μια από τις δυο περιπτώσεις το Σ διαιρεί τον αριθμό.

42)Αν υπολογίσουμε τους κύβους των αριθμών αρχίζοντας από το 10:

$$10^3 = 1000\,,11^3 = 1331\,,12^3 = 1728\,,13^3 = 2197$$

Από τα αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι ο Κώστας θα είναι 12 χρονών.

Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$10^2 = 100\,,11^2 = 121\,,12^2 = 144\,,13^2 = 169\,,14^2 = 196$$

Άρα αν η Άννα ήταν 10 χρονών τότε 1728+100=1828, άτοπο εφόσον δεν μπορεί να γεννήθηκε τότε η Γεωργία.

Αν η Άννα ήταν 11 χρονών τότε 1728+121=1849,Ατοπο

Αν η Άννα ήταν 14 χρονών τότε 1728+196=1924,Ατοπο,διοτι το 1945 η Γεωργία θα είναι 21 χρονών με παιδί 13 χρονών.

Άρα η Άννα θα ήταν 13 χρόνων, γιατί 1728+169=1897.

Η Γεωργία συνεπώς θα ήταν 1945-1897=48 χρόνων και ο Βασίλης 48+5=53 χρόνων.

43) Αρχικά από τα στοιχεία 2 και 9, συμπληρώνουμε το σχήμα 1 .Επειδή ο Ανέστης και ο Τάσος δεν φορούν το καρό (Βλέπε στοιχείο 7 και το στοιχείο 10), το φοράει είτε ο Αντώνης είτε ο Λάμπρος .Αν υποθέσουμε ότι το φοράει ο Αντώνης , οδηγούμαστε σε άτοπο: Ο Τάσος θα έπρεπε να καθίσει δεξιά του Αντώνη(Στοιχείο 6), ο Λάμπρος θα έπρεπε να καθίσει απέναντι από τον Τάσο (Στοιχείο 1) αλλά τότε έχουμε πρόβλημα με το στοιχείο 5, διότι το κουτάκι με το κρασί θα έπρεπε να συμπληρωθεί με καφέ . Άτοπο! Οδηγηθήκαμε λοιπόν στο γεγονός ότι ο γιατρός με το καρό είναι ο Λάμπρος .Τώρα από τα των στοιχεία 1 και 5, συμπληρώνουμε το σχήμα μας με τα στοιχεία «αρχιτέκτονας« και «καφές » (βλέπε σχήμα 2). Από το στοιχείο 3 βλέπουμε ότι ο δικηγόρος και ο παίκτης με το ριγέ πουκάμισο κάθονται απέναντι, και αυτό είναι δυνατόν πλέον μόνο οριζόντια στο σχήμα μας .Και μάλιστα από το στοιχείο 8 βγάζουμε αμέσως συμπέρασμα ότι ο ριγέ κάθεται αριστερά και ο δικηγόρος δεξιά και επίσης ότι ο αριστερά του ριγέ ,δηλαδή ο Λάμπρος , πίνει μπύρα .Και βεβαία συμπληρώνονται εύκολα τώρα τα υπόλοιπα «μηχανικός « και «νερό» δεξιά (βλέπε σχήμα 3) Ο Ανέστης με το πολύχρωμο πουκάμισο του (στοιχείο 7) κάθεται είτε δεξιά είτε κάτω. Συμπεραίνουμε ότι κάθεται δεξιά, διότι οι Αντώνης και Τάσος κάθονται σίγουρα δίπλα (στοιχείο 6 και στοιχείο 10).Η συνέχεια είναι απλή: Ο Τάσος κάθεται κάτω και ο Αντώνης αριστερά του. (στοιχείο 6) (βλέπε σχήμα 4). Τελικά αυτός με το ριγέ πουκάμισο και ότι ο δικηγόρος ονομάζεται Ανέστης .

Γιατρός
καρό

κρασί

Σχήμα 1

Λάμπρος
Γιατρός
καρό

καφές

Αρχιτέκτονας
Κρασί

Σχήμα 2

Λάμπρος
Γιατρός
καρό
Μπίρα

Δικηγόρος
καφές
Μηχανικός
Ριγέ
Νερό

Αρχιτέκτονας
Κρασί

Σχήμα 3

Λάμπρος
Γιατρός
καρό
Μπίρα

Μηχανικός
Ριγέ
Νερό
Ανέστης
Δικηγόρος
Πολύχρωμο
καφές

Τάσος
Αρχιτέκτονας
μονόχρωμο
Κρασί

Σχήμα 4

44) Έστω χ τα αυτοκίνητα που πουλήθηκαν την τρίτη εβδομάδα και y τα αυτοκίνητα που πουλήθηκαν την δεύτερη εβδομάδα τότε , αφού πουλήθηκαν συνολικά 56 αυτοκίνητα ,τα αυτοκίνητα που πουλήθηκαν την πρώτη εβδομάδα είναι: 56-x-y . Από τα δεδομένα:

Η διαφορά της $2^{ης}$ από την $3^{η}$ εβδομάδα είναι : χ-y

Η διαφορά της $2^{ης}$ εβδομάδας από την $1^{η}$ είναι : y-56+y+x =2y-56+x , από υπόθεση το γινόμενο των δυο διαφορών ισούται με τον αριθμό των πωλήσεων της πρώτης εβδομάδας , δηλ το χ άρα προκύπτει η εξίσωση:

$$(2y-56+x)(x-y)=x \Leftrightarrow 2yx-2y^2-56x+56y+x^2-xy-x=0$$
$$\Leftrightarrow 2yx-2y^2-56x+56y+x^2-xy-x=0$$

Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς χ , οι λύσεις της είναι :

$$x = \frac{(55-y) \pm \sqrt{(9y^2 - 338y + 3249}}{2}$$

Από την εκφώνηση είναι σαφές ότι ο αριθμός των αυτοκίνητων κάθε εβδομάδα είναι θετικός ακέραιος άρα τόσο το χ όσο και το y είναι θετικοί ακέραιοι κατά συνέπεια η ποσότητα στην μέσα στην ρίζα είναι τέλειο τετράγωνο.

Έτσι $9y^2 - 338y + 3249 = \kappa^2$ όπου κ είναι είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Η εξίσωση είναι μια δευτεροβάθμια με άγνωστο το y και έχει λύσεις :

$$y = \frac{169 \pm \sqrt{9\kappa^2 - 680}}{9}$$

Σκεπτόμενοι όπως παραπάνω θα πρέπει η υπόριζος ποσότητα να είναι θετικός ακέραιος καθώς επίσης και τέλειο τετράγωνο. Άρα υπάρχει ένας θετικός ακέραιος t τέτοιος ώστε:

$$9\kappa^2 - 680 = t^2 \Leftrightarrow 9\kappa^2 - t^2 = 680 \Leftrightarrow (3\kappa + t)(3\kappa - t) = 680$$

Αν πάρουμε τους διαιρέτες του 680, έχουμε:

680=340x2 680=170x4
680=136x5 680=68x10
680=34x20

Ας πάρουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις των ζευγών $3\kappa + t$, $3\kappa - t$ με την προϋπόθεση $3\kappa + t$ > $3\kappa - t$.

Τότε το $3\kappa + t = 340$ η 170 η 68 η 34 (προσθέτουμε κατά μέλη)

(+) $3\kappa - t = 2$ η 4 η 10 η 20

6κ = 324 η 174 η 78 η 54

κ = 57 η 29 η 13 η 9

και

το $3\kappa + t = 340$ η 170 η 68 η 34 (αφαιρούμε κατά μέλη)

(-) $3\kappa - t = 2$ η 4 η 10 η 20

2t= 338 η 166 η 58 η 14

t= 169 η 83 η 29 η 7

τότε για κ = 57 η 29 η 13 η 9

t = 169 η 83 η 29 η 7

οι τιμές των χ,y είναι αντίστοιχα:

y = 0 η 28 η 22 η 18

x = 56 η 28 η 23 ή 10 23η 14 , με x>y και $x \neq y$ άρα χ=23.

Οπότε πουλήθηκαν 23 αυτοκίνητα την τρίτη εβδομάδα.

45) Μόνο ένας σιδεράς την φορά μπορεί να πεταλώσει ένα συγκεκριμένο άλογο. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε διάστημα πέντε λεπτών οκτώ άλογα θα πεταλώνονται και δύο θα βρίσκονται σε αναμονή. Αν απαιτούνται 20 λεπτά για να πεταλωθεί πλήρως κάθε άλογο, και η όλη εργασία πρέπει να έχει ολοκληρωθεί μέσα σε 25 λεπτά, τότε κανένα άλογο δεν μπορεί να βρεθεί σε αναμονή για περισσότερο από ένα πεντάλεπτο διάλειμμα. Πως μπορεί αυτό να επιτευχτεί ;Δείτε τον παρακάτω πίνακα :

Διάστημα	Άλογο 1	Άλογο 2	Άλογο 3	Άλογο 4	Άλογο 5	Άλογο 6	Άλογο 7	Άλογο 8	Άλογο 9	Άλογο 10
0-5	Σ1	Σ2	Σ3	Σ4	Σ5	Σ6	Σ7	Σ8	Αναμονή	Αναμονή
5-10	Σ1	Σ2	Σ3	Σ4	Σ5	Σ6	Αναμονή	Αναμονή	Σ7	Σ8
10-15	Σ1	Σ2	Σ3	Σ4	Αναμονή	Αναμονή	Σ5	Σ6	Σ7	Σ8
15-20	Σ1	Σ2	Αναμονή	Αναμονή	Σ3	Σ4	Σ5	Σ6	Σ7	Σ8
20-25	Αναμονή	Αναμονή	Σ1	Σ2	Σ3	Σ4	Σ5	Σ6	Σ7	Σ8

Όπου Σ1,Σ2,Σ3,Σ4,Σ5,Σ6,Σ7,Σ8 οι 8 πεταλωτές ,

46)(στις παρακάτω γραμμές κάθε φορά που αναφερόμαστε σε κελιά εννοούμε τετραγωνικά)

Το πλήθος των κελιών είναι Α+Β-Μ.Κ.Δ(Α,Β).

Όπου (Μ.Κ.Δ(Α,Β) ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των Α,Β). Ας δούμε το γιατί.

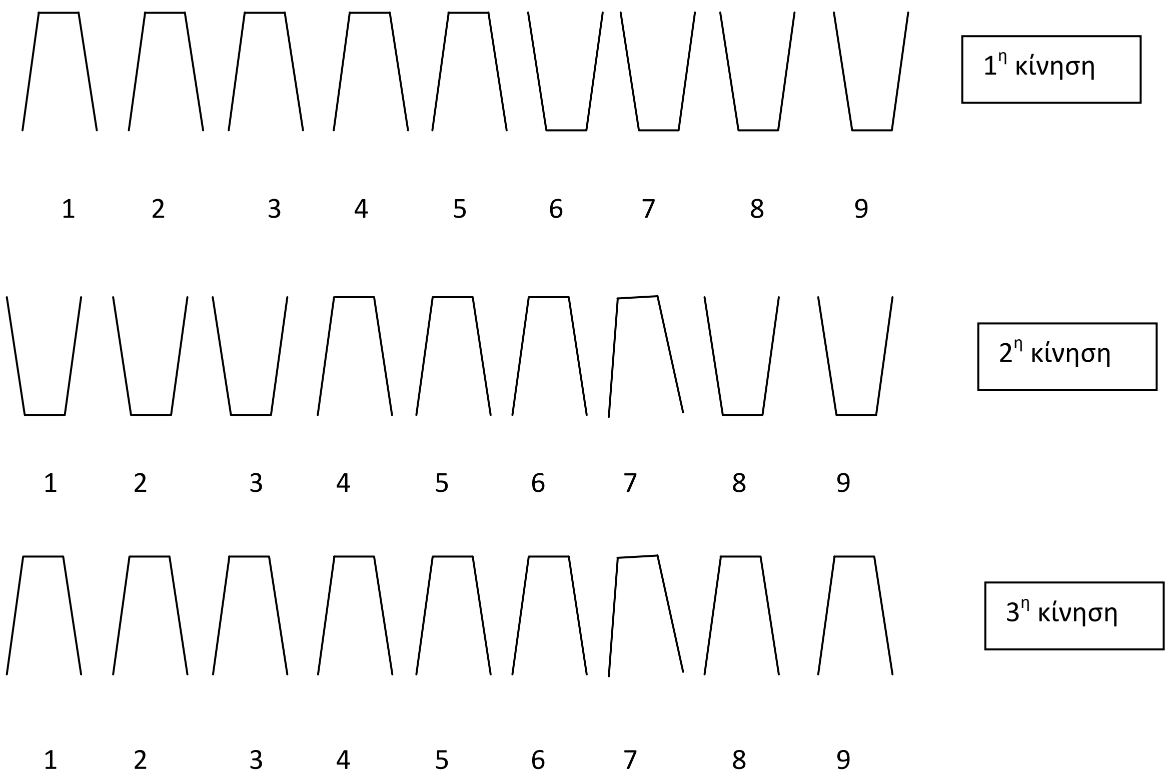
Διακρίνουμε περιπτώσεις :

•Υποθέτουμε ότι Μ.Κ.Δ(Α,Β)=1 τότε η διαγώνιος δεν διέρχεται από τις κορυφές κανενός κελιού, έτσι όταν διέρχεται από ένα κελί θα το τέμνει είτε σε μια κάθετη είτε σε μια οριζόντια πλευρά του .Άρα θα πρέπει να περάσει καθεμιά από τις Α-1 κάθετες γραμμές και από τις Β-1 οριζόντιες .Συνολικά Α+Β-2 σημεία τομής , κατά συνέπεια η διαγώνιος διέρχεται από Α+Β-1 κελιά.

•Αν τώρα Μ.Κ.Δ(Α,Β) =δ $\neq 1$ τότε Α=κδ και Β=λδ όπου κ,λ είναι θετικοί ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους .Σε αυτήν την περίπτωση θα «χωρίσουμε» την διαγώνιο σε δ ίσα ευθύγραμμα τμήματα , που το καθένα έχει άκρα κορυφές κελιών και θα διέρχεται από κ+λ-1 κελιά . Έτσι η διαγώνιος θα διέρχεται:

$$\delta(\kappa+\lambda-1)=\delta\kappa+\delta\lambda-\delta=\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{M.K.}\Delta(\mathrm{A},\mathrm{B}) \quad \text{κελιά.}$$

47)Το ελάχιστο δυνατό πλήθος κινήσεων είναι τρεις. Για παράδειγμα μπορούμε να αναποδογυρίζουμε πρώτα τα 1,2,3,4 και 5 στην συνέχεια τα ποτήρια 1,2,3,6 και 7 και τέλος τα 1,2,3,8 και 9 .Οι τρεις κινήσεις είναι ο ελάχιστος αριθμός διότι αν γίνουν μόνο δυο κινήσεις, μερικά ποτήρια θα γυρίσουν ακριβώς δυο φορές άρα θα επανέλθουν στην αρχική τους κατάσταση.



Στην δεύτερη περίπτωση είναι αδύνατο να αναποδογυρίσουμε 9 ποτήρια γυρίζοντας κάθε φορά 6 ποτήρια ακριβώς . Κάθε ποτήρι πρέπει να αναποδογυρίσει περιττό πλήθος φορών. Αφού υπάρχουν 9 ποτήρια, το συνολικό πλήθος των φορών που θα γυρίσουν πρέπει να είναι επίσης περιττό. Αν όμως γυρίζουμε κάθε φορά 6 ποτήρια ακριβώς (άρτιο πλήθος) τότε το συνολικό πλήθος των αναποδογυρισμάτων θα είναι επίσης άρτιο.

48)Έστω ΝΑ=κ. Τότε η σχέση $(ΝΑ)^2$=ΕΝΑ γίνεται $κ^2=100μ+κ$, $1 \le μ \le 9$ ή ισοδύναμα

$$κ^2-κ=100μ \text{ ή } κ(κ-1)=100μ \quad (1)$$

Ο αριθμός κ(κ-1) είναι τριψήφιος που λήγει σε δυο μηδενικά και μάλιστα είναι γινόμενο δυο διαδοχικών θετικών ακεραίων πρώτων μεταξύ τους .Από την σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι ο ένας από τους δυο αριθμούς (κ ή κ-1) διαιρείται με το 4 και ο άλλος με το 25.

Αν ο κ ή ο κ-1 ισούται με το 25θ, $θ \ge 2$ τότε $θ \ge 2$ ή $25θ \ge 50$ και το γινόμενο $κ(κ-1) \ge 50 \cdot 49=2450$ που έχει περισσότερα από τρία ψηφία.

Άρα μένουν δυο περιπτώσεις :

- κ-1 =25 και κ=26 (που όμως δεν διαιρείται με το 4) άρα απορρίπτεται.
- κ=25 και κ-1=24 που μας δίνουν την μοναδική λύση $25^2=625$

49)Έστω x,y,z,t οι ηλικίες των τεσσάρων παιδιών σήμερα τότε:

$$2 \le x < y < z < t \le 16$$

Έχουμε:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(t-1)^2 \quad \textbf{(1)}$$

$$(x+1)^2+(t+1)^2=(y+1)^2+(z+1)^2 \quad \textbf{(2)}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη .(1)+(2):

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x+1)^2+(t+1)^2=(t-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1+x^2+2x+1+t^2+2t+1=t^2-2t+1+y^2+2y+1+z^2+2z+1 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2y-2z+1+2t=0 \Leftrightarrow x^2+1=2y+2z-2t \Leftrightarrow x^2+1=2(y+z-t) \ (3)$$

Αφαιρούμε κατά μελη:(1)-(2)

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1-\left(x^2+2x+1\right)-\left(t^2+2t+1\right)=\left(t^2-2t+1\right)-\left(y^2+2y+1\right)-\left(z^2+2z+1\right) \Leftrightarrow$$
$$x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1-x^2-2x-1-t^2-2t-1=t^2-2t+1-y^2-2y-1-z^2-2z-1 \Leftrightarrow$$
$$2+2y^2+2z^2-4x-2t^2=0 \Leftrightarrow y^2+z^2=t^2+2x-1 \ (4)$$

Όμως $z<t$ και $y\le 14$ άρα $2(y+z-t)\le 2(14+t-t) \Leftrightarrow 2(y+z-t)\le 28 \overset{2(y+z-t)=x^2+1}{\Leftrightarrow} x^2+1\le 28 \Leftrightarrow x^2\le 27 \ (5)$

Όμως από την σχέση $x^2+1=2(y+z-t) \Leftrightarrow x^2=2(y+z-t)-1$ προκύπτει ότι ο χ είναι περιττός και από την σχέση (5) : $x\in\{3,5\}$.

- Αν x=3 τότε οι σχέσεις (3) και (4) παίρνουν την μορφή :

$$\begin{cases} y+z-t=5 \\ y^2+z^2=t^2+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-5=t \\ y^2+z^2=(y+z-5)^2+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-5=t \\ y^2+z^2=y^2+z^2+25+2yz-10z-10y+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} y+z-5=t \\ 0=30+2yz-10z-10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-5=t \\ 0=15+yz-5z-5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-5=t \\ 10=10+15+yz-5z-5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-5=t \\ yz-5y-5z+25=10 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} y+z-5=t \\ y(z-5)-5(z-5)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-5=t \\ (z-5)(y-5)=10 \end{cases}$$

Η τελευταία ισότητα $(z-5)(y-5)=10$ με y < z προκύπτει $(z-5=5 \text{ και } y-5=2)$ ή$(z-5=10 \text{ και } y-5=1)$

$(z=10 \text{ και } y=7)$ ή$(z=15 \text{ και } y=6)$

Οπότε έχουμε δυο λύσεις : $(x,y,z,t)=(3,7,10,12)$, $(x,y,z,t)=(3,6,15,16)$

- Αν x=5 τότε οι σχέσεις (3) και (4) παίρνουν την μορφή :

$$\begin{cases} y+z-t=13 \\ y^2+z^2=t^2+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-13=t \\ y^2+z^2=\left(y+z-13\right)^2+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-13=t \\ y^2+z^2=y^2+z^2+169+2yz-26z-26y+9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z-13=t \\ 0=178+2yz-26z-26y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-13=t \\ 0=89+yz-13z-13y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-5=t \\ yz-13y-13z+89=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y+z-5=t \\ y(z-13)-13z+89+80=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-5=t \\ y(z-13)-13z+169=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-5=t \\ y(z-13)-13(z-13)=80 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z-5=t \\ (y-13)\left(z-13\right)=80 \ \ (6) \end{cases}$$

Όμως $y-13\le 1$ και $y-13\le 2$ άρα η εξίσωση (6) είναι αδύνατη.

Οπότε μοναδικές λύσεις είναι $(x,y,z,t)=(3,7,10,12)$, $(x,y,z,t)=(3,6,15,16)$

50) Αφού ή ο Αντώνης είναι ο μεγαλύτερος ή ο Λάμπης είναι ο μικρότερος αποκλείεται ο Αντώνης να είναι ο μικρότερος – ειδάλλως δεν θα αλήθευε ούτε το ότι ο Αντώνης είναι ο μεγαλύτερος ούτε το ότι ο Λάμπης είναι ο μικρότερος .Συνεπώς, ο Αντώνης δεν είναι ο μικρότερος.

Αφού, λοιπόν, είναι ή ο Αντώνης ή ο Μανώλης ο μικρότερος. Προκυπτει ότι ο μικρότερος είναι ο Μανώλης .Οπότε, ο Λάμπης δεν μπορεί να είναι ο μικρότερος, και επειδή γνωρίζουμε ότι ή αυτός είναι ο μικρότερος ή ο Αντώνης ο μεγαλύτερος και αφού σίγουρα δεν είναι αυτός ο μικρότερος συμπεραίνουμε ότι ο Αντώνης είναι ο μεγαλύτερος. Άρα ο Μανώλης είναι ο μικρότερος, ο Λάμπης ο μεσαίος και ο Αντώνης ο μεγαλύτερος.

52) Εφόσον γνωρίζουμε ότι οι διαστάσεις του κύβου είναι νxνxν,κατασκευάζουμε τον παρακάτω πινάκα και διακρίνουμε περιπτώσεις για το πλήθος των χρωματισμένων κύβων συναρτήσει του ν.

Αριθμός χρωματισμένων εδρών του κύβου	**Αριθμός μοναδιαίων κύβων με χρώμα**
1	$ν^2$
2(απέναντι έδρες)	$2ν^2$
2(γειτονικες έδρες)	$2ν^2-ν=ν(2ν-1)$
3(σχήματος U)	$3ν^2-2ν=ν(3ν-2)$
3(όταν σχηματίζουν μια κορυφή του κύβου)	$3ν^2-3ν+1=3(ν^2-ν)+1$
4(όταν σχηματίζουν δυο ζεύγη απέναντι εδρών)	$4ν^2-4ν=4(ν^2-ν)$
4(όταν μια από τις έδρες συνορεύει με τις άλλες τρεις)	$4ν^2-5ν+2$
5	$5ν^2-8ν+4$
6	$6ν^2-12ν+8$

Εφόσον ο αριθμός $218=2\cdot 109$ δεν έχει την μορφή $ν^2$, ν(2ν-1), ν(3ν-2) ,3κ+1,4κ οι πρώτες 6 περιπτώσεις απορρίπτονται. Η περίπτωση $5ν^2-8ν+4$ απορρίπτεται διότι ο 218 είναι πολλαπλάσιο του 4 ενώ ο $5ν^2-8ν+4$ διαιρούμενος με το 4 αφήνει υπόλοιπο 1 ή 0.

Απομένουν δυο περιπτώσεις :

$4v^2$-5v+2=218 ή $6v^2$-12v+8=218 η πρώτη εξίσωση δίνει v=8 και η δεύτερη v=7.Δηλαδη έχουμε δυο λύσεις ένα κύβο 7x7x7 με όλες τις έδρες του χρωματισμένες και έναν κύβο 8χ8χ8 με 4 έδρες χρωματισμένες .Εφόσον όμως από υπόθεση δεν έχουν χρωματιστεί όλες οι έδρες του κύβου η μοναδική απάντηση είναι ο κύβος 8x8x8.

53)Έστω π,γ,ε,α τα μπουκάλια μπύρες που ήπιαν αντίστοιχα οι κυρίες Παπαδοπούλου, Γεωργίου, Ευθυμίου και Αντωνίου. Από την υπόθεση προκύπτουν οι δυο εξισώσεις :

π+γ+ε+α=14

π+2γ+3ε+4α=30 (αφαιρούμε κατά μέλη την πρώτη από την δεύτερη)

γ+2ε+3α=16

Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί γ, α πρέπει να είναι και οι δυο άρτιοι ή και οι δυο περιττοί.

Επίσης από υπόθεση $2 \le \gamma, \varepsilon, \alpha, \pi \le 5$ άρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

γ	α	$\varepsilon = \frac{16-\gamma-3\alpha}{2}$
3	5	-1
5	3	1
2	4	1
4	2	3

Μόνο η τελευταία τριάδα ικανοποιεί όλες τις συνθήκες άρα

γ=4,ε=3,α=2 , π=5

οπότε τα ονόματα των 4 γυναικών είναι :

Δώρα Παπαδοπούλου , Άννα Αντωνίου , Βίκυ Ευθυμίου, Καίτη Γεωργίου.

54)Αν η μειωμένη τιμή του μολυβιού είναι χ λεπτά $(x < 50)$ και y είναι το πλήθος των μολυβιών μάρκας Α (y>1) τότε $x \cdot y = 3193$ λεπτά. Όμως ο αριθμός 3193 αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής: $3193 = 31 \cdot 103$, όμως $103 > 50$ άρα x=31,οποτε η έκπτωση είναι 19 λεπτά.

55)Αν υποθέσουμε ότι το παρακάτω τετράγωνο είναι μαγικό τετράγωνο δηλαδή κάθε γραμμή ,διαγώνιος, στήλη έχει το ίδιο άθροισμα .

α	β	γ
δ	ε	ζ
η	θ	ι

Τότε το παρακάτω τετράγωνο(με χ διάφορο του ένα και μεγαλύτερο του μηδέν) έχει την ιδιότητα που απαιτούμε .Κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιος να έχει το ίδιο γινόμενο.

$χ^α$	$χ^β$	$χ^γ$
$χ^δ$	$χ^ε$	$χ^ζ$
$χ^η$	$χ^θ$	$χ^ι$

Από το αρχικό μαγικό τετράγωνο που δόθηκε(το Α) αφαιρούμε από την τιμή κάθε κελιού την μονάδα (ο μπούσουλας μας είναι η μορφή του ζητούμενου τετραγώνου)

7	0	5
2	4	6
3	8	1

Και θεωρούμε το τετράγωνο

2^7	2^0	2^5
2^2	2^4	2^6
2^3	2^8	2^1

Που ισούται με

128	1	32
4	16	64
8	256	2

Οι λύσεις στην σελ 166

Που είναι και το ζητούμενο τετράγωνο.

56)Έστω $\theta_1, \theta_2, ... \theta_{62}$ οι ελάχιστες θερμοκρασίες για τις 62 ημέρες του διμήνου Δεκεμβρίου- Ιανουαρίου .

Γνωρίζουμε από υπόθεση ότι $\theta_3 = 5$ και $\theta_{62} = 2$.Για $i = 1, 2, ..., 59$ θα ισχύει :

$\theta_{i+1} = \theta_i + \theta_{i+2}$ και $\theta_{i+2} = \theta_{i+1} + \theta_{i+3}$ με πρόσθεση κατά μέλη των ισοτήτων προκύπτει

$\theta_i = -\theta_{i+3}$ (1)

Αν στην σχέση (1) βάλουμε όπου i το $i+3$ τότε $\theta_{i+3} = -\theta_{i+6}$ (2) με $i = 1, 2, ..., 56$.

(1) ,(2) : $\theta_i = \theta_{i+6}$ (3).Έτσι:

Από την (3): $\theta_{26} = \theta_{32} = \theta_{38} = \theta_{44} = \theta_{50} = \theta_{56} = \theta_{62} = 2$ οπότε $\theta_{26} = 2$.

Από την (2): $5 = \theta_3 = -\theta_6 = \theta_9 = -\theta_{12} = \theta_{15} = -\theta_{18} = \theta_{21} = -\theta_{24}$ άρα $5 = -\theta_{24} \Leftrightarrow \theta_{24} = -5$.

Άρα η ελάχιστη θερμοκρασία την μέρα των Χριστουγέννων 25 Δεκεμβρίου είναι

$$\theta_{25} = \theta_{24} + \theta_{26} = -3\,^0\mathrm{C}\,.$$

57) Καταρχήν παρατηρούμε ότι όταν προσθέτουμε δυο αριθμητικά ψηφία το κρατούμενο της πρόσθεσης είναι το πολύ 1.Ετσι το H το πρώτο από αριστερά ψηφίο του αποτελέσματος είναι H=1.Εφοσον το κρατούμενο είναι το πολύ 1 το γράμμα G είναι G=9 και T=0.

Συνεχίζουμε ,H+O=10 (ενδεχομένως με κρατούμενο 1 από την πρόσθεση I+E). Το γράμμα O δεν μπορεί όμως ένα ισούται με 9(G=9).Αρα O=8 και σίγουρα έχουμε κρατούμενο 1 από την πρόσθεση I+E.

Τώρα στρεφόμαστε στα πρώτα από δεξιά ψηφία των προσθετέων και του αποτελέσματος με G=9,H=1,R=2. Εφόσον R=2 (κάτω από το T) έχουμε 0+2, με άθροισμα L.Αλλά το L δεν μπορεί να είναι 2,οποτε υπάρχει κρατούμενο (από την πρόσθεση L+I) και έτσι L=3.

Τώρα κάτω από το άθροισμα L+I (3+;) έχουμε H (1) .Το γράμμα I δεν μπορεί να ισούται με 8 (O=8).Οποτε , I=7 με κρατούμενο 1 από το E+N. Τελικά το γράμμα E από τον προσθετέο GOERING προκύπτει ότι ισούται με 6. Οπότε μένει N=4.

$$\begin{array}{r} 1\,7\,0\,3\,6\,2 \\ +\;\; 9\,8\,6\,2\,7\,4\,9 \\ 10\,0\,3\,3\,1\,1\,1 \end{array}$$

58) Από την 1η Μαρτίου μέχρι την 16η Μαΐου έχουμε συνολικά 77 ημέρες .Έστω Y_i ο αριθμός των υπολογιστών που πούλησε μέχρι και την i μέρα .Έχουμε λοιπόν:

$1 \le Y_1 < Y_2 < ... < Y_{77} \le 132$ προσθέτουμε το 21

$$22 \le Y_1 + 21 < Y_2 + 21 < \ldots < Y_{77} + 21 \le 153$$

Όμως μεταξύ των παραπάνω 154 αριθμών $Y_1, Y_2, .., Y_{77}, Y_1 + 21, Y_2 + 21, .., Y_{77} + 21$ από την αρχή της περιστεροφωλιάς θα υπάρχουν σίγουρα δυο ίσοι αριθμοί άρα υπάρχουν δείκτες ημερών i και j τέτοια ώστε $Y_i = Y_j + 21$ έτσι ο Παπαδόπουλος θα έχει πουλήσει ακριβώς 21 υπολογιστές τις μέρες $j+1, j+2, \ldots, i$.

59) Έστω Π,Κ,Α ο αριθμός των πράσινων ,κόκκινων και άσπρων τριγώνων. Το πολύγωνο με ν κορυφές χωρίζεται όπως περιγράφεται στην εκφώνηση ακριβώς σε ν-2 τρίγωνα. Επομένως:

Π+Κ+Α=ν-2

Επιπλέον κάθε πλευρά του πολυγώνου είναι πλευρά από ακριβώς ένα τρίγωνο και από τον τρόπο που έγινε ο χρωματισμός έχουμε ότι:

2Π+Κ=ν

Αφαιρούμε κατά μέλη τις δυο σχέσεις έχουμε Α=Π-2 .

60) Καταρχήν θα χρησιμοποιήσουμε ένα συμβολισμό που θα απλοποιήσει την λύση. **Αριθμός πρότασης-τιμή αλήθειας αυτής** .Για παράδειγμα γράφοντας 3Α θα εννοούμε ότι η πρόταση 3 είναι αληθής και αντίστοιχα 4Ψ ότι η πρόταση 4 είναι ψευδής .

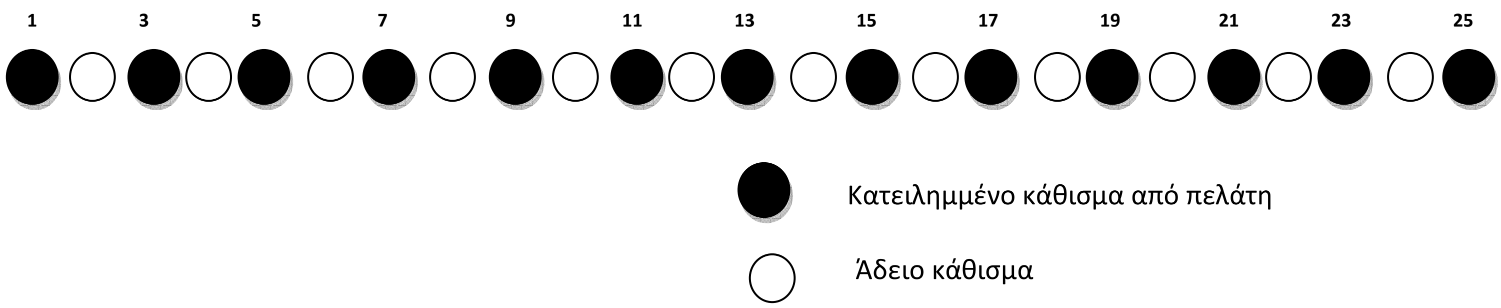
Έτσι: Αν ισχύει 2Α τότε 5Α και από αυτή προκύπτει 4Ψ (διότι 4Α,5Α θα έδιναν 4Ψ).Ομως 4Ψ σημαίνει ότι δυο συνεχόμενες προτάσεις είναι αληθείς, άτοπο. Άρα θα ισχύει 2Ψ.

Όμως 2Ψ σημαίνει 4Α (αν 4Ψ αυτό σημαίνει ότι από τις 5 προτάσεις με τις 2 και 4 ψευδείς τότε σίγουρα δεν θα υπήρχαν 2 συνεχόμενες προτάσεις αληθείς άρα θα ήταν 4Α ,άτοπο).

Έτσι με 4Α προκύπτει 3Ψ και 5Ψ.

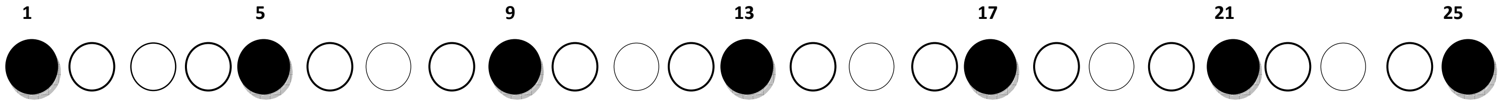
Έτσι 1Ψ,2Ψ,3Ψ,4Α,5Ψ και η απάντηση στην ερώτηση είναι από τις πέντε προτάσεις της λίστας μόνο μια η 4 είναι αληθής .

61) Πρέπει ο μπάρμαν να τοποθετήσει τον πρώτο πελάτη στην θέση 17.Ας δούμε γιατί. Να σκεφτούμε αντίστροφα. Η ιδανική κατάσταση για τον μπάρμαν με τους κανόνες που τεθήκαν είναι τα καθίσματα εναλλάξ να είναι γεμάτα με θαμώνες. Δηλαδή να ισχύει η παρακάτω διάταξη :

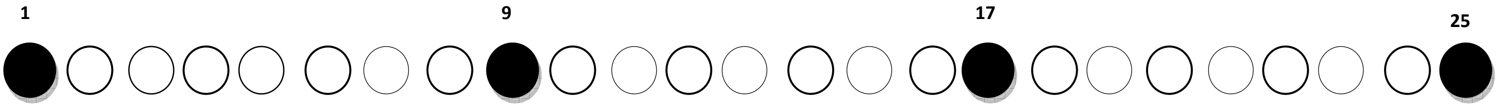


Χωρίζουμε την διαδικασία σε τέσσερεις φάσεις:

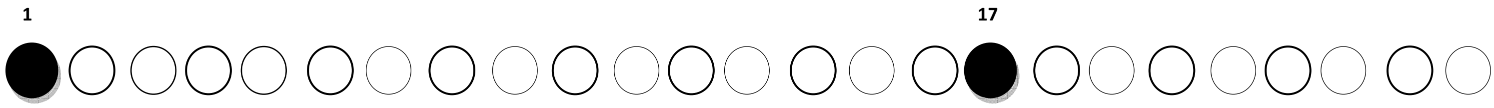
•Στην τέταρτη φάση τελευταίοι έφτασαν οι πελάτες 3 ,7,11,15,19,23 όχι απαραίτητα όλοι μαζί. Τα καθίσματα πριν έρθουν ήταν ως εξής :



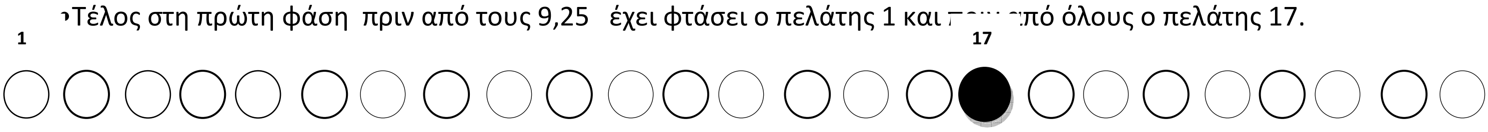
•Στην τρίτη φάση για να τηρούνται οι κανόνες απομόνωσης που τεθήκαν πήγαν στο μπαρ οι πελάτες 5,13,21.Και τα καθίσματα πριν μπουν στο μπαρ είχαν την διάταξη:



•Στην δεύτερη φάση από την παραπάνω διάταξη έπρεπε να έχουν έρθει οι πελάτες 9,25.



•Τέλος στη πρώτη φάση πριν από τους 9,25 έχει φτάσει ο πελάτης 1 και πριν από όλους ο πελάτης 17.



Ο μπάρμαν θα τοποθετήσει τον πρώτο πελάτη στο 17 και οι πελάτες ερχόμενοι ακολουθώντας τους κανόνες θα γεμίσουν εναλλάξ τα καθίσματα ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία από αυτή που περιγράψαμε. Αν μπερδευτήκατε, κοιτάξτε τα σχήματα από κάτω προς τα πάνω για να δείτε πως θα κάθονται διαδοχικά οι θαμώνες του μπαρ. Παρατηρούμε ότι θα μπορούσε ο μπάρμαν να τοποθετήσει τον πρώτο πελάτη στο κάθισμα 9 και να πραγματοποιηθεί συμμετρικά ο ερχομός των πελατών και να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Η σπαζοκεφαλιά είναι παραπλήσια με το πρόβλημα του Ιώσηπου.

62.Έστω Α τα αναψυκτικά που κατανάλωσε κάθε άνδρας και Γ τα αναψυκτικά που κατανάλωσε κάθε γυναίκα, τότε θα ισχύει 150Α+70Γ=1110 ή 15Α+7Γ=111 (1).

Από την (10 βλέπουμε ότι εφόσον 111 και 15Α πολλαπλάσια του 3 τότε και 7Γ είναι πολλαπλάσιο του 3 δηλαδή Γ πολλαπλάσιο του 3.Έτσι Γ=3Μ , για Μ κάποιο φυσικό αριθμό.

Η (1) γίνεται 15Α+7(3Μ)=111 ή 15Α+21Μ=111 ή 5Α+7Μ=37 (2) .Από την (2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι Α,Μ φυσικοί αριθμοί προκύπτει: 0≤Μ<5 ,οπότε Μ=1,2,3,4,5

Η μοναδική τιμή του Μ που δίνει ακέραια τιμή για το Α είναι Μ=1 και τελικά Α=6.

Οπότε κάθε άνδρας ήπιε 6 αναψυκτικά και κάθε γυναίκα 1 αναψυκτικό.

63.Αν χ είναι το πλήθος των φίλων της Δώρας τότε η Ελένη έχει 3χ φίλους και η Μαρία 6χ φίλους .Οι διαφορές των φίλων των τριών γυναικών είναι :
Μ-Ε=6χ-3χ=3χ πολλαπλάσιο του 3 (Μ: Μαρία, Ε:Ελενη,Δ:Δωρα)

Ε-Δ=3χ-χ=2χ πολλαπλάσιο του 2
Μ-Δ=6χ-χ=5χ πολλαπλάσιο του 5
Ο αριθμός 3865 είναι πολλαπλάσιο του 5 αλλά όχι του 3 και του 2, έτσι, η Μαρία λέγεται Αντωνοπούλου, η Δώρα λέγεται Γεωργοπούλου και τελικά η Ελένη λέγεται Βασιλοπούλου.

65. Έστω x ο αριθμός των κύβων σε μια γραμμή του μεγάλου κύβου τότε
ν= x^3 – x=x(x^2 – 1)=x(x + 1)(x – 1)
Οι τρεις παράγοντες του γινομένου x,x+1x+2 είναι διαδοχικοί ακέραιοι άρα ένας από αυτούς είναι άρτιος και ένας είναι πολλαπλάσιο του 3.Οποτε ο ν είναι πολλαπλάσιο του 6.

66. Ας συμβολίσουμε τον αριθμό των διαδρόμων του ασανσέρ από τον πρώτο όροφο στο δεύτερο με v_{12}, τον αριθμό των διαδρόμων του ασανσέρ από τον τρίτο όροφο στο πρώτο v_{31},κ.οκ.

Χωρίζουμε τις συνολικές διαδρομές των πελατών στους τρεις ορόφους σε τρεις ομάδες .

Ομάδα Α :Διαδρομές προς τον τρίτο όροφο $v_{13} + v_{23}$

Ομάδα Β:Διαδρομές από τον τρίτο όροφο $v_{31} + v_{32}$

Ομάδα Γ :Διαδρομές ανάμεσα στον πρώτο και τον δεύτερο όροφο $v_{21} + v_{12}$.

Από την υπόθεση όμως το σύνολο Α είναι μικρότερο από το 1/3 όλων των διαδρομών .Τώρα εφόσον το πολυκατάστημα είναι άδειο την νύχτα και οι όροφοι επικοινωνούν μόνο με το ασανσέρ ο συνολικός αριθμός των πελατών που μπαίνουν τον τρίτο όροφο σε μια μέρα ισούται με τον συνολικό αριθμό των πελατών που φεύγουν με το ασανσέρ από τον τρίτο όροφο. Άρα οι ομάδες Α και Β έχουν τον ίδιο αριθμό πελατών ($v_{13} + v_{23}= v_{31} + v_{32}$) και η ομάδα Γ είναι η μεγαλύτερη από τις τρεις. (Το Α άρα και το Β είναι μικρότερο από το 1/3 όλων των διαδρομών). Βλέπουμε ότι :

$$(v_{31} + v_{32}) = (v_{13} + v_{23}) < (v_{12} + v_{21})$$

Από την υπόθεση (1)ισχυει $v_{21} = v_{23}$,αντικαθιστούμε το v_{21} με το v_{23} και προκύπτει $v_{13} < v_{12}$,αρα οι πελάτες που ανέβηκαν από τον πρώτο στο δεύτερο είναι περισσότεροι από τους πελάτες που ανέβηκαν από το πρώτο όροφο στον τρίτο όροφο.

67. Έστω ότι οι διαστάσεις του κουτιού που αναζητούμε είναι x,y,z και υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι με $x \ge y \ge z$.Τότε σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε:

$$E = V \Rightarrow 2(xy + xz + yz) = xyz \ (1)$$

Έχουμε:

$$xyz = 2xy + 2xz + 2yz \le 2xy + 2xy + 2xy = 6xy \Leftrightarrow xyz \le 6xy \Leftrightarrow$$
$$xyz - 6xy \le 0 \Leftrightarrow xy(z-6) \le 0 \overset{x,y>0}{\Leftrightarrow} z - 6 \le 0 \Leftrightarrow z \le 6 \ (2)$$

Η (1) γίνεται:

$$2xy+2xz+2yz=xyz \Leftrightarrow 2xz+2yz=xyz-2xy \Leftrightarrow$$
$$2xz+2yz=xy(z-2) \Leftrightarrow 0<2xz+2yz=xy(z-2) \Leftrightarrow$$
$$xy(z-2)>0 \overset{x,y>0}{\Leftrightarrow} z-2>0 \Leftrightarrow z>2 \quad (3)$$

Από (1) ,(2) έχουμε: $2<z\le 6$ έτσι $z\in\{3,4,5,6\}$.

Λύνουμε την $2xz+2yz=xy(z-2)$ ως προς xy

$$2xz+2yz=xy(z-2) \overset{z\in\{3,4,5,6\}}{\Leftrightarrow} xy=\frac{2xz+2yz}{z-2} \Leftrightarrow xy=\frac{2z}{z-2}(x+y)\le\frac{2z}{z-2}(x+x)=\frac{4z}{z-2}x \Leftrightarrow xy\le\frac{4z}{z-2}x \Leftrightarrow y\le\frac{4z}{z-2} \quad (4)$$

Η (1) γίνεται:

$$2(xy+xz+yz)=xyz \Leftrightarrow 2xy+2xz+2yz=xyz \Leftrightarrow 2xy+2xz-xyz=-2yz \Leftrightarrow x(2y+2z-yz)=-2yz \Leftrightarrow x=\frac{2yz}{yz-2y-2z}\in\mathbb{Z}^+$$ άρα ο

παρανομαστής είναι μεγαλύτερος του 0 ,δηλαδή: $yz-2y-2z>0 \Leftrightarrow yz-2y>2z \Leftrightarrow y(z-2)>2z \overset{z\in\{3,4,5,6\}}{\Leftrightarrow} y>\frac{2z}{z-2}$ (5)

από (4) και (5) $\frac{2z}{z-2}<y\le\frac{4z}{z-2}$ (6)

Αν $z=3$ τότε οι δυνατές περιπτώσεις για το y θα ήταν από την σχέση (6) : 7,8,9,10,11,12.Απορριπτουμε μόνο το 11 γιατί δίνει μη ακέραια τιμή για το x.Για $z=3$ προκύπτουν τα κουτιά με διαστάσεις (42,7,3),(24,8,3),(18,9,3),(15,10,3) και (12,12,3).

Αν $z=4$ τότε οι δυνατές περιπτώσεις για το y θα ήταν 5,6,7,8 ,απορρίπτουμε το 7 και προκύπτουν τα κουτιά με διαστάσεις : (20,5,4),(12,6,4),(18,8,4).

Ανάλογα για $z=5$ έχουμε (10,5,5) και για $z=6$ έχουμε (6,6,6). Αν αγνοήσουμε τις συμμετρίες έχουμε 10 διαφορετικά είδη κουτιών :

(42,7,3),(24,8,3),(18,9,3),(15,10,3),(12,12,3), (20,5,4),(12,6,4),(18,8,4), (10,5,5), (6,6,6).

68. Έστω ότι ένα έτος χ ($x\in\mathbb{N}$)γράφεται σαν άθροισμα κ διαδοχικών φυσικών αριθμών τότε θα

ισχύει $x=(\nu+1)+(\nu+2)+\ldots+(\nu+\kappa)=\nu\kappa+\left(1+2+3..+\kappa\right) \overset{1+2+..+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}}{=} \nu\kappa+\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}=\frac{2\nu\kappa+\kappa(\kappa+1)}{2}=\frac{\kappa(2\nu+\kappa+1)}{2}$

• Αν κ είναι άρτιος τότε 2ν+κ+1 είναι περιττός.

• Αν κ είναι περιττός τότε 2ν+κ+1 είναι άρτιος.

<u>Άρα σε κάθε περίπτωση ο x έχει έναν περιττό διαιρέτη .</u>

Το ερώτημα είναι τώρα, είναι δυνατό ένας φυσικός αριθμός με περιττό διαιρέτη να μην μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα διαδοχικών φυσικών αριθμών ;Η απάντηση είναι αρνητική ,ας δούμε το γιατί.

Έστω χ ένας φυσικός αριθμός με έναν περιττό διαιρέτη τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας ο χ γράφεται: $x=pq$ οπού q($q\ge 3$) περιττός διαιρέτης και p άρτιος ή η μονάδα . Ισχύει $2p\ne q$ (πρώτο μέλος άρτιος ενώ δεύτερο μέλος περιττός).

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- $2p < q$, τότε ο αριθμός $b = \frac{q-2p-1}{2} \in \mathbb{N}, (b \geq 0)$.

(Ο q είναι περιττός άρα ο αριθμητής του κλάσματος άρτιος)

Θεωρούμε το άθροισμα των διαδοχικών φυσικών

$$(b+1)+(b+2)+....+(b+2p) = 2pb+(1+2+...+2p) = 2pb+\frac{2p\cdot(2p+1)}{2} = 2p(b+\frac{2p+1}{2}) = 2p(\frac{q-2p-1}{2}+\frac{2p+1}{2})2p(\frac{q}{2}) = pq = x$$

- $2p > q$, τότε ο αριθμός $b = p-\frac{q+1}{2} \in \mathbb{N}, (b \geq 0)$

(Ο q περιττός άρα ο αριθμητής του κλάσματος άρτιος)

Θεωρούμε το άθροισμα των διαδοχικών φυσικών

$$(b+1)+(b+2)+....+(b+q) = qb+(1+2+...+q) = qb+\frac{q\cdot(q+1)}{2} = q(b+\frac{q+1}{2}) = q(p-\frac{q+1}{2}+\frac{q+1}{2}) = pq = x$$

Άρα κάθε φυσικός με έναν περιττό διαιρέτη μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα διαδοχικών φυσικών. Οπότε οι μοναδικοί φυσικοί αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν σαν άθροισμα διαδοχικών φυσικών είναι αυτοί που δεν έχουν περιττό διαιρέτη. Όμως ένας φυσικός αριθμός δεν έχει περιττό διαιρετή αν και μόνο αν είναι δύναμη του 2

Έτσι το έτος που αναζητούμε είναι δύναμη του 2 και ανήκει στην τρίτη χιλιετία, οπότε είναι ο αριθμός 2048.Το έτος 2048 θα είναι το έτος οικονομικής ανάκαμψης σύμφωνα με τον Μάκη Μπούλη.

69. ‘Εστω χ ημέρες έβρεχε και y οι ημέρες που δεν έβρεχε .Ο Γιάννης κάπνισε α τσιγάρα κάθε ημέρα που δεν έβρεχε.(α,x,y θετικοί ακέραιοι)

Ο μέσος ημερήσιος όρος τσιγάρων του Γιάννη καθόλη την παραμονή του ήταν $\frac{20x+\alpha y}{x+y}$ και από την υπόθεση καταλαβαίνουμε ότι ήταν πενταπλάσιος του α,έτσι:

$\frac{20x+\alpha y}{x+y} = 5\alpha \Leftrightarrow 20x+\alpha y = 5\alpha x+5\alpha y \Leftrightarrow 20x-5\alpha x = 5\alpha y-\alpha y \Leftrightarrow 5x(4-\alpha) = 4\alpha y$ (1) αρα α<4 (2)

Όμως από υπόθεση $x > y$ οπότε

$5x(4-\alpha) = 4\alpha y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{4\alpha}{5(4-\alpha)} \overset{x>y \Leftrightarrow \frac{x}{y}>1}{\Rightarrow} \frac{4\alpha}{5(4-\alpha)} > 1 \Leftrightarrow 4\alpha > 20-5\alpha \Leftrightarrow 9\alpha > 20 \Leftrightarrow \alpha > \frac{20}{9}$ (3)

Από (2) ,(3): $\frac{20}{9} < \alpha < 4 \overset{\alpha\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} \alpha = 3$.Για $\alpha = 3$ η (1) γίνεται : $5x = 12y$ (4)

Από υπόθεση η διάρκεια παραμονής του Γιάννη είναι «περίπου 5 εβδομάδες» άρα για το πλήθος των ημερών x+y θα είναι:

$$28 < x+y < 42 \overset{5x=12y \Leftrightarrow x=\frac{12y}{5}}{\Leftrightarrow} 28 < \frac{12}{5}y + y < 42 \Leftrightarrow 140 < 17y < 210 \Leftrightarrow \frac{140}{17} < y < \frac{210}{17} \overset{y\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} y=9 \text{ ή } y=10 \text{ ή } y=11 \text{ ή } y=12$$

(28 ημέρες οι 4 εβδομάδες και 42 ημέρες οι 6 εβδομάδες).Ετσι από την σχέση (4):

$$y=9 \Rightarrow x=\frac{12\cdot 9}{5}=21.6 \notin \mathbb{N} \text{ απορρίπτεται.}$$
$$y=10 \Rightarrow x=\frac{12\cdot 10}{5}=24 \in \mathbb{N} \text{ δεκτη.}$$
$$y=11 \Rightarrow x=\frac{12\cdot 11}{5}=26.4 \notin \mathbb{N} \text{ απορρίπτεται.}$$
$$y=12 \Rightarrow x=\frac{12\cdot 12}{5}=28.8 \notin \mathbb{N} \text{ απορρίπτεται.}$$

Οπότε y=10 και x=24.Άρα έβρεχε 24 ημέρες.

70. Το κλειδί του προβλήματος είναι η πληροφορία ότι ο αριθμός των δακτύλων μπορεί να μας δώσει μοναδικά το πλήθος των Αρειανών. Κάθε αριθμός ανάμεσα στο 200 και 300 που γράφεται σαν γινόμενο δυο ή περισσότερων διαφορετικών αριθμών απορρίπτεται διότι δεν γνωρίζουμε ποιος αριθμός εκφράζει τα δάκτυλα και ποιος τους αρειανούς. Εξηγούμαι, αν τα δάκτυλα είναι π.χ 249 τότε 249=83x3 .Τότε θα έχουμε 83 αρειανούς με 3 δάκτυλα ο καθένας ή 3 Αρειανούς με 83 δάκτυλα ο καθένας .Η μόνη περίπτωση που δεν έχουμε αβεβαιότητα είναι ο αριθμός των δακτύλων και ο αριθμός των Αρειανών να είναι ίδιος και να μην είναι σύνθετος .Οπότε αναζητούμε ένα αριθμό ανάμεσα στο 200 και 300 που να είναι το τετράγωνο ενός πρώτου αριθμού. Ο μοναδικός αριθμός που ικανοποίει τις παραπάνω συνθήκες είναι το 17 διότι 17^2=289.Αρα έχουμε 17 αρειανούς με 17 δάκτυλα ο καθένας .

71 Αν $A_1=\overline{\alpha\beta}$ και $A_2=\overline{\gamma\delta}$ $(\alpha\neq\beta, \gamma\neq\delta)$οι δύο αριθμοί με α,β,γ,δ ,να λαμβάνουν τιμές 0,1,2,3,…,9 τότε θα ισχύει:

$$A_1\cdot A_2=\left(\overline{\alpha\beta}\right)\cdot\left(\overline{\gamma\delta}\right)=\left(\overline{\beta\alpha}\right)\cdot\left(\overline{\delta\gamma}\right)\Leftrightarrow(10\alpha+\beta)(10\gamma+\delta)=(10\beta+\alpha)(10\delta+\gamma)\Leftrightarrow$$
$$100\alpha\gamma+10\alpha\delta+10\beta\gamma+\beta\delta=100\beta\delta+10\beta\gamma+10\alpha\delta+\alpha\gamma\Leftrightarrow\alpha\gamma=\beta\delta \quad (1)$$

Όλα τα πιθανά ζεύγη διψηφίων αριθμών που πληρούν την ιδιότητα (1) είναι:

$12\cdot 42=21\cdot 24=504$
$12\cdot 63=21\cdot 36=756$
$12\cdot 84=21\cdot 48=1008$
$13\cdot 62=31\cdot 26=806$
$13\cdot 93=31\cdot 39=1209$
$14\cdot 82=41\cdot 28=1148$
$23\cdot 64=32\cdot 46=1472$
$23\cdot 96=32\cdot 69=2208$
$24\cdot 63=42\cdot 36=1512$
$24\cdot 84=42\cdot 48=2016$
$26\cdot 93=62\cdot 39=2418$
$34\cdot 86=43\cdot 68=2924$
$36\cdot 84=63\cdot 48=3024$
$46\cdot 96=64\cdot 69=4416$

Τα μοναδικά ζεύγη αριθμών με γινόμενο ανάμεσα στο 3000 και το 4000 είναι τα (36,84) και (63,48) οπότε πιθανοί υποψήφιοι αριθμοί είναι οι 63 και 84.Αλλά εφόσον στο μέσο του αριθμού της οδού μένει η Τασία ο αριθμός που αναζητούμε πρεπει να είναι άρτιος , άρα ο Αντώνης εργαζεται στην οδό με αριθμό 84.

72.Προβληματάκι συνεντεύξεων δυο γνωστών πολυεθνικών λογισμικού(Microsoft,Google)

Απάντηση από το εγχειρίδιο της Microsoft.

Οι δυο ναυαγοί πραγματοποιούν έναν πολύ μεγάλο αριθμό ρίψεων (2000 φορές, χρόνο έχουν) καταγράφουν το ποσοστό των γραμμάτων και των κορόνων. Ας πούμε ότι διαπιστώνουν ότι έχει έρθει κορώνα στο 57,3% των ρίψεων. Τώρα μπορούν να δημιουργήσουν ένα σχετικά δίκαιο στοίχημα .Ο Κωστίκας επιλέγει κορώνα και ο Γιωρίκας γράμματα. Ρίχνουν το κέρμα 100 φορές αν φέρει κορώνα τουλάχιστον 58 φορές κερδίζει ο Κωστίκας αλλιώς κερδίζει ο Γιωρίκας.

Απάντηση από το εγχειρίδιο της Google.

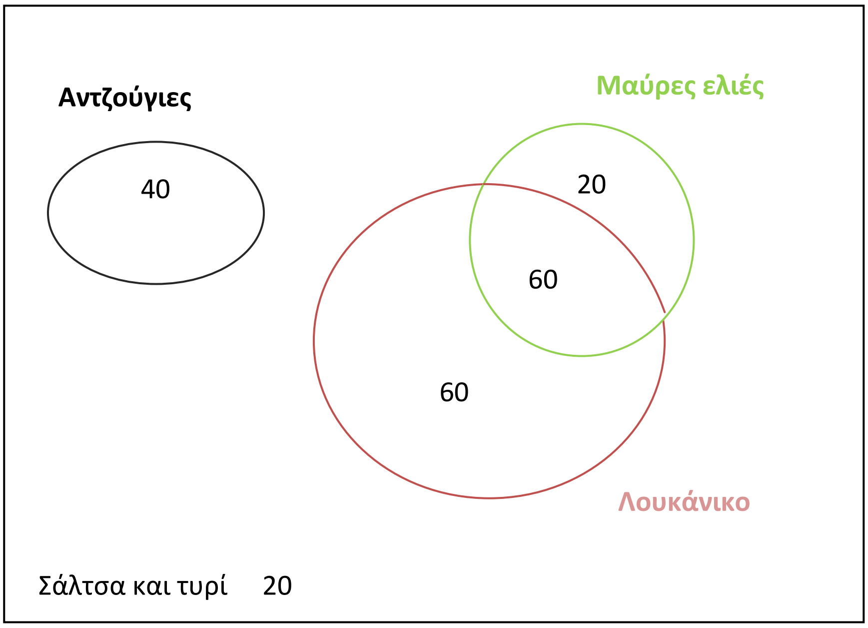
Οι δυο φίλοι ρίχνουν το κέρμα δυο φορές .Υπάρχουν τέσσερα δυνατά αποτελέσματα ΚΚ,ΓΓ,ΚΓ,ΓΚ .Τα αποτελέσματα ΚΚ ,ΓΓ δεν είναι ισοπίθανα καθώς το κέρμα είναι λυγισμένο και ευνοεί την μια από τις δυο πλευρές (κορώνα ή γράμματα) .Όμως τα αποτελέσματα ΚΓ,ΓΚ είναι ισοπίθανα και ανεξάρτητα από την παραμόρφωση του νομίσματος. Άρα ο Κωστίκας επιλέγει ΚΓ και ο Γιωρίκας ΓΚ .Ρίχνουν το κέρμα δυο φορές και προκύπτει δίκαια ο νικητής. Αν έρθει σε μια από τις δυο τουλάχιστον ρίψεις ΚΚ ή ΓΓ τότε σταματούν και ρίχνουν ξανά το κέρμα δυο φορές .

73 Χωρίστε τα 100 νομίσματα τυχαία σε δύο ομάδες , μια με 10 νομίσματα και μια με 90 νομίσματα.
Αν η πρώτη ομάδα(10 νομίσματα) έχει x κορώνες με την όψη προς τα πάνω τότε έχει 10-x γράμματα με την όψη προς τα πάνω.
Η δεύτερη ομάδα (90 νομίσματα) έχει 90-x κορώνες με την όψη προς τα πάνω και x γράμματα με την όψη προς τα πάνω.
Αναποδογυρίζουμε κάθε κέρμα της δεύτερης ομάδας τότε στην δεύτερη ομάδα θα έχουμε 90-x γράμματα προς τα πάνω και x κορώνες προς τα πάνω.
Άρα ο δυο ομάδες έχουν τον ίδιο αριθμό από κορώνες με την όψη προς τα πάνω.

74. Έστω t ο αριθμός των πελατών που έβαλαν ένα τουλάχιστον επιπλέον υλικό από τα 3(μαύρες ελιές, αντσούγιες, λουκάνικο) τότε από την υπόθεση θα ισχύει t=40+x , όπου χ ο αριθμός των πελατών που έβαλαν μαύρες ελιές ή λουκάνικο(ή και τα δυο). Υπάρχουν 60 πελάτες που επέλεξαν και μαύρες ελιές και λουκάνικο, έτσι 20=80-60 επέλεξαν μαύρες ελιές και τίποτα άλλο. Ανάλογα, 60=120-60 πελάτες έβαλαν λουκάνικο και τίποτα άλλο. Οπότε,t=40+x=40+(20+60+60)=180, άρα ο αριθμός των πελατών που δεν έβαλαν κανένα από τα 3 υλικά (μαύρες ελιές ,λουκάνικο και αντσούγιες) είναι 200-t=20.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι: 20/200=0.1 ή 10%

Το παρακάτω διάγραμμα δίνει την λύση πολύ πιο εύληπτα.



75. -Έστω x το πλήθος των διαδρομών που συνδέουν άμεσα (δεν διέρχονται από την πόλη Γ) τις πόλεις Α και Β.

-Έστω y το πλήθος των διαδρομών που συνδέουν άμεσα (δεν διέρχονται από την πόλη Α) τις πόλεις Β και Γ.
-Έστω z το πλήθος των διαδρομών που συνδέουν άμεσα (δεν διέρχονται από την πόλη Β) τις πόλεις Α και Γ.

Αν y δρόμοι συνδέουν την πόλη Β με την Γ και z δρόμοι την πόλη Γ με την Α τότε μεταβαίνουμε έμμεσα (διερχόμενοι από την πόλη Γ) από την Β στην Α από yz διαφορετικές διαδρομές.
Έχουμε λοιπόν τις παρακάτω αλγεβρικές σχέσεις :

$$x+yz=33 \quad (1) \quad \text{και } y+xz=23 \quad (2)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (1) ,(2) και παραγοντοποιήσουμε λαμβάνουμε:

$$(x+y)(z+1)=56 \quad (3)$$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις (1) ,(2) και παραγοντοποιήσουμε λαμβάνουμε:

$$(y-x)(z-1)=10 \quad (4)$$

Ο z είναι θετικός ακέραιος διαφορετικός του μηδέν.
Από την σχέση (4) προκύπτει ότι ο z-1 είναι διαιρέτης του 10.
Από την σχέση (3) προκύπτει ότι ο z+1 είναι διαιρέτης του 56.
Οι μοναδικοί αριθμοί που ικανοποιούν τις παραπάνω είναι z=3 ή z=6.
Για z=3 οι x,y προκύπτουν δεκαδικοί άρα η τιμή απορρίπτεται.
Για z=6 τότε έχουμε x=3,y=5. Οπότε οι συνολικές διαδρομές από την πόλη Α στην πόλη Γ είναι :6+3*5=21.

76.Είναι αδύνατο να το καταφέρει. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν μια ομάδα μαθητών πλήθους x είναι πολλαπλάσιο ενός περιττού αριθμού α τότε μετά από κάθε παράγγελμα του γυμναστή (ένα ή δυο σφυρίγματα) θα παραμένει πολλαπλάσιο του α. Με το πρώτο παράγγελμα δεν μπορούμε να χωρίσουμε καμία από τις τρεις ομάδες είναι όλες τους περιττού πλήθους.Αρα μπορούμε μόνο να συνενώσουμε ,όμως με όποιο τρόπο και αν συνενώσουμε τις ομάδες προκύπτουν δυο ομάδες πολλαπλάσια του ίδιου περιττού αριθμού.Δείτε τις περιπτώσεις:

51+49=100 μαθητές και 5 μαθητές (πολλαπλάσια του 5)

49+5=54 μαθητές και 51 μαθητές (πολλαπλάσια του 3)

51+5=56 μαθητές και 49 μαθητές (πολλαπλάσια του 7)

Άρα όποια ακολουθία παραγγελμάτων και γίνει στην συνέχεια ,οι ομάδες που θα προκύπτουν θα έχουν διαιρέτες τους παραπάνω περιττούς αριθμούς. Οπότε είναι αδύνατο να καταφέρουμε να τις χωρίσουμε σε 105 ομάδες του ενός ατόμου. Θυμηθείτε ότι μπορούμε να χωρίσουμε μια ομάδα σε δυο όταν το πλήθος της είναι άρτιος .

77. Το άθροισμα των αριθμών των σχισμένων σελίδων είναι τουλάχιστον

$$1+2+3+4+\ldots+50=1275$$

Άρα το άθροισμα δεν μπορεί να είναι 1271.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των αριθμών μια σχισμένης σελίδας είναι πάντα περιττός αριθμός .Άρα προσθέτοντας το άθροισμα των αριθμών 25 σελίδων προσθέτουμε 25 περιττούς αριθμούς το αποτέλεσμα είναι σίγουρα περιττός έτσι δεν μπορεί να ισούται με 2446.

Υποθέτουμε ότι οι δυο πλευρές μιας σχισμένης σελίδας έχουν αρίθμηση 2κ-1 ,2κ με άθροισμα 4κ-1.Αν προσθέσουμε τους αριθμούς των σελίδων των 24 φύλλων λαμβάνουμε:

$$(4\kappa_1-1)+ (4\kappa_2-1)+ (4\kappa_3-1)+\ldots +(4\kappa_{24}-1)=4(\kappa_1+ \kappa_2+ \kappa_3+\ldots +\kappa_{24})-24$$

που είναι πολλαπλάσιο του 4, έτσι δεν μπορεί να ισούται με 2446. (δεν είναι πολλαπλάσιο του 4.)

78. Έστω Α το πλήθος των οπαδών του Αλγεβρικού αστέρα και Γ το πλήθος των οπαδών του Γεωμετριακού. Αφού κάθε οπαδός του Γεωμετριακού αντάλλαξε χειραψία με 8 οπαδούς του Αλγεβρικού αστέρα το πλήθος των χειραψιών μεταξύ οπαδών των δυο αντιπάλων ομάδων είναι 8Γ.Όμως αυτό το πλήθος είναι παράλληλα και 6Α διότι κάθε οπαδός του Αλγεβρικού Αστέρα αντάλλαξε χειραψία με 6 οπαδούς του.Άρα 8Γ=6Α (1)
Πόσες χειραψίες ανταλλάχτηκαν μεταξύ των οπαδών του Αλγεβρικού αστέρα; Κάθε οπαδός του Αλγεβρικού αστέρα χαιρέτησε άλλους 8 οπαδούς της ίδιας ομάδας και το συνολικό πλήθος των οπαδών του Αλγεβρικού αστέρα ισούται με Α. Αυτό μας δίνει 8Α χειραψίες , με την διαφορά ότι έχουμε μετρήσει κάθε χειραψία δυο φορές .Επομένως , το πλήθος των χειραψιών μεταξύ των οπαδών του Αλγεβρικού αστέρα είναι 4Α . Ομοίως ,βρίσκουμε ότι το πλήθος των χειραψιών μεταξύ των οπαδών του Γεωμετριακού ισούται 6Γ/2=3Γ.Από την υπόθεση ισχύει 8Γ+5=4Α+3Γ (2).Λύνουμε το σύστημα των (1) ,(2) και προκύπτει : Γ=15 και Α=20.Αρα συνολικά έχουμε 35 οπαδούς .**79.** Αρχικά θα δείξουμε ότι τουλάχιστον ένας από τους Α και Γ είναι ένοχος .Αν ο Β είναι αθώος τότε είναι προφανές ότι ο Α ή ο Γ ή και οι δυο μαζί διέπραξαν την κλοπή εφόσον από την (1) ξέρουμε ότι μόνο οι Α,Β,Γ εμπλέκονται στην κλοπή. Αν ο Β είναι ένοχος τότε θα πρέπει να έχει συνεργό –δεν ξέρει να οδηγεί- έτσι ξανά ο Α ή ο Γ θα είναι ένοχος .Τελικά θα ισχύει ότι ο Α ή ο Γ ή και οι δυο είναι ένοχοι για την κλοπή. Αν ο Γ είναι αθώος τότε ο Α θα πρέπει να είναι ένοχος. Από την άλλη ,αν ο Γ είναι ένοχος τότε από την (2) θα είναι ένοχος και ο Α .

Σε κάθε περίπτωση ο Α είναι ένοχος .

80. Με απαγωγή σε άτοπο, Έστω ότι δεν πρόκειται να βγει ποτέ και θα περιπλανιέται επ άπειρο στον λαβύρινθο. Εφόσον ο λαβύρινθος έχει πεπερασμένο πλήθος κελιών αυτό σημαίνει ότι θα περάσει από τουλάχιστον ένα κελί άπειρες φορές και επειδή το βέλος στο κελί αυτό θα περιστρέφεται κάθε φορά που περνά θα επισκεφτεί και όλα τα γειτονικά του κελιά άπειρες φορές. Όμως με το ίδιο σκεπτικό για τα γειτονικά κελιά και τα δικά τους γειτονικά κελιά κατ επέκταση, αντιλαμβανόμαστε ότι θα περάσει από όλα τα κελιά του λαβύρινθου άπειρες φορές. Στα κελιά αυτά όμως συμπεριλαμβάνεται και το κελί της εξόδου πάνω δεξιά και σίγουρα κάποια στιγμή το βέλος θα δείξει την έξοδο.

81.Μετά την ανακοίνωση του δήμαρχου για 39 ημέρες δεν θα συμβεί τίποτα , όμως πριν την δύση της τεσσαρακοστής μέρας θα γίνει η σφαγή των 40 γυναικών. Για ποιο λόγο; Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός των μοιχαλίδων ήταν 1 ,η κα Α ας πούμε, όλα τότε θα ήταν ξεκάθαρα. Στην περίπτωση αυτή, όλοι εκτός από τον κ. Α θα το ήξεραν ήδη. Η ανακοίνωση του δήμαρχου θα αποτελούσε είδηση μόνο για τον κ.Α και θα σκότωνε την γυναίκα του πριν την δύση της πρώτης ημέρας .

Τι θα γινόταν αν υπήρχαν ακριβώς δυο μοιχαλίδες , η κα Α και η κα.Β; Τότε οι γνωστές μοιχαλίδες θα όταν μια για τους κ.Α και κ.Β και δύο για όλους τους άλλους .Η ανακοίνωση του δημάρχου δεν δίνει νέα πληροφορία στον κ.Β αλλά η απουσία εκτέλεσης της κ.Α, την πρώτη μέρα, δίνει. Ο κ.Β σκέπτεται όπως στην προηγούμενη παράγραφο και συμπεραίνει ότι, αφού η κα Α παραμένει ζωντανή, ο κ.Α γνωρίζει κάποια άλλη άπιστη γυναίκα , που δεν μπορεί παρά να είναι η κα Β. Τον ίδιο συλλογισμό κάνει και ο κ.Α. Το ξημέρωμα της δεύτερης μέρας ο κ.Α και ο κ.Β έχουν την απόδειξη συζυγικής απιστίας και πρέπει να εκτελέσουν τις γυναίκες τους πριν δύσει ο Ήλιος . Πρόκειται για μια επαγωγικής διαδικασία. Στην περίπτωση τριών μοιχαλίδων, καθένας από τους τρεις συζύγους επαναλαμβάνει τον προηγούμενο συλλογισμό, παραμένει φιλήσυχος τις δυο πρώτες μέρες και σκοτώνει την σύζυγο του την τρίτη μέρα. Η επαγωγική πορεία έως το 40 μπορεί να μοιάζει δυσκολότερη στην κατανόηση από ότι από το 1 στο 2 ,αλλά η λογική της είναι αναπόφευκτη. Έτσι είναι βέβαιο ότι πριν δύσει η τεσσαρακοστή μέρα θα γίνει η σφαγή των 40 γυναικών.

82.Ισχύει $\alpha\varepsilon\iota = \beta\varepsilon\theta = \gamma\varepsilon\eta = \kappa$ και

$\alpha = \frac{\kappa}{\varepsilon\iota}, \beta = \frac{\kappa}{\varepsilon\theta}, \gamma = \frac{\kappa}{\varepsilon\eta}$.Όμως $\kappa = \alpha\beta\gamma = \frac{\kappa}{\varepsilon\iota}\frac{\kappa}{\varepsilon\theta}\frac{\kappa}{\varepsilon\eta} = \frac{\kappa^3}{\varepsilon^3\theta\iota\eta} = \frac{\kappa^3}{\varepsilon^3\kappa} = \frac{\kappa^2}{\varepsilon^3} \Rightarrow \kappa = \frac{\kappa^2}{\varepsilon^3} \Leftrightarrow 1 = \frac{\kappa}{\varepsilon^3} \Leftrightarrow \kappa = \varepsilon^3$

83.Κατασκευάζουμε τον πίνακα:

Αν ο εγκληματίας είναι:	Ο Α λέει:	Ο Β λέει:	Ο Γ λέει:	Ο Δ λέει:
Α	Ψέματα	Αλήθεια	Ψέματα	Αλήθεια
Β	Ψέματα	Ψέματα	Ψέματα	Αλήθεια
Γ	Αλήθεια	Αλήθεια	Ψέματα	Αλήθεια
Δ	Ψέματα	Αλήθεια	Αλήθεια	Ψέματα

Ι)Το έκανε ο Β.   ii) το έκανε ο Γ.

84.

$3X>35$: 12 …..20 21 22 23….. 48 49 50 …..

$7X\geq43$: 7 8 9 10 11 12 …..20 21 22 23….. 48 49 50 …..

$2X\leq99$: …..5 6 7 8 9 10 11 12 …..20 21 22 23….. 48 49

$X\geq21$: 21 22 23….. 48 49 50 …..

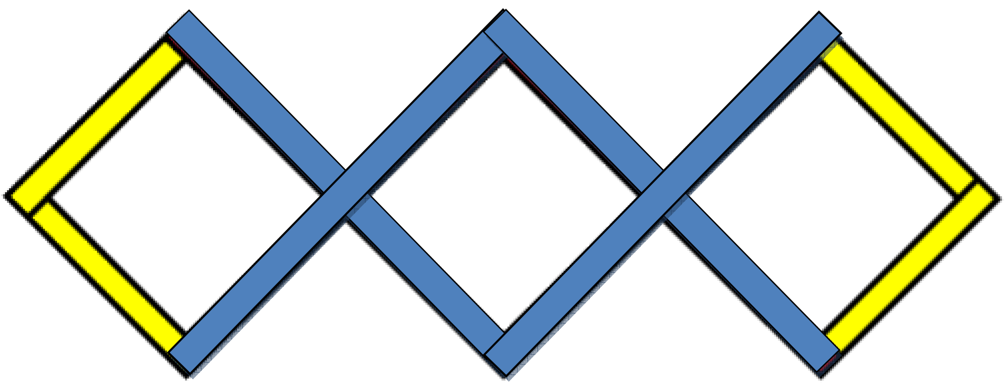
$5X\geq51$: 11 12 …..20 21 22 23….. 48 49 50 …..

Μόνο μια στήλη έχει ακριβώς τρεις αριθμούς άρα Χ=11και οι συνθήκες 1 και 4 είναι ψευδείς .

85. Περνάνε πρώτα δύο κανίβαλοι και επιστρέφει ένας κανίβαλος.
Περνάνε δύο κανίβαλοι και επιστρέφει ένας κανίβαλος.
Περνάνε δύο ιεραπόστολοι και επιστρέφει ένας ιεραπόστολος και ένας κανίβαλος.
Περνάνε δύο ιεραπόστολοι και επιστρέφει ένας κανίβαλος.
Περνάνε δύο κανίβαλοι και επιστρέφει ένας κανίβαλος.
Τέλος, περνάνε οι δύο τελευταίοι κανίβαλοι.

86.

Hide Answer



87.Αν υποθέσουμε ότι ο Β είναι αθώος .Τότε σίγουρα ένας από τους δίδυμους είναι ένοχος .Όμως ο δίδυμος που είναι ένοχος πρέπει να είχε συνεργό που δεν μπορεί να είναι ο Β άρα είναι ο άλλος δίδυμος .Άτοπο, καθώς ο ένας από τους δίδυμους είχε άλλοθι .Έτσι , Β είναι ένοχος και επειδή δουλεύει μόνος ,οι δίδυμοι είναι αθώοι.

88. •Μια προσέγγιση ίσως η απλούστερη που, όμως δεν λαμβάνει υπόψη τον ελάχιστο αριθμό ρίψεων είναι να ξεκινήσει κάποιος να ρίξει το ένα αυγό από τον πρώτο όροφο και αν δεν σπάσει να συνεχίσει να ανεβαίνει όροφο-όροφο και να κάνει ρίψεις μέχρι να σπάσει και έτσι να βρει τον ζητούμενο όροφο. Αν όμως ο όροφος είναι για παράδειγμα ο 80^{ος} θα πρέπει να κάνει 80 ρίψεις και δεν θα έχει καν χρησιμοποιήσει το δεύτερο αυγό. Λύση μεν , αλλά όχι η βέλτιστη.

•Ποια είναι η βέλτιστη λύση;

Το ερώτημα είναι, ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ρίψεων; Εστω Ε .

Αν ξεκινήσουμε από το Ε όροφο και ρίξουμε το πρώτο αυγό,

- αν σπάσει μας μένουν Ε-1 ρίψεις μπορούμε να ξεκινήσουμε από το 1^{ο} όροφο και να ανεβαίνουμε μέχρι να βρούμε το όροφο που θα σπάσει το αυγό.

-αν δεν σπάσει μας μένουν Ε-1 ρίψεις , θα ανέβουμε στο όροφο Ε+(Ε-1) και θα ρίξουμε από εκεί το πρώτο αυγό.

-αν σπάσει τότε με το δεύτερο αυγό ξεκινάμε από τον όροφο Ε+1 και ανεβαίνουμε μέχρι να βρούμε τον ζητούμενο όροφο.

-Αν δεν σπάσει μας μένουν Ε-2 ρίψεις ανεβαίνουμε στον Ε+(Ε-1)+(Ε-2) όροφο και συνεχίζουμε έτσι μ,μέχρι να βρούμε τον όροφο .
Παρατηρούμε ότι Ε+(Ε-1)+(Ε-2)+(Ε-3)+…+3+2+1 είναι οι όροφοι που απαιτείται το πολύ να ανέβουμε , δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$$E+(E-1)+(E-2)+(E-3)+\ldots+3+2+1>=100$$

όμως οι όροι Ε,(Ε-1),(Ε-2),(Ε-3),…,3,2,1 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο ορό το 1 και διαφορά το 1, οπότε θα ισχύει:

$E+(E-1)+(E-2)+(E-3)+\ldots+3+2+1=E(E+1)/2$ και η αρχική ανίσωση παίρνει την μορφή:

$$E(E+1)/2>=100.$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών , επιμεριστική ιδιότητα , μεταφορά στο πρώτο μέλος και επίλυση δευτεροβάθμιας ανίσωσης ή αν δεν θυμόμαστε και πολλά από την σχολική άλγεβρα να χρησιμοποιήσουμε το Wolfram alpha και να υπολογίσουμε ότι : Ε>=14.

Άρα 14 είναι ο ελάχιστος αριθμός ρίψεων.Μπορούμε να ανέβουμε διαδοχικά τους ορόφους 14,27,39,50,60,69,77,84,90,95,100 με την προϋπόθεση ότι το πρώτο αυγό δεν σπάει. Μόλις σπάσει επιστρέφουμε στον προηγούμενο όροφο της παραπάνω ακολουθίας ανεβαίνουμε ένα όροφο και δοκιμάζουμε ρίψεις με το δεύτερο αυγό οντάς σίγουροι ότι θα μας έχει μείνει επαρκής αριθμός ρίψεων για να βρούμε τον ζητούμενο όροφο.

Άρα με 14 το πολύ ρίψεις μπορούμε να βρούμε τον ψηλότερο όροφο του κτιρίου από τον οποίο το αυγό δεν σπάει

89. Πρώτη προσέγγιση

Αν ο κάθε φυλακισμένος πει στην τύχη ένα χρώμα για το καπέλο του τότε η πιθανότητα να ζήσει είναι 50% .Αρα αναμένουμε να σωθούν με αυτή την τακτική περίπου 50 φυλακισμένοι.

Δεύτερη προσέγγιση

Μια δεύτερη στρατηγική βελτιώνει τις πιθανότητες επιβίωσης .Οι φυλακισμένοι με άρτια αρίθμηση 2,4,6,8,10,..,100 να φωνάξουν το χρώμα του καπέλου του μπροστινού τους με περιττή αρίθμηση .Έτσι σίγουρα γνωρίζουν το χρώμα που φορούν οι μισοί φυλακισμένοι -αυτοί με την περιττή αρίθμηση- και θα σωθούν σίγουρα 50 από τους 100 ,για τους υπόλοιπους 50 θα υπάρχει 50% πιθανότητα να σωθούν αρα εκτιμούμε ότι θα σωθούν περίπου 25.Η στρατηγική αυτή έχει 75% επιτυχία.Μπορεί να βελτιωθεί;;

Τρίτη προσέγγιση

Οι φυλακισμένοι γνωρίζουν ότι αυτός που θα μπει πρώτος είναι αδύνατον να καταλάβει τι χρώμα καπέλο έχει και κατά συνέπεια οι πιθανότητες να ζήσει είναι 50%. Οπότε είναι προφανές ότι το χρώμα που θα πει ο πρώτος δεν θα έχει να κάνει με τον ίδιο αλλά πρέπει να δίνει την πληροφορία στους επόμενους για το τι καπέλο φορούν.

Ο πρώτος θα μετρήσει τα καπέλα όλων των μπροστινών του και στη συνέχεια θα ακολουθήσει την εξής λογική:

Αν ο πρώτος δει 1 άσπρο καπέλο και 98 μαύρα, θα πει άσπρο.
Αν δει 2 άσπρα και 97 μαύρα θα πει μαύρο.
Αν δει 3 άσπρα και 96 μαύρα θα πει άσπρο.
Αν δει 4 άσπρα και 95 μαύρα θα πει μαύρο.
.
.
.
....
θα λέει άσπρο όταν ο αριθμός των άσπρων καπέλων είναι περιττός και μαύρο αν ο αριθμός των άσπρων καπέλων είναι άρτιος.
Αρχίζει η διαδικασία... Ας πούμε ότι ο αριθμός των άσπρων καπέλων είναι άρτιος, κατά συνέπεια ο πρώτος φωνάζει μαύρο. Ο δεσμοφύλακας είτε θα τον πυροβολήσει (αν φοράει άσπρο) είτε όχι (αν φοράει μαύρο) οπότε οι πιθανότητα να ζήσει είναι 50%.

Ο δεσμοφύλακας τώρα προχωρεί στον επόμενο. Αυτός έχει ακούσει το μαύρο που φώναξε ο πρώτος και έχει καταλάβει ότι ο αριθμός των άσπρων είναι άρτιος. Μετράει όλους τους μπροστινούς του. Αν ο αριθμός των άσπρων καπέλων που μετρήσει είναι άρτιος που σημαίνει ότι αυτός φοράει μαύρο, ενώ αν είναι περιττός που σημαίνει ότι αυτός φοράει άσπρο. Καταλαβαίνει τι χρώμα καπέλο φοράει και το φωνάζει.
Ο δεσμοφύλακας δεν τον πυροβολεί και προχωράει στον επόμενο. Αυτός τώρα γνωρίζει από τον πρώτο ότι ο αριθμός των άσπρων καπέλων είναι άρτιος και επιπλέον έχει ακούσει τι χρώμα καπέλο φοράει ο προηγούμενος του. Μετράει όλα τα μπροστινά καπέλα αλλά υπολογίζει και αυτό που φόραγε ο προηγούμενος στα άσπρα ή στα μαύρα (ανάλογα με το τι φώναξε). Τώρα έχει ακριβώς την ίδια γνώση με τον προηγούμενο του σε ότι αφορά τον αριθμό των καπέλων οπότε μπορεί να δώσει με την ίδια λογική την σωστή απάντηση για το τι καπέλο φοράει.

Για παράδειγμα αν ένας κρατούμενος ακούσει από τον πρώτο κρατούμενο μαύρο (τα άσπρα καπέλα που βλέπει ο πρώτος είναι άρτιου πλήθους) και βλέπει μπροστά του 20 άσπρα καπέλα και έχει ακούσει προηγουμένως 13 φορές την λέξη άσπρο τότε προσθέτει 20+13=33 περιττός οπότε το καπέλο του είναι επίσης άσπρο.
Τη ίδια στρατηγική ακολουθούν διαδοχικά όλοι οι φυλακισμένοι και θα σωθούν τουλάχιστον 99 κρατούμενοι. Ανάλογα πράττει στην περίπτωση που αρχικά ο αριθμός των άσπρων καπέλων που βλέπει ο πρώτος είναι περιττός.

90.Έστω x^2 ο ζητούμενος αριθμός. Αν y^2 ο αριθμός που προκύπτει, αν αυξήσουμε όλα τα ψηφία του x^2 κατά μια μονάδα. Από την υπόθεση όμως :

$$y^2 - x^2 = 1111 \Leftrightarrow (y-x)(y+x) = 1111 = 11 \cdot 101$$

Οι αριθμοί 11 και 101 είναι πρώτοι μεταξύ τους .Έτσι, επειδή $y-x < y+x$, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

$1^{η}$ περίπτωση

$\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=1111 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases} x=555 \\ y=556 \end{cases}$ απορρίπτονται καθώς $555^2, 556^2$ δεν είναι τετραψήφιοι.

$2^{η}$ περίπτωση $\begin{cases} y-x=11 \\ y+x=101 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases} x=45 \\ y=56 \end{cases}$

Ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $x^2 = 45^2 = 2025$ και είναι μοναδικός .

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι 2025.

91.Η πρώτη απάντηση. Χωρίζουμε τα άλογα τυχαία σε πέντε πεντάδες, τα βάζουμε να αγωνιστούν σε πέντε κούρσες ,τα άλογα που νικήσουν σε κάθε κούρσα θα αποτελούν την πεντάδα που θα τρέξει τον έκτο αγώνα και τα τρία πρώτα άλογα στον έκτο αγώνα θα είναι τα τρία ταχύτερα. Εκεί νομίζει κανείς ότι το πρόβλημα λύθηκε. Λύθηκε;

Αν, για παράδειγμα τα αποτελέσματα του πρώτου αγώνα είναι:

1. Αστραχάν
2. Κυρ.Μεντιος
3. Αστραπή
4. Κεραυνός
5. Πετεφρης

Κανείς δεν μας εξασφαλίζει ότι το άλογο Αστραχάν έχει κάνει καλύτερο χρόνο από άλογα που ήρθαν στην δεύτερη, τρίτη θέση στους άλλους τέσσερεις αγώνες. Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει χρονόμετρο. Προκύπτει κάποια πληροφορία από τους πρώτους πέντε παραπάνω αγώνες; Είναι βέβαιο ότι τα άλογα Κεραυνός και Πετεφρής καθώς και όλα τα άλογα στους πέντε πρώτους αγώνες που ήρθαν στην τετάρτη και πέμπτη θέση δεν ανήκουν στα τρία ταχύτερα. Άρα, άμεσα, από τα 25 άλογα ,τα εξαιρούμε, οπότε μένουμε στα 15 άλογα που τερμάτισαν στις τρεις πρώτες θέσεις στους πρώτους 5 αγώνες .Τώρα από τον έκτο αγώνα με τους νικητές των πρώτων πέντε αγώνων είναι βέβαιο ότι το άλογο που θα τερματίσει πρώτο θα είναι το ταχύτερο όλων. Για παράδειγμα αν ο εκτός αγώνας είχε ως αποτέλεσμα :

1. Πήγασος

2.Μπαμπης

3. Αστραχάν

4.Βουκεφάλας

5. Μωρίς

Ο Πήγασος είναι σίγουρα το ταχύτερο άλογο όλων. Οπότε δεν θα το βάλουμε να αγωνιστεί ξανά. Άρα μένουν 14 άλογα προς εξέταση για να εντοπίσουμε το δεύτερο και το τρίτο ταχύτερο άλογο. Από τον έκτο αγώνα διαπιστώνουμε ότι τα άλογα Βουκεφάλας και Μωρίς δεν διεκδικούν καμιά από τις τρεις πρώτες θέσεις καθώς επίσης και όλα τα άλογα που νίκησαν στον πρώτο τους αγώνα. Εξαιρούμε ακόμα 6 άλογα οπότε μένουν 8 άλογα προς εξέταση.

Ο Αστραχάν τερμάτισε τρίτος στον έκτο αγώνα άρα κανένα από τα άλογα που ξεπέρασε στον πρώτο του αγώνα δεν διεκδικεί επίσης θέση στην τριάδα έχουμε εξαιρέσει ήδη δυο από αυτά εξαιρούμε τα άλλα δυο και καταλήγουμε στα 6 άλογα προς εξέταση.

Ο Μπάμπης είναι το άλογο που ήρθε δεύτερο στον έκτο αγώνα ,άρα, από τα άλογα που ξεπέρασε –στον πρώτο του αγώνα- μόνο το επόμενο από αυτόν, αυτό που ήρθε τρίτο διεκδικεί θέση στην τριάδα τα υπόλοιπα τρία εξαιρούνται. Από αυτά έχουμε εξαιρέσει ήδη τα δυο οπότε μένει να εξαιρέσουμε ακόμα 1 οπότε πέφτουμε στα 5 άλογα προς εξέταση. θα τα βάλουμε να τρέξουν σε ένα αγώνα (τον έβδομο). Το πρώτο και το δεύτερο άλογο κατά την κατάταξη στον αγώνα θα καλύψουν αντίστοιχα την δεύτερη και την τρίτη θέση της ζητούμενης τριάδας.

Άρα απαιτούνται τουλάχιστον 7 κούρσες για να βρούμε τα 3 ταχύτερα αλόγα από 25.

92.Αν α,β τα μήκη των καθέτων πλευρών και γ το μήκος της υποτείνουσας του ζητούμενου τριγώνου ,θα ισχύει:

$$\Pi = \mathrm{E} \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha\beta = \alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow -\gamma = \alpha+\beta-\frac{1}{2}\alpha\beta \Rightarrow \gamma^2 = \left(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\alpha\beta\right)^2 \overset{\Pi.\Theta:\gamma^2=\alpha^2+\beta^2}{\Leftrightarrow}$$

$$\alpha^2+\beta^2 = \alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4}\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\frac{1}{4}\alpha\beta+2-\alpha-\beta) = 0 \overset{\alpha\beta\neq}{\Leftrightarrow} \frac{1}{4}\alpha\beta+2-\alpha-\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta+8-4\alpha-4\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta+8-4\alpha-4\beta+8 = 8 \Leftrightarrow \alpha(\beta-4)+16-4\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(\beta-4)-4(\beta-4) = 8 \Leftrightarrow (\beta-4)(\alpha-4) = 8$$

Άρα α-4 είναι διαιρέτης του 8 οπότε οι πιθανές τιμές του α είναι :2,3,5,6,8,12
Ελέγχουμε κάθε περίπτωση υπολογίζοντας τα α,β και διαπιστώνουμε ότι οι μόνες λύσεις είναι οι τριάδες (6,8,10) , (5,12,13).

93. Η δυσκολία του προβλήματος έγκειται στο ότι δεν γνωρίζουμε αν η κάλπικη λίρα είναι ελαφρύτερη ή βαρύτερη.

Πριν συνεχίσετε να διαβάζετε , προσπαθήστε να το λύσετε. Είναι δύσκολο αλλά αρκούντως εθιστικό. Μια πρωτότυπη λύση δημοσιεύτηκε στο «Εύρηκα» (Eureka) το 1950 , ένα περιοδικό που εκδίδουν στο πανεπιστήμιο του Cambridge «οι Αρχιμήδειοι «(Archimedeans) ,μια από τις πιο παλιές προπτυχιακές μαθηματικές κοινότητες του πανεπιστημίου του Cambridge. Η λύση πιστώνεται στον Cedric A.B. Smith όποιος την δημοσίευσε με το ψευδώνυμο « Blanchet Descartes».

O Smith αποδεικνύει ότι απαιτούνται μόνο τρεις ζυγίσεις και το κάνει με ένα ευφυές όσο και πρωτότυπο τρόπο .Διατάσσει τα 12 νομίσματα σε μια σειρά και ονομάζει το κάθε νόμισμα με ένα διαφορετικό γράμμα της αγγλικής αλφαβήτου ως εξής : F,A,M, N,O,T ,L,I,C,K,E,D, στην συνέχεια συντάσσει ένα ποίημα στο οποίο απευθύνεται στην….. μαμά του !!!!! Με την διάφορα ότι στους στίχους του ποιήματος, «κρύβεται» η λύση .Το ποίημα έχει ως εξής :

MA DO LIKE

ME TO FIND

FAKE COIN

Κάθε γραμμή του ποιήματος αποτελείται από δυο τετράδες νομισμάτων που πρέπει να ζυγιστούν. Ουσιαστικά η διαδικασία λύσης είναι τρεις ζυγίσεις, μια για κάθε γραμμή , όπου από όλα τα διαφορετικά αποτελέσματα θα βρεθεί η κάλπικη λίρα. Όλες οι δυνατές τριάδες ζυγίσεων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα και κάθε μια δίνει διαφορετικό αποτέλεσμα. Στον παρακάτω πίνακα στην δεξιά στήλη προκύπτει η κάλπικη λίρα ενώ στις πρώτες τρεις στήλες όλα τα δυνατά αποτελέσματα των τριών ζυγίσεων. Οπού **Αρ.** όταν η ζυγαριά γέρνει αριστερά , **Δεξ.** η ζυγαριά γέρνει δεξιά και **Ισ.** όταν η ζυγαριά ισορροπεί . Ας το δούμε αναλυτικά :

ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΖΥΓΙΣΕΩΝ

1η ζύγιση	**2η ζύγιση**	**3η ζύγιση**	**Κάλπικη λίρα**
Ισ.	Δεξ.	Αρ.	F βαρύτερη
Ισ.	Αρ.	Δεξ.	F ελαφρύτερη
Αρ.	Ισ.	Αρ.	A βαρύτερη
Δεξ.	Ισ.	Δεξ.	A ελαφρύτερη
Αρ.	Αρ.	Ισ.	M βαρύτερη
Δεξ.	Δεξ.	Ισ.	M ελαφρύτερη
Ισ.	Δεξ.	Δεξ.	N βαρύτερη
Ισ.	Αρ.	Αρ.	N ελαφρύτερη
Αρ.	Αρ.	Δεξ.	O βαρύτερη
Δεξ.	Δεξ.	Αρ.	O ελαφρύτερη
Ισ.	Αρ.	Ισ.	T βαρύτερη
Ισ.	Δεξ.	Ισ.	T ελαφρύτερη
Δεξ.	Ισ.	Ισ.	L βαρύτερη

Αρ.	Ισ.	Ισ.	L ελαφρύτερη
Δεξ.	Δεξ.	Δεξ.	I βαρύτερη
Αρ.	Αρ.	Αρ.	I ελαφρύτερη
Ισ.	Ισ.	Δεξ.	C βαρύτερη
Ισ.	Ισ.	Αρ.	C ελαφρύτερη
Δεξ.	Ισ.	Αρ.	K βαρύτερη
Αρ.	Ισ.	Δεξ.	K ελαφρύτερη
Δεξ.	Αρ.	Αρ.	E βαρύτερη
Αρ.	Δεξ.	Δεξ.	E ελαφρύτερη
Αρ.	Δεξ.	Ισ.	D βαρύτερη
Δεξ.	Αρ.	Ισ.	D ελαφρύτερη

Για παράδειγμα αν βάλουμε στην ζυγαριά τις δυο πρώτες τετράδες λιρών MA DO- LIKE (βλέπε το ποίημα) και γύρει η ζυγαριά δεξιά (**Δεξ.**) , κατόπιν ζυγίσουμε τις δυο επόμενες τετράδες ME TO –FIND και ισορροπήσει η ζυγαριά **(Ισ.)** και στην συνέχεια τις δύο τελευταίες τετράδες FAKE- COIN και η ζυγαριά γείρει αριστερά **(Αρ.)** .Το αποτέλεσμα των ζυγίσεων είναι : **Δεξ. Ισ. Αρ.** .Κοιτάμε τον πίνακα και διαπιστώνουμε ότι η λίρα ,με το όνομα K είναι η βαρύτερη.

94.Από τις δηλώσεις (1) ,(3) και (4) είτε η Ντίνα είτε η Εύα ανήκουν στην ίδια ηλικιακή ομάδα με την Αντα και την Γιώτα. Άρα η Αντα και η Γιώτα είναι κάτω από 30 ετών- το πλήθος των γυναικών που είναι κάτω από 30 είναι τρεις. Από την (7) ο Φώτης δεν θα παντρευτεί την Άντα ή την Γιώτα.
Από (2) ,(5) ,(6) είτε η Γιώτα είτε η Ντίνα ασκούν το ίδιο επάγγελμα με την Βίκυ και την Εύα, άρα ο Φώτης δεν θα παντρευτεί την Βίκυ ή την Εύα(είναι και οι δυο νοσοκόμες). Οπότε προκύπτει ότι ο Φώτης θα παντρευτεί την Ντίνα που είναι πάνω από 30 και δασκάλα.

95. Έστω χ το πλήθος των μικρών δώρων και y το πλήθος των μεγάλων δώρων που φόρτωσε ο Γιάννης τότε ο Κώστας φόρτωσε 10-χ μικρά δώρα και 10-y μεγάλα δώρα . Άρα ο Γιάννης θα μεταφέρει τα δώρα που του αναλογούν σε χ+6y λεπτά ενώ ο Κώστας σε 3(10-χ)+5(10-y)=80-3x-5y λεπτά. Μια ιδέα για να ξεκινήσουμε , είναι, να θεωρήσουμε ότι για να κάνουν βέλτιστη χρήση του χρόνου τους τα δυο ξωτικά θα πρέπει να ξεκινήσουν και να τελειώσουν ταυτόχρονα το φόρτωμα του ελκήθρου .Δηλαδή να ισχύει:

$$χ+6y=80-3x-5y \ ή \ 4χ+11y=80 \ ή \ χ=(80-11y)/4$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδικό ζεύγος ακεραίων λύσεων στο [0,10] το ζεύγος (χ,y)=(9,4).

Αν x=9 και y=4 τότε ο Γιάννης χρειάζεται 33 λεπτά και ο Κώστας επίσης 33 λεπτά. Είναι ο καλύτερος χρόνος που μπορούμε να πετύχουμε; Η απάντηση είναι καταφατική και μπορούμε να το αποδείξουμε με άτοπο.

Αν ο Γιάννης και ο Κώστας έκαναν το φόρτωμα σε λιγότερο από 33 λεπτά ο καθένας τότε θα απαιτούνταν το πολύ 32 λεπτά από το καθένα δηλαδή αθροιστικά ο χρόνος τους θα ήταν το πολύ 64 λεπτά .Έτσι:

$$x+6y+80-3x-5y=80-2x+y \le 64 \quad ή \quad 2x-y \ge 16$$

Οι χ,y είναι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του 10 έτσι οι λύσεις της παραπίνω ανίσωσης είναι τα ζεύγη:

(8,0),(9,0),(9,1),(9,2),(10,0)(10,1),(10,2)(10,3),(10,4).

Όμως απαιτούμε ο χρόνος του Γιάννη και του Κώστα να είναι το πολύ 32 λεπτά , έτσι:

$$χ+6y \le 32 \quad (1) \quad και \quad 80-3x-5y \le 32 \quad ή \quad 3x+5y \ge 48 \quad (2)$$

Από την (1) εξαιρούμε το ζεύγος (10,4) ενώ από την (2) όλα τα υπόλοιπα ζεύγη ,οπότε ο χρόνος του Γιάννη του Κώστα είναι το λιγότερο 33 λεπτά. Αν εργαστούν λοιπόν, ταυτόχρονα δυο ξωτικά , το συντομότερο που θα τελειώσουν την μεταφορά είναι 10:33.

96.Ο β είπε ψέματα διότι δεν είναι δυνατόν ο α να είπε ότι είναι κόκκινος. Αν ήταν πράσινος ,θα έλεγε ότι είναι πράσινος , ενώ αν ήταν κόκκινος θα έλεγε ψέματα ότι είναι πράσινος . Επειδή ο γ διαψεύδει τον β, ο γ θα είναι πράσινος . Άρα ο β είναι κόκκινος και ο α είναι πράσινος .

97.Σχεδιάζουμε σε ένα πινάκα όλες τις δυνατές περιπτώσεις :

Περίπτωση	μηχανικός	καπετάνιος	σερβιτόρος
I	Αντωνίου	Βασιλείου	Γεωργίου
II	Αντωνίου	Γεωργίου	Βασιλείου
III	Βασιλείου	Αντωνίου	Γεωργίου
IV	Βασιλείου	Γεωργίου	Αντωνίου
V	Γεωργίου	Αντωνίου	Βασιλείου
VI	Γεωργίου	Βασιλείου	Αντωνίου

Σύμφωνα με το δεδομένο 6) <u>ο σερβιτόρος δεν λέγεται Γεωργίου</u> . Άρα αποκλείονται οι περιπτώσεις I) και III) .

Από τα δεδομένα 1) και 3) <u>ο καπετάνιος δεν λέγεται Αντωνίου</u>. Άρα αποκλείουμε τις περιπτώσεις III) και V) .

Από τα δεδομένα 3) ,4),5) και 2) ο <u>καπετάνιος δεν λέγεται Γεωργίου</u> , επειδή ο αριθμός 2800 δεν διαιρείται ακριβώς με το 3.Αρα αποκλείονται και οι περιπτώσεις II) και IV).Συνεπώς <u>το όνομα του καπετάνιου είναι Βασιλείου</u> .

Μας απομένουν να ελέγξουμε τις περιπτώσεις I)και VI).

Γνωρίζουμε ότι ο επιβάτης <u>Αντωνίου μένει στην Αθήνα</u>.

Γνωρίζουμε ότι <u>ο επιβάτης Βασιλείου μένει στην Σάμο</u> (αφού έχει το ίδιο όνομα με τον καπετάνιο). Άρα ο <u>επιβάτης Γεωργίου μένει σε κάποιο νησί μεταξύ Αθήνας και Σάμου</u>

Κατασκευάζουμε δυο πινάκες με τα ονόματα των επιβατών και των ναυτικών .

Ναυτικός	Αντωνίου	Βασιλείου	Γεωργίου
Μηχανικός			Ναι
καπετάνιος		Ναι	
Σερβιτόρος	Ναι		

Επιβάτης	Αντωνίου	Βασιλείου	Γεωργίου
Αθήνα	Ναι		
Σάμος		Ναι	
Ενδιάμεσο νησί			Ναι

Οι παραπάνω επιλογές είναι οι μοναδικές που ικανοποιούν πλήρως όλες τις απαιτήσεις του προβλήματος .Άρα ο μηχανικός είναι ο Γεωργίου .

98.Ζητείται λοιπόν ο αριθμός y .Η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος προκύπτει από τις πληροφορίες που δίνουν τα τρία παιδιά , από την δυνατότητα που έχουν να λύσουν ένα άλλο πρόβλημα (να βρουν τους τρεις αριθμούς). Αναλυτικά:

Αρχικά σκεπτόμαστε ότι αν $x \geq 4$ τότε :

$x \geq 4$

$y \geq 5$

$z \geq 6$

Όπου προσθέτοντας κατά μέλη: $x+y+z \geq 15 > 13$ κάτι που δεν ισχύει!!

Άρα σίγουρα $x=1, x=2, x=3$

-Αν $x=3$ τότε ο Αντώνης θα μπορούσε να βρει τους τρεις αριθμούς (3,4,5)

(Προσοχή το y δεν θα μπορούσε να είναι 5 αν y=5 τότε 3<5<6,3+5+6=14>13,ατοπο)

Αν όμως $x \neq 3$, έχουμε άλλες δυο περιπτώσεις($x=1$ ή $x=2$)

Άρα ο Βασίλης και ο Γιάννης ακολουθώντας τους προηγουμένους συλλογισμούς γνωρίζουν ότι ($x=1$ ή $x=2$) .

Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τα z από τα παραπάνω;

-Αν $z=11$ τότε $x+y+z>13$ άρα $z \neq 11$

-Αν $z=10$ τότε υπάρχει μόνο μια τριάδα αριθμών (1,2,10) που να πληρει τις προϋποθέσεις του προβλήματος αλλά τότε ο Γιάννης που ήξερε το z θα μπορούσε να βρει τους τρεις αριθμούς ,άτοπο , άρα $z \neq 10$.

-Αν $z=9$, τότε υπάρχει μόνο μια τριάδα αριθμών που πληρει τις προϋποθέσεις (1,3,9) ,αλλά πάλι την απορρίπτουμε διότι ο Γιάννης που ήξερε τον αριθμό z θα μπορούσε να προσδιορίσει τους τρεις αριθμούς. Άρα $z\neq 9$, οπότε $z\leq 8$.

-Αν $z=6$ τότε έχουμε δυο πιθανές τριάδες αριθμών (3,4,6) και (2,5,6). Αλλά ο Βασίλης ήδη γνωρίζει ότι το χ είναι 1 ή 2 όποτε θα έμενε μια τριάδα και θα μπορούσε να βρει τους τρεις αριθμούς . Άτοπο.

Άρα $z\neq 6$. Όμοια αποκλείουμε $z=5$ (3+4+5=12<13).Τελικα το z μπορεί να είναι 7 ή 8.

Όμως το χ είναι 1 ή 2 τότε υπάρχουν οι εξής πιθανές τριάδες:

(x,y,z)=(1,y,7) ή (1,y,8) ή (2,y7) ή (2,y,8)

Έτσι αν y=3 η τριάδα (2,3,8) θα ήταν μοναδική , αν y=5 πάλι μένει μια τριάδα (1,5,7). Απορρίπτουμε τις δυο περιπτώσεις γιατί πάλι θα μπορούσε ο Βασίλης να προσδιορίσει τους τρεις αριθμούς,

όταν y=4 έχουμε δυο πιθανές τριάδες (1,4,8) ,(2,4,7) και κανένα από τα παιδιά δεν θα μπορούσε να προσδιορίσει τους τρεις αριθμούς . Άρα y=4.

99. Καταρχήν παρατηρούμε ότι όλοι οι αριθμοί είναι μεγαλύτεροι η ίσοι του μηδέν εφόσον προκύπτουν από απόλυτες διαφορές.

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους 30 αριθμούς είναι ίσος με μηδέν.

Αν α_j είναι ο μεγαλύτερος από τους τριάντα αριθμούς οι δυο επόμενοι αριθμοί $(\alpha_{j+1},\alpha_{j+2})$ θα είναι είτε $(\alpha_j,0)$ ή $(0,\alpha_j)$.Άρα ένας τουλάχιστον από τους 30 αριθμούς ισούται με 0.Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να συμβολίσουμε με $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,......,\alpha_{29}$ τους 30 αριθμούς με πρώτο $\alpha_0=0$ τότε $|\alpha_1-\alpha_2|=0 \overset{\alpha_1,\alpha_2\geq 0}{\Leftrightarrow} \alpha_1=\alpha_2$ συνεχίζοντας $|\alpha_3-\alpha_2|=\alpha_1 \overset{\alpha_1=\alpha_2}{\Leftrightarrow} \alpha_3=0$. Έτσι $\alpha_{3\kappa}=0$ και $\alpha_{3\kappa+1}=\alpha_{3\kappa+2}$, $0\leq\kappa\leq 9$.Άρα κάθε τρίτος αριθμός στον κύκλο θα είναι 0 και οι υπόλοιποι θα είναι ίσοι μεταξύ τους. Εφόσον το άθροισμα των 30 είναι 60 τότε καθένας από τους 20 ίσους αριθμούς θα ισούται με 60/20 =3 και οι υπόλοιποι 10 αριθμοί θα είναι 0.

100.Ο Αντώνης όποιο κουτί και να επιλέξει να αδειάσει , με όποιο τρόπο και αν μοιράσει τα κέρματα του άλλου κουτιού είναι σίγουρο ότι σε ένα κουτί θα μείνουν κέρματα άρτιου πλήθους και στο άλλο κέρματα περιττού πλήθους. Ο Βασίλης τώρα, με την σειρά του μπορεί να αδειάσει το κουτί με τα κέρματα περιττού πλήθους και να μοιράσει τα κέρματα άρτιου πλήθους ως εξής:
Ένα κέρμα στο ένα κουτί και τα εναπομείναντα περιττού πλήθους κέρματα στο άλλο. Ο Αντώνης τώρα δεν έχει επιλογή μπορεί μόνο να αδειάσει μόνο το κουτί με το ένα κέρμα και να μοιράσει τα κέρματα περιττού πλήθους. Η ίδια ακριβώς κατάσταση όταν ξεκίνησε το παιχνίδι .Ο Βασίλης συνεχώς θα ακολουθεί την ίδια τακτική: ένα κέρμα και περιττού πλήθους κέρματα μέχρι που μοιραία κάποια στιγμή θα καταλήξει να μοιράσει δυο κέρματα ένα σε κάθε κουτί .Κατάσταση από την όποια δεν θα μπορεί να συνεχίσει ο Αντώνης και θα χάσει. Οπότε, νικητής θα είναι πάντα ο δεύτερος παίκτης. Αν τα κουτιά αρχικά περιείχαν το ένα άρτιου πλήθους κέρματα και το άλλο περιττού τότε θα κέρδιζε πάντα ο πρώτος παίκτης.

101. Για να διακρίνουμε τις λίρες τι ονομάζουμε Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ. Έστω χ γραμμάρια το βάρος μιας γνήσιας λίρας και χ+δ γραμμάρια το βάρος μιας κάλπικης (δ διάφορος του μηδέν είτε θετικός είτε αρνητικός).Αρχικά ζυγίζουμε μαζί τις λίρες Α,Β και Γ και στην συνέχεια ζυγίζουμε μαζί τις λίρες Β,Γ,Δ,Ε .Αν Α,Β,Γ,Δ ,Ε είναι γνήσιες λίρες τότε ο λόγος των βαρών των δυο ζυγίσεων θα πρέπει να είναι ¾ .Αν κάποια από αυτές είναι κάλπικη τότε ο λόγος θα είναι είτε:

(3χ+δ)/4χ ή 3χ/(4χ+δ) ή (3χ+δ)/(4χ+δ) και κανένας τους δεν θα ισούται με ¾ .

Οπότε αν ο λόγος είναι 3/4 τότε οι λίρες Α,Β,Γ,Δ,Ε οι λίρες είναι γνήσιες και το βάρος καθεμία υπολογίζεται αν πάρουμε το 1/3 της πρώτης ζύγισης. Για να ολοκληρωθεί η διαδικασία απλά ζυγίζουμε (τρίτη ζύγιση) την λίρα Ζ.

Ας υποθέσουμε ότι ο λόγος των δυο πρώτων ζυγίσεων δεν είναι ¾ τότε μια από τις λίρες Α,Β,Γ,Δ,Ε θα είναι κάλπικη. Στην τρίτη ζύγιση παίρνουμε μαζί τις λίρες Γ,Δ. Ο ακόλουθος πινάκας δίνει όλα τα δυνατά αποτελέσματα των τριών ζυγίσεων:

Κάλπικη λίρα

	Λίρα Α	Λίρα Β	Λίρα Γ	Λίρα Δ	Λίρα Ε
1η ζύγιση	3χ+δ	3χ+δ	3χ+δ	3χ	3χ
2η ζύγιση	4χ	4χ+δ	4χ+δ	4χ+δ	4χ+δ
3η ζύγιση	2χ	2χ	2χ+δ	2χ+δ	2χ

Αν συμβολίσουμε τα αποτελέσματα των τριών ζυγίσεων ζ1,ζ2,ζ3 τότε παρατηρούμε ότι όταν Α είναι η κάλπικη λίρα τότε ο λόγος ζ2/ζ3=2 και το βάρος των υπολοίπων λιρών θα είναι ζ3/2 ενώ το βάρος της λίρας Α είναι ζ1-ζ3.(Οι σχέσεις ισχύουν μόνο όταν Α είναι η κάλπικη και σε καμία άλλη περίπτωση)

Παρόμοια, καθεμία από τις άλλες περιπτώσεις κάλπικης λίρας καθορίζεται από μοναδική αλγεβρική σχέση, ειδικότερα:

Αν Β είναι η κάλπικη λίρα τότε ζ3=2(ζ2-ζ1)

Αν Γ είναι η κάλπικη λίρα τότε ζ2-ζ1=ζ1—ζ3

Αν Δ είναι η κάλπικη λίρα τότε ζ1 =3/2(ζ2-ζ3)

Αν Ε είναι η κάλπικη λίρα τότε ζ1 /ζ3=3/2

102. Για τις πρώτες 9 σελίδες χρησιμοποιούνται 9 ψηφία, ενώ για καθεμία απο τις σελίδες από το 10 μέχρι το 99 χρησιμοποιούνται 2 ψηφία και για κάθε σελίδα από το 100 μέχρι το 999 χρησιμοποιούνται 3 ψηφία .
Άρα μπορούμε να γενικεύσουμε για ένα βιβλίο με ν σελίδες.
Αριθμός ψηφίων αρίθμησης βιβλίου ν σελίδων= ν αν ν<=9
……………………………………..=9+2(ν-9)=2ν-9 αν 10<=ν<=99
…………………………………….. =9+90*2+3(ν-99)=3ν-108 αν 100<= ν <= 999
Στις 99 σελίδες για το βιβλίο χρησιμοποιούνται 9+90*2=189 ψηφία και στις 999 σελίδες για το βιβλίο θα χρησιμοποιούνται 9+2*90+3*900=2889 ψηφία, άρα ξέρουμε ότι η απάντηση είναι ανάμεσα στο 99 και το 999.

Λύνουμε την εξίσωση :
3ν – 108 = 2808   ή ν = 972 σελίδες .

103. Έστω α και γ το πλήθος των ανδρών και των γυναικών που τελικά διαγωνίστηκαν .Αν καθεμία από τις γυναίκες απάντησε σε ακριβώς 5 ερωτήσεις και καθένας από τους άνδρες απάντησε σε ακριβώς 4 ερωτήσεις τότε η συνολική βαθμολογία τους θα είναι

4α+5γ ,ενώ αν καθεμία από τις γυναίκες απαντούσε σωστά σε 4 ερωτήσεις και καθένας από τους άνδρες απαντούσε σωστά σε 5 ερωτήσεις η συνολική τους βαθμολογία θα ήταν 5α+4γ .

Από υπόθεση θα ισχύει η σχέση:

$$(5a+4\gamma)\frac{104}{100}=4\alpha+5\gamma$$

Εργαζόμαστε στην παραπάνω ισότητα με απαλοιφή παρανομαστών ,επιμεριστική

$(5a+4\gamma)\frac{104}{100}=4\alpha+5\gamma \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 10a=7\gamma$ (1)

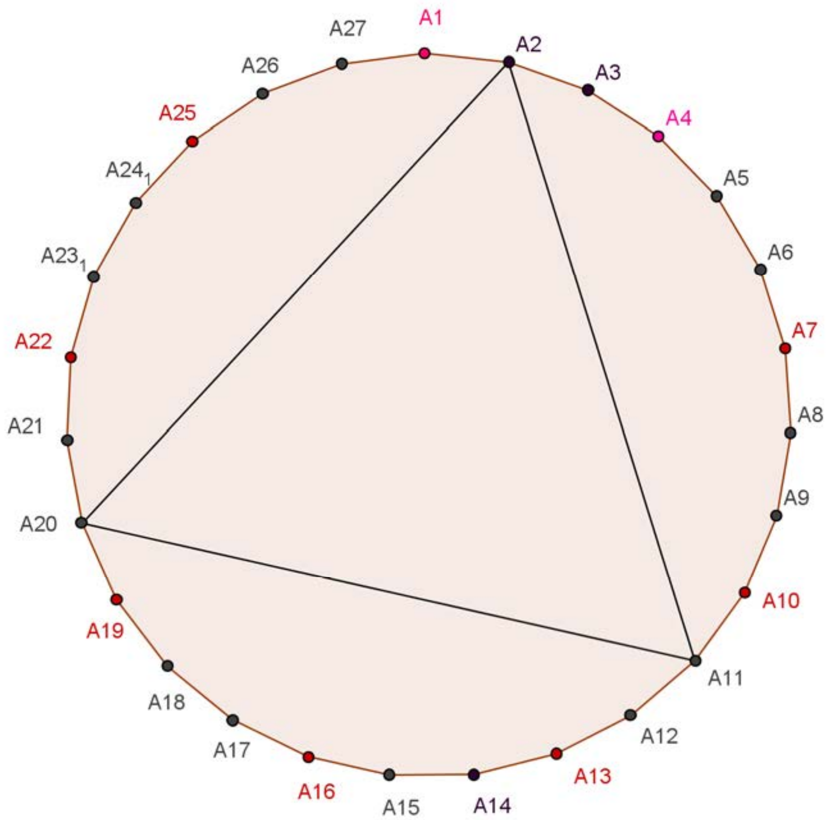
Από την (1) προκύπτει ότι το πλήθος των ανδρών είναι πολλαπλάσιο του 7.Αν α=7 τότε   γ=10.

Αν $a\geq 14 \Leftrightarrow 10a \geq 140 \Leftrightarrow \frac{10a}{7}\geq\frac{140}{7} \Leftrightarrow \gamma \geq 20$.Αλλά το πλήθος των διαγωνιζομένων είναι το πολύ 33(αρρώστησαν κάποιοι ...) έτσι η περίπτωση $a\geq 14$ απορρίπτεται .Οπότε στο τηλεπαιχνίδι διαγωνίστηκαν 7 άνδρες και 10 γυναίκες. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 10/17.

104. Έστω κ, α, μ το πλήθος των κόκκινων άσπρων και μπλε τριαντάφυλλων αντίστοιχα τότε θα ισχύει
κ+α=100,α+μ=53 και μ+κ=χ<53
Προσθέτουμε κατά μέλη τις τρεις εξισώσεις και λαμβάνουμε:
2κ+2μ+2α=153+χ (1) όμως 2α+2κ=200 και ισχύει:
200 + 2μ = x + 153 έτσι x = 47 + 2μ
Γνωρίζουμε ότι το μπουκέτο περιέχει μπλε τριαντάφυλλα (μ διάφορος του μηδέν) και ότι x<53 ή 47 + 2μ<53 ή μ<3 ,μ ακέραιος οπότε μ=1 ή μ=2.
Για μ=1 προκύπτει ένα 1 μπλε τριαντάφυλλο ,52 άσπρα τριαντάφυλλα και 48 κόκκινα .
Για μ=2 τότε προκύπτουν 2 μπλε, 51 άσπρα και 49 κόκκινα τριαντάφυλλα.

105. Ονομάζουμε τα κέρματα (κατά την δεξιόστροφη φορά) 1,2,3,4,5,6,7 .Γυρίζουμε τα κέρματα 1,2,3,4,5 και μετά τα 2,3,4,5,6 και ούτω καθεξής επτά φορές αρχίζοντας κάθε πεντάδα από μια θέση δεξιότερα. Έτσι, τελευταία πεντάδα θα είναι η 7,1,2,3,4.Καθε φορά γυρίζουμε πέντε κέρματα και, επομένως , κάθε κέρμα αλλάζει πέντε φορές τελικά θα μείνει στην ανάποδη από την αρχική του πλευρά.
Αν γυρίσουμε τέσσερα κέρματα κάθε φορά , δεν μπορούμε να αναποδογυρίσουμε και τα επτά. Για να επαληθεύσουμε ότι είναι πράγματι αδύνατο, γράφουμε τον αριθμό +1 στην πλευρά της κεφαλής και τον αριθμό -1 στην πλευρά των γραμμάτων .Έτσι, το γύρισμα ενός κέρματος ισοδυναμεί με την αλλαγή του πρόσημου του αριθμού στην πάνω του πλευρά .Όταν γυρίζουμε τέσσερα κέρματα αλλάζουν τέσσερα πρόσημα , οπότε το γινόμενο των +1 και -1 στις πάνω πλευρές των κερμάτων παραμένει σταθερό .Αντίθετα ,αν γυρίσουμε επτά κέρματα , το γινόμενο αυτό θα αλλάξει πρόσημο .

106. Με αφετηρία οποιοδήποτε κόκκινο σημείο θα αριθμήσουμε όλα τα σημεία κατά την φόρα των δεικτών του ρολογιού με τους αριθμούς 1,2,3,..,27.Χωριζουμε τα σημεία σε 9 υποσύνολα των 3 σημείων ως εξης:{1,10,19},{2,11,20},{3,12,21}…..,{27,,9,18}.Το καθένα από τα παραπάνω υποσύνολα αποτελείται από σημεία που είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου. Υποθέτουμε ότι κανένα από παράπάνω τρίγωνα δεν έχει και τις τρεις κορυφές του μαύρες. Σε αυτή την περίπτωση καθένα από τα 9 υποσύνολα περιέχει τουλάχιστον μια κόκκινη κορυφή οπότε πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 9 κόκκινες κορυφές στον κύκλο .Αλλά από υπόθεση είναι γνωστό ότι ανάμεσα σε δυο κόκκινα σημεία υπάρχουν τουλάχιστον δυο μαύρα σημεία. Έστω ο αριθμός των μαύρων είναι 2Χ9=18 τουλάχιστον. Είναι 27 συνολικά οι κορυφές των τρίγωνων οπότε κάθε τρίτη κορυφή είναι κόκκινη. Θυμίζουμε ότι ξεκινήσαμε την αρίθμηση από κόκκινο σημείο έτσι όλα τα σημεία στο υποσύνολο {2,11,20} είναι μαύρα .Από το σχήμα βλέπουμε ότι δεν είναι το μοναδικό ισόπλευρο τρίγωνο με μαύρες κορυφές.



107. Η ισότητα $22^2 + 19^2 = 13^2 + 26^2$ μπορεί να πάρει την μορφή $19^2 - 13^2 = 26^2 - 22^2 = 192$.

Η διαφορά τετραγώνων των αντιδιαμετρικών αριθμών είναι σταθερή . Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

αφού εκφράσουμε το 192 σαν γινόμενο πέντε διαφορετικών ζυγών άρτιων παραγόντων

$192= 2 \text{ X } 96=(47+49)(49-47)=49^2-47^2$ (οι αριθμοί που θα μπουν στα αντιδιαμετρικά κελιά)

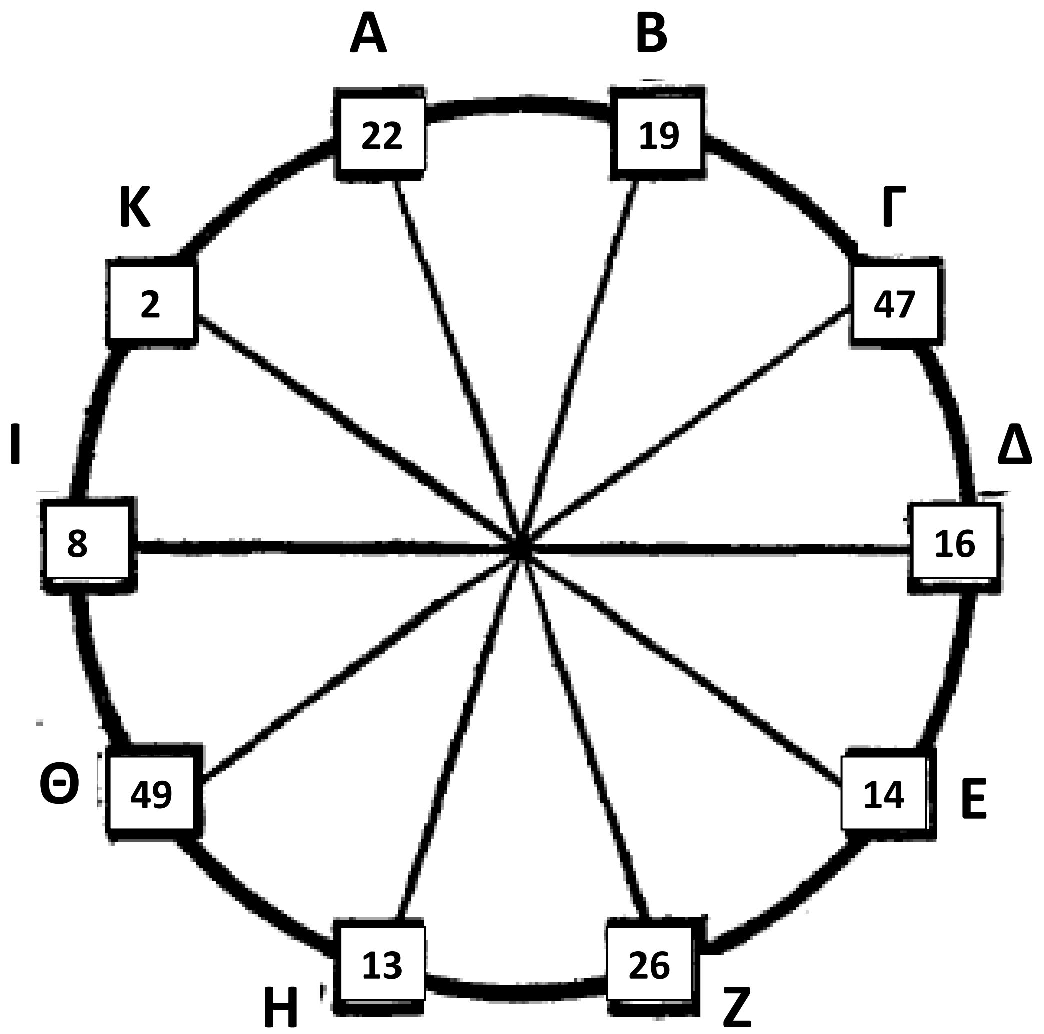
$192= 4 X 48=(26+22)(26-22)=26^2-22^2$

$192= 6 X 32 =(19+13)(19-13)=19^2-13^2$

$192=8 X 24 =(16-8)(16+8)=16^2-8^2$

$192= 12 X16 =(14-2)(14+2)=14^2-2^2$

Οι αριθμοί που αναζητούμε διατάσσονται 22, 19, 47,16, 14, 26, 13, 49, 8, 2



108.Κανένα από τα τρία προβλήματα δεν έχει λύση .Είναι αδύνατα ,ο μάγος θα μπορούσε να προσφέρει οποιοδήποτε χρηματικό βραβείο χωρίς να ρισκάρει ούτε ένα ευρώ. ας εξετάσουμε το κάθε πρόβλημα ξεχωριστά :

Στην πρώτη προσφορά θα πρέπει να δώσουμε 5 ευρώ σε είκοσι κέρματα των 50 λεπτών, των 20 λεπτών, και των 5 λεπτών. Θεωρούμε ότι έχει λύση , έστω:

Χ κέρματα των 50 λεπτών

Υ κέρματα των 20 λεπτών

Ζ κέρματα των 5 λεπτών. Τότε προκύπτει η εξίσωση .

50χ+20y+5z=500 λεπτά η (5 ευρώ). Απλοποιώντας με το 5 η εξίσωση γίνεται:

10x+4y+z=100 (1)

Γνωρίζουμε ότι το πλήθος των κερμάτων είναι είκοσι. Άρα διαθέτουμε και την εξίσωση:

χ+y+z=20 (2)

Αφαιρώντας κατά μέλη την (1) από την (2) προκύπτει:

9χ+3y=80

Διαιρώντας τα δυο μέλη με το 3, έχουμε :

$$3x+y=26\frac{2}{3}$$ η $$3x+y=26,66666$$

Αλλά το 3x –δηλαδή τα κέρματα των 50 λεπτών πολλαπλασιασμένα επί 3- είναι προφανώς ακέραιος .Ομοίως και το y , τα κέρματα των 20 λεπτών. Οπότε το άθροισμα τους δεν μπορεί να είναι ανάγωγο κλάσμα. Άρα το πρόβλημα είναι αδύνατο.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βεβαιωθούμε πως ούτε οι άλλες δυο περιπτώσεις έχουν λύση. Στην περίπτωση με αντίτιμο 3 ευρώ, έχουμε την εξίσωση:

$$3x+y=13\frac{1}{3}$$

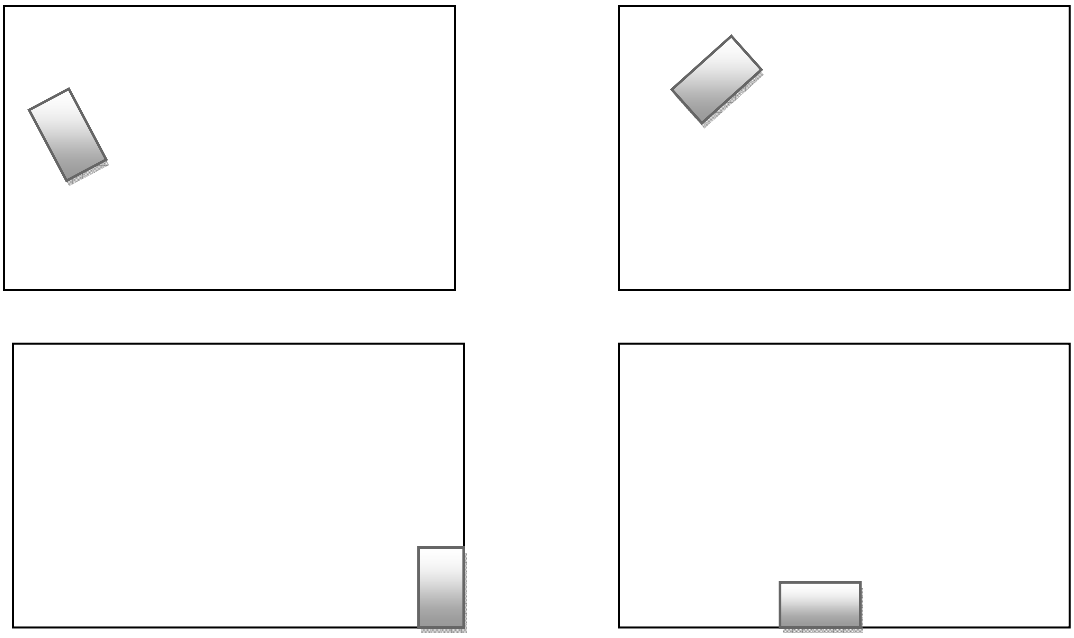
Στο πρόβλημα με αντίτιμο τα 2 ευρώ:

$$3x+y=6\frac{2}{3}$$

Και οι δυο , όπως φαίνεται δεν δίνουν ακέραια αθροίσματα.

Το αριθμητικό αυτό τρυκ είναι παραλλαγή ενός προβλήματος του 1985 του yakov Perelman.

109. Δεν γνωρίζουμε που βρίσκεται το ορθογώνιο που θα «κοπεί» από το υπόλοιπο οικόπεδο .Θα μπορούσε να είναι :



Κάθε ευθεία που διέρχεται από τα κέντρο ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου (ως κέντρο θεωρούμε το σημείο τομής των διαγωνίων του) το χωρίζει σε δυο ισεμβαδικά τμήματα . Άρα σε κάθε περίπτωση <u>η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των δυο παραλληλόγραμμων</u> τα χωρίζει σε δυο ισεμβαδικά χωρία. Προφανώς η λύση είναι ανεξάρτητη από την θέση και τις διαστάσεις τόσο του οικοπέδου όσο και του τμήματος που θα απαλλοτριωθεί.

110.

Έστω $P(x)=\alpha_\nu \chi^\nu+ \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$ το πολυώνυμο που έγραψε ο Γιάννης τα χαρτί. Τότε από την υπόθεση θα ισχύει :

$P(7)=77$ και $P(x_1)=85$ με $\chi_1>7$.Αν χ_2 η ζητούμενη ηλικία με $\chi_2>\chi_1$ θα έχουμε:

$P(7)=\alpha_\nu 7^\nu+ \alpha_{\nu-1}7^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=77$

$P(x_1)=\alpha_\nu x_1^\nu+ \alpha_{\nu-1}x_1^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=85$

$P(x_2)=\alpha_\nu x_2^\nu+ \alpha_{\nu-1}x_2^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=0$

$P(x_1)-P(7)= \alpha_\nu(x_1^\nu -7^\nu)+ \alpha_{\nu-1} (x_1^{\nu-1} -7^{\nu-1})+ \ldots+ \alpha_1(x_1 -7)=8$ (1)

$P(x_2) -P(7)= \alpha_\nu(x_2^\nu -7^\nu)+ \alpha_{\nu-1}(x_2^{\nu-1}- 7^{\nu-1})+ \ldots+ \alpha_1(x_2 -7)=-77$ (2)

$P(x_2)-P(x_1)= \alpha_\nu(x_2^\nu- x_1^\nu)+ \alpha_{\nu-1}(x_2^{\nu-1}- x_1^{\nu-1})+ \ldots+ \alpha_1(x_2- x_1)=-85$ (3)

•Ο ακέραιος αριθμός $P(x_1)-P(7)=8$ έχει παράγοντα το $x_1 -7$ άρα <u>x_1-7 =1 ή 2 ή 4 ή 8</u>

(οι διαιρέτες του 8, $\chi_1>7$)

•Ο ακέραιος αριθμός $P(x_2)$-$P(7)$=-77 έχει παράγοντα το x_2 -7 άρα x_2 -7 =7 ή 11 ή 77 (οι διαιρέτες του 77 , $\chi_2 > \chi_1 > 7$)

•Ο ακέραιος αριθμός $P(x_2)$-$P(x_1)$=-85 έχει παράγοντα το x_2- x_1 άρα x_2– x_1 = 1 ή 5 ή 17 (οι διαιρέτες του 85, $\chi_2 > \chi_1 > 7$)

Έχουμε :

χ_2-x_1= x_2-7-x_1+7= (x_2- 7)-(x_1 -7).Δηλαδή: χ_2-x_1= (x_2-7)-(x_1-7)

Η μοναδική τριάδα ακέραιων που ικανοποιεί την ισότητα από τις παραπάνω τιμές είναι χ_2-x_1=5, x_2-7=7, x_1 -7=2 άρα x_2=14.

111. Η ακτίνα είναι 18 χιλιόμετρα. Το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας δίνεται από την σχέση $4\pi r^2$ και ο όγκος της από την σχέση $\frac{4}{3}\pi r^3$. Σύμφωνα με το πρόβλημα , οι αριθμοί $4r^2$ και $\frac{4}{3}r^3$ πρέπει να βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 1000 και 9999.

$$1000 < 4r^2 < 9999 \Leftrightarrow \frac{1000}{4} < r^2 < \frac{9999}{4} \Leftrightarrow 250 < r^2 < 2499$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{250} < r < \sqrt{2499} \Leftrightarrow 15.81 < r < 49.98 \overset{r\ \ \alpha\kappa\varepsilon\rho\alpha\iota o\varsigma}{\Leftrightarrow} 15 < r < 49$$

$$1000 < \frac{4}{3}r^3 < 9999 \Leftrightarrow \frac{3\cdot 1000}{4} < r^3 < \frac{3\cdot 9999}{4} \Leftrightarrow 750 < r^3 < 7499.4 \Leftrightarrow 9 < r < 20$$

Άρα 15<r<49 και από τον περιορισμό για τον όγκο λαμβάνουμε 20>r>9.Αυτες οι δυο ανισώσεις συναληθεύουν μόνο για 20>r>15 , δηλαδή για τις τιμές του r =16,17,18,19. Παρατηρούμε ότι η έκφραση $\frac{4}{3}r^3$ μπορεί να είναι ακέραιος αριθμός μόνο αν το r διαιρείται με το 3. Αυτό σημαίνει ότι r=18 χιλιόμετρα .

112.Τρία αεροπλάνα είναι αρκετά για να γίνει η πτήση γύρω από την γη. Ας δούμε τον τρόπο.

Έστω ότι τρία αεροπλάνα απογειώνονται από το νησί ταυτόχρονα με γεμάτο το ντεπόζιτο καύσιμα , τα αεροπλάνα χάριν ευκολίας θα τα ονομάσουμε Α,Β,Γ. Όταν έχουν διανύσει το 1/8 της απόστασης , το αεροπλάνο Γ μεταφέρει το ¼ του ντεπόζιτου του στο ντεπόζιτο του αεροπλάνου Α και το ¼ στο αεροπλάνο Β. Αυτό αφήνει στο αεροπλάνο Γ το ¼ του ντεπόζιτου για να επιστρέψει στο νησί. Τα αεροπλάνα Α και Β συνεχίζουν την πτήση για ακόμα 1/8 της απόστασης , τότε το αεροπλάνο Β μεταφέρει το ¼ των καυσίμων του στο ντεπόζιτο του Α. Τώρα το αεροπλάνο Β έχει το ½ του ντεπόζιτου γεμάτο και του επαρκεί για να επιστρέψει στο νησί με ασφάλεια.

Το αεροπλάνο Α συνεχίζει την πτήση , με γεμάτο το ντεπόζιτο από τις «μεταγγίσεις» των άλλων και έχει επάρκεια μέχρι το ¼ της απόστασης από το νησί , εκεί όμως τον περιμένει το αεροπλάνο Γ το οποίο έχει ανεφοδιαστεί και του μεταγγίζει το ¼ των καύσιμων και τα δυο συνεχίζουν την πτήση προς το νησί .Τα δυο αεροπλάνα εξαντλούν τα καύσιμα τους σε απόσταση 1/8 από το νησί και σε εκείνο το σημείο τους αναμένει το αεροπλάνο Β οπού μεταφέρει το ¼ των καύσιμων του σε καθένα από τα 2 άλλα αεροπλάνα .Τα τρία αεροπλάνα τώρα έχουν αρκετά καύσιμα για να επιστρέψουν στο νησί με ασφάλεια.

113. Ο αριθμός αναλύεται μοναδικά σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής: 1111111=239x4649
Άρα είτε έχουμε 239 γάτες και σκότωσε 4649 ποντίκια εκάστη είτε έχουμε 4649 γάτες και σκότωσε 239 ποντίκια η καθεμία

114. Έστω $\alpha\beta\gamma$ το πλήθος των αυτοκίνητων που πέρασαν στις 10:00 , αν Η η ηλικία του γιου του υπαλλήλου Β με Η θετικό ακέραιο μικρότερο του 10 .Από την εκφώνηση προκύπτει:

$$\overline{\alpha\beta\gamma}\cdot \mathrm{H} = \overline{(\alpha+\mathrm{H})(\beta-\mathrm{H})(\gamma-\mathrm{H})} \Leftrightarrow (100\alpha+10\beta+\gamma)\cdot\mathrm{H} = 100(\alpha+\mathrm{H})+10(\beta-\mathrm{H})+(\gamma-\mathrm{H}) \Leftrightarrow$$
$$100\alpha\mathrm{H}+10\beta\mathrm{H}+\gamma\mathrm{H} = 100\alpha+100\mathrm{H}+10\beta-10\mathrm{H}+\gamma-\mathrm{H} \Leftrightarrow 100\alpha\mathrm{H}+10\beta\mathrm{H}+\gamma\mathrm{H} = 100\alpha+89\mathrm{H}+10\beta+\gamma \Leftrightarrow$$
$$100\alpha\mathrm{H}+10\beta\mathrm{H}+\gamma\mathrm{H}-100\alpha-89\mathrm{H}-10\beta-\gamma = 0 \Leftrightarrow 100\alpha(\mathrm{H}-1)+10\beta(\mathrm{H}-1)+\gamma(\mathrm{H}-1)-89\mathrm{H} = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\mathrm{H}-1)(100\alpha+10\beta+\gamma)-89\mathrm{H} = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{H}-1)\overline{\alpha\beta\gamma}-89\mathrm{H} = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{H}-1)X-89\mathrm{H} = 0 \Leftrightarrow X = \frac{89\mathrm{H}}{\mathrm{H}-1}$$

Ο Χ είναι θετικός ακέραιος , ο 89 είναι πρώτος αριθμός οπότε η μοναδική πιθανή τιμή του Η-1 είναι το 1 (οι μοναδικοί διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που ο ένας είναι πολλαπλάσιο του αλλού είναι οι 1,2).Έτσι Η-1=1 ή Η=2 και ο Χ έχει την τιμή 89x2=178 και Υ=356.Ετσι ,178 αυτοκίνητα πέρασαν από τα διόδια μέχρι τις 10:00 το πρωί και 356 μέχρι της 12:00 το μεσημέρι και η ηλικία του γιου του υπαλλήλου Β είναι 2 έτη.

115.Η αράχνη με το όνομα κ. Δέκα σίγουρα δεν έχει δέκα πόδια ,(από την υπόθεση δεν μπορεί να συμπίπτει ο αριθμός του ονόματος με το πλήθος των ποδιών), δεν μπορεί να έχει 9 πόδια εφόσον 9 πόδια έχει η αράχνη που απάντησε άρα τελικά έχει 8 πόδια .Οπότε η αράχνη με το όνομα κ. Εννέα έχει 10 πόδια.

116 . Απαιτούνται 10 δόκιμες και το πλήθος των ποτηριών είναι 513, η αιτιολόγηση του προβλήματος έχει ως εξής : Η πιο αποτελεσματική διαδικασία έλεγχου οποιουδήποτε αριθμού ποτηριών, με σκοπό να βρεθεί εκείνο που περιέχει το δηλητήριο, είναι η διαδικασία διχοτόμησης . Τα ποτήρια χωρίζονται σε δυο ομάδες (στην περίπτωση περιττού αριθμού ποτηριών η μια ομάδα περιλαμβάνει ένα ποτήρι περισσότερο από την άλλη).Ελέγχουμε την μια από αυτές ανακατεύοντας δείγματα από όλα τα ποτήρια της ομάδας , και εξετάζουμε το συνολικό δείγμα. Η ομάδα στην οποία βρίσκεται το δηλητήριο χωρίζεται πάλι στην μέση, και γίνεται νέος έλεγχος .Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να βρεθεί το ποτήρι με το δηλητήριο. Αν ο αριθμός των ποτηριών είναι μεταξύ του 500 και του 512(του 512 συμπεριλαμβανόμενου) απαιτούνται εννέα διχοτομήσεις και έλεγχοι. Από τον αριθμό 513 μέχρι το 600 απαιτούνται δέκα έλεγχοι. Ο αριθμός 512 είναι ο αριθμός που μας ενδιαφέρει, γιατί είναι ο μόνος μεταξύ του 500 και του 600, που βρίσκεται σε αυτή την σειρά των διπλασιασμών: 1,2,4,8,16,32,64,128,256,<u>512</u>,1024,… θα πρέπει να υπήρχαν 513 ποτήρια στην κουζίνα του ξενοδοχείου, γιατί μόνο σε αυτή την περίπτωση (αφού ο αριθμός των ποτηριών ορίζεται μεταξύ του 500 και του 600) η αρχική εξέταση από ένα ποτήρι δεν επηρεάζει την εφαρμογή της «βέλτιστης διαδικασίας έλεγχου». Πράγματι ο έλεγχος 513 ποτηριών με διχοτόμηση απαιτεί 10 έλεγχους .Αν όμως εξεταστεί ένα ποτήρι μόνο του, τα υπόλοιπα 512 απαιτούν 9 έλεγχους , πράγμα που σημαίνει ότι ο συνολικός αριθμός ελέγχων παραμένει ο ίδιος .

117.Συνολικά τα ψηφία είναι 9+31x2=71 , αν διαγράψουμε 60 ψηφία τότε μένουν: 71-60 =11 . Για να προκύψει μετά την διαγραφή ο μικρότερος αριθμός θα πρέπει το πρώτο ψηφίο του να είναι το 1,επίσης χρειαζόμαστε όσα μηδενικά υπάρχουν στη σειρά . Από το 10,20,30 έχουμε τρία μηδενικά άρα μια καλή αφετηρία είναι ο αριθμός :

1000XXXXXXX

Τώρα εφόσον εξαντλήσαμε τα μηδενικά στρεφόμαστε στα ψηφία 1,2 και 3 (στην σειρά από τους αριθμούς 31,32,33), περισσότερα 3 από τους αριθμούς 34 μέχρι 39 και τέλος το 0 (από το 40) άρα ο μικρότερος δυνατός αριθμός είναι 10001233330

ii)

ΔΑΑΕΛΜΚΙΑΓΚΡΕΑΜΠΑΜΛΑΠΠΤΙΑ

ΔΑΑΕΛΜΚΙΑΓΚΡΕΑΜΠΑΜΛΑΠΠΤΙΑ

ΔΕΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

118. Η πρώτη σκέψη είναι ότι δεν υπάρχει σίγουρη τακτική νίκης , αν ένας από του παίκτες έχει το 22 δεν μπορεί να γνωρίζει αν ο άλλος παίκτης έχει το 21 η το 23,οπότε εύλογα μπορεί να υποτεθεί ότι υπάρχει μια πιθανότητα νίκης 50%. Όμως υπάρχει στρατηγική νίκης και βασίζεται τόσο στο κανόνα του παιχνιδιού που θέλει να ανακοινώνεται ο αριθμός σε κάθε χτύπο του ρολογιού όσο και στο ότι γνωρίζουν αμοιβαία ότι είναι εξίσου ικανοί να κάνουν απόλυτα λογικούς συλλογισμούς . Οι δυο παίκτες μπορούν επαγωγικά σκεπτόμενοι να βρουν τον αριθμό.

Ας υποθέσουμε ότι στον πρώτο παίκτη δίνεται ο ο αριθμός 1 και στον άλλο ο αριθμός 2,τότε ο πρώτος παίκτης μόλις περάσει το 1^{o} λεπτό και χτυπήσει το ρολόι θα ανακοινώσει τον αριθμό του άλλου παίκτη που θα είναι 2.(οι αριθμοί είναι διαδοχικοί και ο μικρότερος είναι ο 1).

Αν υποθέσουμε ότι οι δυο παίκτες έχουν τους αριθμούς 2 και 3 .Τότε ο παίκτης με τον αριθμό 2 αν χτυπήσει στο πρώτο λεπτό το ρολόι και ο άλλος παίκτης δεν ανακοινώσει αριθμό συμπεραίνει ότι δεν έχει το 1 άρα ο άλλος παίκτης έχει τον αριθμό 2 συνεπώς περιμένει το δεύτερο λεπτό να περάσει και στον δεύτερο χτύπο ανακοινώνει ότι ο άλλος παίκτης έχει αριθμό 3.

Γενικεύοντας αν οι δυο παίκτες έχουν τους αριθμούς κ ,κ+1 αντίστοιχα αν περάσουν κ-1 λεπτά και στον κ-1 χτύπο του ρολογιού δεν ανακοινωθεί αριθμός ο παίκτης με τον αριθμό κ καταλαβαίνει ότι ο άλλος παίκτης έχει τον αριθμό κ+1 όπου και τον ανακοινώνει.

Το πρόβλημα είναι παραλλαγή ενός προβλήματος του 1956 που δημοσιεύτηκε απο τους George Gamow και Marvin Stern στο κλασσικό βιβλιο τους Puzzle Math.

119.Ο Β κατάλαβε ότι το δημοσίευμα είναι ψεύτικο γιατί είναι αδύνατο να τοποθετηθούν ν οι αριθμοί από το 1 μέχρι το 10 στα τετράγωνα του πενταγράμμου έτσι ώστε κάθε γραμμή να έχει το ίδιο άθροισμα. Πως μπορούμε να το αποδείξουμε;

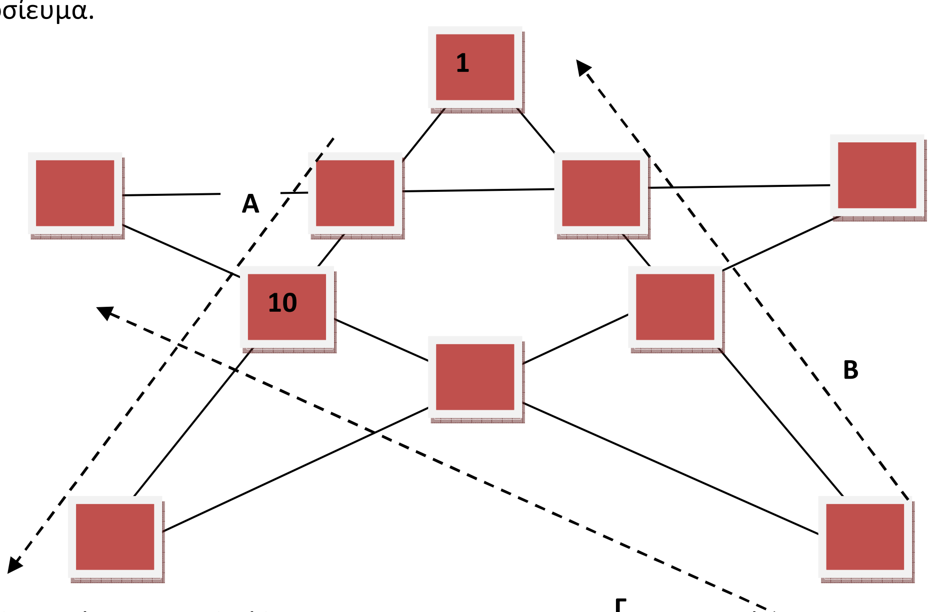
Έστω ότι υπάρχει η ζητούμενη διάταξη αριθμών στο πεντάγραμμο. Το σχήμα αποτελείται συνολικά από 5 γραμμές .Το άθροισμα των αριθμών 1+2+3+…+10=55, όμως ο καθένας από τους αριθμούς εμφανίζεται σε δυο γραμμές άρα το άθροισμα όλων των γραμμών είναι 55+55=110 , αν διαιρέσουμε με το πλήθος των γραμμών 5(δεδομένου ότι υποθέσαμε ότι όλες οι γραμμές έχουν το ίδιο άθροισμα) βρίσκουμε 22.

Το πρόβλημα τώρα είναι να τοποθετήσουμε τους αριθμούς έτσι ώστε σε κάθε γραμμή να έχουμε άθροισμα 22.

Το 1 θα βρίσκεται σε δυο γραμμές οπότε οι υπόλοιποι αριθμοί σε καθεμία από τις 2 γραμμές του θα πρέπει να έχουν άθροισμα 2x21=42. Σίγουρα το 10 πρέπει να βρίσκεται σε μια από τις <u>δυο γραμμές που περιέχουν το 1</u> γιατί το άθροισμα των υπολοίπων (χωρίς το 10) δεν αρκεί. Δείτε 4+5+6+7+8+9=39 <42. Αν ονομάσουμε <u>Α είναι η γραμμή που περιέχει το 1 και το 10</u> , Β η άλλη γραμμή με το 1 και Γ η άλλη γραμμή με το 10, τότε στην γραμμή Α θα έχουμε 4 δυνατούς συνδυασμούς .Εξαιρούμε τον συνδυασμό 1,10,4,7 γιατί θα ήταν αδύνατο να συμπληρωθούν σωστά με τους υπόλοιπους αριθμούς οι γραμμές Β και Γ . Οπότε εξετάζουμε τις υπόλοιπες περιπτώσεις :

	1ος συνδυασμός	2ος συνδυασμός	3ος συνδυασμός
Α	1,10,2,9	1,10,3,8	1,10,5,6
Β	1,6,7,8	1,5,7,9	1,4,8,9
Γ	10,5,4,3	10,6,4,2	10,7,3,2

Αλλά θα πρέπει οι γραμμές Β και Γ να έχουν ένα κοινό αριθμό (στο πεντάγραμμο κάθε δυο γραμμές έχουν ένα κοινό τετράγωνο) και αυτό δεν συμβαίνει σε καμιά περίπτωση. Άρα δεν είναι δυνατή η διάταξη που παρουσιάζει το δημοσίευμα.



120.Τα διαμερίσματα αριθμήθηκαν ως 9,10,11 και 12 .Οι κοι παρήγγειλαν τα ψηφία 0,1,1,1,1,2 και 6.Το ψηφίο 6 τοποθετήθηκε ανάποδα στην πόρτα του διαμερίσματος 9.Το συνολικό ποσό που πλήρωσαν 1+1+1+1+2+6=12 ευρώ.

121. Έστω Π το συνολικό ποσό για την μίσθωση του λεωφορείου και έστω Ν το πλήθος των εκδρομέων (συμπεριλαμβανόμενου και του Παπαδοπούλου) που συμφωνήσαν να συμμετάσχουν στην εκδρομή όταν ανακοινώθηκε το ποσό του εισιτηρίου. Αυτό σημαίνει ότι αρχικά είχαν πει θα συμμετάσχουν Ν+4 άνθρωποι. Όπου Ν+4 είναι τουλάχιστον 22 (δηλαδή το Ν είναι τουλάχιστον 18) έτσι τελικά στην εκδρομή πήγαν Ν-2 άτομα. Όταν πήγαιναν Ν άτομα στην εκδρομή το αντίτιμο του εισιτηρίου θα είναι Π/Ν. Όταν οι δυο αρρώστησαν το εισιτήριο έγινε Π/(Ν-2).

Άρα από υπόθεση προκύπτει η σχέση :

$$\frac{\Pi}{N}+3=\frac{\Pi}{N-2}$$

Κάνουμε πράξεις :

$$\Pi(N-2)+3N(N-2)=\Pi N \Leftrightarrow 3N^2-6N=2\Pi \ (1)$$

Γνωρίζουμε ότι το αρχικό κόστος του εισιτηρίου($\frac{\Pi}{\mathrm{N}+4}$) είναι ακέραιος αριθμός άρα και ο Π είναι ακέραιος αριθμός , το δεύτερο μέλος της (1) είναι άρτιος αριθμός άρα και το πρώτο μέλος είναι άρτιος ,έτσι:

$$\begin{cases} 3N^2-6N \ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \\ 6N \ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases} \acute{\alpha}\rho\alpha \quad 3N^2 \quad \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \ o\pi\acute{o}\tau\varepsilon \ N \ \alpha\rho\tau\iota o\varsigma \ \varepsilon\pi\iota\sigma\eta\varsigma.$$

Θέτουμε Ν=2ν, ν θετικός ακέραιος (συγκεκριμένα ο ν είναι τουλάχιστον 9 εφόσον ο Ν είναι τουλάχιστον 18) ,βλέπουμε λοιπόν ότι :

$$(1): 2\Pi=3(2\nu)^2-6(2\nu)=12\nu^2-12\nu \Leftrightarrow \Pi=6\nu^2-6\nu$$

Γνωρίζουμε ότι το αρχικό κόστος του εισιτηρίου($\frac{\Pi}{\mathrm{N}+4}$) είναι ακέραιος αριθμός:

$$\frac{\Pi}{\mathrm{N}+4}=\frac{6\nu^2-6\nu}{2\nu+4}=\frac{3\nu^2-3\nu}{\nu+2}$$ είναι ακέραιος αριθμός . (2)

Εκτελούμε την διαίρεση πολυώνυμων $\left(3\nu^2-3\nu\right):\left(\nu+2\right)$ και βλέπουμε ότι η (2) γίνεται:

$\frac{3\nu^2-3\nu}{\nu+2}=3\nu-9+\frac{18}{\nu+2}$ είναι ακέραιος αριθμός .Ο προσθετέος 3ν-9 είναι ακέραιος άρα πρέπει και ο αριθμός $\frac{18}{\nu+2}$ να είναι ακέραιος αυτό σημαίνει ότι ο ν+2 είναι διαιρέτης του 18 .Αλλά ο ν είναι τουλάχιστον 9 ,οπότε ο ν+2 είναι τουλάχιστον 11.Ο μοναδικός διαιρέτης του 18 μεγαλύτερος του 11 είναι το 18 άρα ν+2 =18 ή ν=16. Από όπου προκύπτει ότι Ν=32 και $\Pi=6\nu^2-6\nu=6(16)^2-6(16)=1440 \ \varepsilon\upsilon\rho\acute{\omega}$. Το πλήθος των εκδρομέων που πήγαν τελικά είναι Ν-2=32-2=30. Άρα το τελικό κόστος του εισιτηρίου ήταν $\frac{\Pi}{N-2}=\frac{1440}{30}=48$ ευρώ

122.Αν υπολογίσουμε τους κύβους των αριθμών αρχίζοντας από το 10:

$$10^3=1000, 11^3=1331, 12^3=1728, 13^3=2197$$

Από τα αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι ο Κώστας θα είναι 12 χρονών.

Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$10^2 = 100 \,, 11^2 = 121 \,, 12^2 = 144 \,, 13^2 = 169 \,, 14^2 = 196$$

Άρα αν η Άννα ήταν 10 χρονών τότε 1728+100=1828, άτοπο εφόσον δεν μπορεί να γεννήθηκε τότε η Γεωργία.

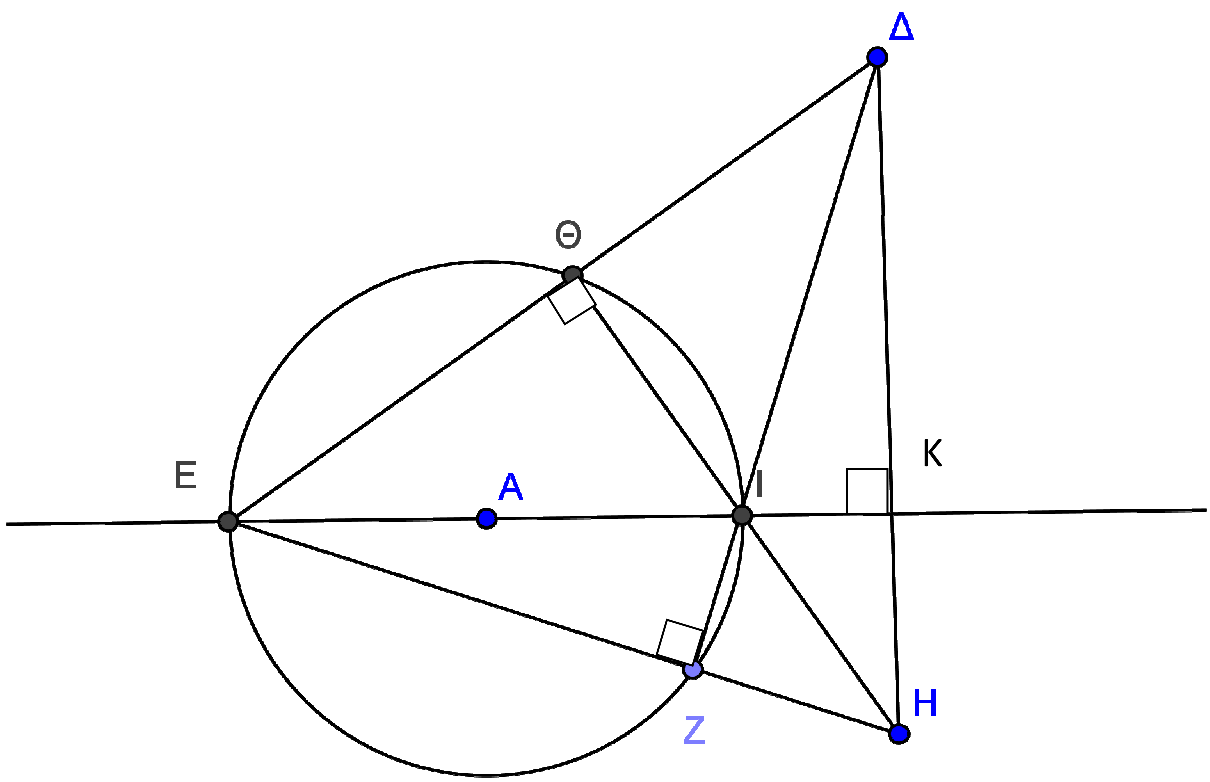
Αν η Άννα ήταν 11 χρονών τότε 1728+121=1849,Ατοπο

Αν η Άννα ήταν 14 χρονών τότε 1728+196=1924,Ατοπο,διοτι το 1945 η Γεωργία θα είναι 21 χρονών με παιδί 13 χρονών.

Άρα η Άννα θα ήταν 13 χρόνων, γιατί 1728+169=1897.

Η Γεωργία συνεπώς θα ήταν 1945-1897=48 χρόνων και ο Βασίλης 48+5=53 χρόνων.

123. Ενώνουμε το Δ με το Ε (Ε είναι το σημείο τομής της ευθείας με τον κύκλο) και στην συνέχεια ονομάζουμε Θ το σημείο τομής του κύκλου με το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ .Ενώνουμε το Δ με το Ι (όπου Ι το δεύτερο σημείο τομής του κύκλου με την ευθεία) και προεκτείνουμε μέχρι που να τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ. Στην συνέχεια, προεκτείνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΘΙ και ΑΖ ωσότου να συναντηθούν στο σημείο Η. Τέλος, ενώνουμε το Δ με το Η. Παρατηρούμε ότι η γωνίες ΕΘΙ και ΕΖΙ είναι ορθές ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικύκλιο .Άρα για το τρίγωνο ΔΕΗ τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ και ΘΗ είναι ύψη, οπότε το σημείο τομής τους Ι είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Άρα το ΕΚ θα είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου και η γωνία ΔΚΕ είναι ορθή.



124. Έστω $X = 0.\Pi A \Lambda I \Pi A \Lambda I \Pi A \Lambda I \Pi A \Lambda I....$ ή

(πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με 10000) $10000X = 10000 \cdot 0.\Pi A\Lambda I\Pi A\Lambda I\Pi A\Lambda I\Pi A\Lambda I....$ ή

$$10000X = \Pi A\Lambda I.\Pi A\Lambda I\Pi A\Lambda I\Pi A\Lambda I....$$ ή

$$10000X = \Pi A\Lambda I + 0.\Pi A\Lambda I\Pi A\Lambda I\Pi A\Lambda I....$$ ή

$$10000X = \Pi A\Lambda I + X$$ ή

$$9999X = \Pi A\Lambda I$$ ή

$$X = \frac{\Pi A\Lambda I}{9999}$$ ή

$$\frac{OKO}{MHM} = \frac{\Pi A\Lambda I}{9999} \quad (1)$$

Τα δυο κλάσματα είναι ισοδύναμα άρα ο αριθμός ΜΗΜ είναι διαιρέτης του 9999. Πιθανοί υποψήφιοι τριψήφιοι διαιρέτες (με το ίδιο αρχικό και τελικό ψηφίο) είναι οι αριθμοί 101,303,909.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

▪ Αν ΜΗΜ =101 τότε η (1) γίνεται: $\frac{OKO}{101} = \frac{\Pi A\Lambda I}{9999}$ ή $9999OKO = 101\Pi A\Lambda I$ ή $99OKO = \Pi A\Lambda I$ ή $(100-1)OKO = \Pi A\Lambda I$ ή $OKO00 - OKO = \Pi A\Lambda I$.Από την τελευταία σχέση όμως προκύπτει ότι Ο=Π (ίσα πρώτα ψηφία). Άτοπο, όλα τα γράμματα καθώς και τα ψηφία είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Άρα $MHM \neq 101$.

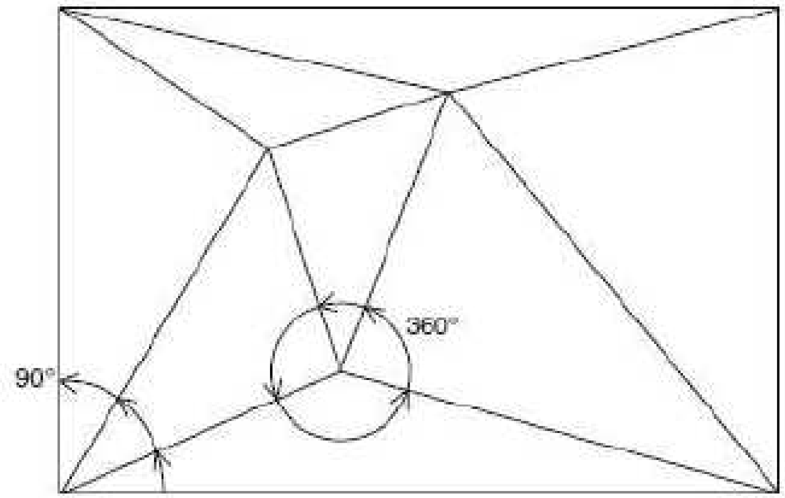
▪ Αν ΜΗΜ =909 τότε η (1) γίνεται: $\frac{OKO}{909} = \frac{\Pi A\Lambda I}{9999}$ η $9999OKO = 909\Pi A\Lambda I$ ή $11OKO = \Pi A\Lambda I$ ή $(10+1)OKO = \Pi A\Lambda I$ ή $OKO0 + OKO = \Pi A\Lambda I$.Από την τελευταία σχέση όμως προκύπτει ότι Ο=Ι (ίσα τελευταία ψηφία). Άτοπο, όλα τα γράμματα καθώς και τα ψηφία είναι διαφορετικά μεταξύ τους. $MHM \neq 909$.

125. Έστω ν το πλήθος των τριγωνικών κομματιών ,τότε το σύνολο των μοιρών όλων των γωνιών στην τούρτα είναι $\nu*180^o$. Κάθε κερί αποτελεί κορυφή τριγώνου οπότε το σύνολο των μοιρών όλων των τριγωνικών κομματιών που το έχουν κορυφή είναι 360^o , τα κεριά είναι 98 άρα το άθροισμα των μοιρών όλων των γωνιών των τριγωνικών κομματιών με κορυφές τα κεριά είναι 360^o*98 συν τις 4 γωνίες της τούρτας από 90^o έχουμε λοιπόν την εξίσωση:

$\nu*180^o=360^o*98+4*90^o$ ή $\nu*180^o=360^o*99$ ή $\nu=(360^o*99)/180^o$

τελικά ν=198

Οπότε ο Ευτύχιος δεν τα υπολόγισε καλά, καθώς αυτός και δυο καλεσμένοι του δεν θα φάνε τούρτα. Για παράδειγμα αν είχαμε μόνο τρία κεριά το σχήμα θα μπορούσε να ήταν έτσι:



126. Το άθροισμα αποτελείται από 7 προσθετέους . Ο αριθμός :
F+F+F+F+F+F+F=7F τελειώνει σε 2. Δοκιμάζουμε τιμές για το F.
F=1 7x1=7
F=2 7x2=14
F=3 7x3=21
F=4 7x4=28
F=5 7x5=35
F=6 7x6=42
F=7 7x7=49
F=8 7x8=56
F=9 7x9=63
Μόνο ο 7x6=42 τελειώνει σε 2 .Άρα λοιπόν F=6. Από την πρόσθεση των ψηφίων C συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός 6C+4 (4 είναι το κρατούμενο από την προηγούμενη πρόσθεση F+F+F+F+F+F+F=42) πρέπει να τελειώνει σε 6. Άρα ο αριθμός 6C πρέπει να τελειώνει σε 6-4=2 όπως και στο πρώτο βήμα , βρίσκουμε ότι αυτό συμβαίνει μόνο όταν C=2 ή C=7.
Αν C=7, τότε ο 5A+4 (αφού 6x7=42,το κρατούμενο είναι 4) τελειώνει σε 6. Δηλαδή ο 5A τελειώνει σε 2, άτοπο αφού το 5A τελειώνει πάντα σε 0 ή 5. Είναι λοιπόν C=2, οπότε 5A+1 (αφού 6x2=12 και το κρατούμενο είναι 1) τελειώνει σε 6.Αυτο σημαίνει ότι ο 5A τελειώνει σε 5 και έτσι:
A=1 ή A=3 ή A=5 ή A=7 ή A=9
Επειδή τώρα ο B+B τελειώνει σε 6 , είναι μεγαλύτερος από το 9 διότι δεν υπάρχει κρατούμενο από την πρόσθεση των C(αφού 3C=6), συμπεραίνουμε ότι 2B=16, δηλαδή B=8.
Όμως από την μορφή ολοκλήρου του αθροίσματος και συγκεκριμένα από την πρώτη στήλη προς τα αριστερά, βλέπουμε ότι ο A συν το κρατούμενο της πρόσθεσης B+B=2B ισούται με F, δηλαδή με 6.Αρα A=5.

Έχουμε λοιπόν βρει μέχρι στιγμής ότι:
A=5,B=8,C=2,F=6
Έτσι η πρόσθεση γίνεται :

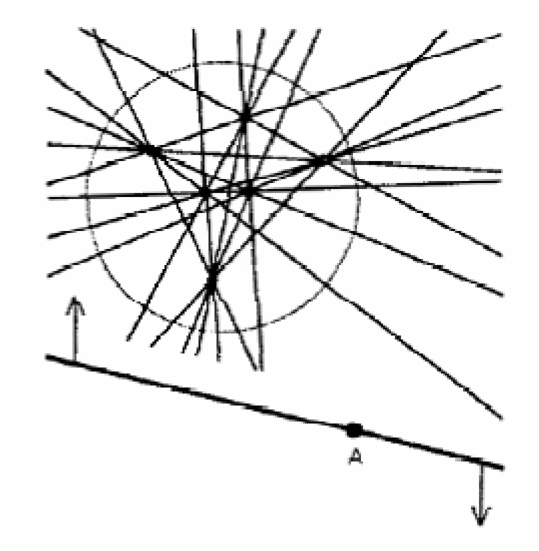
```
582D526
 82D526
  2D526
   D526
    526
```

```
       26
+       6
---------
  6666662
```

Από το άθροισμα:
5+5+5+5+5+1=26 έχουμε κρατούμενο 2.Αρα 4D+2 τελειώνει σε 6,δηλαδη ο 4D τελειώνει σε 6-2=4.Η μόνη κατάλληλη τιμή για τον D είναι ο αριθμός 1. Τελικά :A=5,B=8,C=2,D=1 ,F=6

127.Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι για κάθε πεπερασμένο σύνολο σημείων του επιπέδου υπάρχουν άπειρες ευθείες , που διχοτομούν το εν λογω σύνολο. Η παρακάτω απόδειξη για 6 σημεία που φαίνεται στο σχήμα 2 , εφαρμόζεται για οποιοδήποτε πεπερασμένο αριθμό σημείων.

Σχεδιάστε κάθε γραμμή που ορίζεται από όλα τα πιθανά ζεύγη σημείων που έχουμε .Πάρτε στην συνέχεια, ένα άλλο σημείο , το Α, το οποίο βρίσκεται έξω από την κλειστή καμπύλη , που περιβάλλει τα 6 σημεία και που δεν ανήκει σε καμία από τις ευθείες οι οποίες ήδη υπάρχουν στο επίπεδο. Σχεδιάστε μία ευθεία , που διέρχεται από το Α .Καθώς περιστρέφεται η ευθεία αυτή γύρω από το Α κατά την διεύθυνση των βελών, θα διέρχεται από ένα



σημείο κάθε φορά .(Είναι αδύνατο να περάσει από δυο σημεία ταυτόχρονα, γιατί αυτό θα σήμαινε ότι το σημείο Α βρίσκεται πάνω στην ευθεία , που ορίζεται από αυτά τα δυο σημεία .) Έτσι η ευθεία κάποια στιγμή θα έχει περάσει πάνω από τα μισά σημεία και συνεπώς θα έχει διχοτομήσει το σύνολο των σημείων .Δεδομένου ότι το Α μπορεί να καταλάβει άπειρες θέσεις , άπειρες είναι και οι ευθείες που μπορούμε να εντοπίσουμε με την παραπάνω ιδιότητα.(Herbert Wills ,”The mathematical Gazette” 1964)

128. Παίρνουμε 1 μεγάλο κερί της μιας ώρας και 5 μικρά των 11 λεπτών βάζουμε φωτιά στο μεγάλο κερί και ταυτόχρονα στο 1ο από τα μικρά ,μόλις καεί το μικρό κερί αμέσως ανάβουμε το επόμενο , το κάνουμε για το καθένα από τα 5 κεριά . Όταν καεί το μεγάλο κερί της μιας ώρας σβήνουμε το 5ο μικρό κερί στο οποίο θα έχουν απομείνει 60-5x11=5 λεπτά.

Παίρνουμε δυο άλλα μικρά κεριά των 11 λεπτών και μαζί με αυτό των 5 λεπτών τα ανάβουμε ταυτόχρονα .Όταν σβήσει το μικρό θα μας έχουν μείνει δυο κεριά των 6 λεπτών.

Κατόπιν παίρνουμε το 1 από αυτά (των 6 λεπτών) και άλλο ένα κερί των 11 λεπτών τα ανάβουμε ταυτόχρονα. θα μας μείνει ένα κερί των 5 λεπτών. Μας έχουν μείνει συνολικά δυο κεριά , ένα των 6 λεπτών και 1 των 5 λεπτών .Τα ανάβουμε ταυτόχρονα και τα σβήνουμε όταν καεί το μικρότερο. Θα μας έχει μείνει ένα κερί με ακριβώς 1 λεπτό. Συνολικό κόστος 1x0.60+8x0.11=1.48 ευρώ.

129. Έστω χ ο αριθμός ΕΠΤΑ .Τότε ο αριθμός χ είναι τετραψήφιος ,κατά συνέπεια

$$1000<x<10000 \quad (1)$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει , ότι ο χ αποτελείται από διαφορετικά ψηφία. Το τελευταίο του ψηφίο δεν είναι μηδέν ,γιατί στην αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε τα δυο τελευταία ψηφία του αποτελέσματος να είναι μηδέν .Το τετράγωνο του χ είναι x^2 και κατά την αφαίρεση του x από το x^2, θα πάρουμε αριθμό που θα τελειώνει σε τέσσερα μηδενικά, δηλαδή

$$x^2 - x = \nu \cdot 10^4$$

, όπου ν είναι φυσικός αριθμός ,ή ακόμα

$$x(x-1) = \nu \cdot 10^4$$

Ο αριθμός x δεν τελειώνει σε μηδενικά , ο x-1 δεν είναι πολ/σιο του 10^4 και επειδή οι αριθμοί $x, x-1$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, προκύπτει ότι είτε:

Α) ο x περιέχει τουλάχιστον τέσσερεις παράγοντες 2, ο x-1 περιέχει τέσσερεις παράγοντες 5.

Β) ο x περιέχει τουλάχιστον τέσσερεις παράγοντες 5, ο x-1 περιέχει τέσσερεις παράγοντες 2.

Εξετάζουμε ξεχωριστά τις δυο περιπτώσεις:

Α) $x = 2^4\kappa, x-1 = 5^4 m$ ή $x = 16\kappa, x-1 = 625m$ δηλαδή $x = 625m+1$, m<16

$(1000 < x < 10000 \Leftrightarrow 1000 < 625m+1 < 10000 \Leftrightarrow \dfrac{999}{625} < m < \dfrac{9999}{625} \Leftrightarrow 1.59 < m < 15.99)$

Άρα $625m+1 = 16\kappa \Leftrightarrow 624m+m+1 = 16\kappa \Leftrightarrow m+1 = 16\kappa - 624m \Leftrightarrow m+1 = 16(\kappa - 39m) \overset{m+1>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{m+1}{16} = \kappa - 39m$.

Αλλά $\kappa - 39m$ θετικός ακέραιος οπότε $\dfrac{m+1}{16}$ θετικός ακέραιος και m<16.Μοναδικη λύση $m = 15$, δηλαδή προκύπτει $x = 9376$.

Β) $x-1 = 16\kappa \Rightarrow x = 16\kappa+1$ ή $x-1 = 16\kappa \Rightarrow 625m = 16\kappa+1 \Leftrightarrow 625m-1 = 16\kappa \Leftrightarrow 624m+m-1 = 16\kappa$ (2)

$$m-1=16\kappa-624m \Leftrightarrow m-1=16(\kappa-39m) \Leftrightarrow \frac{m-1}{16}=\kappa-39m$$

αλλά $\kappa-39m$ θετικός ακέραιος οπότε $\frac{m-1}{16}$ (2)θετικός ακέραιος και m<16

Ομως, η πιο μικρή τιμή του m που ικανοποιεί την (2) είναι 17,ατοπο.

Τελικά $9376^2=87909376$

130.Ας δούμε τον κύκλο , όταν ένας κάτοικος δηλώνει ότι ο διπλανός του λέει πάντα αλήθεια τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και οι δυο είναι του ίδιου τύπου (ή λένε και οι δυο πάντα την αλήθεια ή λένε και οι δυο πάντα ψέματα χωρίς να ξέρουμε όμως τι από τα δυο). Ενώ όταν ένας κάτοικος δηλώσει ότι ο διπλανός του λέει πάντα ψέματα τότε οι δυο είναι διαφορετικού τύπου (ένας λέει πάντα αλήθεια ,ένας λέει πάντα ψέματα χωρίς να ξέρουμε ποιος κάνει τι). Ο ταξιδιώτης με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις μπόρεσε να μετρήσει το πλήθος των χωρικών που ανήκουν στον ένα τύπο καθώς και το πλήθος των χωρικών που ανήκουν στο άλλο. Δεν υπάρχει όμως τρόπος να βρει ποιο πλήθος αντιστοιχεί στους ψεύτες και ποιο πλήθος αντιστοιχεί σε αυτούς που λένε πάντα αλήθεια. Εφόσον όμως από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι μπόρεσε να βρει το ποσοστό των ψευτών αυτό σημαίνει ότι τα δυο πλήθη είναι ίσα. Άρα το ποσοστό των ψευτών είναι 50%.

131.Σε κάθε μια από τις 20 γραμμές έχουμε συνολικά 19 τμήματα άρα 19Χ20=380 οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα .Όμοια συμπεραίνουμε ότι έχουμε τον ίδιο αριθμό καθέτων τμημάτων άρα συνολικά στο σχήμα έχουμε 2x380 =760 ευθύγραμμα τμήματα. Εφόσον από αυτά τα 237 τμήματα είναι μαύρα τότε 760-237=523 τμήματα είναι είτε κόκκινα είτε μπλε.

Έστω Κ ο αριθμός των κόκκινων τμημάτων και ας σκεφτούμε πόσες φορές μια κόκκινη τελεία είναι το άκρο ενός τμήματος. Κάθε μαύρο τμήμα έχει μια κόκκινη τελεία ως άκρο , κάθε κόκκινο τμήμα έχει και τα δυο άκρα του κόκκινα, συνολικά δηλαδή 237+2Κ (1) κόκκινες τελείες ως άκρα.

Αλλά γνωρίζουμε ότι καθεμία από τις 39 κόκκινες τελείες που βρίσκονται στα σύνορα του πίνακα αποτελούν τα άκρα 3 τμημάτων και καθεμία από τις εναπομείναντες 219-39=180 κόκκινες τελείες στο εσωτερικό του πίνακα αποτελούν άκρο 4 τμημάτων. Άρα ο συνολικός αριθμός των περιπτώσεων που μια κόκκινη τελεία είναι άκρο ευθύγραμμου τμήματος είναι :

39x3 + 180x4 = 837

Όμως από την σχέση (1) 237+2K=837 άρα K=300.

Αν έχουμε 300 ευθύγραμμα τμήματα κόκκινου χρώματος τότε έχουμε 523-300=223 μπλε τμήματα .

American Mathematical Monthly 1972

132.Ο σκύλος κάνοντας 33 βήματα θα έχει διανύσει 99 πόδια , άρα θα χρειαστεί ένα ακόμα βήμα για να φτάσει στο τέλος της διαδρομής. Οπότε χρειάζεται 34 βήματα να πάει και 34 να γυρίσει πίσω, σύνολο 68 βήματα .Η γάτα θα χρειαστεί 50 βήματα για να διανύσει 100 πόδια και άλλα 50 βήματα για να γυρίσει πίσω. Όμως σύμφωνα με το πρόβλημα ο σκύλος κάνει 2 βήματα κάθε 3 βήματα της γάτας .Οπότε όταν η γάτα θα έχει κάνει 100 βήματα ο σκύλος θα έχει κάνει (2/3)100=67 βήματα. Άρα τον αγώνα θα τον κερδίσει η γάτα.

134.Θα χρησιμοποιήσουμε την εις άτοπον αποδεικτική μέθοδο .

Έστω ότι υπάρχει ένα σύνολο 23 ανθρώπων που ικανοποίει τις προϋποθέσεις του προβλήματος (ένας ο διαιτητής και οι υπόλοιποι χωρίζονται σε δυο ομάδες των 11 με ίσο συνολικό βάρος) και δεν έχουν το ίδιο βάρος και οι 23.Τότε, από όλα τα δυνατά σύνολα των 23 ανθρώπων με τις παραπάνω ιδιότητες υπάρχει ένα σύνολο με το μικρότερο δυνατό συνολικό βάρος .

Έστω το σύνολο $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,..,\alpha_{23}$ με ελάχιστο συνολικό σωματικό βάρος Α, δηλαδή

$A=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+..+\alpha_{23}$ όπου $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,..,\alpha_{23}$ τα βάρη των ανθρώπων του συνόλου.

Θα βρούμε τώρα ένα σύνολο 23 ανθρώπων με τις παραπάνω ιδιότητες και βάρος μικρότερο του Α και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Παρατηρούμε ότι, είτε και οι 23 αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,..,\alpha_{23}$ είναι άρτιοι είτε είναι όλοι περιττοί . Διότι ,αν α_1 είναι άρτιος και α_2 είναι περιττός , και επιλέγουμε τον α_1 να είναι ο διαιτητής τότε $A-\alpha_1$ πρέπει αν είναι άρτιος (αφού μπορούμε να τον χωρίσουμε σε δυο ομάδες ίδιου ακέραιου συνολικού βάρος).Ομοίως ,$A-\alpha_2$ πρέπει να είναι άρτιος .Τότε, ο αριθμός (Α-α1)+(Α-α2) είναι άρτιος , αλλά 2Α-(α1+α2) είναι περιττός καθώς $\alpha_1+\alpha_2$ είναι περιττός. Άτοπο .

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη

1) αν όλοι οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,..,\alpha_{23}$ είναι άρτιοι , τους αντικαθιστούμε με τα μισά τους $\alpha_1/2,\alpha_2/2,\ldots,\alpha_{23}/2$ σύνολο το οποίο ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του προβλήματος και έχει βάρος Α/2 μικρότερο του Α ,άτοπο.

2) αν όλοι οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,..,\alpha_{23}$ είναι περιττοί , τους αντικαθιστούμε με τους $(\alpha_1+1)/2,(\alpha_2+1)/2,\ldots,(\alpha_{23}+1)/2$ σύνολο το οποίο ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις και έχει βάρος (Α+23)/2 μικρότερο του Α ,άτοπο.

Άρα και οι 23 άνθρωποι έχουν το ίδιο σωματικό βάρος .

135. Έχει δίκιο. Έστω μια ουρά οποιουδήποτε μήκους και οποιασδήποτε σύνθεσης φύλου, τότε συμβολίζουμε με Α το πλήθος των ανδρών της ουράς που βρίσκονται μπροστά από τον Παπαδόπουλο και Γ το πλήθος των γυναικών της ουράς που βρίσκονται πίσω του. Αρχικά ο Παπαδόπουλος όταν σταθεί στο τέλος της ουράς θα ισχύει Γ=0 και Α>=0.Αν Α=0 θα ισχύει το ζητούμενο. Αν όχι, τότε ο Παπαδόπουλος θα προσπεράσει το άτομο εμπρός του. Αν είναι άνδρας τότε το πλήθος των ανδρών εμπρός του ελαττώνενται κατά 1 και η διαφορά Α-Γ ελαττώνεται κατά 1, αν είναι γυναίκα τότε αυξάνεται το πλήθος των γυναικών πίσω του και η διαφορά Α-Γ επίσης ελαττώνεται κατά 1.Δηλαδη κάθε φορά που ο Παπαδόπουλος προχωρά μια θέση στην ουρά προσπερνώντας το μπροστινό του άτομο η διαφορά Α-Γ ελαττώνεται κατά 1.Ο αριθμός Α-Γ αρχικά ήταν θετικός και συνεχώς θα ελαττώνεται κατά 1- ο Παπαδόπουλος προσπερνά μια- μια τις θέσεις των μπροστινών του ατόμων - μέχρι την χρονική στιγμή θα φτάσει να είναι πρώτος στο γκισέ και ο Α-Γ να γίνει αρνητικός ή μηδέν. Εν κατακλείδι, Η διαφορά Α-Γ είναι θετικός αριθμός και σε κάθε βήμα ελαττώνεται κατά ένα κάποια στιγμή θα γίνει μηδέν δηλαδή Α=Γ , που είναι και το ζητούμενο.

136. Αν είναι και 3 ιταλοί, θα απολυθούν 2 ιταλοί .Αν είναι και οι 2 ιταλοί και ένας Γερμανός, πάλι θα απολυθούν 2 ιταλοί. Αν είναι Ιταλός και 2 Γερμανοί, θα μείνει ο ιταλός και θα απολυθούν δυο γερμανοί. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των Ιταλών αιχμαλώτων είτε θα μειώνεται κατά 2 ή θα παραμείνει ίδιος .

Και στις δυο περιπτώσεις θα είναι πάντα άρτιος .Άρα, δεν μπορεί να παραμείνει ένας ιταλός. Έτσι ,ο άτυχος κρατούμενος θα είναι Γερμανός .

137. Αν συμβολίσουμε με λ: το πλήθος των λιονταριών

τ: το πλήθος των τίγρεων

κ: το πλήθος των κροκοδείλων

Εφόσον ο Παπαδόπουλος αναφέρεται στα θηράματα του στον πληθυντικό τότε λ,μ,τ>1.

Από υπόθεση προκύπτει:

$$\lambda(\tau+\lambda)=120+\kappa \ (1)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το κ:

-Αν κ άρτιος και παράλληλα κ πρώτος τότε κ=2 και η (1) γίνεται:

$$\lambda(\tau+\lambda)=122 \Leftrightarrow \lambda(\tau+\lambda)=2\cdot 61$$

Τότε:

$$\begin{cases}\lambda(\tau+\lambda)=1\cdot 122\\ \acute{\eta}\\ \lambda(\tau+\lambda)=2\cdot 61\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda=1 \ , \ \tau=121 \ , \ \kappa=2 \ \ (\alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\, \delta\iota\acute{o}\tau\iota\, \pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\, \lambda>1)\\ \acute{\eta}\\ \lambda=2 \ , \ \tau=59 \ , \ \kappa=2\,(\alpha\pi o\rho\rho\iota\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ \lambda=\kappa=2,\ \tau\alpha\ \pi\lambda\acute{\eta}\theta\eta\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{o}\lambda\alpha\ \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa o\acute{\iota}\ \alpha\rho\iota\theta\mu o\acute{\iota})\end{cases}$$

-Αν κ περιττός, τότε από (1) το δεύτερο μέλος είναι περιττός άρα και το πρώτο μέλος είναι επίσης περιττός δηλαδή $\tau+\lambda$ και λ είναι περιττοί. Άρα ο τ είναι άρτιος , ο μοναδικός άρτιος πρώτος είναι το 2 οπότε τ=2.Ετσι η (1) παίρνει την μορφή:

$$\lambda(2+\lambda)=\kappa+120 \Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda-120=\kappa \Leftrightarrow (\lambda+12)(\lambda-10)=\kappa$$

Επειδή ο κ είναι πρώτος , σημαίνει ότι $\lambda-10=1$, άρα $\lambda=11$.Άρα για κ περιττό προκύπτει η λύση λ=11, κ=23 και τ=2 .

138. Έστω Β ο αριθμός των μαθητών που έλυσαν το Β

Α ο αριθμός των μαθητών που έλυσαν το Α

ΑΒ ο αριθμός των μαθητών που έλυσαν το Α και το Β

ΓΒ ο αριθμός των μαθητών που έλυσαν το Γ και το Β

ΓΑ ο αριθμός των μαθητών που έλυσαν το Γ και το Α

ΑΒΓ ο αριθμός των μαθητών που έλυσαν το Α και το Β και το Γ

Τότε εφόσον 25 μαθητές έλυσαν <u>τουλάχιστον ένα</u> πρόβλημα ο καθένας θα ισχύει:

$$Α+Β+Γ+ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ+ΑΒΓ=25 \qquad (1)$$

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι ,ο αριθμός των μαθητών που δεν έλυσαν το πρόβλημα Α , έλυσαν όμως το πρόβλημα Β, ήταν διπλάσιος του αριθμού εκείνων που δεν έλυσαν το πρόβλημα Α και έλυσαν το Γ οπότε θα ισχύει:

$$Β+ΒΓ=2(Γ+ΒΓ) \text{ ή } ΒΓ=Β-2Γ \qquad (2)$$

Ο αριθμός των μαθητών που έλυσαν μόνο το Α είναι κατά ένα μεγαλύτερος από τον αριθμό εκείνων που έλυσαν το Α και αλλά προβλήματα δηλαδή:

$$Α-1=ΑΒ+ΑΓ+ΑΒΓ \qquad (3)$$

Από όλους τους μαθητές που έλυσαν μόνο ένα πρόβλημα , οι μισοί δεν έλυσαν το πρόβλημα Α, δηλαδή:

$$Α+Β+Γ=2(Β+Γ) \text{ ή } Α=Β+Γ \qquad (4)$$

Έχουμε το σύστημα :

$Α+Β+Γ+ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ+ΑΒΓ=25$ (1)

$ΒΓ=Β-2Γ$ (2)

$Α-1=ΑΒ+ΑΓ+ΑΒΓ$ (3)

$Α=Β+Γ$ (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη την (1) και την (3) και λαμβάνουμε:

$Α+Β+Γ+ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ+ΑΒΓ + Α-1 =25 + ΑΒ+ΑΓ+ΑΒΓ$ ή $2Α+Β+Γ+ΒΓ=26$ (5)

Πολλαπλασιάζουμε την (2) με το -1 :$-ΒΓ=-Β+2Γ$ (6)

Πολλαπλασιάζουμε την (4) με το -2 :$-2Α=-2Β-2Γ$ (7)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (5) ,(6),(7):

$2Α+Β+Γ+ΒΓ-ΒΓ-2Α=26-Β+2Γ-2Β-2Γ$ ή $4Β+Γ=26$ ή $Γ=26-4Β$ (8)

Αντικαθιστούμε την τιμή του Γ στην (2) :$ΒΓ=Β-2(26-4Β)$ ή $ΒΓ=9Β-52$ (9)

Όμως Β,Γ ,ΒΓ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι ,έτσι από την (8) $Γ \geq 0$ ή $26-4Β \geq 0$ ή $Β \leq 6$ (10)

Και από τη (9) $ΒΓ \geq 0$ ή $9Β-52 \geq 0$ ή $Β \geq \frac{52}{9}$ ή $Β \geq 5.77$ (Β ακέραιος) άρα $Β \geq 6$ (11)

Από (10) και (11) προκύπτει ότι Β=6.

139.Μια προσέγγιση είναι:

X: οι μήνες που πουλούσε 25 αυτοκίνητα μηνιαίως

Y: οι μήνες που πουλούσε 16 αυτοκίνητα μηνιαίως

Y: οι μήνες που πουλούσε 20 αυτοκίνητα μηνιαίως

Ισχύει:

25X+16Y+20Z=225 (1)

X+Y+Z=12 ή X=12-Y-Z

(1): 25(12-Y-Z)+16Y+20Z=225 ή 9Y+5Z=75 ή Y=(75-5Z)/9 ή Y=5(15-Z)/9 Y ακέραιος άρα θα πρέπει 15-Z είναι πολλαπλάσιο του 9 οπότε Z=6 και προκύπτει Y=5 ,X=1

140.

$$A\ \mu\varepsilon\lambda o\varsigma: \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2-2}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-3} =$$

$$\frac{1+3+2\sqrt{3}-2}{1+2+2\sqrt{2}-3} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

Η εξίσωση γίνεται: $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}+\sqrt{6} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$

Προφανείς λύσεις (x,y) είναι τα ζεύγη ακεραίων (2,6) ,(6,2) , θα αποδείξουμε ότι είναι και οι μοναδικές λύσεις .

Υψώνουμε στο τετράγωνο και τα δυο μέλη της (1).

$$\sqrt{2}+\sqrt{6} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \Rightarrow \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \Leftrightarrow 2+6+2\sqrt{12} = x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y} \Leftrightarrow$$

$$8+2\sqrt{12} = x+y+2\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-8 = 2\sqrt{12}-2\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-8 = 2(\sqrt{12}-\sqrt{xy}) \quad (2)$$

Από την σχέση (2) το πρώτο μέλος είναι ακέραιος αριθμός άρα και το δεύτερο μέλος είναι ακέραιος αριθμός όπως θα είναι και το τετράγωνο του ακέραιος αριθμός .

$\left(2(\sqrt{12}-\sqrt{xy})\right)^2 = 4(12+xy+2\sqrt{12}\sqrt{xy}) = 4(12+xy+4\sqrt{3xy}) \in \mathbb{Z}$ από όπου προκύπτει: $\sqrt{3xy} \in \mathbb{Z}$ αυτό σημαίνει όμως ότι ο αριθμός $3xy$ είναι τέλειο τετράγωνο δηλαδή $xy = 3n^2$ έτσι από την (2) έχουμε: $\sqrt{12}-\sqrt{xy} = 2\sqrt{3}-\sqrt{3}n = \left(2-n\right)\sqrt{3}$. Ο αριθμός $\left(2-n\right)\sqrt{3}$ είναι ακέραιος μόνο όταν $n=2$.Άρα

$$\sqrt{12}-\sqrt{xy} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12} = \sqrt{xy} \Leftrightarrow 12 = xy .$$

Η (2) παίρνει την μορφή : $x+y-8=0 \Leftrightarrow x+y=8$

$$12 = xy \overset{x+y=8 \Leftrightarrow y=8-x}{\Leftrightarrow} 12 = x(8-x) \Leftrightarrow x=2 \ , x=6 .$$

Προκύπτει τελικά ότι μοναδικά ζεύγη λύσεων είναι: (2,6) ,(6,2).

141. Αν κ είναι οι κινήσεις που προσθέτουμε 7 στον αριθμητή και λ οι κινήσεις που προσθέτουμε 6 στον παρανομαστή τότε θα πρέπει :

$$\frac{6}{7} = \frac{6+\kappa \cdot 7}{7+\lambda \cdot 6}$$

θα πρέπει ο κ να είναι πολλαπλάσιο του 6 δηλαδή κ=6μ, μ φυσικός , ανάλογα ο λ να είναι πολλαπλάσιο του 7 δηλαδή λ=7π , π φυσικός ,έτσι

$$\frac{6}{7} = \frac{6+6\mu \cdot 7}{7+7\pi \cdot 6} \Leftrightarrow \frac{6}{7} = \frac{6(1+\mu \cdot 7)}{7(1+\pi \cdot 6)}$$

Θα πρέπει : $\frac{(1+\mu \cdot 7)}{(1+\pi \cdot 6)} = 1 \Leftrightarrow 1+\mu \cdot 7 = 1+\pi \cdot 6 \Leftrightarrow \mu \cdot 7 = \pi \cdot 6$

οι μικρότερες τιμές των φυσικών μ ,π που ικανοποιούν την (1) είναι : μ=6. π=7.

Έτσι , $\kappa = 6 \cdot 6 = 36, \lambda = 7 \cdot 7 = 49$ άρα ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων είναι κ+λ=36+49=85 κινήσεις .

142. Αν χ είναι ο αριθμός που μένει ο μαθηματικός Β , τότε ο χ είναι φυσικός θετικός αριθμός και αν Γ το γινόμενο των ψηφίων του θα ικανοποιείται η εξίσωση:

$$\Gamma + 22 = x^2 - 10x \Leftrightarrow \Gamma = x^2 - 10x - 22$$

Ισχύει $\Gamma \geq 0 \Rightarrow x^2 - 10x - 22 \geq 0 \Leftrightarrow ... \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x \geq 5 + \sqrt{47} > 11$ (2)

Θα δείξουμε τώρα ότι το γινόμενο των ψηφίων ενός αριθμού δεν είναι μεγαλύτερο από τον ίδιο τον αριθμό.

Έστω $x = \overline{a_1 a_2 ... a_\nu} = a_1 10^{\nu-1} + a_2 10^{\nu-2} + ... + a_\nu 10^0 = a_1 10^{\nu-1} + a_2 10^{\nu-2} + ... + a_\nu$

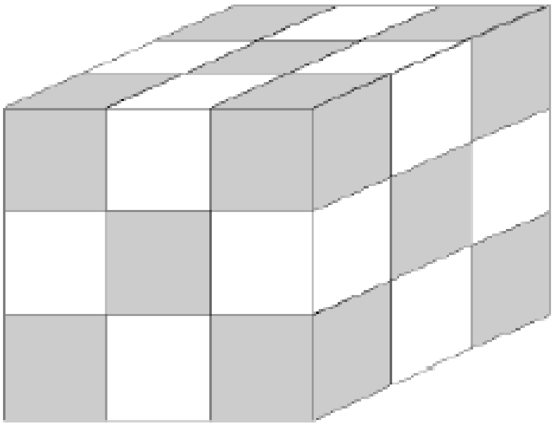
Για το γινόμενο των ψηφίων του χ ,έχουμε:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_\nu \leq a_1 \cdot 9^{\nu-1} \leq a_1 10^{\nu-1} + a_2 10^{\nu-2} + ... + a_\nu 10^0$$

Άρα προκύπτει $x^2 - 10x - 22 \leq x \Leftrightarrow .... \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x \leq \frac{11}{2} + \frac{\sqrt{209}}{2} < 13$ (2)

Από (1) ,(2) προκύπτει: $11 < x < 13 \overset{x \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} x = 12$

143. Χρωματίζουμε τους κύβους του τυριού έτσι ώστε κάθε δυο κύβοι που έχουν κοινή έδρα έχουν διαφορετικά χρώματα (άσπρο-μαύρο) .Τους τέσσερεις γωνιακούς μικρούς κύβους τους χρωματίζουμε μαύρους .(βλέπε σχήμα). Ο ποντικός πρέπει να διασχίσει 27 κύβους ξεκινώντας από ένα μαύρο κύβο και το χρώμα στην διαδρομή του θα εναλλάσσεται διαδοχικά (μαύρο-άσπρο-μαύρο….) .Ο 27 είναι περιττός αριθμός άρα θα καταλήξει σε μαύρο κύβο ,αλλά ο κύβος στο κέντρο του τυριού είναι άσπρος , κατά συνέπεια είναι αδύνατη η διαδρομή που ζητείται από το πρόβλημα.



144.

Χωρίζουμε την ώρα από 5 μέχρι 6 σε πεντάλεπτα (1/12),έστω χ και y οι ώρες άφιξης των δυο μονομάχων.Για να συναντήθουν οι δυο μονομάχοι θα πρέπει χ,y να διαφέρουν λιγότερο από 1/12.

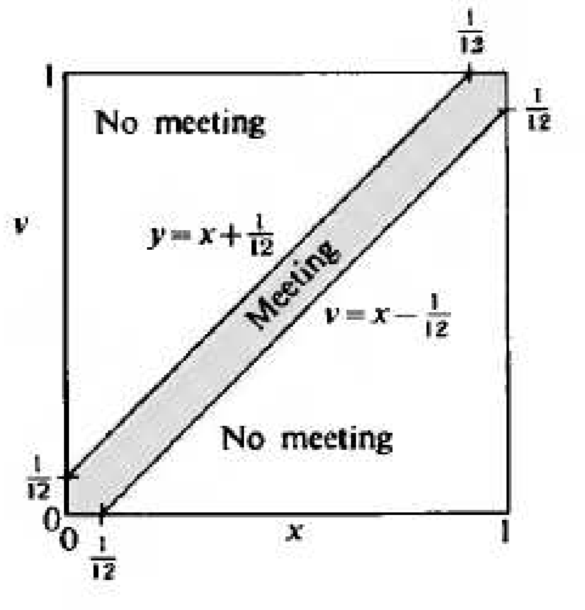
Δηλαδη:

$$|x-y|<\frac{1}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{12}<x-y<\frac{1}{12} \Leftrightarrow x-\frac{1}{12}<y<x+\frac{1}{12}$$

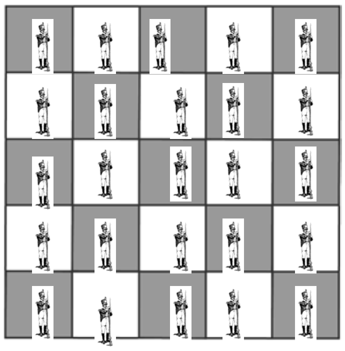
Παρατηρωντας το σχήμα ,διαπιστώνουμε, ότι οι δυο μονομάχοι συναντώνται και μονομαχούν μόνο όταν (χ,y) ανήκει στο γραμμοσκιασμενο χωριο μεταξύ των ευθειών y=x+1/12, y=x-1/12.

Το εμβαδό του τετράγωνου πλην του γραμμοσκιασμένου τμήματος είναι $(11)^2=121$

Αρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 1-121/144=23/144. Περίπου 15,97%.



145.



•Είναι αδύνατο για τον Παπαδόπουλο να βρει λύση στο πρόβλημα. Χρωματίζουμε το 5x5 τετραγωνικό συγκρότημα με το συνήθη χρωματισμό της σκακιέρας όπως στο διπλανό σχήμα. Έχουμε 13 μαύρα και 12 λευκά τετράγωνα συνεπώς κάθε αξιωματικός μετά τη μεταφορά θα βρεθεί από δωμάτιο που είναι χρωματισμένο μαύρο σε δωμάτιο που είναι χρωματισμένο λευκό. Όμως μία τέτοια τοποθέτηση και των 25 αξιωματικών, δεν είναι δυνατή καθώς δεν υπάρχουν 13 λευκά διαμερίσματα.

- Έστω X , το pin του Παπαδόπουλου, X τετραψήφιος θετικός αριθμός ,τότε από υπόθεση έχουμε:

$X = 131\kappa + 112 = 132p + 98$ κ,p θετικοί ακέραιοι αριθμοί

Ο X είναι τετραψήφιος ακέραιος άρα:

$$1000 \le X \le 9999 \Leftrightarrow 1000 \le 132p + 98 \le 9999 \Leftrightarrow$$
$$902 \le 132p \le 9901 \Leftrightarrow \frac{902}{132} \le p \le \frac{9901}{132} \Leftrightarrow 6.83 \le p \le 75.007 \overset{p\in\mathbb{Z}^*}{\Rightarrow} 7 \le p \le 75(1)$$

$$131\kappa + 112 = 132p + 98 \Leftrightarrow 131\kappa - 131p = p + 98 - 112 \Leftrightarrow 131(\kappa - p) = p - 14 \ (2)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το γινόμενο του πρώτου μέλους.

- $\kappa - p \ne 0 \Leftrightarrow \kappa \ne p$ τότε ,αν πάρουμε απόλυτη τιμή και στα δυο μέλη της (2)

$$131|\kappa - p| = |p-14| \overset{|\kappa-p|>0}{\underset{|\kappa-p|\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow}} |p-14| \geq 131 \Leftrightarrow \begin{cases} p-14 \geq 131 \\ \acute{\eta} \\ p-14 \leq -131 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \geq 145 \\ \acute{\eta} \\ p \leq -117 \end{cases}$$

Άτοπο, διότι από την (1) $7 \leq p \leq 75$.

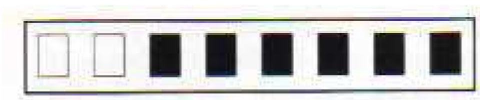
- $\kappa - p = 0$ τότε η σχέση (2) γίνεται: $p-14=0 \Leftrightarrow p=14$ και ισχύει $X = 132 \cdot 14 + 98 = 1946$

Άρα το pin του Παπαδόπουλου είναι 1946.

Δείτε και τον παρακάτω σύνδεσμο για περισσότερα προβλήματα που επιλύονται με χρωματισμό

http://www.slideshare.net/gdoubos/ss-33652426

146.Η απάντηση παρουσιάζεται στο σχήμα.



Τα παράθυρα κάθε ορόφου του κτιρίου πρέπει να διαβαστούν ως ένα γράμμα του αλφαβήτου Μορς. Ένα μοναδικό φωτισμένο παράθυρο είναι μια τελεία και δυο διαδοχικά φωτισμένα παράθυρα συμβολίζουν μια παύλα. Τα γράμματα από την κορυφή προς τα κάτω σχηματίζουν το όνομα Thomas Alfa Edison.

147.Αν πραγματοποιήθηκαν συνολικά κ γύροι , τότε $\kappa \geq 2$, τότε $\kappa(p+q+r)=39$

Επειδή, 0<p<q<r, (οι μικρότερες δυνατές τιμές θα ήταν p=1,q=2,r=3)συμπαιραινουμε ότι $p+q+r \geq 6$ και αφού και ο 39 έχει μοναδικούς πρώτους διαιρέτες τους 3 και 13 , θα είναι κ=3 και $p+q+r=13$

Συμβολίζουμε με a_i, β_i, γ_i τις καραμέλες που πήραν οι Αντώνης ,Βασίλης ,Γιώργος αντιστοίχως , κατά τον i γύρο και δημιουργούμε τον επόμενο πίνακα

Γύρος	Αντώνης	Βασίλης	Γιώργος	Σύνολο
1	a_1	β_1	γ_1	13
2	a_2	β_2	γ_2	13
3	a_3	r	γ_3	13
Σύνολο	20	10	9	39

Προφανώς $a_3 \neq r$, θα είναι $a_1 + a_2 + a_3 \leq 2r + q$, οπότε

$20 \le 2r+q$ ή $20 \le 2r+(13-q-p)$ ή $r-p \ge 7$ ή $r \ge p+7 \ge 8$ ή $r \ge 8$ (1) ($p \ge 1$)

Επίσης, $\beta_1+\beta_2+r \ge 2p+r$,οπότε $10 \ge 2p+r \Leftrightarrow r \le 10-2p \le 8$ ή $r \le 8$ (2) ($p \ge 1$)

Από (1) ,(2) $r=8$.Από την $10 \ge 2p+r$ προκύπτει $p \le 1$ αλλά ταυτόχρονα $p \ge 1$ έτσι $p=1$.

$p+q+r=13 \Leftrightarrow q=13-1-8=4$

Οπότε ο παραπάνω πίνακας γίνεται:

Γύρος	Αντώνης	Βασίλης	Γιώργος
1	8	1	4
2	8	1	4
3	4	8	1

Άρα το ερώτημα του προβλήματος αφορά το Γιώργο.

148.Σχεδιάζουμε σε ένα πινάκα όλες τις δυνατές περιπτώσεις :

Περίπτωση	μηχανικός	καπετάνιος	σερβιτόρος
I	Αντωνίου	Βασιλείου	Γεωργίου
II	Αντωνίου	Γεωργίου	Βασιλείου
III	Βασιλείου	Αντωνίου	Γεωργίου
IV	Βασιλείου	Γεωργίου	Αντωνίου
V	Γεωργίου	Αντωνίου	Βασιλείου
VI	Γεωργίου	Βασιλείου	Αντωνίου

Σύμφωνα με το δεδομένο 6) <u>ο σερβιτόρος δεν λέγεται Γεωργίου</u> . Άρα αποκλείονται οι περιπτώσεις I) και III) .

Από τα δεδομένα 1) και 3) <u>ο καπετάνιος δεν λέγεται Αντωνίου</u>. Άρα αποκλείουμε τις περιπτώσεις III) και V) .

Από τα δεδομένα 3) ,4),5) και 2) ο <u>καπετάνιος δεν λέγεται Γεωργίου</u> , επειδή ο αριθμός 2800 δεν διαιρείται ακριβώς με το 3.Αρα αποκλείονται και οι περιπτώσεις II) και IV).Συνεπώς <u>το όνομα του καπετάνιου είναι Βασιλείου</u> .

Μας απομένουν να ελέγξουμε τις περιπτώσεις I)και VI).

Γνωρίζουμε ότι ο επιβάτης <u>Αντωνίου μένει στην Αθήνα</u>.

Γνωρίζουμε ότι <u>ο επιβάτης Βασιλείου μένει στην Σάμο</u> (αφού έχει το ίδιο όνομα με τον καπετάνιο). Άρα ο <u>επιβάτης Γεωργίου μένει σε κάποιο νησί μεταξύ Αθήνας και Σάμου</u> .

Κατασκευάζουμε δυο πινάκες με τα ονόματα των επιβατών και των ναυτικών .

Ναυτικός	Αντωνίου	Βασιλείου	Γεωργίου
Μηχανικός			Ναι
καπετάνιος		Ναι	
Σερβιτόρος	Ναι		

Επιβάτης	Αντωνίου	Βασιλείου	Γεωργίου
Αθήνα	Ναι		
Σάμος		Ναι	
Ενδιάμεσο νησί			Ναι

Οι παραπάνω επιλογές είναι οι μοναδικές που ικανοποιούν πλήρως όλες τις απαιτήσεις του προβλήματος .Άρα ο μηχανικός είναι ο Γεωργίου .

149. Όταν ο Α έβγαλε από το κουτί του δυο μαύρες σφαίρες κατάλαβε ότι οι επιλογές του περιορίζονταν ή στις τρεις μαύρες (ΜΜΜ) ή στις δυο μαύρες και η μια άσπρη (ΑΜΜ) . Εφόσον μπόρεσε να καταλάβει τι περιείχε το κουτί του σίγουρα η ετικέτα στο κουτί του έγραφε έναν από τους δυο συνδυασμούς ΜΜΜ,ΑΜΜ οπότε επέλεξε τον άλλο. Θυμίζουμε ότι κάθε ετικέτα είναι τοποθετημένη λανθασμένα.

Όμοια σκεπτόμαστε για τον Β θα πρέπει το κουτί του να περιείχε είτε μια άσπρη και δυο μαύρες (ΑΜΜ) είτε δυο άσπρες και μια μαύρη (ΑΜΑ) και η ετικέτα του κουτιού του θα έγραφε είτε ΑΜΑ είτε ΑΜΜ.Το κουτί του Γ πρέπει να περιείχε είτε τρεις άσπρες (ΑΑΑ) είτε δυο άσπρες και μια μαύρη (ΑΜΑ) αλλά η ετικέτα στο κουτί του δεν τον βοήθησε να καταλάβει το περιεχόμενο .Κατά συνέπεια στο κουτί η ετικέτα σίγουρα δεν έγραφε: ΑΑΑ η ΑΜΑ.

Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω στοιχεία η μοναδική διάταξη ετικετών(όλες οι άλλες καταλήγουν σε άτοπο) , σφαιρών που τα ικανοποίει είναι :

		Ετικέτα	Σφαίρες
Παίκτης	Α	ΑΜΜ	ΜΜΜ
Παίκτης	Β	ΑΜΑ	ΑΜΜ
Παίκτης	Γ	ΜΜΜ	;
Παίκτης	Δ		

Ο τέταρτος παίκτης αντιλήφτηκε από τα παραπάνω ότι στο κουτί του ότι η ετικέτα έγραφε ΑΑΑ (τρεις άσπρες) , επειδή όμως δεν θα μπορούσε να περιέχει τρεις άσπρες στο κουτί του τότε αυτός ο συνδυασμός σφαιρών βρισκόταν στο κουτί του Γ .Άρα στο κουτί του Δ υπάρχουν(ΑΜΑ) δυο άσπρες και μια μαύρη.

150.Αν ο καθένας από τους δυο υπόδικους προσπαθούσε να μαντέψει στην τύχη υπάρχει μια πιθανότητα 1/4 να μαντέψουν σωστά το χρώμα της σφαίρας που έχει ο άλλος και να φυλακιστούν. Υπάρχει όμως μια στρατηγική η οποία θα τους επιτρέψει να φύγουν ελεύθεροι από το δικαστήριο.

Αρκεί ο ένας στην πρόβλεψη του, να ανακοινώσει το χρώμα που έχει η σφαίρα του και ο άλλος να ανακοινώσει το αντίθετο από αυτό που έχει .Με αυτό τον τρόπο σίγουρα θα κερδίσουν. Ας το δούμε αναλυτικά.

-Ο Α έχει άσπρη σφαίρα και ο Β μαύρη: ανακοινώνουν ο Α άσπρη και ο Β άσπρη άρα κερδίζουν.

-Ο Α έχει άσπρη σφαίρα και ο Β άσπρη : ανακοινώνουν ο Α άσπρη και ο Β μαύρη άρα κερδίζουν.

-Ο Α έχει μαύρη σφαίρα και ο Β άσπρη : ανακοινώνουν ο Α μαύρη και ο Β μαύρη άρα κερδίζουν.

-Ο Α έχει μαύρη σφαίρα και ο Β μαύρη : ανακοινώνουν ο Α μαύρη και ο Β άσπρη άρα κερδίζουν.

Η συγκεκριμένη στρατηγική ‘δουλεύει’ πάντα διότι:

Ο παίκτης Α ανακοινώνει το χρώμα της σφαίρας που έχει άρα ο παίκτης Α μαντεύει σωστά αν μόνο αν και οι δυο έχουν σφαίρες με το ίδιο χρώμα.

Ο παίκτης Β ανακοινώνει το αντίθετο από το χρώμα της σφαίρας που έχει άρα ο παίκτης Β μαντεύει σωστά αν μόνο αν και οι δυο έχουν σφαίρες με διαφορετικό χρώμα.

Οπότε αποκλείεται και οι δυο παίκτες να μαντέψουν σωστά .

Το μόνο που μένει είναι, πριν τους κλείσουν στα κελιά να συμφωνήσουν ποιος θα ανακοινώσει το χρώμα της σφαίρας του και ποιος θα πει το αντίθετο χρώμα από αυτό που έχει

151. Αν υποθέσουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι: $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8\alpha_9$.Από υπόθεση άμεσα συμπεραίνουμε ότι $\alpha_5 = 5$ (ο $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ είναι πολλαπλάσιο του 5 και ο αριθμός δεν περιέχει το 0) και οι αριθμοί $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$ είναι άρτιοι. Αν οι αριθμοί $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, και $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$ είναι πολλαπλάσια του 3 θα ισχύει $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ είναι πολλαπλάσιο του 3 καθώς επίσης και ο $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = \alpha_4 + 5 + \alpha_6$ να είναι πολλαπλάσιο του 3.Οποτε:

$\alpha_4\alpha_5\alpha_6 = \alpha_4 5\alpha_6$ και οι δυνατές επιλογές είναι: $\alpha_4 5\alpha_6 = \begin{cases} 258 \\ ή \\ 654 \\ ή \\ 852 \\ ή \\ 456 \end{cases}$

Οι τιμές 852 και 456 απορρίπτονται διότι ο α_3 είναι περιττός και κανένα πολλαπλάσιο του 4 δεν τελειώνει σε αριθμό της μορφής $\alpha_3 8$ ή $\alpha_3 5$ με α_3 περιττό και προφανώς $\alpha_3 \neq 5$.

Οπότε απομένουν δυο επιλογές για το $\alpha_4\alpha_5\alpha_6$ οι $258, 654$.

-Αν $\alpha_4\alpha_5\alpha_6 = 258$ τότε έχουμε τις έξης επιλογές για το ζητούμενο αριθμό:

147<u>258</u>369

147<u>258</u>963

741<u>258</u>369

741<u>258</u>963

369<u>258</u>147

369<u>258</u>741

963<u>258</u>147

963<u>258</u>741

Όμως όλοι οι αριθμοί που περιχούν 836,814 ή 874 δεν ικανοποιούν την συνθήκη ο $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8$ να διαιρείται με το 8 ενώ οι υπόλοιποι αριθμοί δεν ικανοποιούν την συνθήκη ο $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7$ να διαιρείται με το 7.

Άρα η μόνη επιλογή είναι αριθμοί της μορφής $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 654\alpha_7\alpha_8\alpha_9$. Για να διαιρείται ο αριθμός $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 654\alpha_7\alpha_8$ με το 8 πρέπει να είναι της μορφής $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 654\alpha_7 2$ και ο α_7 είναι είτε 3 είτε 7 άρα έχουμε τους έξης πιθανούς αριθμούς :

987654321

789654321

381654729

183654729

981654327

189654327

981654723

189654723

Μόνο όμως ο ένας αριθμός από αυτούς ο 381654729 διαιρείται με το 7 , οπότε είναι και η λύση.

Υπενθύμιση:

-Με το 4 διαιρούνται οι αριθμοί που τα δυο τελευταία τους ψηφία διαιρούνται με το 4

ή είναι 00

-Με το 8 διαιρούνται οι αριθμοί που το τελευταίο τριψήφιο τμήμα τους διαιρείται με το 8, ή είναι 000.

-Με το 3 διαιρούνται οι αριθμοί που το άθροισμα των ψηφίων τους διαιρείται με το 3

152.Για να λύσουμε το πρόβλημα πρέπει πρώτα να γράψουμε όλα τα γινόμενα τριών ακεραίων αριθμών που δίνουν αποτέλεσμα 36. Δίπλα σε κάθε γινόμενο γράφουμε το άθροισμα των τριών αριθμών:

ΗΛΙΚΙΕΣ	ΓΙΝΟΜΕΝΟ	ΑΘΡΟΙΣΜΑ
1, 1, 36	36	38
1, 2, 18	36	21
1, 3, 12	36	16
1, 4, 9	36	14
1, 6, 6	36	13
2, 2, 9	36	13
2, 3, 6	36	11
3, 3, 4	36	10

Το άθροισμα των ηλικιών τους και ο αριθμός του σπιτιού της πρέπει να είναι ο αριθμός 13. Αυτό γιατί το 13 είναι το άθροισμα δύο διαφορετικών γινομένων, ενώ σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση ο απογραφέας κοιτώντας τον αριθμό του σπιτιού της θα μπορούσε να βρει τις ηλικίες που αντιστοιχούν στο άθροισμα αυτό. Εκείνος όμως είπε πως δεν του φτάνουν αυτά τα στοιχεία. Μόλις όμως η κυρία του είπε πως η μεγάλη της κόρη δίνει πανελλήνιες , κατάλαβε πως οι ηλικίες τους είναι 2, 2 και 9 χρονών, γιατί η εναλλακτική περίπτωση των 1, 6 και 6 χρονών, προϋποθέτει πως οι δύο μεγαλύτερες κόρες της είναι δίδυμες.

153.

• Οι αριθμοί Α,Β,Γ είναι μονοψήφιοι θετικοί ακέραιοι με Α και Β διαφόρους του μηδέν (δεν υπάρχει χιλιομετρικός δείκτης 08 χλμ). Εφόσον η ταχύτητα είναι σταθερή τότε η απόσταση ανάμεσα στην πρώτη πινακίδα και την δεύτερη είναι ιση με την απόσταση από την δεύτερη πινακίδα στην τρίτη .Δηλαδή:

$$\mathrm{BA}-\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma B}-\mathrm{BA}\Leftrightarrow 10\mathrm{B}+\mathrm{A}-(10\mathrm{A}+\mathrm{B})=100\mathrm{A}+10\Gamma+\mathrm{B}-(10\mathrm{B}+\mathrm{A})\Leftrightarrow$$

$$18\mathrm{B}-108\mathrm{A}=10\Gamma\Leftrightarrow 9\mathrm{B}-54\mathrm{A}=5\Gamma\Leftrightarrow 9(\mathrm{B}-6\mathrm{A})=5\Gamma\Leftrightarrow \mathrm{B}-6\mathrm{A}=\frac{5\Gamma}{9}$$

Ο Β-6Α ακέραιος άρα Γ είναι πολλαπλάσιο του 9.(όμως Α,Β,Γ είναι μονοψήφιοι θετικοί ακέραιοι), οπότε Γ=9 ή Γ=0 .

Αν Γ=9, τότε

$\mathrm{B}-6\mathrm{A}=5$,τότε θα πρέπει Α=0(αν Α>0 , τότε Β>9, άτοπο) και το Β=5.Αυτη η λυση απορρίπτεται .($\mathrm{A}\neq 0$)

Αν Γ=0, τότε $\mathrm{B}=6\mathrm{A}$ οπότε Α=1 και Β=6.Αρα ΑΒ=16,ΒΑ=61 και ΑΓΒ=106

Η ταχύτητα του ποδηλάτου ήταν (61-16)/1=45 χλμ ανά ώρα.

• Έστω $a=\overline{XYZ\Omega\Omega}$ ο αριθμός που είναι τέλειο τετράγωνο , τότε Ω είναι σίγουρα ένας από τους αριθμούς 0,1,4,5,6,9.

Ισχύει:

$a=\overline{XYZ\Omega\Omega}=100\overline{XYZ}+11\Omega=(100\overline{XYZ}+8)+3\Omega=4((25\overline{XYZ}+2)+3\Omega=\pi o\lambda 4+3\Omega$ (1) (πολ4 : πολλαπλάσιο του 4)

Αρχικά, Θα δείξουμε ότι κάθε τέλειο τετράγωνο γράφεται στην μορφή $4\mathrm{M}$ ή 4Μ+1 ,Μ θετικός ακέραιος.

-Αν ο αριθμός είναι άρτιος τότε $(2\kappa)^2=4\kappa^2=4\mathrm{M}$.(*)

-Αν ο αριθμός είναι περιττός τότε $(2\kappa+1)^2=4\kappa^2+4\kappa+1=4(\kappa^2+\kappa)+1=4\mathrm{M}+1$.

Οπότε ο $a=\pi o\lambda 4+3\Omega$ είναι της μορφής $4\mathrm{M}$ ή $4\mathrm{M}+1$

Δεδομένου ότι ο Ω είναι 0,1,4,5,6,9 προκύπτει ότι $\Omega=4$ ή $\Omega=0$.

-Αν $\Omega=0$,τότε $a=100\overline{XYZ}$ είναι τέλειο τετράγωνο όταν $\overline{XYZ}$ είναι τέλειο τετράγωνο .Οπότε ο $\overline{XYZ}$ ανήκει στο $\{10^2,11^2,12^2,.....,31^2\}$.Συνολικά 22 αριθμοί.

-Αν $\Omega=4$, τότε $\alpha=\overline{XYZ44}=100\overline{XYZ}+44=\beta^2$.Άρα (*) $\beta=2\kappa$ και

$$100\overline{XYZ}+44=\beta^2\Leftrightarrow 100\overline{XYZ}=\beta^2-44\Leftrightarrow \overline{XYZ}=\frac{(2\kappa)^2-44}{100}\Leftrightarrow \overline{XYZ}=\frac{\kappa^2-11}{25}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

-Αν $\kappa=5\theta$ τότε $\overline{XYZ}=\dfrac{(5\theta)^2-11}{25}=\dfrac{25\theta^2-11}{25}=\theta^2-\dfrac{11}{25}\notin\mathbb{N}$, άτοπο

-Αν $\kappa=5\theta+1$ τότε $\overline{XYZ}=\dfrac{(5\theta+1)^2-11}{25}=\dfrac{25\theta^2+10\theta+1-11}{25}=\theta^2+\dfrac{2(\theta-1)}{5}$

Οπότε θ ανήκει στο $\{11,16,21,26,31\}$ και συνεπώς έχουμε άλλες 5 λύσεις .

-Αν $\kappa = 5\theta + 2$ τότε $\overline{XYZ} = \frac{(5\theta+2)^2 - 11}{25} = \theta^2 + \frac{20\theta - 7}{5} \notin \mathbb{N}$, άτοπο

-Αν $\kappa = 5\theta + 3$ τότε $\overline{XYZ} = \frac{(5\theta+3)^2 - 11}{25} = \theta^2 + \frac{30\theta - 2}{5} \notin \mathbb{N}$, άτοπο

-Αν $\kappa = 5\theta + 4$ τότε $\overline{XYZ} = \frac{(5\theta+4)^2 - 11}{25} = \theta^2 + \frac{8\theta + 1}{5} = \theta^2 + \theta + \frac{3\theta + 1}{5}$,

Οπότε $\theta = \pi o\lambda 5 + 3$, δηλαδή θ ανήκει στο $\{13,18,23,28\}$

Οπότε συνολικά υπάρχουν 22+5+4=31 αριθμοί.

154.Ο Polya, το χειρίζεται ως εξής:

Αναζητούμε τρεις ακεραίους x,y,z έτσι ώστε χ+y+z =9 και $1 \le x < y < z$

Μετά από διερεύνηση-ένας πλάγιος τρόπος να πούμε ότι κάνουμε δόκιμες- βρίσκουμε τρεις μόνο λύσεις (δηλαδή υπάρχουν τρεις μόνο τρόποι για να κατανείμουμε το ποσό των 9 δολαρίων).

1+2+6=9

1+3+5=9

2+3+4=9

Όμως και ανά είδος αγοράς το άθροισμα είναι 9 δολάρια, έτσι με αυτές τις γραμμές σχηματίζουμε ένα τετράγωνο που οι στήλες του έχουν άθροισμα 9 .

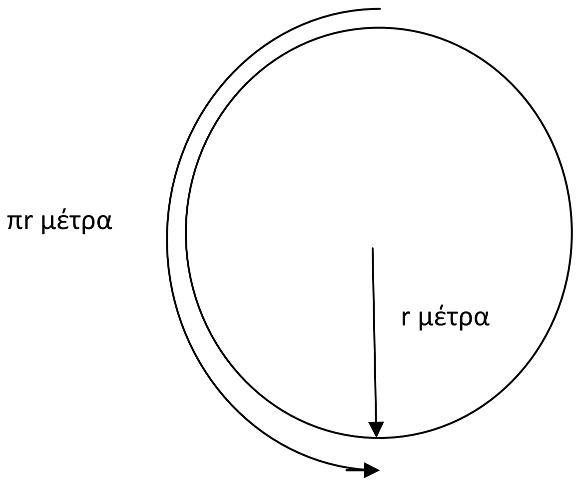
Εκτός από τις εναλλαγές μεταξύ των γραμμών ή εναλλαγές μεταξύ των στηλών (παραλείπουμε δηλαδή τις συμμετρίες)υπάρχει μόνο ένας τρόπος διευθέτησης των αριθμών σε τετράγωνο με άθροισμα κάθε στήλης και κάθε γραμμής 9,ο ακόλουθος:

6	2	1	
2	4	3	χρήματα ανά παιδί
1	3	5	

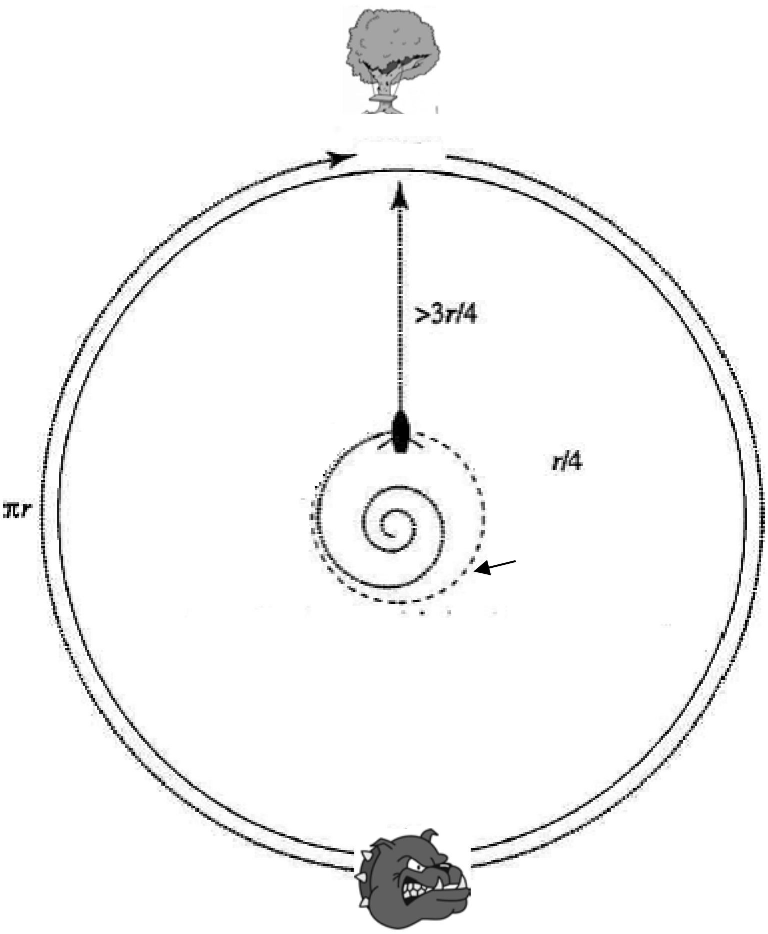
Χρήματα ανά είδος

Από υπόθεση ,εφόσον το 6 είναι ο μεγαλύτερος αριθμός του τετραγώνου η πρώτη γραμμή αντιστοιχεί στον Αλέκο και η πρώτη στήλη στα παγωτά. Ο μόνος αριθμός του τετραγώνου ο οποίος είναι διπλάσιος αριθμού της ίδιας γραμμής είναι το 4.Αρα , η δεύτερη γραμμή αντιστοιχεί στον Βασίλη και η δεύτερη στήλη στα σάντουιτς. Επομένως ο Γιάννης πλήρωσε για αναψυκτικά τον αριθμό που αποτελεί την τομή της τελευταίας γραμμής με την τελευταία στήλη ,δηλαδή πέντε δολάρια.

•Όταν ο Αλέκος βρίσκεται στο κέντρο της κυκλικής λίμνης και δοκιμάσει να κινηθεί προς την όχθη στην αντίθετη κατεύθυνση από το σκύλο, θα πρέπει να διανύσει κωπηλατώντας απόσταση ίση με την ακτίνα r του κύκλου, ενώ ο σκύλος θα πρέπει να διανύσει για να φτάσει στο ίδιο σημείο της όχθης απόσταση ίση με το ημικύκλιο της συνολικής όχθης της λίμνης δηλαδή πr μέτρα .Αν η ταχύτητα του Αλέκου είναι u μέτρα το λεπτό τότε θα χρειαστούν r/u λεπτά για γα φτάσει στην όχθη. Όμως η ταχύτητα του σκύλου είναι 4 φορές περισσότερη από την ταχύτητα της βάρκας δηλαδή 4u μέτρα το λεπτό θα χρειαστεί πr/4u λεπτά για να φτάσει στο ίδιο σημείο της όχθης . Προφανώς r/u > πr/4u, το σχέδιο του Αλέκου δεν θα δουλέψει.



Ας υποθέσουμε ότι ο Αλέκος αποφασίζει να κάνει ένα μικρό κύκλο γύρω από τον εαυτό με ακτίνα μόλις μερικά μέτρα , τότε ο σκύλος θα τον ακολουθει παράλληλα κατά μήκος της όχθης . Αν ο Αλέκος αποφασίσει να κάνει ένα κυκλο με ακτίνα r/4 τότε θα διανύσει μια απόσταση πr/2 μέτρα και θα απαιτηθεί χρόνος πr/2u λεπτά , την ίδια στιγμή ο σκύλος θα κάνει ένα κύκλο 2πr μέτρων και θα απαιτηθούν επίσης πρ/2u λεπτά . Μπορεί ο σκύλος να τον ακολουθεί κατά μήκος της όχθης .Αν ο κύκλος που κάνει ο Αλέκος μικρύνει έστω και λίγο τότε θα αποκτήσει προβάδισμα έναντι του σκύλου. Άρα θα κάνει κύκλους με ακτίνα ελάχιστα πιο μικρή από το r/4 ,θα αποκτήσει έναντι του σκύλου προβάδισμα και κάποια στιγμή θα βρεθούν οι ακτίνες των τροχιών τους να σχηματίζουν 180^o γωνία (βλέπε σχήμα) , εκείνη ακριβώς την στιγμή θα κινηθεί προς την όχθη και θα τα καταφέρει.



155. Μια τέτοια διάταξη των 11 ποδοσφαιριστών είναι αδύνατη. Εξηγούμαι.Το 2 είναι πρώτος αριθμός , αλλά , εκ των πραγμάτων δεν μπορούμε να το έχουμε ως άθροισμα δυο διαφορετικών θετικών ακεραίων αριθμών .Κατά συνέπεια, θέλουμε τα αθροίσματα να είναι περιττοί πρώτοι. Αφού όμως είναι περιττοί θα πρέπει να σχηματίζονται από ένα άρτιο και έναν περιττό . Δηλαδή αν υπάρχει η ζητούμενη τοποθέτηση των ποδοσφαιριστών θα πρέπει να έχει την μορφή περιττός, άρτιος, περιττός ,…..Κατι τέτοιο είναι αδύνατον καθώς το 11 είναι περιττός και έχουμε περισσότερους περιττούς από ότι άρτιους .

Μοιραία σε κάποιο σημείο θα έχουμε περιττός ,περιττός (αρχή περιστεροφωλιάς).

Αν οι ποδοσφαιριστές είναι 16 ,τότε ,υπάρχει διάταξη τους σε κύκλο που να ικανοποίει τις παραπάνω προϋποθέσεις .Για παράδειγμα η:

1,16,3,14,5,12,7,10,9,8,11,6,13,4,15,2

(το μοτίβο των αθροισμάτων δίνει και τον τρόπο δημιουργίας της διάταξης .)

156. Η δήλωση στο 1^{o} είναι ψευδής διότι αντίθετη στην αρχική υπόθεση. Η δήλωση στο 2^{o} δεν μπορεί να είναι αληθής διότι τότε θα ήταν αληθής και η δήλωση στο 3^{o} .Όμως αν είναι ψευδείς οι δηλώσεις στο 1^{o} και στο 2 τότε σίγουρα και η δήλωση στο 3^{o} είναι ψευδής και από αυτό προκύπτει ότι και η δήλωση στο 4^{o} ταμπελάκι είναι ψευδής. Η δήλωση στο 5^o ταμπελάκι είναι αληθής και κατ επέκταση η δήλωση στο 6^o είναι ψευδής. Άρα το ζητούμενο ταμπελάκι είναι το 5^o .

157. Αν $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ ο αριθμός τότε ισχύει: $9\cdot\overline{\alpha\beta\gamma\delta}=\overline{\delta\gamma\beta\alpha}$,διακρίνουμε περιπτώσεις για το α.

Αν το α είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2 ο πολλαπλασιασμός του με το 9 αυξάνει το πλήθος των ψηφίων ,άρα α=1 και ο ζητούμενος αριθμός είναι $\overline{1\beta\gamma\delta}$.Η σχέση (1) γίνεται:

$$9\cdot\overline{1\beta\gamma\delta}=\overline{\delta\gamma\beta 1}\Rightarrow 9\cdot\overline{1\beta\gamma 9}=\overline{9\gamma\beta 1}\Leftrightarrow 9\cdot(1000+100\beta+10\gamma+9)=9\cdot 1000+100\gamma+10\beta+1\Leftrightarrow$$
$$9000+900\beta+90\gamma+81=9\cdot 1000+100\gamma+10\beta+1\Leftrightarrow 900\beta+90\gamma+80=100\gamma+10\beta\Leftrightarrow$$
$$90\beta+9\gamma+8=10\gamma+\beta\Leftrightarrow 89\beta+8=\gamma\ (2)$$

Όμως α,β,γ,δ είναι μονοψήφιοι φυσικοί αριθμοί και για να ισχύει η (2) θα πρέπει $\beta=0$.Οπότε προκύπτει $\gamma=8$.Ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 1089 .

Πραγματικά $9\cdot 1089=9801$.

158. Εφόσον κάθε μεγάλος αναπτήρας κοστίζει όσο δυο μικροί ,οι πέντε μεγάλοι αναπτήρες κοστίζουν όσο δέκα μικροί. Άρα ,πέντε μεγάλοι αναπτήρες και τρεις μικροί κοστίζουν όσο δεκατρείς μικροί αναπτήρες. Από την, άλλη τρεις μεγάλοι αναπτήρες και πέντε μικροί αναπτήρες κοστίζουν όσο έντεκα μικροί. Οπότε η διαφορά της αγοράς πέντε μεγάλων και τριών μικρών αναπτήρων από την αγορά τριών μεγάλων και πέντε μικρών είναι η ίδια με την διαφορά της αγοράς δεκατριών μικρών αναπτήρων από την αγορά έντεκα μικρών αναπτήρων. Ξέρουμε ότι αυτή η διαφορά είναι 2 ευρώ .Οπότε δυο μικροί αναπτήρες κοστίζουν 2 ευρώ, άρα ο ένα μικρός αναπτήρας κοστίζει ένα ευρώ και ο μεγάλος δυο ευρώ.

159. Εστω Χ το βάρος του φορτίου , ο Χ είναι τριψήφιος θετικός ακέραιος (ο 1000 δεν ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος) ,τότε N=100α+10β+γ , όπου $a\geq 1$,

$$100a+10\beta+\gamma=11\lambda\overset{\lambda\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow}99a+\alpha+11\beta-\beta+\gamma=11\lambda\Leftrightarrow 11(9a+\beta)-\beta+\gamma+\alpha=11\lambda\Leftrightarrow$$
$$11(9a+\beta)-11\lambda=\beta-\gamma-\alpha\Leftrightarrow 11(9a+\beta-\lambda)=\beta-\gamma-\alpha\ (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι $\beta-\gamma-\alpha$ είναι πολλαπλάσιο του 11.

Από υπόθεση θα ισχύει:

$$\frac{N}{11}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\Leftrightarrow\frac{100a+10\beta+\gamma}{11}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\Leftrightarrow\frac{99a+11\beta-\beta+\alpha+\gamma}{11}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\Leftrightarrow$$
$$9a+\beta+\frac{-\beta+\alpha+\gamma}{11}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\Leftrightarrow 9a+\beta+\frac{-\beta+\alpha+\gamma}{11}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2(2)$$

Οι αριθμοί α,β,γ είναι μονοψήφιοι θετικοί ακέραιοι οπότε:

$$\begin{cases}1\leq\alpha\leq 9\\0\leq\beta\leq 9\\0\leq\gamma\leq 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\leq\alpha\leq 9\\0\geq-\beta\geq-9\\0\leq\gamma\leq 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\leq\alpha\leq 9\\-9\leq-\beta\leq 0(+)\\0\leq\gamma\leq 9\end{cases}$$
$$-8\leq\alpha-\beta+\gamma\leq 18,\ \textit{και}\quad\alpha-\beta+\gamma\in\mathbb{Z}\quad\textit{και}\ \alpha-\beta+\gamma\ \textit{πολλαπλάσιο του}\ 11$$

Οι δυνατές τιμές της παράστασης $\alpha-\beta+\gamma$ είναι 0 και 11.

Δηλαδή:

$\alpha - \beta + \gamma = 0$

ή

$\alpha - \beta + \gamma = 11$

Περίπτωση 1η

Αν $\alpha - \beta + \gamma = 0$ τότε η (2) γίνεται $9a + \beta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

Άρα προκύπτει το μη γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 9a + \beta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = \beta \\ 9a + \beta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = \beta \\ 9a + \alpha + \gamma = \alpha^2 + (\alpha + \gamma)^2 + \gamma^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = \beta \\ 10\alpha + \gamma = 2\alpha^2 + 2\alpha\gamma + 2\gamma^2 (3) \end{cases}$$

Από την (3) συμπεραίνουμε ότι ο γ είναι άρτιος.

Για γ=0 προκύπτει α=β=5 και ο Ν=550.Αν τώρα

$2 \le \gamma \le 8 \Leftrightarrow 10\alpha + 2 \le 10\alpha + \gamma \le 10\alpha + 8 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 4\alpha + 8 \le 2\alpha^2 + 2\alpha\gamma + 2\gamma^2 \le 10\alpha + 8 \Leftrightarrow (\text{το} = \text{δεν ισχυει εφοσον θα πρεπει } \gamma = 2 \text{ και } \gamma = 8)$ Για

$2\alpha^2 + 4\alpha + 8 < 10\alpha + 8 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 6\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 3) < 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 3 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = 2$

α=1 ή α=2 όμως το γ δεν προκύπτει ακέραιος .

Περιπτωση 2η

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 11 \\ 9a + \beta + 11 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = \beta + 11 \\ 9a + \beta + 11 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{cases} \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = \beta + 11 \\ 2\gamma^2 - 2\beta\gamma + 12\beta + 2\beta^2 - 13\gamma + 21 = 0 (4) \end{cases}$$

Για β=0 η (4) γίνεται:

$2\gamma^2 - 13\gamma + 21 = 0 \Leftrightarrow (\gamma - 3)(2\gamma - 7) = 0$ γ ακεραιος οποτε γ=3 και α=8. Ετσι Ν=803.

Αν β >0 η (4) γίνεται:

$2\gamma^2 - 2\beta\gamma + 2\beta^2 + 12\beta - 13\gamma + 21 = 0 \Leftrightarrow 2\gamma^2 - 2\beta\gamma + 2\beta^2 + 12\beta + 20 + 1 = 13\gamma \Leftrightarrow 2(\gamma^2 - \beta\gamma + \beta^2 + 6\beta + 10) + 1 = 13\gamma$ (5)

Από την (5) συμπεραίνουμε ότι ο γ είναι περιττός ακέραιος.

Αν γ=1 τοτε $\alpha - \beta + 1 = 11 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 10$, άτοπο καθώς α,β μονοψήφιοι θετικοί ακέραιοι.

Για γ>1 τότε αν γ=3 , γυριζουμε στην προηγουμενη περιπτωση και το β=0 ατοπο,οποτε

$\gamma \ge 5$,

Η σχέση (4) είναι: $2\gamma^2 - 2\beta\gamma + 2\beta^2 + 12\beta - 13\gamma + 21 = 0 \Leftrightarrow 2\gamma^2 + 2\beta^2 + 12\beta + 21 = 2\beta\gamma + 13\gamma$ (6)

Αν $\gamma \ge 4$ ισχύει: $2\gamma^2 + 21 > 13\gamma$ οπότε για να ισχύει η (6) θα πρέπει:

$$\begin{cases} 2\beta\gamma > 2\beta^2 + 12\beta \\ \gamma \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta\gamma > 2\beta^2 + 12\beta \\ 2\beta\gamma \le 18\beta \end{cases} \Leftrightarrow 2\beta^2 + 12\beta < 2\beta\gamma \le 18\beta \Leftrightarrow 2\beta^2 + 12\beta < 18\beta \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta + 6 < 9 \Leftrightarrow \beta < 3$$

Δυνατές τιμές οι β=1 ή β=2

Για β=1 ή β=2 προκύπτουν μη ακέραιες τιμές για το γ,άτοπο.

Αρα οι μόνες αποδεκτές τιμές είναι N=550 ,N=803

160. Έστω x είναι ο αριθμός των σκαλιών που είναι ορατά όταν η κυλιόμενη σκάλα είναι ακινητοποιημένη. Ανέβηκα 20 σκαλιά σε 60 δευτερόλεπτα οπότε ο αριθμός σκαλιών που "ανεβαίνει" η κυλιόμενη σκάλα είναι x - 20 σκαλιά σε 60 δευτερόλεπτα, ανάλογα η γυναίκα μου ανέβηκε 16 σκαλιά σε 72 δευτερόλεπτα ,σε αυτήν την περίπτωση η σκάλα "ανέβηκε" x - 16 σκαλιά σε 72 δευτερόλεπτα. Ο ρυθμός ανάβασης της κυλιόμενης σκάλας στην μονάδα του χρόνου είναι σταθερός άρα, 60/(χ-20) = 72/ (χ-16) ή χ=40.Το ζητούμενο πλήθος σκαλιών είναι 40.
161. Αν α1 και αν, ο πρώτος και ο νιοστός όρος της προόδου τότε το άθροισμα των ν πρώτων όρων είναι S=α1+α2+…+αν=(α1+ αν)ν/2 ή S = (α1+ αν)ν/2 ή 2S =(α1+ αν) ν (1)
Από την (1) όμως αν το S είναι δύναμη του 2 τότε και το 2S είναι δύναμη του 2 και κατ επέκταση και το (α1+ αν)ν είναι δύναμη του 2,άρα και το ν είναι δύναμη του 2.

162. Τα παιδιά βρίσκονται σε αντίθετες όχθες του ποταμού.

163. Α) Αν ν είναι το πλήθος των ορθογωνίων ,είναι γνωστό ότι η σκακιέρα έχει 32 άσπρα και 32 μαύρα τετράγωνα οπότε θα έχουμε τις σχέσεις :

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu=32 \quad \text{και } \alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<..<\alpha_\nu$$

Επιπλέον , θα ισχύει $a_i \geq i, i=1,2,..,\nu$

$a_1 \geq 1$
$a_2 \geq 2$
. προσθέτουμε κατά μέλη
.
$a_\nu \geq \nu$

$a_1+a_2+\ldots+a_\nu \geq 1+2+3+..+\nu \overset{a_1+a_2+\ldots+a_\nu=32}{\Leftrightarrow} 32 \geq 1+2+3+..+\nu \Leftrightarrow 32 \geq \frac{\nu(\nu+1)}{2} \Leftrightarrow 64 \geq \nu(\nu+1) \overset{\nu\in\mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow \nu \leq 7$ Άρα για τον ζητούμενο διαχωρισμό της σκακιέρας μπορούν να υπάρχουν το πολύ 7 ορθογώνια , οπότε ο Πινέλος χρησιμοποίησε 7 διαφορετικές αποχρώσεις του μπλε.

Β) Όλες οι δυνατές επτάδες θετικών ακέραιων $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu$ με $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu=32$ και $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\ldots\ldots<\alpha_7$ είναι

i)1,2,3,4,5,6,11 ιι)1,2,3,4,5,7,10 ιιi)1,2,3,4,5,8,9 iv)1,2,3,4,6,7,9 v)1,2,3,5,6,7,8

Η (i) απορρίπτεται γιατί δεν υπάρχει ορθογώνιο με 2x11=22 στην 8χ8 σκακιέρα όλες άλλες περιπτώσεις είναι δεκτές οπότε ο Πινέλος μπορεί να κατασκευάσει 4 διαφορετικούς πίνακες .

164. Έστω x,x+1,x+2, x+3 οι αποστάσεις ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ αντίστοιχα με x>12 θα ισχύει

x(x+1)(x+2)(x+3)+1=43681 (1) . Η ευθεία προσέγγιση για την λύση της εξίσωσης είναι εξαιρετικά επίπονη λογω υπολογισμών .Όμως, αν δούμε το σχήμα στο γραπτό του Τοτού θα παρατηρήσουμε ότι προκύπτουν οι σχέσεις:

1*2*3*4=24 ή 1*2*3*4+1=25 ή 1*2*3*4+1=5^2

2*3*4*5=120 ή 2*3*4*5+1=121 ή 2*3*4*5+1=11^2

Η σχέσεις μας υποψιάζουν ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών θετικών ακέραιων αυξημένο κατά ένα είναι τέλειο τετράγωνο ,το οποίο όμως πρέπει να αποδειχθεί.

$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+x)(x^2+5x+6)+1=x^4+5x^3+6x^2+x^3+5x^2+6x+1=x^4+6x^3+11x^2+6x+1$ Για να είναι τέλειο τετράγωνο αρκεί για κάθε χ να υπάρχουν αριθμοί α,β,γ τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$(ax^2+\beta x+\gamma)^2=x^4+6x^3+11x^2+6x+1 \Leftrightarrow \alpha^2x^4+\beta^2x^2+\gamma^2+2\alpha\beta x^3+2\beta\gamma x+2\alpha\gamma x^2=x^4+6x^3+11x^2+6x+1 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2x^4+2\alpha\beta x^3+(\beta^2+2\alpha\gamma)x^2+2\beta\gamma x+\gamma^2=x^4+6x^3+11x^2+6x+1 \Leftrightarrow$$
$$\overset{\iota\sigma\chi\upsilon\varepsilon\iota\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\alpha\theta\varepsilon\ x}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\alpha^2=1\\2a\beta=6\\\beta^2+2a\gamma=11\\\gamma^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\pm1\\\beta=\pm3\\\beta^2+2a\gamma=11\\\gamma=\pm1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=3\\\gamma=1\end{cases}\ \acute{\eta}\ \begin{cases}\alpha=-1\\\beta=-3\\\gamma=-1\end{cases}$$

Άρα

$$(x^2+3x+1)^2=x^4+6x^3+11x^2+6x+1 \qquad (1)$$
$$\acute{\eta}$$
$$(-x^2-3x-1)^2=x^4+6x^3+11x^2+6x+1 \qquad (2)$$

Με δοκιμές βρίσκουμε ότι 209^2=43681.

Οπότε για την (1) θα ισχύει:

$$(x^2+3x+1)^2=43681 \Leftrightarrow (x^2+3x+1)^2=209^2 \Leftrightarrow x^2+3x+1=209\ \acute{\eta}\ x^2+3x+1=-209$$

$$x^2+3x+1=209 \Leftrightarrow x^2+3x-208=0 \underset{x\in\mathbb{N}}{\overset{\Delta=9+4\cdot208=841}{\Leftrightarrow}} x=13$$

$x^2+3x+1=-209 \Leftrightarrow x^2+3x+210=0$, αδύνατη

Άρα <u>(ΑΒ)=13 χλμ, (ΒΓ)=14 χλμ ,(ΓΔ)=15 χλμ ,(ΔΕ)=16 χλμ</u>

Οι ίδιες λύσεις λογω συμμετρίας θα προκύψουν από την (2) .

165.Έστω χ ευρώ και y λεπτά είχε αρχικά στο πορτοφόλι , y άρτιος μεγαλύτερος ή ίσος του μηδέν και μικρότερος του 100.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

• x άρτιος

Μετά την αγορά στο πορτοφόλι του έχει χ/2 ευρώ και y/2 λεπτά.

Από υπόθεση προκύπτουν οι εξισώσεις χ=y/2 και χ/2=y/2 που δίνουν μηδενική λύση άρα απορρίπτονται.

• x περιττός τότε μετά την αγορά του μένουν (χ-1)/2 ευρώ και y/2+50 λεπτά

Από υπόθεση προκύπτουν δυο εξισώσεις :

y/2+50=x και (χ-1)/2=y/2 που δίνουν ως λύσεις χ=99,y=98

Άρα, αρχικά είχε 99 ευρώ και 98 λεπτά.

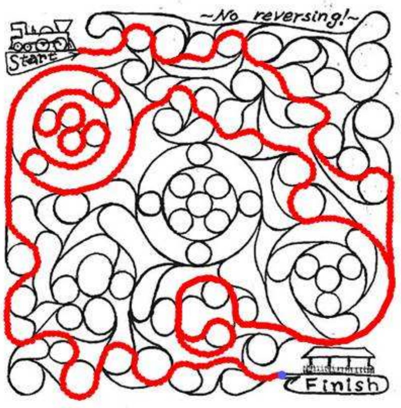
Το ποσό που του έμεινε είναι 49 ευρώ και 99 λεπτά που πληρει τις προϋποθέσεις του προβλήματος.

166. Έστω ότι ο Νίκος έχει x φωτογραφίες και ότι y έβδομα αυτών βρίσκονται στο δεύτερο άλμπουμ. Τα x,y είναι θετικοί ακέραιοι, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2x}{10}+\frac{yx}{7}+303=x \Leftrightarrow 14x+10yx+303\cdot 70=70x \Leftrightarrow \\
&-56x+10yx+303\cdot 70=0 \Leftrightarrow \\
&-28x+5yx+303\cdot 35=0 \Leftrightarrow \\
&x(28-5y)=303\cdot 35 \Leftrightarrow x=\frac{303\cdot 35}{28-5y} \Leftrightarrow x=\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 101}{28-5y}
\end{aligned}
$$

Ο παρονομαστής του δεύτερου μέλους θα πρέπει να είναι θετικός και περιττός αριθμός προκειμένου να διαιρεί τον περιττό αριθμητή. Αυτό μας περιορίζει σε τρεις τιμές του y, τις 1,3,5 εκ των οποίων αποδεκτή είναι μόνο η τελευταία, για αυτή μόνο εκτελείται η διαίρεση με ακέραιο πηλίκο. Η λύση είναι $y=5$ και $x=3535$.Άρα, ο Νίκος έχει 3535 φωτογραφίες.

167.



168.
Αποδεικνύεται ότι υπάρχει κάποιος πλανήτης που δεν παρακολουθείται από κανέναν. Το αποτέλεσμα γενικεύεται για ν πλανήτες με ν περιττό αριθμό. Θεωρούμε τους δυο πλησιέστερους πλανήτες μεταξύ τους. Τα τηλεσκόπια αυτών των πλανητών παρατηρούν το καθένα τον άλλο πλανήτη. Απομένουν ακόμη ν-2 πλανήτες και ν-2 τηλεσκόπια. Αν τουλάχιστον ένα από αυτά τα ν-2 τηλεσκόπια βλέπει πλανήτη(απο τους δύο) που έχει ήδη επιλεχτεί, τότε για ένα από του ν-2 πλανήτες δεν αρκούν τα τηλεσκόπια. Αν τώρα αυτούς τους δυο πλανήτες δεν τους βλέπει κανένα άλλο τηλεσκόπιο, τότε ξανά είναι δυνατόν να εφαρμοστούν οι ίδιοι συλλογισμοί: επιλέγουμε από τους ν-2 πλανήτες τους δυο πλησιέστερους κ.ο.κ .Επειδή ο ν είναι περιττός, στο τέλος θα απομένει ένας πλανήτης που δεν θα τον παρατηρεί κανένα τηλεσκόπιο και εκεί θα τρυπώσει ο Τοτος-82 μέχρι να περάσει η μπόρα και ν γλυτώσει από την εφορία.

169. Οχτώ υποσύνολα του συνόλου {1,2,3,4,5,6,7,8,9} έχουν άθροισμα 15 ,τα εξής:

{1, 5, 9}, {2, 5, 8}, {3, 5, 7}, {4, 5, 6}, {1, 6, 8}, {2, 4, 9}, {2, 7, 6} και {3, 4, 8}. Μπορούμε να διατάξουμε τα παραπάνω υποσύνολα σε ένα μαγικό τετράγωνο 3x3.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Οι τρεις γραμμές , οι τρεις στήλες και οι δυο διαγώνιοι του τετραγώνου έχουν άθροισμα 15.Αρα το παραπάνω παιχνίδι δεν είναι παρά μια τρίλιζα σε ένα μαγικό τετράγωνο. Στην τρίλιζα όμως δεν υπάρχει στρατηγική νίκης.

170. Ας το γενικεύσουμε. Αν αριθμήσουμε διαδοχικά τις τρύπες από το 1 μέχρι το 8 ,ας δούμε μια στρατηγική που θα επιστρέψει στον κυνηγό να πιάσει την αλεπού. Ο κυνηγός πρέπει να ερευνήσει τις τρύπες διαδοχικά, αρχίζοντας από την πρώτη. Κάθε μέρα ψάχνει κάποια τρύπα, και η αλεπού κρύβεται σε μια από αυτές.

Ας υποθέσουμε ότι η αλεπού ξεκινά από περιττής τάξεως τρύπα. Ο κυνηγός ξεκινά επίσης από περιττής τάξης τρύπα (αυτή με τον αύξοντα αριθμό 1) , και επομένως το άθροισμα των δυο αριθμών (θέσεις κυνηγού ,αλεπούς) είναι άρτιο. Κάθε μέρα οι δυο αριθμοί μεταβάλλονται κατά 1, συνεπώς το άθροισμα παραμένει άρτιο. Ομοίως αν η αλεπού ξεκινήσει από άρτια τρύπα , το άθροισμα παραμένει περιττό.

Ας υποθέσουμε ότι το άθροισμα είναι άρτιο. Θα ξεφύγει η αλεπού από την καταδίωξη του κυνηγού; Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν η αλεπού βρεθεί δίπλα στην τρύπα που ερευνάται και μετακινηθεί εκείνη την νύχτα στην τρύπα που μόλις ερευνήθηκε. Τότε ομοίως ο κυνηγός και η αλεπού θα έχουν βρεθεί σε γειτονικές τρύπες, και το άθροισμα των αυξόντων αριθμών δεν θα είναι άρτιος. Οπότε σε αυτήν την περίπτωση είναι βέβαιο ότι ο κυνηγός θα εντοπίσει την αλεπού.

Ο κυνηγός θα βρει την αλεπού όταν ερευνήσει την τρύπα στην οποία κρύβεται η αλεπού και επομένως το άθροισμα των αριθμών της τρύπας έκαστου (κυνηγού, αλεπούς) θα ισούται με το διπλάσιο του αριθμού της τρύπας. Πόσος χρόνος θα απαιτηθεί; Στην χειρότερη περίπτωση ο κυνηγός θα ψάξει και την $6^η$ τρύπα .Αν την βρει άδεια , η αλεπού πρέπει να κρύβεται στην $8^η$ τρύπα (πρέπει να βρίσκεται σε άρτια τρύπα και δεν μπορεί να ξεφύγει) Την επόμενη μέρα η αλεπού θα μετακινηθεί στην $7^η$ τρύπα και θα την εντοπίσει ο κυνηγός. Αυτό θα είναι και το μέγιστο πλήθος ημερών που θα διαρκέσει η έρευνα. Κάτι τέτοιο θα συμβεί αν η αλεπού διαλέξει αρχικά περιττής τάξης τρύπα.

Τα πράγματα είναι περισσότερο πολύπλοκα, η αλεπού διαλέξει αρχικά τρύπα άρτιας τάξεως . Τότε, κατά την διάρκεια της σειριακής αναζήτησης του κυνηγού το άθροισμα των αριθμών (τρύπας που ερευνάται και τρύπας που λουφάζει η αλεπού) κάθε μέρα θα είναι περιττό, και η αλεπού μπορεί να ξεφύγει από τον κυνηγό. Με βάση αυτά που είπαμε προηγουμένως, ο κυνηγός(που σκέπτεται το ίδιο σωστά με εμάς) μόλις φτάσει στην $7^η$ τρύπα και την βρει άδεια θα καταλάβει τι συνέβη. Την ημέρα που θα γίνει αυτό , η αλεπού θα κρύβεται σε διαφορετική τρύπα ,άρτιας τάξεως. Την ίδια νύχτα θα πρέπει να μετακινηθεί σε περιττής τάξεως τρύπα. Ο κυνηγός μπορεί να επιστρέψει και να ερευνήσει ξανά την $7^η$ τρύπα (στην οποία είναι πιθανόν να έχει μετακινηθεί η αλεπού), και έτσι το άθροισμα της τρύπας της αλεπούς και της τρύπας του κυνηγού θα ξαναγίνει άρτιο.

Ο κυνηγός τώρα μπορεί να ερευνήσει τις τρύπες από την $7^η$ μέχρι την $1^η$.Όπως επισημάναμε νωρίτερα, η αλεπού μπορεί να ξεφύγει από μια τέτοια σειριακή αναζήτηση μόνο αν το άθροισμα των αριθμών της σπηλιάς που κρύβεται και της τρύπας που ερευνά ο κυνηγός είναι περιττός. Εφόσον το άθροισμα πια είναι άρτιο, η αλεπού μοιραία θα εντοπιστεί από τον κυνηγό. Ουσιαστικά ο κυνηγός άλλαξε το σταθερό άθροισμα ερευνώντας την $7^η$ τρύπα δυο φορές. Αν ο κυνηγός φτάσει στην $3^η$ τρύπα και δεν βρει την αλεπού τότε η αλεπού κρύβεται στην $1^η$ σπηλιά. Εκείνη την νύχτα θα μετακινηθεί στην $2^η$ τρύπα και την επόμενη μέρα θα την πιάσει.

Πόσες μέρες θα απαιτηθούν .Η διαδρομή του κυνηγού στην χειρότερη περίπτωση είναι 1,2,3,4,5,6,7,7,6,5,4,3,2 δηλαδή 13 μέρες.

171. Έστω x τα ποδήλατα του Νοεμβρίου τότε προκύπτουν οι ισότητες:

$100+x=y^2$ (1) και $168+x=z^2$ (2)

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (2) και (1)

(2)-(1) : $168-100 = z^2-y^2 =(z-y)(z+y)$ ή $(z-y)(z+y)=68$ ή$(z-y)(z+y)=2^2\cdot 17$

Ο αριθμός 68 μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δυο παραγόντων με τρεις τρόπους

$68=1\cdot 68=2\cdot 34=4\cdot 17$

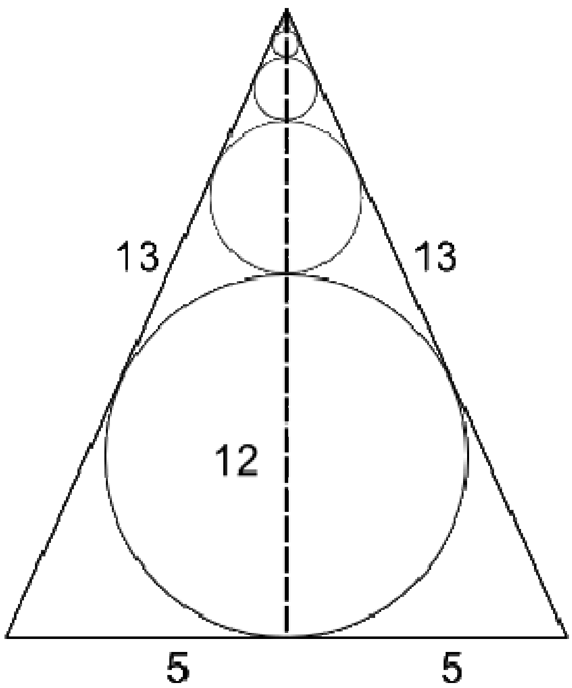
Ο 68 είναι άρτιος οπότε θα πρέπει τα y,z να είναι είτε και τα δυο περιττά είτε και τα δυο άρτια, οπότε υπάρχει μόνο μια λύση

$z-y=2$, $z+y=34$, $z=18$, $y=16$, $x=156$

Άρα, οι πωλήσεις του Νοέμβριου είναι 156 ποδήλατα.

172. Αρχικά παρατηρούμε ότι το 2(το 2 είναι ο μοναδικός άρτιος πρώτος) δεν μπορούμε να το έχουμε ως άθροισμα δυο αριθμών. Κατά συνέπεια, θέλουμε τα αθροίσματα να είναι περιττοί πρώτοι.Εφόσον όμως είναι περιττοί πρέπει να σχηματίζονται από έναν άρτιο και έναν περιττό.Άρα για να υπάρξει η επιθυμητή διάταξη θα πρέπει να έχουμε το ίδιο πλήθος περιττών κι άρτιων, άτοπο καθώς έχουμε 29 αριθμούς. Άρα δεν είναι δυνατή η ζητούμενη τοποθέτηση.

173. Φέρνουμε το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση του ισοσκελούς τριγώνου .Σχηματίζονται δυο τρίγωνα με μήκη υποτείνουσας και μια κάθετης πλευράς 13 και 5 αντίστοιχα.



Χρησιμοποιούμε το πυθαγόρειο θεώρημα και υπολογίζουμε το μήκος του ύψους $13^2=5^2+υ^2$ ή υ=12.

Το άθροισμα των διαμέτρων όλων των κύκλων ισούται με 12.($δ_1+δ_2+….=12$)

Το μήκος ενός κύκλου με ακτίνα ρ έχει τύπο Γ=2πρ

Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$S=2πρ_1+2πρ_2+….=π(2ρ_1+2ρ_2+….)= π(δ_1+δ_2+….)=12π$

174.Η απάντηση είναι ΕΕΕ. Ας δούμε το γιατί .
Μοιάζει με συνηθισμένη ερώτηση αναγνώρισης μοτίβου όμως είναι αρκετά πονηρό έως καταχθόνιο. Η ακολουθία αριθμών παρουσιάζει το ελληνικό αλφάβητο και στην θέση κάθε γράμματος το αριθμό των ευθειών γραμμών και τον αριθμό των καμπύλων γραμμών που συνιστούν το γράμμα. Δείτε:
Α Τρεις ευθείες γραμμές (ΕΕΕ)
Β δύο καμπύλες και μια ευθεία γραμμή και (ΚΚΕ)
Γ Τρεις ευθείες (ΕΕΕ) γραμμές
Δ Τρεις ευθείες (ΕΕΕ) γραμμές
Η αρχική μορφή του γρίφου ήταν
SSS, SCC,C,
(S straight line),(C curve line)

Στο διαδίκτυο διάβασα ότι το συγκεκριμένο ερώτημα είναι πολύ δημοφιλές στις συνεντεύξεις της Amazon,αλλά ως είθισται τα του διαδικτύου ελέγχονται.

175.Ο Γιαννάκης έχει διπλομετρήσει πολλές από τις δραστηριότητες που ανέφερε. Για παράδειγμα κατά την διάρκεια των διακοπών και τρώει και κοιμάται

176. Εφόσον η σοκολάτα έχει σχήμα τετραγώνου, ο Γιαννάκης και η φίλοι του την έκοψαν σε X^2 τετραγωνικά κομμάτια (Χ θετικός ακέραιος), σύμφωνα με τα λεγόμενα του Γιαννάκη αν έχει κ φίλους τότε θα ισχύει:

$$X^2 = 3\kappa + 2 \quad (1)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το Χ σε σχέση με το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το 3.

•Αν $X=3\lambda$, τότε η (1) παίρνει την μορφή: $9\lambda^2 = 3\kappa+2$ ή $9\lambda^2 - 3\kappa = 2$ ή $3(3\lambda^2 - \kappa) = 2$, άτοπο, το 2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

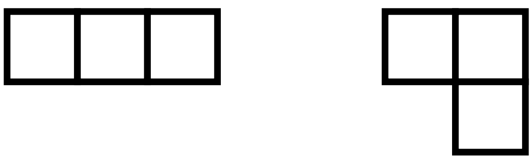
•Αν $X=3\lambda+1$, τότε η (1) παίρνει την μορφή: $9\lambda^2+6\lambda+1 = 3\kappa+2$ ή $9\lambda^2 + 6\lambda - 3\kappa = 1$ ή $3(3\lambda^2 + 2\lambda - \kappa) = 1$, άτοπο, το 1 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

•Αν $X=3\lambda+2$, τότε η (1) παίρνει την μορφή: $9\lambda^2+12\lambda+4 = 3\kappa+2$ ή $9\lambda^2+12\lambda-3\kappa = -2$ ή $3(3\lambda^2 + 4\lambda - \kappa) = -2$, άτοπο, το -2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

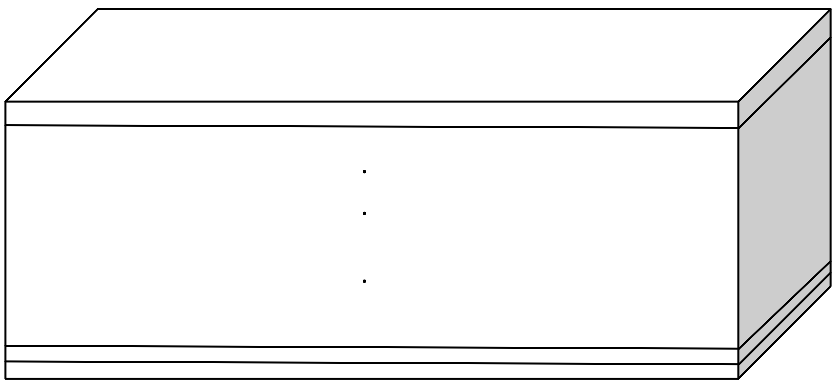
Σε κάθε περίπτωση η μοιρασιά δεν έγινε όπως ισχυρίζεται ο Γιαννάκης. Όταν επέμεινε ο Παπαδόπουλος, ο Γιαννάκης ομολόγησε ότι δωροδόκησε με την σοκολάτα την δασκάλα των αρχαίων για να του βάλει καλό βαθμό!!

Η αρχική διατύπωση του προβλήματος-υπάρχει σε κάθε βιβλίο που αφορά την συνδυαστική γεωμετρία- είναι η εξής :

Αν δοθεί μια τετραγωνική σκακιέρα νχν. Είναι δυνατόν να καλυφτεί από τετραγωνικά τριόμινα(σχήμα) για κάποια τιμή του ν; Η κάλυψη πρέπει να γίνει χωρίς κάποιο μέρος των τριομίνων που θα χρησιμοποιηθούν να «εξέχει» της σκακιέρας.



Αν υιοθετήσουμε μια οπτική *εκτός κουτιού* και ένα νυστέρι, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι θα μπορούσε η σοκολάτα να κοπεί στον αριθμό κομματιών που ζητά η εκφώνηση «εγκάρσια».



 Οι λύσεις στην σελ 166

177.Η ρίψη δυο ζαριών έχει 36 δυνατά διαφορετικά αποτελέσματα, Αν ο Αντώνης και ο Βασίλης έχουν σε κάθε ρίψη τις ίδιες πιθανότητες να κερδίσουν πρέπει 18 αποτελέσματα να έχουν αποτέλεσμα το ίδιο χρώμα .

Αν κ είναι ο αριθμός των κόκκινων εδρών στο δεύτερο ζάρι τότε 6-κ ο αριθμός των μπλε εδρών και τα 18 δυνατά αποτελέσματα ίδιου χρώματος :

$$18 = 5*\kappa + 1*(6-\kappa) \text{ άρα } \quad \kappa=3$$

Άρα το δεύτερο ζάρι έχει 3 κόκκινες και 3 μπλε έδρες.

Ως επαλήθευση δείτε τον πίνακα διπλής εισόδου (Κ:κόκκινο,Μ:Μπλε)

1^o ζάρι 2^o ζάρι	Κ	Κ	Κ	Κ	Κ	Μ
Κ	ΚΚ	ΚΚ	ΚΚ	ΚΚ	ΚΚ	ΚΜ
Κ	ΚΚ	ΚΚ	ΚΚ	ΚΚ	ΚΚ	ΚΜ
Κ	ΚΚ	ΚΚ	ΚΚ	ΚΚ	ΚΚ	ΚΜ
Μ	ΜΚ	ΜΚ	ΜΚ	ΜΚ	ΜΚ	ΜΜ
Μ	ΜΚ	ΜΚ	ΜΚ	ΜΚ	ΜΚ	ΜΜ
Μ	ΜΚ	ΜΚ	ΜΚ	ΜΚ	ΜΚ	ΜΜ

178. Αρχικά θα δείξουμε ότι αν ο Α λέει ψέματα τότε καταλήγουμε σε άτοπο. Έστω ότι ο Α λέει ψέματα τότε η δεύτερη δήλωση του είναι ψευδής οπότε <u>ο Ε λέει αλήθεια και</u> <u>ο Γ λέει ψέματα</u>. Εφόσον όμως ο Ε λέει αλήθεια η δήλωση του είναι αληθής συνεπώς ο Δ λέει ψέματα ή ο Γ λέει αλήθεια, αλλά <u>ο Γ δεν λέει αλήθεια</u> οπότε <u>ο Δ πρέπει να να λέει ψέματα</u>. Οπότε η δήλωση του Δ είναι ψευδής έτσι ο έλληνας πρόξενος είναι εδώ σήμερα ή ήταν εδώ χθες. Αλλά ο πρόξενος δεν ήταν στο νησί χθες (Το είπε ο Γ και ο Γ λέει ψέματα) οπότε είναι στο νησί σήμερα. Αλλά αυτό κάνει την αρχική δήλωση του Α αληθή, άτοπο, καθώς υποθέσαμε ότι ο Α λέει ψέματα. Άρα ο Α λέει μόνο αλήθεια οπότε ο έλληνας πρόξενος σήμερα είναι στο νησί.

Έστω χ η συνολική απόσταση που διάνυσε ο Τοτος και y το μήκος της ανηφορικής πορείας . Ο περίπατος του Τοτού έχει τέσσερα διαφορετικά στάδια

Ίσιωμα. ανηφόρα, κατηφόρα ,ίσιωμα

Άρα προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{\frac{x}{2}-y}{4}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}+\frac{\frac{x}{2}-y}{4}=5$$

που ενώ μοιάζει ότι έχει δυο αγνώστους ,αν εργαστούμε λίγο βλέπουμε ότι ο ένας άγνωστος απαλείφεται:

$$\frac{\frac{x}{2}-y}{4}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}+\frac{\frac{x}{2}-y}{4}=5\Leftrightarrow\frac{\frac{x-2y}{2}}{4}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}+\frac{\frac{x-2y}{2}}{4}=5\Leftrightarrow$$
$$\frac{x-2y}{8}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}+\frac{x-2y}{8}=5\Leftrightarrow$$
$$\frac{3(x-2y)+8y+4y+3(x-2y)}{24}=5\Leftrightarrow\frac{3x-6y+8y+4y+3x-6y}{24}=5$$
$$\Leftrightarrow\frac{3x+3x}{24}=5\Leftrightarrow\frac{6x}{24}=5\Leftrightarrow x=20$$

179. Αν Α ο πενταψήφιος αριθμός ποδηλάτων του 2014 και α το πρώτο ψηφίο του,τότε γράφεται:
Α=10000α+κ ενώ αριθμός Β των ποδηλάτων του 2015 είναι Β=10κ+α
Τότε 10Α-Β=99999α=9x41x271xα
Αν ο Α διαιρείται με το 41 τότε θα διαιρείται και ο Β. Οπότε μπορούν και τα ποδήλατα του 2015 να μοιραστούν εξίσου στα 41 σχολεία.

180. Το έτος ΚΛΠΡ είναι τετραψήφιος άρα το ψηφίο Λ είναι 1 ή 2.

Αν Λ=1 τότε θα πρέπει και Κ=1 άτοπο διότι Κ, Λ διαφορετικά αριθμητικά ψηφία.

Αν Λ=2 τότε Ρ=0 ή Ρ=1

Για Ρ=0 τότε Λ=9, άτοπο.

Για Ρ=1 τότε Κ=2 , άτοπο καθώς Λ=2

Παρατηρούμε ότι είναι αδύνατο το έτος ΚΛΠΡ και ο αιώνας ΛΡ να εκφράζεται στο γνωστό αραβικό θεσιακό αριθμητικό μας σύστημα .Λύση υπάρχει μόνο όταν θεωρήσουμε ότι τα γράμματα συμβολίζουν ρωμαϊκούς αριθμούς. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει απάντηση:

Κ=M

Λ=X

Π=C

Ρ=I

Επομένως το έτος είναι το MXCI (ή 1091) και ο αιώνας είναι ο XI(ο 11ος)

181. Αρχικά φαίνεται αδύνατο να κοντρολάρουμε την απάντηση του κατοίκου που λέει πότε ψέματα πότε αλήθεια, εντούτοις είναι δυνατό. Ας το πάρουμε από την αρχή.

Έχετε την δυνατότητα να κάνετε μόνο δυο ερωτήσεις .Θα πρέπει με την πρώτη ερώτηση να αποκλείσετε τον απρόβλεπτο κάτοικο που πότε λέει ψέματα πότε λέει αλήθεια ώστε να υποβάλλετε το δεύτερο ερώτημα σε ένα από τους άλλους δυο κάτοικους ,δεν έχει σημασία σε ποιον, και έτσι να συμπεράνετε ποιος δρόμος οδηγεί στην Άνω Ραχούλα.

Αν ονομάσουμε τους τρεις κάτοικους Α,Β,Γ. Ρωτήστε τον Α :

«Είναι ο Β πιθανότερο από τον Γ να λέει αλήθεια;»

Αν απαντήσει «Ναι» τότε επιλέγετε για την δεύτερη ερώτηση τον κάτοικο Γ αν απαντήσει «όχι» επιλέγετε για την δεύτερη ερώτηση τον κάτοικο Β. Γιατι;

• Αν ο Α είναι αυτός που λέει μόνο αλήθεια τότε από τους Β και Γ αυτός που είναι πιθανότερο να πει αλήθεια θα είναι αυτός που λέει πότε ψέματα πότε αλήθεια .

Δυο περιπτώσεις:

Β λέει πάντα ψέματα, Γ λέει πότε αλήθεια πότε ψέματα ο Α απαντάει ΟΧΙ

(Πρέπει να επιλέξει για την δεύτερη ερώτηση τον Β)

Β λέει πότε αλήθεια πότε ψέματα , Γ λέει πάντα ψέματα ο Α απαντάει ΝΑΙ

(Πρέπει να επιλέξει για την δεύτερη ερώτηση τον Γ)

• Αν ο Α είναι αυτός που λέει πάντα ψέματα τότε από τους Β και Γ αυτός που είναι πιθανότερο να πει αλήθεια θα είναι αυτός που λέει πάντα αλήθεια, οπότε λέγοντας ψέματα θα πει.

Δυο περιπτώσεις:

Β λέει πάντα αλήθεια , Γ λέει αλήθεια πότε ψέματα ο Α απαντάει ΟΧΙ

(Πρέπει να επιλέξει για την δεύτερη ερώτηση τον Β)

Β λέει πότε αλήθεια πότε ψέματα , Γ λέει πάντα αλήθεια ο Α απαντάει ΝΑΙ

(Πρέπει να επιλέξει για την δεύτερη ερώτηση τον Γ)

Στις παραπάνω περιπτώσεις αν η απάντηση είναι ΝΑΙ επιλέγουμε τον Γ και αν η απάντηση είναι ΟΧΙ επιλέγουμε για την δεύτερη ερώτηση τον Β.

• Αν ο Α λέει πότε αλήθεια, πότε ψέματα δεν έχει σημασία ποιον θα διαλέξουμε από του Β και Γ για το δεύτερο ερώτημα.

Το ερώτημα που θα υποβάλλει στον δεύτερο κάτοικο δείχνοντας του ένα από τους δυο δρόμους είναι το εξής:

"Είναι αυτός ο δρόμος που θα μου πει ο άλλος κάτοικος ότι οδηγεί στην άνω ραχούλα ;"

Αν ρωτήσει τον κάτοικο που λέει πάντα αλήθεια αυτός θα γνώριζε ότι ο άλλος κάτοικος που λέει πάντα ψέματα θα κοίταζε να τον παραπλανήσει .Αν είναι αυτός ο σωστός δρόμος θα απαντούσε *όχι* , αν είναι ο λάθος δρόμος θα έλεγε *ναι*.

Αν ρωτήσει τον κάτοικο που λέει πάντα ψέματα αυτός θα γνώριζε ότι ο άλλος κάτοικος λέει πάντα την αλήθεια αν είναι αυτός ο σωστός δρόμος θα απαντούσε *ναι* οπότε ψεύδεται λέγοντας *όχι* ,ενώ αν είναι ο λάθος δρόμος θα απαντούσε *ναι*.

Αν η απάντηση είναι *όχι* ακολουθεί τον δρόμο που έδειξε ,ενώ αν είναι *ναι* πάει από τον άλλο δρόμο.

Ο φίλος του ιστολογίου Γιώργος Ριζόπουλος παρατηρεί στο εν λόγω πρόβλημα:

Όπως τίθονται τα δεδομένα για τον 3ο ("απαντάει στυν τύχη πότε αλήθεια-πότε ψέμματα") υπάρχει λύση νομίζω και με μία μόνο ερώτηση:
Ρωτάμε οποιονδήποτε από τους τρεις:,"Αν,αντί γι'αυτη την ερώτηση, σε είχα ρωτήσει ποιος δρόμος οδηγεί στην Άνω Ραχούλα, τί θα μου είχες απαντήσει?" Και ο αληθολόγος και ο ψεύτης θα δείξουν τη σωστή κατεύθυνση (καθώς ο ψεύτης πρέπει να πει ψέματα σχετικά με το τί θα ΕΙΧΕ απαντήσει,το οποίο θα ήταν ψευδές). Ομοίως, ανεξαρτήτως του mode στο οποίο είναι ο 3ος (Α ή Ψ), πρέπει επίσης να δείξει στη σωστή κατεύθυνση.
Υπάρχει, σ'αυτού του είδους τα Boolean logic θέματα, μια λεπτή διαφοροποίηση/διάκριση ως προς το τί ακριβώς είναι ο 3ος. Ο Αληθινός και ο Ψεύτης δεν παρουσιάζουν "τεχνικές" δυσκολίες ,καθώς η "τιμή" αληθείας τους είναι σταθερή και συγκεκριμένη και μπορούμε πάντα να πάρουμε αξιοπιοίσιμη πληροφορία από οποιονδήποτε από τους δύο. Ο "Τυχαίος" όμως θέλει προσοχή!
Είναι άλλο κάποιος που απαντάει εναλλακτικά Α ή Ψ (ή και τυχαία με βάση μια οποιαδήποτε πιθανοτική κατανομή ας πούμε) και άλλο ο randomizer (όπως λέγεται σε αγγλοσαξωνικές πηγές) ,αυτός δηλαδή που απαντάει όχι ενσυνείδητα με ψέμα ή με αλήθεια, αλλά δίνει μια οποιαδήποτε ΤΥΧΑΙΑ απάντηση. Από τον 1ον μπορούμε να πάρουμε αξιοποιήσιμη πληροφορία καθώς θα απαντήσει στη ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ερώτηση που θα του κάνουμε με μία από τις 2 "τιμές" και με "Λογικό αντίκρυσμα". Ο πραγματικά ΤΥΧΑΙΟΣ όμως δεν δίνει αξιοποιήσιμη απάντηση καθώς η απάντηση του δεν συνδέεται καθ'οιονδήποτε τρόπο με την ουσία της ερώτησής μας.
Αν ο 3ος λοιπόν δεν είναι ένας alternator ,αλλά είναι ένας randomizer, τότε το θέμα γίνεται πιο ενδιαφέρον και δύσκολο και απαιτούνται 2 ερωτήσεις (όπως στην ωραία λύση σου Αθανάσιε!) ώστε με την πρώτη ερώτηση να αποκλειστεί ο "άχρηστος" Τυχαίος. Μια άλλη λύση θα ήταν:
Ρωτάμε τον Α "Είναι πιθανότερο ο Β να μού πει αλήθεια παρά ο Γ;"

Αν η απάντηση είνα "ΝΑΙ" τότε:
Αν ο Α είναι Αληθινός, ο Β είναι Τυχαίος, ο Γ ψεύτης.
Αν Α ψεύτης, Β Τυχαίος, Γ Αληθινός.
Αν ο Α είναι ο Τυχαίος, Γ Αληθινός ή Ψεύτης.

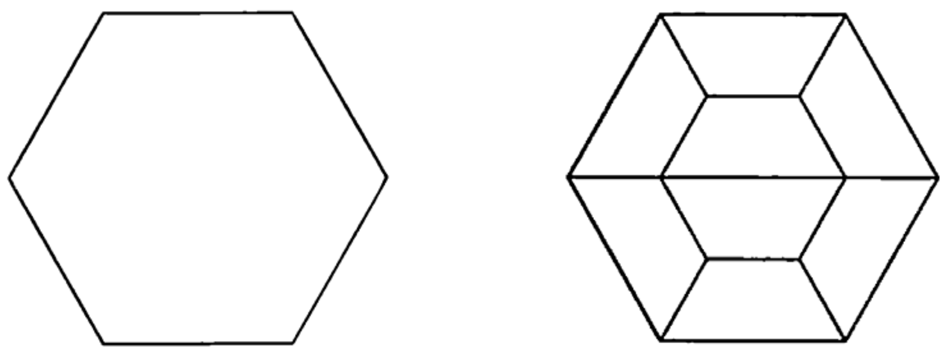
Αν η απάντηση είνα "ΟΧΙ," τότε:
Αν Α είναι ο Αλ, ο Β είναι ο Ψ, Γ Τυχ..
Αν Α είναι Ψ, Β Αληθινός, Γ είναι Τυχαίος
Αν Α είναι Τυχαίος, Β είναι Αληθινός ή Ψεύτης.

Σε κάθε περίπτωση από τις δύο, τώρα ξέρουμε σίγουρα κάποιον (τον Γ ή τον Β, ανά περίπτωση αντίστοιχα) που είναι είτε Α είτε Ψ, οπότε η συνέχεια και η 2η ερώτηση είναι η γνωστή ...

182. Αν ο Τζακ έχει κλέψει την χήνα, τότε η δήλωση του ότι δεν έκλεψε ούτε το άλογο ούτε το γαϊδούρι θα ήταν αληθής ,όμως ξέρουμε ότι αυτός που έκλεψε την χήνα είπε ψέματα. <u>Άρα ο Τζακ δεν έκλεψε την χήνα.</u>

Αν ο Τζακ είχε κλέψει το άλογο, τότε θα έχει πει ψέματα ισχυριζόμενος ότι δεν έκλεψε ούτε το άλογο ούτε το γαϊδούρι, όμως είναι γνωστό ότι αυτός που έκλεψε το άλογο είπε την αλήθεια. <u>Άρα ο Τζακ δεν έκλεψε το άλογο.</u> Οπότε ο Τζακ έκλεψε το γαϊδούρι άρα ο Ουίλιαμ είπε την αλήθεια ότι ο Τζακ έκλεψε το γαϊδούρι. Οπότε ο Ουίλιαμ δεν έκλεψε την χήνα εφόσον αυτός που έκλεψε την χήνα λέει ψέματα συνεπώς ο Ουίλιαμ έκλεψε το άλογο. Τότε ο Τζο έκλεψε την χήνα!!!

Μια λυση είναι :



183.

Συμβολίζουμε τις διαστάσεις των χωραφιών με τα γράμματα α,β,γ,δ,ε,ζ,η,θ και Υ το εμβαδό του χωραφιού με το υποστατικό.

	20	14		ε
12				ζ
8		15		η
	25		21	θ
α	β	γ	δ	

Με τον παραπάνω συμβολισμό έχουμε

$$(\alpha\zeta)x(\beta\varepsilon)x(\gamma\eta)x(\delta\theta)=12x20x15x21$$

$$(\alpha\eta)\ x\ (\beta\theta)x(\gamma\varepsilon)x(\delta\zeta)=8x25x14xY$$

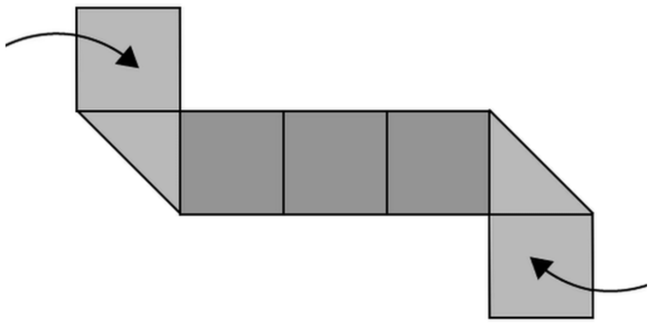
Τα πρώτα μέλη είναι ίσα άρα και τα δεύτερα

$$8x25x14xY=12x20x15x21 \text{ ή } Y=27$$

•Έστω ν ο αύξων αριθμός της μεσαίας θέσης της κατάταξης τοτε οι δρομεις που τερματισαν πριν από το Παπαδόπουλο είναι ν-1 και οι δρομείς που τερμάτισαν μετά από τον Παπαδόπουλο είναι επίσης ν-1 έτσι προκύπτει ότι το σύνολο των δρομέων είναι (ν-1)+(ν-1) +1=2ν-1 και προφανώς είναι περιττός αριθμός.Απο υπόθεση ισχύει ότι ν<10 ή 2ν<20 ή 2ν-1<19.Ο Προκοπίου τερμάτισε δέκατος έκτος ,άρα 2ν-1 >=16 .Ο μοναδικός περιττός ανάμεσα στο 16 και το 19 είναι ο 17.Άρα έλαβαν μέρος 17 δρομείς.

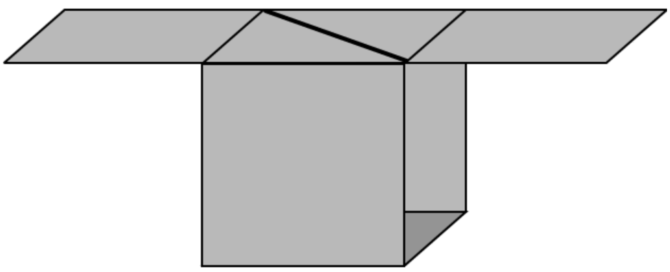
1

2

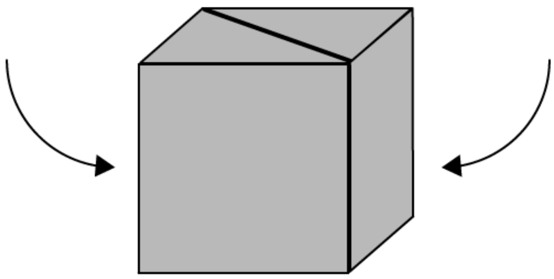


•

3



4



184. • Έστω χ το πλήθος των ζευγών και (τ,τ) και (τ,ξ) τα πλήθη των τάρανδων στην αριστερή φάλαγγα τα οποία στέκονται δίπλα σε ταράνδους και ξωτικά αντίστοιχα και (ξ,τ) και (ξ,ξ) τα πλήθη των ξωτικών στην αριστερή φάλαγγα τα οποία στέκονται δίπλα σε ταράνδους και ξωτικά αντίστοιχα. Από τις συνθήκες του προβλήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

(τ,τ)+(τ,ξ)=(ξ,τ)+(ξ,ξ)=χ/2 (1)

(τ,τ)+(ξ,τ)=(τ,ξ)+(ξ,ξ)=χ/2 (2)

(τ,ξ)+(ξ,τ)=(τ,τ)+(ξ,ξ)=χ/2 (3)

Προσθέτουμε κατά μέλη:

2((τ,τ)+(τ,ξ)+ (ξ,τ))= 2((ξ,τ)+(ξ,ξ) +(τ,ξ))=3χ/2 ή (τ,τ)+(τ,ξ)+ (ξ,τ)= (ξ,τ)+(ξ,ξ) +(τ,ξ) (4)

(4) μέσω της (3) γίνεται: (ξ,τ)+(ξ,ξ) + (ξ,τ))= (ξ,τ)+(ξ,ξ) +(τ,ξ)=3χ/4 ή

(ξ,τ)= (τ,ξ) ομοίως προκύπτει (ξ,τ)= (τ,ξ)= (τ,τ)=(ξ,ξ)=χ/4 άρα 4(ξ,ξ)=χ

Και επειδή το σύνολο όλων τάρανδων και ξωτικών είναι 2χ από (5) 2χ=8(ξ,ξ) αυτός διαιρείται με το 8.

• Έστω ο ζητούμενος τετραψήφιος αριθμός είναι ο $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ με $\overline{\alpha\beta}=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta$ και $\overline{\gamma\delta}=\alpha+\beta+\gamma+\delta$.Ένας από τα α,β,γ,δ ισούται με το 1, γιατί διαφορετικά το γινόμενο τεσσάρων διαφορετικών αριθμών δεν θα ήταν διψήφιος αριθμός.

Κανένας από τους α,β,γ,δ δεν ισούται με μηδέν γιατί τότε το γινόμενο των τεσσάρων αριθμών θα ήταν 0.

Το $\overline{\alpha\beta}=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta$ είναι άρτιος (κάθε τετράδα περιττών έχει γινόμενο τριψήφιο αριθμό) άρα και το β είναι άρτιος, το α δεν ισούται με την μονάδα διότι δεν θα μπορούσε να ισχύει: $\overline{1\beta}=\beta\cdot\gamma\cdot\delta$ >20 άρα το γ ή το δ είναι ισο με το 1.Εχουμε:

$$\overline{\alpha\beta}=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta \Leftrightarrow 10\alpha+\beta=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta(1)$$
$$\overline{\gamma\delta}=\alpha+\beta+\gamma+\delta \Leftrightarrow 10\gamma+\delta=\alpha+\beta+\gamma+\delta \Leftrightarrow 9\gamma=\alpha+\beta(2)$$

Η (1) και η(2) έχουν λύσεις μονοψήφιους θετικούς ακέραιους άρα $\gamma=1$ ή $\gamma=2$.

-Αν $\gamma=2$ τότε $18=\alpha+\beta \Leftrightarrow \alpha=9$ και $\beta=9$ απορρίπτεται , από υπόθεση οι αριθμοί α,β,γ,δ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.

-Αν $\gamma=1$ τότε $9=\alpha+\beta$

Όμως ο β είναι άρτιος και $\alpha\neq 1$ τότε $\overline{\alpha\beta}=72$ ή $\overline{\alpha\beta}=54$, ή $\overline{\alpha\beta}=36$ όμως

$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad 54 = 2 \cdot 3^3,\ 72 = 2^3 \cdot 3^2$, κανένα τους δεν έχει παράγοντα το 5 ή το 7 οπότε κανένα από τα αβ,γ,δ δεν είναι το 5 ή το 7 άρα $\overline{\alpha\beta} = 36$ και εφόσον α=3 και β=6 και γ=1 από την

(1) $\overline{\alpha\beta} = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \Leftrightarrow 36 = 3 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \delta \Leftrightarrow \delta = 2$

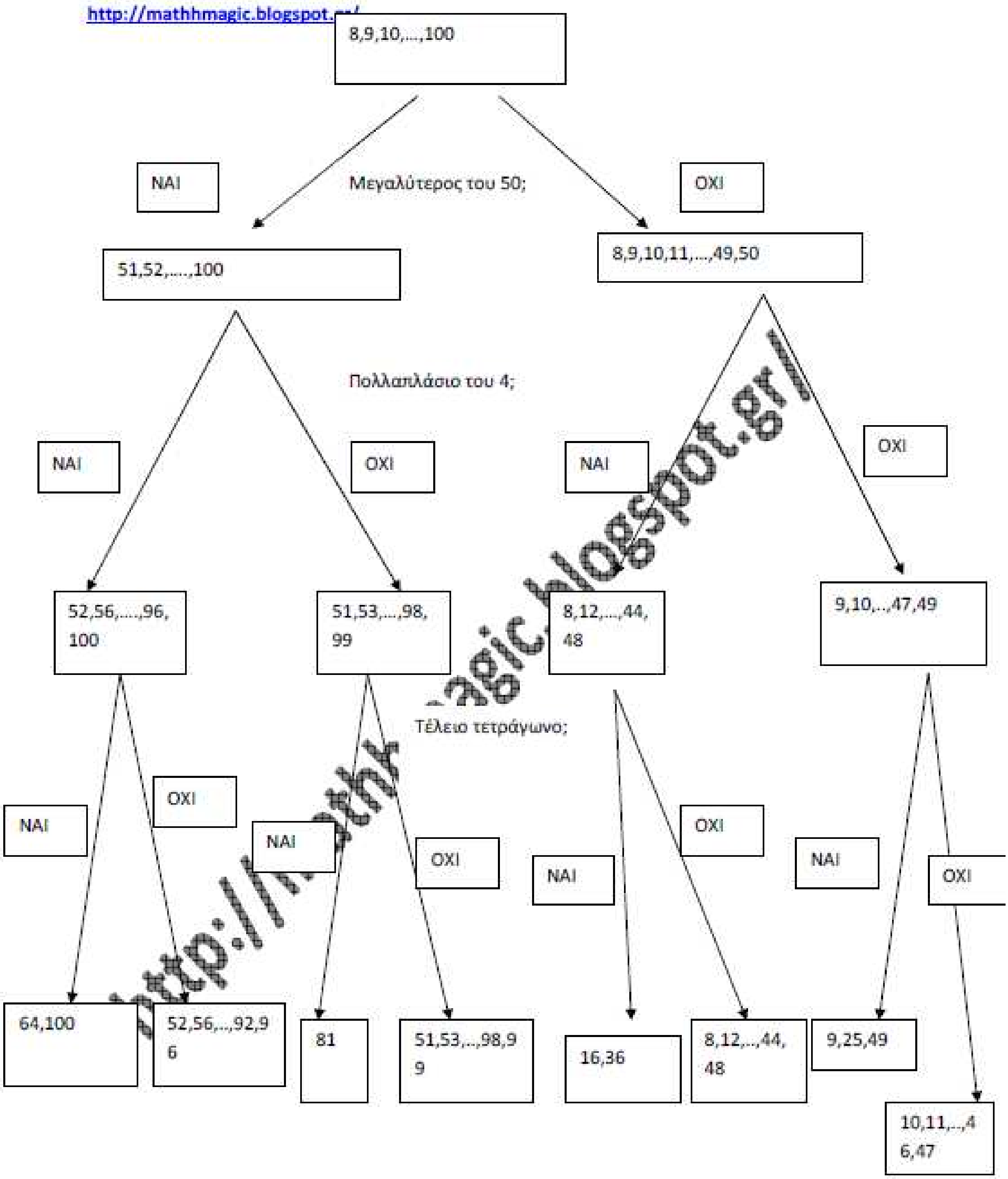
Ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 3612.

- Η-3 ε-ε το $\dfrac{\mathrm{K}}{\frac{1}{2}}$

Η πλην τρια ε πλην ε το υπο κα(Κ) μισό

(Η πλύντρια έπλυνε το υποκαμίσο)

185.Το παρακάτω δέντρο δίνει όλες τις δυνατές περιπτώσεις για κάθε απάντηση :Ας δούμε την τελευταία ερώτηση του Γιάννη «είναι το πρώτο ψηφίο το 3» η οποία ακολούθησε την ερώτηση αν ο αριθμός είναι τέλειο τετράγωνο. Συμπεραίνουμε έτσι ότι ο Γιάννης από τις διαδοχικές απαντήσεις του Θωμά κατέληξε στο ζεύγος (16,36) και ρώτησε για το πρώτο ψηφίο αφού και οι δυο είναι τέλεια τετράγωνα .Ο Γιάννης από την αρχή έλαβε απαντήσεις ΟΧΙ, ΝΑΙ, ΝΑΙ. Γυρίζοντας πίσω στο δέντρο , μια σωστή και δυο λάθος απαντήσεις η ακολουθία σωστών απαντήσεων είναι ΝΑΙ, ΟΧΙ, ΝΑΙ ,βλέπουμε ότι ο σωστός αριθμός είναι το 81.



http://mathhmagic.blogspot.gr/
8,9,10,...,100
Μεγαλύτερος του 50;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
51,52,....,100
8,9,10,11,...,49,50
Πολλαπλάσιο του 4;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
ΝΑΙ
ΟΧΙ
52,56,....,96, 100
51,53,...,98, 99
8,12,...,44, 48
9,10,..,47,49
Τέλειο τετράγωνο;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
ΝΑΙ
ΟΧΙ
ΝΑΙ
ΟΧΙ
ΝΑΙ
ΟΧΙ
64,100
52,56,..,92,9 6
81
51,53,..,98,9 9
16,36
8,12,..,44, 48
9,25,49
10,11,..,4 6,47

186.)Σε κάθε περίπτωση, ο υπουργός Γεωργίας είναι ψηλότερος από τον υπουργό οικονομικών .Ας δούμε γιατί. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις
α)Ο υπουργός γεωργίας και ο υπουργός οικονομικών βρίσκονται στην ίδια στήλη τότε ο υπουργός γεωργίας είναι ψηλότερος από τον υπουργό οικονομικών. Από υπόθεση γνωρίζουμε ο υπουργός γεωργίας είναι το ψηλότερο άτομο της στήλης.
β)Ο υπουργός γεωργίας και ο υπουργός οικονομικών βρίσκονται στην ίδια γραμμή τότε ο υπουργός οικονομικών είναι πιο κοντός από τον υπουργό γεωργίας . Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι ο υπουργός οικονομικών είναι το πιο κοντό άτομο της στήλης.
γ)Ο υπουργός γεωργίας και ο υπουργός οικονομικών δεν βρίσκονται ούτε στην ίδια γραμμή ούτε στην ίδια στήλη. Αν ο υπουργός γεωργίας βρίσκεται στην ν στήλη και ο υπουργός οικονομικών στην μ γραμμή τότε υπάρχει ένας άλλος υπουργός που ανήκει στην μ γραμμή και ν στήλη έστω ο υπουργός παιδείας. Τότε, ο υπουργός γεωργίας θα είναι ψηλότερος από τον υπουργό παιδείας(από (α)) και ο υπουργός παιδείας ψηλότερος από τον υπουργό οικονομικών (από (β)) τελικά ο υπουργός Γεωργίας είναι ψηλότερος από τον υπουργό οικονομικών.

187. Η λέξη ΠΟΤΟ γράφεται δεκαπέντε φορές οπότε το άθροισμα κάθε στήλης (χωρίς να λάβουμε υπόψη τα κρατούμενα) είναι πολλαπλάσιο του 15 άρα τελειώνει σε 0 ή 5.Το δεξιότερο γράμμα Ο δεν έχει κρατούμενο άρα στην λέξη ΒΥΤΙΟ το Ο είναι 0 ή 5.
Ποιο από τα δυο;

• Αν Ο=0 αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα όλων των γραμμάτων Ο στην δεξιότερη στήλη είναι 0 και δεν υπάρχει κρατούμενο στην στήλη των δεκάδων. Αν δεν υπάρχει όμως κρατούμενο πρέπει να βρούμε ένα ψηφίο για το Τ που όταν πολλαπλασιαστεί με το 15 έχει ως γινόμενο ένα διψήφιο αριθμό (ΤΙ στην πρόσθεση) που αρχίζει με αυτό το ψηφίο.Το μοναδικό ψηφίο με την παραπάνω ιδιότητα είναι το 1(1x15=15).Αλλα αν ΤΙ=15 τότε δεν θα υπήρχε κρατούμενο στην στήλη των χιλιάδων, το οποίο σημαίνει ότι Υ πρέπει να είναι 0 ή 5 (15xΠ). Όμως ήδη έχουμε αντιστοιχίσει το 0 στο Ο και το 5 στο Ι. Άτοπο.

•Αν Ο=5 αυτό 15x5=75 σημαίνει ότι το κρατούμενο στην στήλη των δεκάδων θα είναι το 7.Ποιο είναι το Τ; Κάθε συνδυασμός από το 0 μέχρι το 8 καταλήγει σε άτοπο αλλά όταν Τ=9 δίνει άθροισμα των δεκάδων 142 (15x9+7=142).Σε αυτήν περίπτωση Ι=2 και 14 είναι το κρατούμενο για το άθροισμα των εκατοντάδων. Αλλά Ο=5 οπότε η στήλη έχει άθροισμα 89 (5x15+14) Τ=9 και το 8 είναι το κρατούμενο στην στήλη των χιλιάδων όπου και προτίθεται στα 15Π.Εδω κάθε άλλη τιμή εκτός από το Π=4 δίνει άτοπο 9 (είτε προκύπτει τριψήφιος είτε κάποιο ψηφίο που έχει δεσμευτεί από προηγούμενα γράμματα επαναλαμβάνεται).Τελικά,Υ=8 και τέλος Β=6.
Άρα, ΠΟΤΟ είναι 4595 και ΒΥΤΙΟ 68925.

188. • Μια προσέγγιση είναι να υποθέσουμε ότι το τραπουλόχαρτο στο κουτί 1 είναι κόκκινο. Τότε, αληθεύει ότι το ένα από τα τραπουλόχαρτα είναι κόκκινο και το άλλο μαύρο, άρα το τραπουλόχαρτο στο κουτί 2 πρέπει να είναι μαύρο. Αν τώρα το τραπουλόχαρτο στο κουτί 1 ήταν μαύρο, τότε δεν είναι αληθές ότι ένα τραπουλόχαρτο είναι κόκκινο και το άλλο μαύρο, δηλαδή τα δυο τραπουλόχαρτα πρέπει να είναι του ιδίου χρώματος, πράγμα που σημαίνει πάλι το τραπουλόχαρτο στο κουτί 2 πρέπει να είναι μαύρο(όπως και αυτό στο κουτί 1).Προκύπτει ,επομένως ,ότι ανεξάρτητα από το χρώμα του τραπουλόχαρτου που βρίσκεται στο κουτί 1, το τραπουλόχαρτο στο κουτί 2 είναι μαύρο. Άρα η πρόταση που είναι γραμμένη στο καπάκι του κουτιού 2 είναι ψευδής, άρα το ζάρι βρίσκεται στο κουτί 2.

• Οι αριθμοί απέναντι από το 18 και το 14 είναι διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί, αν ήταν ίδιοι δεν θα προέκυπτε το ίδιο άθροισμα για τους αριθμούς των απέναντι εδρών. Ο μοναδικός άρτιος πρώτος είναι ο αριθμός 2,αρα ο ένας τουλάχιστον αριθμός απέναντι από 14 και 18 θα είναι σίγουρα περιττός. Έτσι, προκύπτει ότι το άθροισμα των απέναντι εδρών θα είναι περιττός .Όμως βλέπουμε ότι απέναντι από το 35 για να προκύπτει περιττό άθροισμα πρέπει να βρίσκεται πρώτος άρτιος δηλαδή το 2.Έτσι 35+2=37.Άρα απέναντι από το 14 θα βρίσκεται 37-14=23.

189. Έστω ότι οι κρυμμένοι αριθμοί πίσω από τις κάρτες με την σειρά από αριστερά προς τα δεξιά είναι w,x,y,z.Έτσι, από υπόθεση θα ισχύει:

xyz=280
wyz=168
wxz=105
wxy=120

πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη:
(xyz)(wyz)(wxz)(wxy)=280*168*105*120 ή x3y3z3w3=(23*5*7)*(23*3*7) * (3*5*7) * (23*3*5) ή (xyzw)3=29*33*53*73 ή (xyzw)3=(23*3*5*7)3 άρα xyzw=23*3*5*7=840.

190. Από την δεύτερη εξίσωση έχουμε Δ=2ΟΥ , αντικαθιστούμε στην πρώτη
2ΟΥ-Υ-Ο=2 ή ΟΥ+ΟΥ-Υ-Ο=2 ή ΟΥ -Υ+ΟΥ-Ο=2 ή Υ(Ο -1)+Ο(Υ-1)=2 (1) Ούτε το Ο ούτε το Υ μπορεί να είναι μηδέν (διαιρούμε με αυτά) ούτε είναι αρνητικοί .Αν κάποιος από του δυο ισούται με 1 τότε Ο=1 ή Υ=1.
Αν Ο=1 τότε Υ-1=2 ή Υ=3 και Δ=6
Αν Υ=1 τότε Ο-1=2 ή Ο=3 και Δ=6
Οι δυο προσθετέοι στο πρώτο μέλος της (1) δεν μπορούν να είναι και οι δυο ισοι με 1 (ενώ αν ήταν μεγαλύτεροι από 1 το άθροισμα θα ξεπερνούσε το 2)
Άρα, οι δυο μοναδικές λύσεις είναι (6,3,1),(6,1,3) .

191. • Από την συνθήκη Δ) γίνεται αντιληπτό ότι ο Αλέξης και ο Αντώνης μελετούν άλγεβρα και φυσική όχι απαραίτητα με αυτήν την σειρά. Από την συνθήκη Ε) καταλαβαίνουμε ότι ο Αντώνης μελετά φυσική άρα ο Αλέξης μελετά άλγεβρα .Η συνθήκη Β) υπαινίσσεται ότι ο Κώστας μελετά οικονομικά και ακολούθως η Ντόρα μελετά χημεία. Επειδή το βιβλίο της Ντόρας δεν είναι πράσινο(Από την Α)) και (από την Ζ)) ο Αλέξης και ο Αντώνης δεν μελετούν από βιβλίο με μπλε εξώφυλλο άρα το βιβλίο του Κώστα είναι μπλε. Η συνθήκη Γ) υπαινίσσεται ότι το εξώφυλλο του βιβλίο του Αλέξη είναι άσπρο(άλγεβρα). Άρα του Αντώνη είναι κίτρινο .

•Έστω οι διαδοχικοί πρώτοι αριθμοί p_1,p_2,p_3 τέτοιοι ώστε $p_1<p_2<p_3$ από την υπόθεση ισχύει:$p_1+p_2+p_3+1= p_4$ οπού ο p_4 επίσης πρώτος αριθμός , αν οι p_1,p_2,p_3 είναι όλοι τους περιττοί τότε ο p_4 θα ήταν άρτιος, άτοπο .Άρα ο p_1 είναι άρτιος , ο μοναδικός άρτιος που είναι και πρώτος είναι ο 2,έτσι $p_1=2,p_2=3,p_3=5$.Τελικα,οι βαθμοί ήταν: Κώστας=5 ,Αλέξης =3 , Αντώνης =2).Διέπρεψαν….

192. Το πρώτο παιδί πρέπει να μπει και να σταθεί στην μέση της αίθουσας , το δεύτερο θα σταθεί στο πλάι του και κάθε επόμενο παιδί που θα μπει στην αίθουσα θα βλέπει την γραμμή αν όλα τα παιδιά φορούν το ίδιο χρώμα καπέλων θα πάει να σταθεί στο ένα άκρο της γραμμής αν βλέπει να φορούν διαφορετικό χρώμα καπέλων θα πάει να σταθεί σφήνα ανάμεσα στο ζεύγος των διαδοχικών παιδιών με το διαφορετικό χρώμα καπέλου.

Αν ο Ασημάκης εφάρμοζε τις παραπάνω κινήσεις σε λ στήλες και μ γραμμές τότε το πλήθος των άδειων κελιών θα είναι 100λ-2μλ+100μ,θα πρέπει να ισχύει:
100λ-2μλ+100μ =2014 ή 50λ-μλ+50μ =1007 ή -50λ+μλ-50μ+ 2500=2500-1007 ή -50λ+ 2500+μλ-50μ=1493 ή 50(-λ+50)+μ(λ-50)=1493 ή -50(λ-50)+μ(λ-50)=1493 ή (λ-50)(μ-50)=1493
παρατηρούμε, ότι ο 1493 είναι πρώτος αριθμός. Η εξίσωση δεν έχει λύσεις φυσικούς αριθμούς.
Δεν υπάρχει ακολουθία κινήσεων που θα οδηγήσει στην κατάσταση η προθήκη θα έχει 2014 άδεια κελιά.

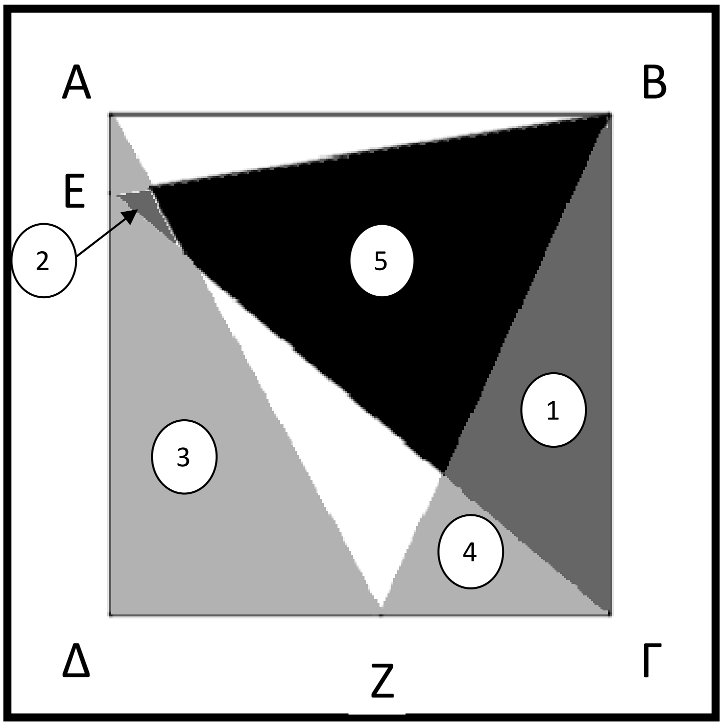
193. • Ναι. Είναι δυνατό πάντα. Όταν ο λοχίας πάρει θέση σε κάποιο σημείο της γραμμής συμβολίζουμε με Λ το πλήθος των νεοσύλλεκτων που βρίσκονται αριστερά του και τον κοιτούν ενώ Δ το πλήθος των νεοσυλλέκτων που βρίσκονται δεξιά του και τον κοιτούν.

Αν ο λοχίας σταθεί στο αριστερό άκρο της γραμμής τότε κανένας δεν βρίσκεται αριστερά του άρα κανένας δεν τον κοιτά από τα αριστερά του (Λ=0). Αν κανένας στα δεξιά του δεν τον κοιτά τότε το πρόβλημα έχει λυθεί. Αλλιώς Δ > 0.Τωρα ο λοχίας κινείται προς τα δεξιά ένα στρατιώτη την φορά. Αν περάσει ένα στρατιώτη που κοιτά δεξιά (όταν δηλαδή βλέπει την πλάτη του), τότε το Λ αυξάνεται κατά 1 και το Δ δεν αλλάζει.Αν περάσει ένα στρατιώτη που κοιτά αριστερά τότε το Λ δεν μεταβάλλεται και το Δ ελαττώνεται κατά 1.Αν περάσει ένα στρατιώτη που έχει κάνει μεταβολή δηλαδή δεν κοιτά ούτε αριστερά του δεξιά σε αυτήν την περίπτωση δεν αλλάζει ούτε το Δ ούτε το Λ.

Τι συμβαίνει στην διαφορά Λ-Δ καθώς ο λοχίας κινείται από το αριστερό άκρο προς τα δεξιά. Αρχικά είναι αρνητικό ή μηδέν. Αν είναι μηδέν το πρόβλημα έχει λυθεί. Μεταβάλλεται καθώς προχωράει ο λοχίας κατά 1 και θα καταλήξει στο άλλο άκρο της σειράς να γίνει θετική. Κάποια στιγμή θα γίνει 0 και αυτή είναι η ζητούμενη θέση.

• Τέσσερις στρατιώτες αρκούν.Πραγματικά,μπορεί να εφαρμοστεί το ακόλουθο πρόγραμμα: Όλοι φυλάνε σκοπιά επί 24 ώρες και μετά αναπαύονται για τρεις ολόκληρες ημέρες.(72 ώρες) Θα αποδείξουμε ότι το πλήθος των υπαλλήλων δεν μπορεί να είναι μικρότερο. Πραγματικά, αν ένας στρατιώτης φυλάξει σκοπιά για περίοδο 24 ωρών απαιτούνται τουλάχιστον τρεις υπάλληλοι για να φυλάξουν την διάρκεια της ανάπαυλας του(60 ώρες).Αν κανείς δεν φυλάει σκοπιά περισσότερο από 12 ώρες, τότε απαιτούνται τουλάχιστον τρεις στρατιώτες για να καλύψουν το διάστημα που δεν φυλάει σκοπιά ο στρατιώτης της βραδινής βάρδιας (6μ.μ μέχρι τις 6 π.μ).

• Ο μηχανισμός του ρολογιού λειτουργεί σωστά, αλλά ,ο λεπτοδείκτης του έχει χαλαρώσει και μπορεί να κινείται ελεύθερα από την σωστή του θέση κατά γωνία ίση με αυτή που διαγράφει ο λεπτοδείκτης σε δυο λεπτά (12^o).Λόγω του βάρους του , βρίσκεται πάντα χαμηλότερα από το σωστό σημείο. Έτσι, όταν βρίσκεται στο αριστερό μέρος του ρολογιού πηγαίνει δυο λεπτά πίσω, ενώ όταν βρίσκεται στο δεξιό μέρος πηγαίνει δυο λεπτά μπροστά.



• Χρωματίζουμε τα τρίγωνα 1 και 2 με σκούρο γκρι χρώμα. Αν θεωρήσουμε το τρίγωνο μαύρου χρώματος 5 και τα τρίγωνα σκούρου γκρι χρώματος 1,2 λαμβάνουμε το τρίγωνο ΒΕΓ, το οποίο έχει εμβαδό το μισό από το εμβαδό του τετραγώνου. (Βάση η πλευρά ΒΓ του τριγώνου και μήκος ύψους το μήκος της πλευράς ΑΒ) Αν τώρα θεωρήσουμε τα γκρι τρίγωνα 4,3 και τα τρίγωνα σκούρου γκρι χρώματος 1,2 έχουν συνολικό εμβαδό το μισό του εμβαδού του τετραγώνου καθώς προκύπτουν από το τετράγωνο εν αφαιρέσουμε το τρίγωνο ΑΒΕ .Άρα τα ζητούμενα χωρία γκρι και μαύρου χρώματος είναι ισεμβαδικά.

V. Proizvolov, περιοδικό *Kvant*.

195. • Έστω α το ζητούμενο πλήθος πλανητών ,τότε $\alpha=\nu^2$, α, ν θετικοί φυσικοί αριθμοί. Αν διαγράψουμε τα δυο τελευταία ψηφία του α προκύπτει ο αριθμός $\beta=\kappa^2$ όπου β, κ θετικοί φυσικοί αριθμοί και λαμβάνοντας υπόψη ότι δεν είναι τα δυο τελευταία ψηφία του α μηδέν θα ισχύει η σχέση:

$$0<\alpha-100\beta<100 \quad \text{ή} \quad 0<\nu^2-100\kappa^2<100$$

$$\begin{cases} 0<\nu^2-100\kappa^2 \\ \nu^2-100\kappa^2<100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu^2>100\kappa^2 \\ \nu^2-100\kappa^2-100<0 \end{cases} \overset{\kappa,\nu\in\mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \nu>10\kappa \\ \nu^2-100\kappa^2-100<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu\geq 10\kappa+1 & (1) \\ \nu^2-100\kappa^2-100<0 & (2) \end{cases}$$

$\nu \ge 10\kappa+1 \Rightarrow \nu^2 \ge (10\kappa+1)^2 \Leftrightarrow \nu^2 \ge 100\kappa^2+20\kappa+1 \Leftrightarrow \nu^2-100\kappa^2 \ge 100\kappa^2+20\kappa+1-100\kappa^2 \Leftrightarrow$
$\nu^2-100\kappa^2-100 \ge 20\kappa+1-100 \Leftrightarrow \nu^2-100\kappa^2-100 \ge 20\kappa-99$

Από (2): $0 > \nu^2-100\kappa^2-100 \ge 20\kappa-99 \Leftrightarrow 0 > 20\kappa-99 \Leftrightarrow \frac{99}{20} > \kappa$.Άρα $\kappa < 5$

-Αν κ=4 τότε $\nu \ge 10\cdot 4+1 \Leftrightarrow \nu \ge 41$. Κρατάμε μόνο το 41, διότι αν $\nu \ge 42$ η σχέση (1)
$\nu^2-100\cdot\kappa^2 \ge 42^2-100\cdot 4^2 \Leftrightarrow \nu^2-100\cdot 4^2 \ge 42^2-100\cdot 4^2 \Leftrightarrow \nu^2-100\cdot 4^2 \ge 164 > 100$ Άτοπο.

-Αν κ=3,2,1 οι αριθμοί που προκύπτουν είναι μικρότεροι από το 41^2 =1681.Αρα ο γαλαξίας έχει 1681 πλανήτες.

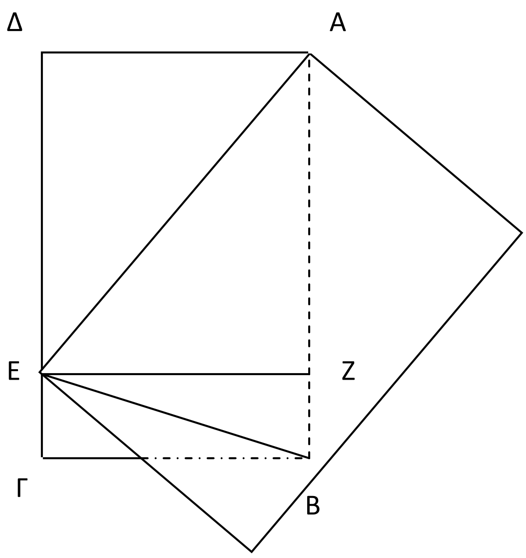
• Θεωρούμε την χώρα-έδρα με το μεγαλύτερο αριθμό πλευρών. Αν αυτή η έδρα έχει μ πλευρές , τότε γειτονεύει με μ έδρες. Κάθε μια από αυτές τις έδρες πρέπει να έχει τουλάχιστον τρεις πλευρές .Άρα η έδρα και οι γειτονικές της είναι συνολικά πλήθους μ+1 και κάθε έδρα πρέπει να έχει από 3 μέχρι μ πλευρές. Άρα τουλάχιστον δυο έδρες έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών.

Θυμίζω ότι στην Στερεομετρία, ένα πολύεδρο είναι κυρτό όταν δεν υπάρχουν κορυφές του πολυέδρου που βρίσκονται εκατέρωθεν του επιπέδου μιας τουλάχιστον έδρας.

196. •Το εμβαδό ενός χάρτη κλίμακας 1:κ ισούται με το $1/\kappa^2$ της επιφάνειας που αναπαριστά . θεωρούμε ότι το πλήθος των ανθρώπων που μπορεί να χωρέσουν σε μια περιοχή είναι ανάλογο του εμβαδού της. Επομένως ,αν το εμβαδό της Λοξολάνδης είναι Ελ και Εχ το εμβαδό του χάρτη τότε θα ισχύει:

Εχ/Ελ=$1/5000000^2$ ή Εχ/Ελ=1/25000000000000 και το πλήθος των ανθρώπων που χωρά στον χάρτη είναι 200000000/25000000000000 =0,000008 άτομα.

•Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ που είναι κάθετο στην ΑΒ. Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογώνιου ΑΒΓΔ. Κατά συνέπεια το καλυμμένο τμήμα του χάρτη έχει μεγαλύτερο εμβαδό.



• Το μοναδικό είδος τριγώνου που ικανοποιεί την συνθήκη είναι το ισοσκελές ορθογώνιο. Πράγματι αν θεωρήσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η πλευρά α=ΒΓ είναι μικρότερη ή ίση από το αντίστοιχο ύψος υ_α και η

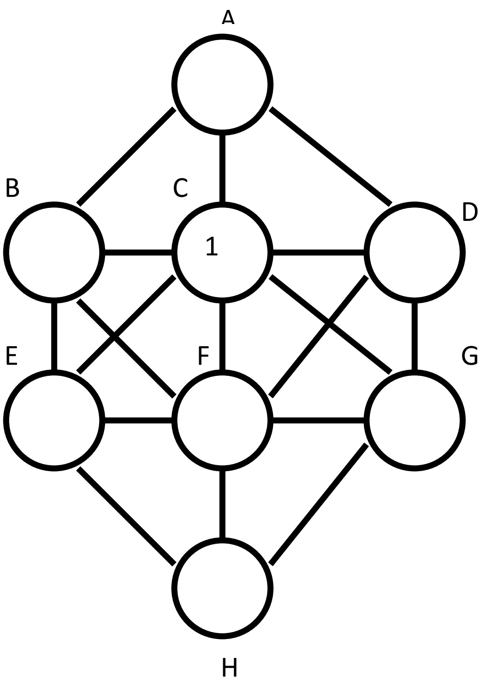
<u>πλευρά β=ΓΑ είναι μικρότερη η ίση από το ύψος υ_β.</u> Προφανώς, ένα ύψος δεν μπορεί να μεγαλύτερο από μια πλευρά που ξεκινά από την ίδια κορυφή του τριγώνου, επομένως, έχουμε την επομένη σειρά ανισοτήτων

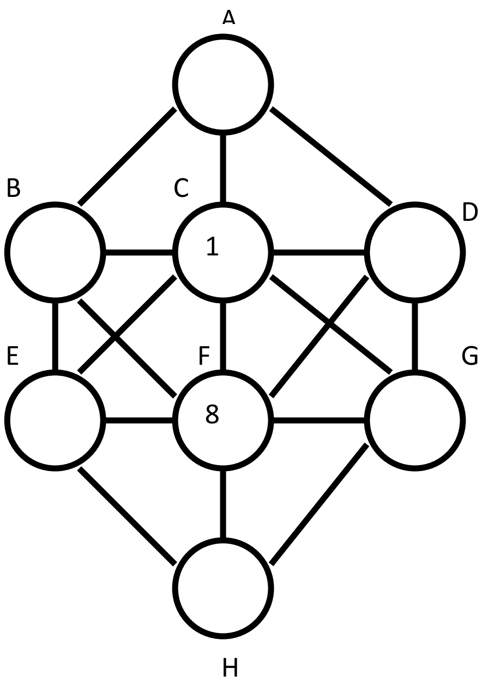
$$\alpha<=\upsilon_\alpha<=\beta<=\upsilon_\beta<=\alpha$$

Οπότε $\alpha=\beta=\upsilon_\alpha=\upsilon_\beta$.Όμως η ισότητα $\alpha=\upsilon_\alpha$, αληθεύει μόνο όταν η πλευρά α συμπίπτει με το υ_β δηλαδή, όταν η α είναι κάθετη στην β. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι <u>ισοσκελές ορθογώνιο.</u>

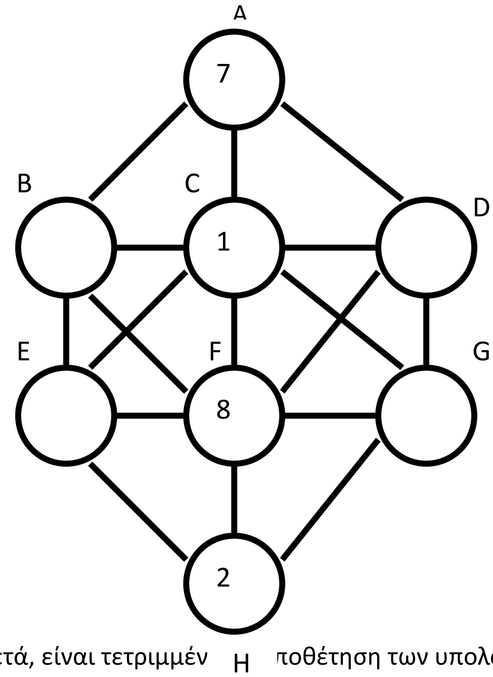
197. Υπάρχουν 8!=40320 διαφορετικές τοποθετήσεις των οχτώ αριθμών στο σχήμα, άρα εύκολα μπορούμε να φανταστούμε ότι η τακτική δοκιμής -λάθους δεν είναι και τόσο πρόσφορη.

Οι αριθμοί 2,3,4,5,6,7 έχουν ο καθένας δυο αριθμούς που διαφέρουν κατά 1,δυο αριθμούς *γείτονες*. Οι αριθμοί 1 και 8 έχουν μόνο ένα *γείτονα*. Παρατηρούμε ότι ο κύκλος C συνδέεται άμεσα με κάθε κύκλο εκτός από τον κύκλο Η.Άρα, αν ο κύκλος C περιέχει τους αριθμούς 2,3,4,5,6,7 μόνο ένας κύκλος, ο Η θα μείνει για να φιλοξενήσει τους δυο γείτονες του. Άτοπο. Οπότε στο C υποχρεούμαστε να τοποθετήσουμε το 1 ή το 8. Όμοια μπορούμε να συμπεράνουμε ότι στο F θα τοποθετήσουμε το 1 ή το 8.Μπορούμε λοιπόν να αρχίσουμε την τοποθέτηση βάζοντας στο C το 1 και στο H το 8. *(Θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε βάζοντας στο C το 8 και στο H το 1 λαμβάνοντας μια συμμετρική λύση.)*

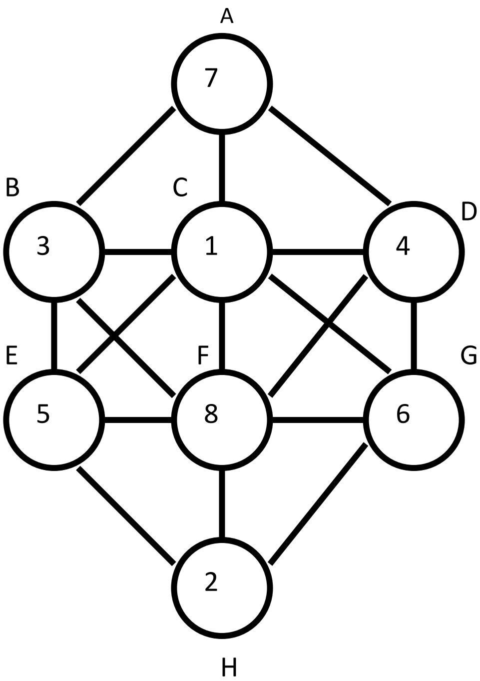




Ο κύκλος **H** είναι ο μόνος που μπορεί να τοποθετηθεί το 2 και ανάλογα ο κύκλος **A** είναι ο μόνος τον οποίο μπορεί να τοποθετηθεί το 7.



Από αυτό το σημείο και μετά, είναι τετριμμέν ποθέτηση των υπολοίπων αριθμών.

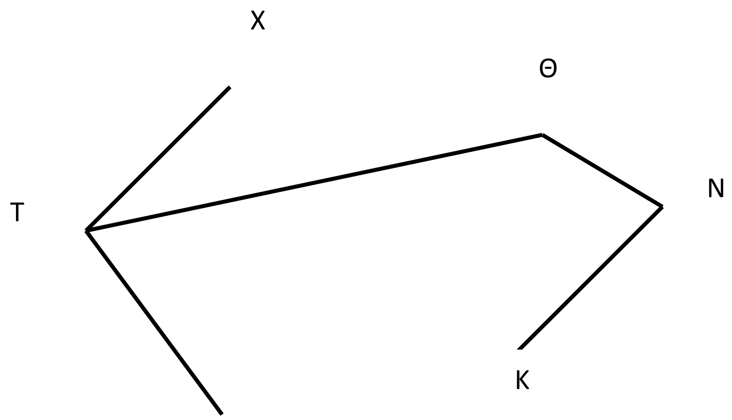


Mathematics Magazine vol 45, November 1972

198. Συνήθως αυτού του είδους τα προβλήματα λύνονται εξετάζοντας και απορρίπτοντας περιπτώσεις μέχρι να καταλήξουμε στην τελική. Μια διαδικασία που μπορεί να αποβεί μακροσκελής όσο αυξάνονται οι συνθήκες. Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι δυνατό να λυθεί πολύ ευκολότερα αν κατασκευάσουμε ένα σχήμα (γράφημα).

Θεωρούμε στο επίπεδο έξι σημεία (κορυφές) που αναπαριστούν τον καθένα από τους έξι φοιτητές . Και ενώνουμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα (ακμή) δυο σημεία όταν υπάρχει δήλωση που συνδέει τους δυο φοιτητές. Για παράδειγμα, η ακμή ΤΓ προέρχεται από την δήλωση του Χάρη ή η ακμή ΝΚ προέρχεται από την δήλωση του Τάσου. Εφόσον καθένας από τους τέσσερεις φοιτητές ονόμασε έναν αθώο και έναν ένοχο τέσσερεις από τις ακμές του σχήματος ενώνουν έναν ένοχο και έναν αθώο, ένας από τους φοιτητές υπέδειξε δυο άτομα που και οι δυο είναι αθώοι άρα μια ακμή ενώνει δυο αθώους. Από τα παραπάνω έπεται ότι τέσσερα άκρα από τις ακμές του γραφήματος αναπαριστούν ένοχους και έξι άκρα από τις ακμές αναπαριστούν ενόχους. Εφόσον κανένας φοιτητής δεν υπέδειξε και τους δυο ενόχους δεν υπάρχει ακμή που ενώνει τους δυο ενόχους.

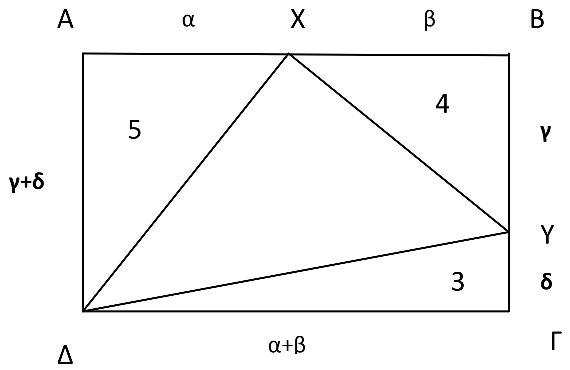
Από το σχήμα, αρκεί να βρούμε δυο κορυφές του σχήματος που δεν ενώνονται με μια ακμή και συνολικά καταλήγουν σε αυτές τέσσερεις ακμές. Το μόνο ζεύγος είναι οι κορυφές Τ και Κ άρα οι ένοχοι είναι ο Τάσος και ο Κώστας….



Two year College Mathematics Journal (1979)

Γ

199. Κατασκευάζουμε σχήμα. Ονομάζουμε ΑΒΓΔ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ΔΧΥ το τρίγωνο που μας αφορά. Έστω α,β,γ,δ τα μήκη των τμημάτων ΑΧ,ΧΒ,ΒΥ,ΥΓ.



Από το σχήμα και τον τύπο $\mathrm{E} = \dfrac{\beta\alpha\sigma\eta \cdot \upsilon_{\beta\alpha\sigma\eta\varsigma}}{2}$ για το εμβαδό τριγώνου προκύπτουν οι ισότητες.

α(γ+δ)=10 (1)

βγ=8 (2)

δ(α+β)=6 (3)

Γνωρίζουμε, για το εμβαδό του τρίγωνο ΔΧΥ (ΔΧΥ) και το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου (ΑΒΓΔ) ότι ισχύει η ισότητα:

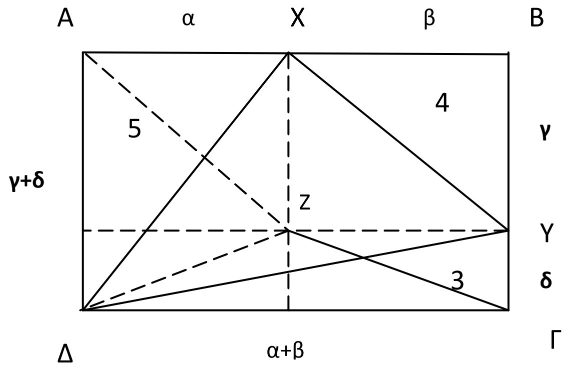
(ΔΧΥ)=(ΑΒΓΔ)-(3+4+5) ή (ΔΧΥ)=(ΑΒΓΔ)-12 (4)

Συνεπώς, αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδό του ΑΒΓΔ ή με την βοήθεια του συστήματος των (1),(2) (3) να υπολογίσουμε την ποσότητα (α+β)(γ+δ).

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\underset{\delta(\alpha+\beta)=6\Leftrightarrow\alpha+\beta=\frac{6}{\delta}}{\overset{\alpha(\gamma+\delta)=10\Leftrightarrow\gamma+\delta=\frac{10}{\alpha}}{=}}\frac{10}{\alpha}\frac{6}{\delta}=\frac{60}{\alpha\delta}$$

Το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό την τιμής του αδ .

Στο σχήμα φέρνουμε παράλληλη από το Υ στις πλευρές ΑΒ,ΔΓ του τριγώνου. Κατόπιν φέρνουμε παράλληλη από το σημείο Χ προς τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ. Το σημείο τομής των παράλληλων είναι το σημείο Ζ. Ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα το Ζ με τις κορυφές Α,Δ και Γ .



Από το σχήμα, είναι προφανές ότι : (ΔΧΥ)=(ΧΖΥ)+ΔΖΥ)+(ΧΖΔ) ή (ΔΧΥ)=4+$\frac{\beta\delta}{2}$ +$\frac{\alpha\gamma}{2}$

Από την σχέση (4) προκύπτει:

4+$\frac{\beta\delta}{2}$ +$\frac{\alpha\gamma}{2}$ =(ΑΒΓΔ)-12 ή (ΑΒΓΔ)=16+$\frac{\beta\delta}{2}$ +$\frac{\alpha\gamma}{2}$ ή (ΑΒΓΔ)=$16+\frac{1}{2}\left(\beta\delta+\alpha\gamma\right)$ **(5)**

$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=16+\frac{1}{2}\left(\beta\delta+\alpha\gamma\right)$ ή $\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta=16+\frac{1}{2}\left(\beta\delta+\alpha\gamma\right)$

$\alpha\gamma+\alpha\delta+8+\beta\delta=16+\frac{1}{2}\left(\beta\delta+\alpha\gamma\right)$ ή $\frac{1}{2}\alpha\gamma+\frac{1}{2}\beta\delta=8-\alpha\delta$ ή

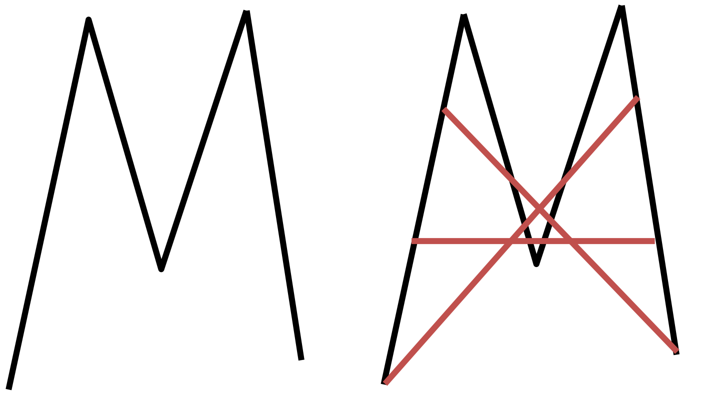
$\frac{1}{2}\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)=8-\alpha\delta\Leftrightarrow16+\frac{1}{2}\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)=16+8-\alpha\delta\overset{(5)}{\Leftrightarrow}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=24-\alpha\delta$ **(6)**

Αλλά, $(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=\frac{60}{\alpha\delta}\Leftrightarrow\frac{60}{\alpha\delta}=24-\alpha\delta\Leftrightarrow\left(\alpha\delta\right)^2-24\alpha\delta+60=0\Leftrightarrow..\Leftrightarrow\alpha\delta=12\pm2\sqrt{21}$

Άρα, $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = 24 - \alpha\delta = 24 - \left(12 \pm 2\sqrt{21}\right) = 12 \pm 2\sqrt{21}$

Επειδή $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = 12 + (\mathrm{XYZ}) > 12$ δεχόμαστε μόνο την μια τιμή άρα $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = 12 + 2\sqrt{21}$ τελικά $(\mathrm{XYZ}) = 2\sqrt{21}$.

200. *Δίνεται το γράμμα Μ ,να φέρετε τρεις ευθείες γραμμές έτσι ώστε να σχηματιστούν 9 τρίγωνα ξένα μεταξύ τους.*



200. Έστω α το πλήθος των οικογενειών που ζουν στην Κάτω μηλιά. Από την υπόθεση έχουμε:

$$724 = \alpha\lambda + \upsilon \quad (1)$$
$$857 + \upsilon = \alpha\mu \quad (2)$$
$$1503 + \upsilon = \alpha\nu \quad (3)$$

α,λ,μ,υ,ν θετικοί ακέραιοι

Από (1) ,(2) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$724 + 857 = \alpha\mu + \alpha\lambda \Leftrightarrow 724 + 857 = \alpha\left(\mu + \lambda\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1581 = \alpha\left(\mu + \lambda\right) \Leftrightarrow 3 \cdot 17 \cdot 31 = \alpha\left(\mu + \lambda\right) \quad (4)$$

Από (1) ,(3) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$724 + 1503 = \alpha\nu + \alpha\lambda \Leftrightarrow 2227 = \alpha\left(\nu + \lambda\right) \Leftrightarrow 17 \cdot 131 = \alpha\left(\nu + \lambda\right) \ (5)$$

Από τις (4) και (5) προκύπτει ότι α=17 αφού ο 17 είναι ο μοναδικός ακέραιος αριθμός που διαιρεί ταυτόχρονα τους $3 \cdot 17 \cdot 31$, $17 \cdot 131$.

Άρα, στο χωριό ζουν 17 οικογένειες.

201. Ο Τοτος πρέπει να ρωτήσει :

«Ποιος από τους έξι δρόμους δεν οδηγεί στο ξενοδοχείο;»

Αν ο κάτοικος λέει πάντα ψέματα θα του δείξει ένα δρόμο αυτόν που οδηγεί το ξενοδοχείο.

Αν ο κάτοικος λέει πάντα αλήθεια θα του δείξει τους πέντε δρόμους που δεν οδηγούν στο ξενοδοχείο.

Σε κάθε περίπτωση ,ο Τοτος θα γνωρίζει ποιον δρόμο να πάρει.

202. Το άθροισμα των βόλων είναι 6+8+8+9=31 ,έχουμε 4 σωρούς και σε κάθε γύρο το πλήθος των σωρών αυξάνει κατά 1 .Αρα πρόκειται να πραγματοποιηθούν 31-4=27 γύροι .Οι παίκτες παίζουν με την σειρά 1,2,3,4,5 οπότε αν διαιρέσουμε το 27 με το 5 και λάβουμε το υπόλοιπο έχουμε 2.Αρα ο 2ος είναι ο τελευταίος παίκτης που θα μπορέσει να παίξει, οπότε ο παίκτης 3 έχασε!!

204.

- Θα το λύσουμε με την μέθοδο των έξυπνων δοκιμών. Αναζητούμε όλους τους τετραψήφιους με άρτια ψηφία άλλα να είναι και τέλεια τετράγωνα.

Πρώτα πρώτα οι ζητούμενοι αριθμοί αρχίζουν από 2,4,6,8.

Άρα περιορίζουμε τους αριθμούς στα διαστήματα:

(1999,3000),(3999, 5000), (5000, 5999), (7999 , 9000)

Ακολούθως οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών των παραπάνω διαστημάτων είναι αντίστοιχα στα διαστήματα:

(45, 55),(63,71),(77,84) , (89, 95)

Έστω $(10α+β)^2$ οι ζητούμενος αριθμός και 10α+β η τετραγωνική του ρίζα (α θετικός ακέραιος ,β ακέραιος με 0<=β<=9)

Έτσι $(10α+β)^2=100α^2+20αβ+β^2$ με 0<=β<=9

Το ψηφίο των μονάδων β του 10α+β είναι άρτιος .Επίσης το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού $(10α+β)^2$ είναι άρτιος όπως επίσης άρτιος είναι και το ψηφίο των δεκάδων του $β^2$ (Ο όρος 20αβ συνεισφέρει ένα άρτιο ψηφίο στην δεκάδα και ο όρος $100α^2$ συνεισφέρει στο ψηφίο της δεκάδας ένα μηδέν). Αρα η ζητούμενη τετραγωνική ρίζα δεν μπορεί να έχει τελευταίο ψηφίο 4 ή 6. (4^2=**1**6,6^2=**3**6)

Οι ζητούμενες τετραγωνικές ρίζες έχουν άρτια ψηφία.

Οπότε λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω μένουν οι εξής αριθμοί:

$68^2=4624$ $80^2=6400$

$78^2=6084$ $92^2=8464$

- Έστω ν το πλήθος των συμμετεχόντων –πλην των γιων του Κλεόβουλου-στο τουρνουά τάβλι και έστω μ ο αριθμός των βαθμών που έλαβε ο κάθε διαγωνιζόμενος. Ο συνολικός αριθμός των βαθμών που δόθηκαν στους διαγωνιζόμενους είναι μν+8.Προφανώς ο αριθμός αυτός είναι ο αριθμός των παιχνιδιών που έλαβαν χώρα στο τουρνουά. Εφόσον το συνολικό πλήθος των παικτών είναι ν+2 και ο καθένας τους έπαιξε ν+1 παιχνίδια ,συνολικά παίχτηκαν $\frac{(ν+2)(ν+1)}{2}$ παιχνίδια.

Οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$\mu\cdot\nu+8=\frac{(\nu+2)(\nu+1)}{2}\Leftrightarrow....\Leftrightarrow\nu(\nu+3-2\mu)=14$$

Προφανώς ο ν είναι θετικός ακέραιος , ο όρος ν+3-2μ είναι επίσης ακέραιος καθώς ο μ το πολύ-πολύ να έχει παρονομαστή το 2.

Άρα ο ν είναι προφανώς διαιρέτης του 14 :1,2,7,14.

Οι περιπτώσεις 1 και 2 απορρίπτονται καθώς ο σύνολο των συμμετεχόντων δεν θα υπερέβαινε το 4 και δεν θα μπορούσε να συγκεντρωθούν 8 βαθμοί από τα παιδιά του Κλεόβουλου.

Άρα ν=7 ή ν=14 οποτε το σύνολο των συμμετεχόντων στο τουρνουά τάβλι είναι 9 ή 16.

•Το πρόβλημα ανάγεται στον να επιλεγούν τυχαία 5 αριθμοί από του σύνολο {1,2,3,4,5,6,7} ,να δοθεί το γινόμενο τους και από το γινόμενο δεν μπορεί να εξαχθεί συμπέρασμα αν το άθροισμα των 5 αριθμών είναι άρτιος η περιττός .Το ερώτημα είναι ποιο είναι το γινόμενο των 5 αριθμών. Αρχικά σκεφτόμαστε ότι αν δοθεί το γινόμενο των 5 αριθμών ουσιαστικά δίνεται και το γινόμενο των δυο αριθμών που απομένουν. Τα μόνα δυνατά γινόμενα τα οποία είναι εφικτό να παραχθούν από περισσότερα από ένα ζευγάρι αριθμών είναι :

12 με { 3*4 ,2*6}

6 με {1*6,2*3 }

Η δεύτερη περίπτωση απορρίπτεται διότι το άθροισμα και των δυο ζευγών (1+6,2+3} είναι περιττός άρα και το άθροισμα τω 5 εναπομεινάντων αριθμών θα είναι περιττός επίσης .

Άρα έχουμε την πρώτη περίπτωση κατά συνέπεια το ζητούμενο γινόμενο είναι

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{12}=420$$

205. 1)Στο φύλλο χαρτί είναι γραμμένη η παρακάτω εξίσωση στο λατινικό αριθμητικό σύστημα , ανάλογα από πού το κοιτάζει κανείς το βλέπει σωστό ή λάθος.

I+IX=X

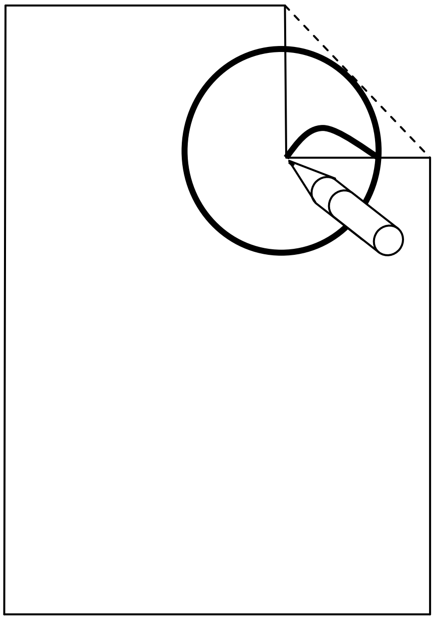
2)Ο οδηγός του φορτηγού ξεφούσκωσε τα λάστιχα.

3)Ο οδηγός του φορτηγού ήταν πεζός.

4)Ποιο είναι το νούμερο στην θέση που εχει παρκάρει το αυτοκίνητο;

4)87.Πρέπει να κοιτάξουμε τους αριθμούς ανάποδα όπως τους βλέπει ο οδηγός.

5)Με αφετηρία το κέντρο και διπλώνοντας το χαρτί όπως φαίνεται το σχήμα ,σχεδιάζουμε τον κύκλο μονοκονδυλιά.



6)Γραμματα του αλφαβητου.

206. Ο μικρότερος τριψήφιος θα έχει ψηφίο εκατοντάδων το 1, είναι όμως γεωμετρικά προοδευτικός; Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός μας είναι ο $\overline{1\lambda\lambda^2}$ όπου 1,λ,λ^2 διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, λ ψηφίο δεκάδων και λ^2 ψηφίο μονάδων ($\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$).Ο υποψήφιος γεωμετρικά προοδευτικός τριψήφιος είναι μικρότερος όσο είναι πιο μικρό είναι το λ. Η μικρότερη τιμή του λ είναι το 2.

Από όπου προκύπτει ο αριθμός 124 ο οποίος πληροί τις προϋποθέσεις μας.

Ο μεγαλύτερος τριψήφιος έχει ψηφίο εκατοντάδων το 9 είναι όμως όμως γεωμετρικά προοδευτικός; Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός μας είναι ο $\overline{9XY}$ όπου 1,X,Y διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, X ψηφίο δεκάδων και Y ψηφίο μονάδων ($X, Y \neq 0$).

Τότε αν ο λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι το λ ($\lambda \neq 0 \, \lambda \neq 1$) θα ισχύει $X = 9\lambda$, $Y = 9\lambda^2$

Ποιες είναι οι δυνατές τιμές στου λ για έχουμε όσο το δυνατό μεγαλύτερο αριθμό.

Αν $X = 8 \Leftrightarrow 9\lambda = 8 \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{9}$ τότε $Y = 9\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{9}$ δεν είναι καν ακέραιος .

Κατεβαίνουμε μια μονάδα.

Αν $X = 7 \Leftrightarrow 9\lambda = 7 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{9}$ τότε $Y = 9\left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{49}{9}$ δεν είναι καν ακέραιος .

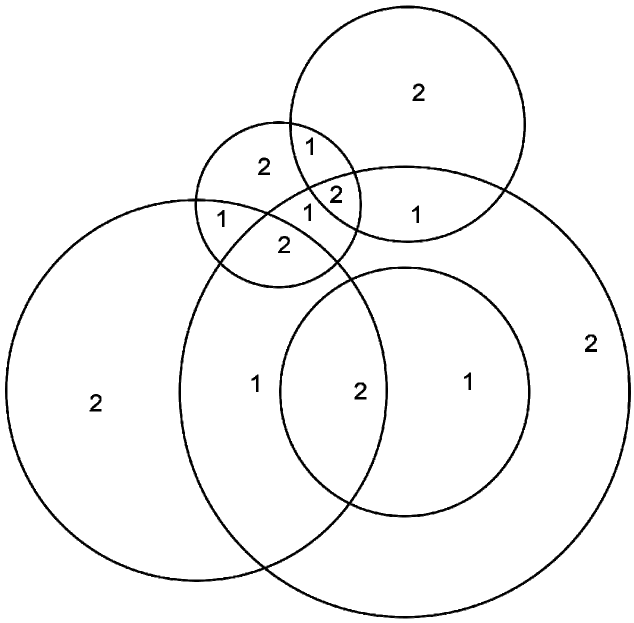
Συνεχίζουμε

Αν $X = 6 \Leftrightarrow 9\lambda = 6 \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ τότε $Y = 9\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 4$ ακέραιος

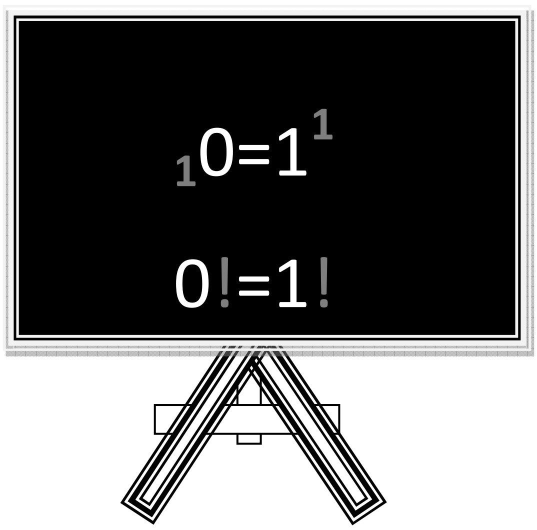
Άρα ο μεγαλύτερος γεωμετρικά προοδευτικός είναι ο 964.

•Είναι βέβαιο ότι έχει μετρήσει λάθος. Κάθε φορά που κόβει ένα χαρτί στα 3 προσθέτει στο υπάρχον πλήθος των κομματιών 2 επιπλέον άρα μετά από ν κοψίματα θα έχουμε 3+2ν κομμάτια ,αλλά 3+2ν=100 ή ν=97/2 κοψίματα ,άτοπο.

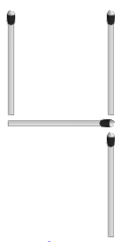
207.Δυο μόνο χρώματα αρκούν. Χρησιμοποιούμε το χρώμα 1 για νομούς που βρίσκονται στο εσωτερικό της τομής αρτίου πλήθους κύκλων και το χρώμα 2 για τους υπολοίπους. Ουσιαστικά πρόκειται για περασμένο αριθμό κύκλων που διαιρούν το επίπεδο σε χωρία με σύνορα που σχηματίζονται από πεπερασμένο αριθμό τόξων.



208.



209.



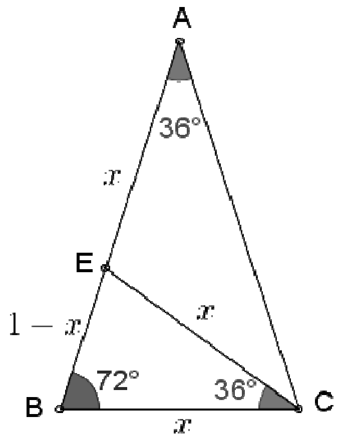
 Οι λύσεις στην σελ 166

210. $\eta\mu(666^o) = -\frac{\Phi}{2}$

$\eta\mu 666^o = \eta\mu(630^o + 36^o) =$

$= \eta\mu(7 \cdot 90^o + 36^o) = -\sigma\upsilon\nu 36^o$

Πως υπολογίζουμε την γεωμετρικά την τιμή του $-\sigma\upsilon\nu(36^o)$.
Κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ABC
,με $AB = AC = 1$ και $\widehat{A} = 36^0$.
Έστω Ε σημείο της AB, ώστε $CE = BC = x$,οπότε:



Από τα όμοια τρίγωνα ABC, CBE έχουμε:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο CBE :

$$BE^2 = EC^2 + BC^2 - 2 \cdot EC \cdot BC \cdot \sigma\upsilon\nu 36^0 \Leftrightarrow$$

$$(1-x)^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu 36^0 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2x + x^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \sigma\upsilon\nu 36^0 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2x = x^2 - 2x^2 \sigma\upsilon\nu 36^0 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2x - x^2 = -2x^2 \sigma\upsilon\nu 36^0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x - 1 = 2x^2 \sigma\upsilon\nu 36$$

$$\sigma\upsilon\nu 36^0 = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 36^0 = \frac{x^2 + x - 1 + x}{2x^2} \overset{x^2+x-1=0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 36^0 = \frac{x}{2x^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 36^0 = \frac{1}{2x} \overset{x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\Leftrightarrow}$$

$$\sigma\upsilon\nu 36^0 = \frac{1}{2\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 36^0 = \frac{1}{\sqrt{5}-1}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 36^0 = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} \Leftrightarrow$$

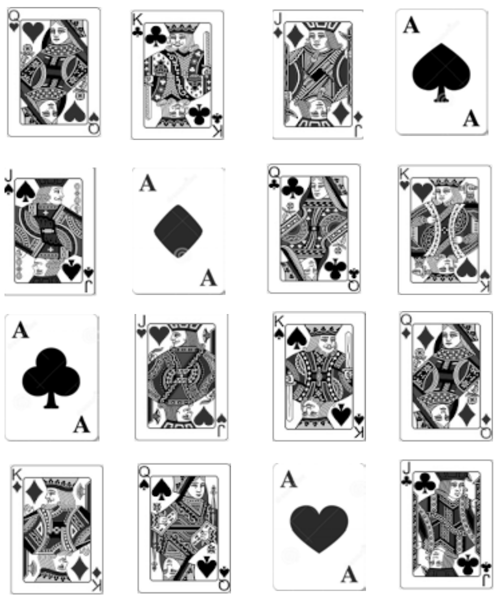
$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 36^0 = \frac{\Phi}{2}$$

Τελικά ισχύει : $\eta\mu 666^o = -\frac{\Phi}{2}$.

211.Προφανώς οκτώ από τα ευθύγραμμα τμήματα χωρίζονται σε δυο μέρη και με την «κύλιση» ανασυνθέτουν εννέα μεγαλύτερα τμήματα.

212.Μια λύση.



213. Τον χτύπησε το τούβλο που πέταξε ο πιλότος αρχικά από το αεροπλάνο!!

214. Το μήκος τους ισημερινού δεν είναι απαραίτητο για την λύση. Θυμίζουμε ότι ο τύπος της περιμέτρου ενός κύκλου είναι $\Gamma = 2\pi\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{\Gamma}{2\pi}$ (ρ ακτίνα κυκλου,π=3.14,Γ περίμετρος κύκλου)

Συμβολίζουμε τα μεγέθη ως εξής:

ΠΓ: Περίμετρος της Γης (μήκος ισημερινού)
ΜΣ: μήκος σχοινιού

ΡΓ: Η ακτίνα της γης
ΡΣ: Η ακτίνα του κύκλου που σχηματίζει το σκοινί
Υ: Ύψος σχοινιού από το έδαφος.
Προσθέτουμε ένα μέτρο στο σκοινι, πως θα διαμορφωθεί το Υ; Λίγη σχολική άλγεβρα.

$$\Upsilon = \text{Ρ}\Sigma - \text{Ρ}\Gamma \Leftrightarrow$$
$$\Upsilon = \frac{\text{Μ}\Sigma}{2\pi} - \frac{\text{Μ}\Sigma + 1}{2\pi}$$
$$\Leftrightarrow \Upsilon = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{6.28} = 0.159\ m \approx 20\,cm$$

Άρα το σκοινί σηκώνεται από την γη περίπου 16 εκατοστά.

(William Whiston's The Elements of Euclid ,1702)

215. Λύση
<u>• Στην περίπτωση (1) έχουμε:</u>
Αν χ1,χ2,χ2,...,χΑ οι ψήφοι που έδωσε ο καθένας από τους Α ψηφοφόρους και σύμφωνα με την υπόθεση
χ1<Β/2
χ2<Β/2
.
.
.
χΑ<Β/2
Προσθέτουμε κατά μέλη: χ1+χ2+...χΑ<ΑΒ/2 (Ι)
Αν y1,y2,y2,...,yB οι ψήφοι που πήρε ο καθένας από τους Β υποψηφίους τότε σύμφωνα με την υπόθεση
y1>A/2
y2>A/2
.
.
.
yB>A/2
Προσθέτουμε κατά μέλη:
y1+y2+...+yB>AB/2 (II)

Από (Ι) ,(ΙΙ) y1+y2+...+yB>AB/2> χ1+χ2+...χΑ άτοπο ,καθώς θα πρέπει να ισχύει: y1+y2+...+yB=χ1+χ2+...χΑ
Οι συνολικοί ψήφοι που έδωσαν οι ψηφοφόροι πρέπει να ισούνται με τους συνολικούς ψήφους που έλαβαν οι υποψήφιοι .
<u>Άρα δεν ισχύει η περίπτωση (1)</u>

<u>• Η περίπτωση (2) ισχύει.</u>
Στην περίπτωση (2)
Αν χ1,χ2,χ2,...,χΑ οι ψήφοι που έδωσε ο καθένας από τους Α ψηφοφόρους τότε σύμφωνα με την υπόθεση
χ1 $\geq$ Β/2
χ2 $\geq$ Β/2
.
.
.
χΑ $\geq$ Β/2

Προσθέτουμε κατά μέλη: $\chi 1+\chi 2+\ldots \chi A \geq AB/2$ (I)
Αν $y1, y2, y2, \ldots, yB$ οι ψήφοι που πήρε ο καθένας από τους B υποψηφίους και σύμφωνα με την υπόθεση
$y1 \leq A/2$
$y2 \leq A/2$
.
.
.
$yB \leq A/2$
Προσθέτουμε κατά μέλη:
$y1+y2+\ldots+yB \leq AB/2$ (II)
Από (I) ,(II) $y1+y2+\ldots+yB \leq AB/2 \leq \chi 1+\chi 2+\ldots \chi A$ είναι δυνατό ένα έχουμε ισότητα
<u>Άρα είναι δυνατόν να ισχύει η (2)</u>

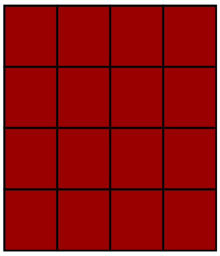
216.Το άθροισμα των ποσών που απομένουν στον λογαριασμό δεν είναι απαραίτητο να ισούται με το υπόλοιπο του τραπεζικού λογαριασμού .Μπορούμε να επιλέξουμε τα ποσά τα διαδοχικών αναλήψεων κατά τέτοιο τρόπο ώστε να βγει ποσό πολλαπλάσιο του 1000.

Δείτε το παράδειγμα:

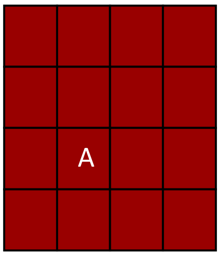
Ποσά αναλήψεων	Ποσό που απομένει τον τραπεζικό λογαριασμό
20	980
20	960
100	860
20	840
140	700
+ 700	+ 0
1000 ευρώ	4340 ευρώ

217.1) Το κλειδί είναι συμμετρία.Ο πρώτος παίκτης επιλέγει το τετραγωνικό πλακίδιο σοκολάτας που βρίσκεται στην δεύτερη γραμμή κοιτώντας από κάτω και την δεύτερη στήλη κοιτώντας από αριστερά . Όταν θα φάει όλα τα τετραγωνικά πλακίδια θα έχει μείνει σοκολάτα σχήματος L.Τώρα αρκεί να τρώει συμμετρικά ως προς τον δεύτερο παίκτη.Καταρχήν,παρατηρούμε ότι υπάρχει μια γραμμή και μια στήλη.

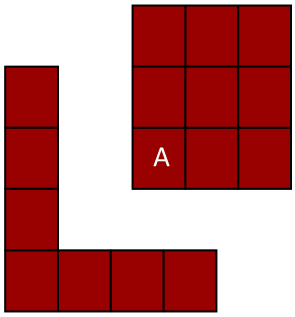
Αν ο παίκτης B φάει το τρίτο μετρώντας από κάτω κομμάτι της στήλης ο παίκτης A θα φάει το τρίτο μετρώντας από αριστερά της γραμμής. Αν ακολουθήσει αυτόν τον κανόνα ο παίκτης B θα αναγκαστεί να φάει το τελευταίο κομμάτι σοκολάτας .Δείτε στο σχήμα τους διαδοχικούς γύρους παιξίματος σε αρχικό κομμάτι σοκολάτας 4x4.



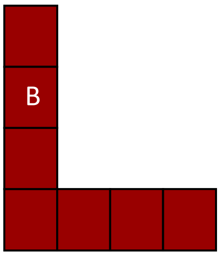
Αρχική θέση
παίζει πρώτος ο Α



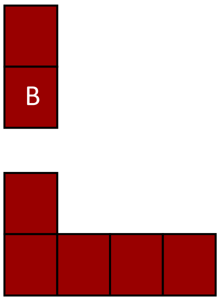
Ο Α επιλέγει το
κουτάκι στην
δεύτερη γραμμή
από κάτω δεύτερη
στήλη από αριστερ



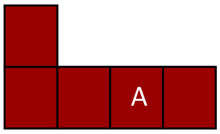
Ο Α τρώει όλα τα
πλακίδια πάνω και
δεξιά μαζί με αυτό
που επέλεξε



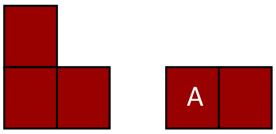
Ο Β επιλέγει το
τρίτο από κάτω
κουτάκι στην
στήλη



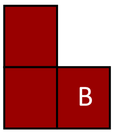
Ο Β τρώει όλα τα
πλακίδια πάνω και
δεξιά μαζί με αυτό
που επέλεξε



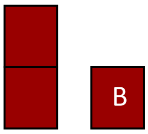
Ο Α επιλέγει το
τρίτο από αριστ
(συμμετρικό)
κουτάκι στην
γραμμή



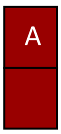
Ο Α τρώει όλα τα
πλακίδια πάνω και
δεξιά μαζί με αυτό
που επέλεξε



Ο Β επιλέγει το
δεύτερο από αριστ
κουτάκι στην
γραμμη



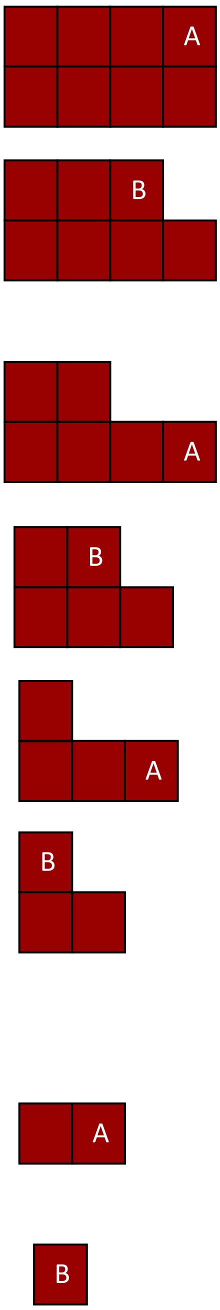
Ο Β τρώει όλα τα
πλακίδια πάνω και
δεξιά μαζί με αυτό
που επέλεξε .
Βέβαια εδώ είναι
μόνο αυτό που
επέλεξε.



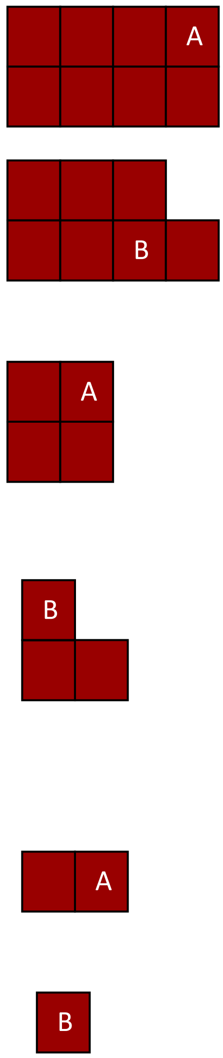
Ο Α επιλέγει το
δεύτερο από κατω
(συμμετρικό)
κουτάκι στην
στήλη.

Ο Β είναι χαμένος
έχει μόνο ένα
κουτάκι και το
..τρώει.

2) Αν ο πρώτος παίκτης ο Α αφαιρέσει το πάνω δεξιά τετραγωνάκι σοκολάτας ,αφήνοντας την πάνω γραμμή κατά 1 κοντύτερη από την κάτω , ότι και να κάνει ο δεύτερος παίκτης , ο πρώτος μπορεί πάντα να επαναφέρει μια τέτοια διάταξη (λεπτό ορθογώνιο) και να καταλήξει στο L της νίκης όπως είδαμε στο πρώτο παράδειγμα. Ειδικότερα, αν ο δεύτερος παίκτης διαλέξει ένα τετράγωνο στην κάτω γραμμή αυτό που απομένει με την «βορειανατολική» αφαίρεση είναι πάλι ένα λεπτό ορθογώνιο (σχήμα 2). <u>Αν αντίθετα ο δεύτερος παίκτης επιλέξει κάποιο από τα υπόλοιπα τετράγωνα στη πάνω γραμμή,</u> ο πρώτος παίκτης διαλέγει το τετραγωνάκι της κάτω γραμμής μια θέση δεξιά από την επιλογή του δευτέρου παίκτη , διατηρώντας την παράσταση κατω=πανω συν ένα (L).(σχήμα 1) Η οριακή περίπτωση είναι ίδια με την αντίστοιχη στο προηγούμενο πρόβλημα ένα L με τρία τετραγωνάκια στο οποίο είναι η σειρά του Β να παίξει και είναι καταδικασμένος.



ΣΧΗΜΑ 1



ΣΧΗΜΑ 2

Οι λύσεις στην σελ 166

218. i)Αν κ=α^2,λ=β^2 τότε από υπόθεση προκύπτει η σχέση

β^2-α^2=1111 ή (β-α)(β+α)=11*101

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί 11 και 101 είναι πρώτοι αριθμοί και επειδή β-α<β+α διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

$$\begin{cases}\beta-\alpha=1\\ \beta+\alpha=1111\end{cases}\ (\mathrm{I})\quad \acute{\eta}\quad \begin{cases}\beta-\alpha=11\\ \beta+\alpha=101\end{cases}\ (\mathrm{II})$$

Το σύστημα (I) δίνει α=555 και β=556 απορρίπτονται καθώς τα τετράγωνα τους έχουν περισσότερα από 4 ψηφία.

Το σύστημα (II) δίνει α= 45 και β=56

Οι λύσεις είναι δεκτές καθώς 45^2=2025 ,56^2=3136

Άρα κ=2025,λ=3136

ii) Αν ηλ η ηλικία του Καλοχαιρέτα τότε από υπόθεση

$\eta\lambda=14\cdot 6+\upsilon\,,0\le\upsilon<6$

Για υ=0, υ=1, υ=2, υ=3,υ=4, ο αριθμός ηλ που προκύπτει δεν είναι πρώτος.

Για υ=5τότε $\eta\lambda=14\cdot 6+5=89$ και ο 89 είναι πρώτος.

219. 1)Έστω Χ το χρηματικό ποσό που πήρε ο Πατομπούκαλος τότε από υπόθεση $\mathrm{X}=\overline{\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma}$

Έχουμε $\overline{\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma}\overset{(*)}{=}1001\overline{\alpha\beta\gamma}=7\cdot 11\cdot 13\overline{\alpha\beta\gamma}$

$$(*)\ \overline{\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma}=\alpha\cdot 10^5+\beta\cdot 10^4+\gamma\cdot 10^3+\alpha\cdot 10^2+\beta\cdot 10^1+\gamma=$$
$$=\alpha\cdot 10^5+\alpha\cdot 10^2+\beta\cdot 10^4+\beta\cdot 10+\gamma\cdot 10^3+\gamma=$$
$$=10^2\alpha(10^3+1)+\beta\cdot 10(10^3+1)+\gamma(10^3+1)=(10^3+1)(10^2\alpha+\beta\cdot 10+\gamma)=$$
$$(10^3+1)(100\alpha+10\beta+\gamma)=1001\overline{\alpha\beta\gamma}=7\cdot 11\cdot 13\overline{\alpha\beta\gamma}$$

2) Έστω Ν το πλήθος των αστεριών, όπου το 1 εμφανίζεται κ φορές. Κάνουμε δοκιμές.

Αν κ =4 ,τότε Ν =1010101.Έχουμε λοιπόν

11* 1010101=11111111=1111* 10^4+1111=1111(10^4+1)

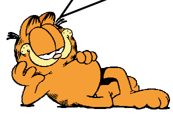
Μια τέτοια παραγοντοποίηση υπάρχει πάντα , δηλαδή

11N=M*10^κ+M=M(10^κ+1) δηλαδή **11N= M(10^κ+1)** (1)

όπου Μ είναι ο αριθμός με κ ψηφία όλα ισα με 1 και το γινόμενο 11Ν έχει 2κ ψηφία όλα ισα με το 1.

Ποια είναι η σχέση το Μ με το 11 και ποια η σχέση του 11 με το (10^κ+1);

Υπενθυμίζουμε ότι ένας αριθμός διαιρείται με το 11, αν το άθροισμα των διψήφιων τμημάτων του (από δεξιά προς τα αριστερά) είναι πολλαπλάσιο του 11.
π.χ. το 352
Έχουμε 52+3=55 είναι πολλαπλάσιο του 11



<u>Για κ άρτιο ο Μ διαιρείται με το 11 ενώ για κ περιττό όχι</u>

Για το $10^{\kappa}+1$ συμβαίνει το αντίθετο

<u>Για κ περιττό διαιρείται με το 11 ενώ για κ άρτιο όχι.</u>

Για παράδειγμα αν κ=5 τότε

$10^5+1=10001=111111-10*1111$ έκφραση που διαιρείται με το 11.

Για άρτια περίπτωση κ=4 , όπως 10001($=10^4+1$)

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός διαφέρει του 9999 κατά 2 και συνεπώς δεν διαιρείται με το 11.<u>Βλέπουμε λοιπόν ότι είτε ο κ είναι άρτιος ή περιττός , ακριβώς ένας από τους αριθμούς Μ και $10^{\kappa}+1$ διαιρείται με το 11.</u>

•Αν κ=1 τότε η (1) δίνει **Ν= 11 απορρίπτεται δεν περιέχει 0**

•Αν κ=2 τότε η (1) **11Ν= 11*101 ή Ν= 101,δέκτη**

•Αν κ>2 τότε η (1) έχει δυο περιπτώσεις:

1η περίπτωση

$$11N = M(10^k+1) \overset{\text{Μ διαιρειται με 11 ή Μ=11λ}}{\Longleftrightarrow} 11N = 11\lambda(10^k+1) \Leftrightarrow N = \lambda(10^k+1)$$ απορρίπτεται Ν δεν είναι πρώτος

2η περίπτωση

$$11N = M(10^k+1) \overset{10^k+1 \text{ διαιρειται με 11 ή } 10^k+1=11\lambda_1}{\Longleftrightarrow} 11N = 11\lambda_1 \mathrm{M} \Leftrightarrow N = \lambda_1 \mathrm{M}$$ απορρίπτεται Ν δεν είναι πρώτος

Επομένως ο μόνος Ν που είναι πρώτος και πληροί τις προϋποθέσεις του προβλήματος είναι ο 101.Αρα ο γαλαξίας έχει μόνο 101 αστέρια.

220. 1)Εστω 0<α<β<γ οι αριθμοί στις τρεις κάρτες.
Μετά από ν γύρους ($\nu \geq 2$) το άθροισμα των συνολικων σκορ των τριών παικτών είναι

$$\nu(\alpha+\beta+\gamma) = 20+10+9 = 39 = 3 \cdot 13$$

Εφόσον $\nu \geq 2$ και $\alpha+\beta+\gamma \geq 6$ προκύπτει οτι $\nu = 3$ και $\alpha+\beta+\gamma = 13$ που σημαίνει ότι παίχτηκαν 3 γύροι και σε κάθε γύρο δόθηκαν 13 πόντοι .Ο παίκτης Αντωνίου έλαβε 20 πόντους σε τρεις γύρους άρα $20 \leq 3\gamma$ άρα $\gamma \geq 7$, Ο παίκτης Βασιλείου ελαβε 10 ποντους συνολικα και γ πόντους στον τελευταίο γύρο; Τότε $2a+\gamma \leq 10$ από οπου και προκύπτει <u>**α=1**</u> και $\gamma \leq 8$.Συνοψίζοντας, μπορούμε να έχουμε <u>μόνο</u> γ=7 ή γ=8.Έτσι $\alpha+\beta+\gamma = 13$, δηλαδή $\beta+\gamma = 12$ άρα έχουμε δυο πιθανές περιπτώσεις:

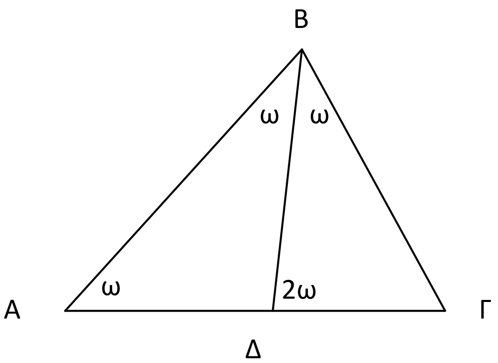
$$\beta = 5, \gamma = 7 \text{ ή } \beta = 4, \gamma = 8$$

Ο παίκτης Βασιλείου έλαβε την κάρτα γ και μόνο 10 πόντους συνολικά.Έτσι δεν έλαβε τις κάρτες α και β στους πρώτους δυο γύρους αλλά έλαβε καρτες α και α.Συνεπώς, α+α+γ=1+1+γ=10 δηλαδή **γ=8 και β=4**. Ο παίκτης Γεωργίου έλαβε 9 πόντους λαμβάνοντας β,β,α αλλα χωρίς να ξέρουμε την σειρά.Ο παίκτης Αντωνίου έλαβε 20 πόντους λαμβάνοντας γ,γ,β .Διότι στον τελευταίο γύρο ο παίκτης Βασιλείου έλαβε την κάρτα γ , έτσι έχουμε την εξής κατανομή καρτών στους τρεις γύρους:

Αντωνίου : γ γ β
Βασιλείου :α α γ
Γεωργίου : β β α

Συμπέρασμα.Ο Γεωργίου ήταν ο παίκτης που είχε στην κατοχή του, την κάρτα με τον μεσαίο από τους τρεις αριθμούς στο πρώτο γύρο.

2)Θεωρουμε την τριγωνική κάρτα.
Εστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο οπου $\widehat{2\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}}$ και εστω ΒΔ η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας Β.



Από εφαρμογή του θ. εσωτερικης διχοτόμου εχουμε:

$$\mathrm{A\Delta} = \frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}, \mathrm{\Delta\Gamma} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\gamma}$$

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές αρα $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{B\Delta}$

Από την άλλη τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΓ είναι όμοια ($\widehat{\Gamma\mathrm{AB}} = \widehat{\Delta\mathrm{B}\Gamma}, \widehat{\Gamma}\ \kappa o\iota\nu\acute{\eta}$) συνεπώς

$$\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Delta\Gamma} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Delta}}$$

Ετσι:

$$\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Delta\Gamma} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} \Rightarrow \frac{\alpha}{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\gamma}} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\gamma}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha(\alpha+\gamma) \quad (1)$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις

1ο $\widehat{\mathrm{A}} < \widehat{\mathrm{B}} < \widehat{\Gamma}$ τοτε β=α+1,γ=α+2 με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει:

$(\alpha+1)^2 = \alpha(\alpha+\alpha+2) \Leftrightarrow .... \overset{\alpha\ \alpha\kappa\varepsilon\rho\alpha\iota o\varsigma}{\Leftrightarrow} \alpha = 1$ οπότε το τρίγωνο εχει πλευρές α=1,β=2,γ=3 δεν ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα άρα δεν αποτελούν πλευρές τριγώνου

2ο $\widehat{\mathrm{A}} < \widehat{\Gamma} < \widehat{\mathrm{B}}$ τοτε γ=α+1,β=α+2 με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει:

$$(\alpha+2)^2 = \alpha(\alpha+\alpha+1) \Leftrightarrow ... \overset{\alpha\ \alpha\kappa\varepsilon\rho\alpha\iota o\varsigma}{\Leftrightarrow} \alpha = 4$$

οπότε το τρίγωνο εχει πλευρές α=4,β=6,γ=5

3ο $\widehat{\Gamma} < \widehat{\mathrm{A}} < \widehat{\mathrm{B}}$ τοτε α=γ+1,β=γ+2 με αντικατάσταση στην (1) προκυπτει

$(\gamma+1)^2 = (\gamma+1)(\gamma+1+\gamma)$ δεν εχει ακέραιες λύσεις

Άρα το ζητούμενο τρίγωνο εχει διαστάσεις α=4,β=6,γ=5.

(εναλλακτικά μπορεί να λυθεί με τον νόμο των συνημίτονων και το συνημίτονο διπλάσιου τόξου)

221. Αν αναλύσουμε τον αριθμό 451066 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων λαμβάνουμε:
451066=2 * 7 * 11 * 29 * 101
Οι μήνες που προτείνονται ως απαντήσεις έχουν 31 ημέρες(Μάρτιος ,Αύγουστος ,Ιανουάριος) ενώ ο Φεβρουάριος 28 ή 29 αν είναι δίσεκτο. Άρα σωστή απάντηση είναι αυτή του Φεβρουαρίου με δίσεκτο έτος. Συνεπώς είναι η Γ
Υπενθυμίζω ότι δίσεκτα έτη είναι τα έτη που διαιρούνται με το 4 αλλά όχι με το 100 ή αυτά που διαιρούνται με το 400.

222. Θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα με λογικούς συλλογισμούς «οπισθοπορείας»(working backwards) .

Ας υποθέσουμε ότι η διαδικασία τελειώνει και έχει μείνει μόνο ένας μαφιόζος ο Ε τότε αυτός θα πάρει όλες τις λίρες.

<u>Πάμε ένα βήμα πιο πίσω</u>. Έχει μείνει ο Δ και ο Ε .Ο μαφιόζος Ε δεν πρόκειται να πάρει καμία χρυσή λίρα και το ξέρει. Γιατί; Ο Δ προτείνει «500 λίρες ο Δ και 0 λίρες ο Ε.» Ψηφίζουν αυτός και ο Ε .Έρχεται ισοψηφία αλλά υπερισχύει η πλευρά με τον ανώτερο ιεραρχικά μαφιόζο δηλαδή τον Δ, ο οποίος παίρνει και τις 500 λίρες.

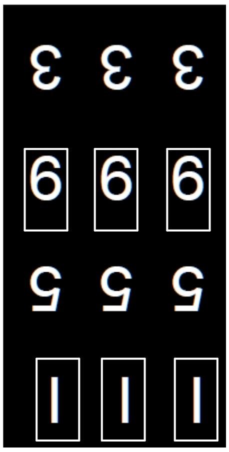
<u>Πάμε ένα βήμα πιο πίσω</u>. Έχουν μείνει ο Γ,Δ και ο Ε. Ο Γ ξέρει ότι μπορεί να εξαγοράσει την ψήφο του Ε ,διότι αν απορριφτεί η πρόταση του τότε μένει ο Δ και ο Ε ,οπότε σύμφωνα με την παραπάνω συλλογιστική ο Ε δεν θα πάρει τίποτα άρα αρκεί να κάνει μια πρόταση στην οποία θα δίνει κάτι στον Ε. Λέει: « Γ 499 λίρες , Δ 0 λίρες και Ε 1 λίρα» όταν θα γίνει η ψηφοφορία ο Ε θα την ψηφίσει γιατι έτσι θα πάρει τουλάχιστον μια λίρα ενώ αν την καταψηφίσει θα μείνει ο Δ και δεν θα πάρει τίποτα.

<u>Πάμε ένα βήμα πιο πίσω</u>. Έχουν μείνει ο Β, ο Γ,ο Δ και ο Ε. Ο Β ξέρει ότι αν καταψηφιστεί η πρόταση του ο επόμενος μαφιόζος που δεν θα πάρει τίποτα και θα χάσει την ζωή του είναι ο Δ .Δείτε τον συλλογισμό του προηγούμενου βήματος. Άρα μπορεί να εξαγοράσει την ψήφο του Δ προτείνοντας « Β 499 λίρες , Γ 0 λίρες, Δ 1 λίρα, Ε ο λίρες» .Ο Δ θα την ψηφίσει θα έχουμε 2-2 αλλά θα υπερισχύσει η πλευρά στην οποία βρίσκεται ο ανώτερος ιεραρχικά μαφιόζος δηλαδή ο Β .

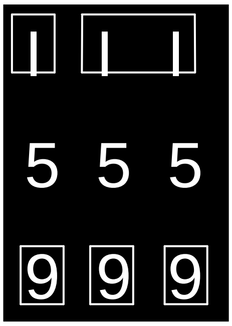
<u>Πάμε ένα βήμα πιο πίσω</u>. Έχουμε φτάσει στην αρχική κατάσταση του προβλήματος ο Α , ο Β, ο Γ,Δ και ο Ε. Ο Α ξέρει ότι αν καταψηφιστεί η πρόταση του οι επόμενοι μαφιόζοι που δεν θα πάρουν τίποτα είναι οι Γ και Ε .Άρα θα εξαγοράσει τις ψήφους τους με μια πρόταση « Α 498 λίρες, Β 0 λίρες , Γ 1 λίρα, Δ 0 λίρες, Ε 1 λίρα». Οι Γ και Ε θα ψηφίσουν την πρόταση του και με μια πλειοψηφία 3-2 θα περάσει η πρόταση του Α και θα πάρει 498 λίρες.

***223.*Από το 01 μέχρι το 31….** Είναι βέβαιο ότι κάθε κύβος πρέπει να έχει τα ψηφία 1,2 για να σχηματίζονται οι ημερομηνίες 11,22.Αν μόνο ένας κύβος έχει το 0 τότε το πολύ 6 από τους 9 αριθμούς 01,02,..,09 μπορούν να αναπαρασταθούν άρα πρέπει να έχουν και το 0 και στους δυο κύβους.Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να απομένουν μόνο 6 έδρες για τα υπόλοιπα 7 ψηφία(3 μέχρι 9),αλλά είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για να σχηματιστεί το 9 ή το 6 η ίδια έδρα περιστρέφοντας κατάλληλα τον κύβο. Στο σχήμα στον δεξιό κύβο φαίνονται το 1 το 4 και το 3 άρα συνεπώς στις υπόλοιπες έδρες του πρέπει να είναι σίγουρα το 0, 2 και για την τελευταία έδρα ένα από τα 7,6,8,5 ενώ στον αριστερό κύβο φαίνονται το 1 και το 2 πρέπει να είναι ακόμα το 0 και τα υπόλοιπα από την τετράδα 7,6,8,5, εφόσον ένα χρησιμοποιήθηκε στον δεξί κύβο.(M.Gardner)

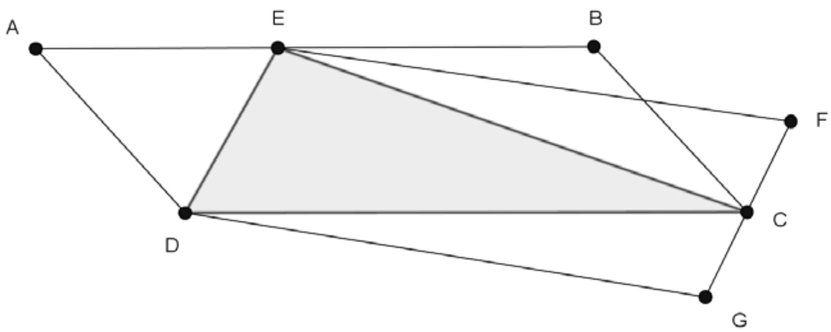
224. Τελείως «έξω» από το κουτί…. Πρέπει να περιστρέψετε το φύλλο κατά 180^{o} ,έτσι το 9 θα γίνει 6.
6,6,6,1,1,1



Β λυση



226.Μια γεωμετρική σπαζοκεφαλιά



Φέρνουμε την EC.Τώρα το παραλληλόγραμμο ABCD και το τρίγωνο EDC έχουν κοινή βάση DC και το ίδιο ύψος (μια κάθετο από το E στο DC).Έτσι το τρίγωνο EDC έχει το μισό εμβαδό του παραλληλόγραμμου ABCD.

Το παραλληλόγραμμο EFGD και το τρίγωνο EDC έχουν κοινή βάση ED και το ίδιο ύψος (μια κάθετο από το C στο ED).Έτσι το τρίγωνο EDC έχει το μισό εμβαδό του παραλληλόγραμμου EFGD.

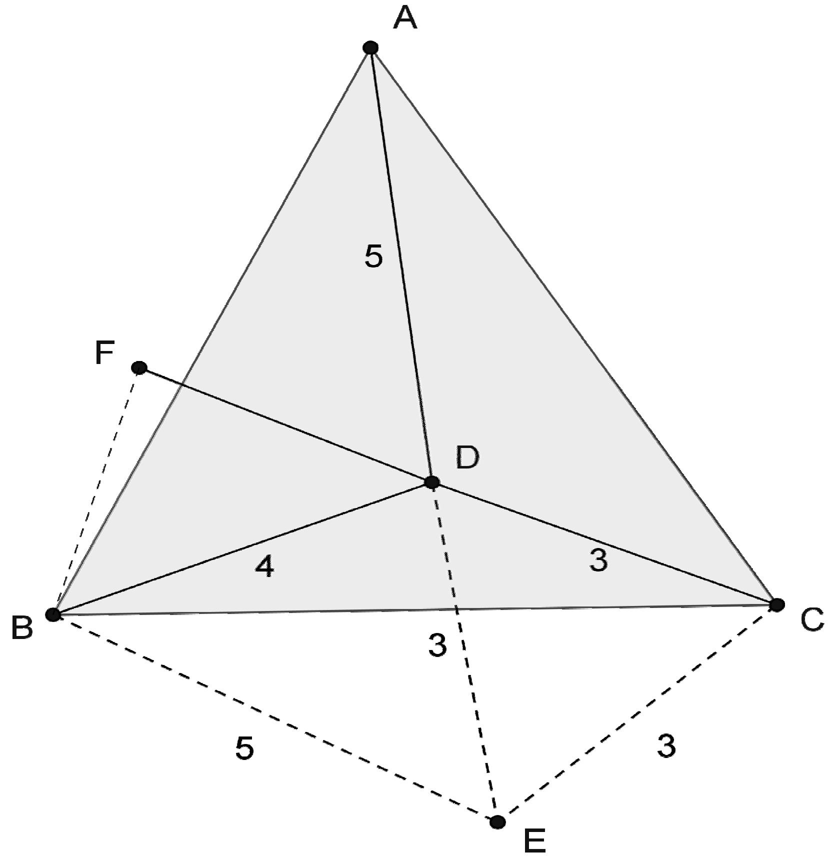
Αλλά εφόσον τα παραλληλόγραμμα ABCD και EFGD έχουν διπλάσιο εμβαδό από το τρίγωνο EDC τότε έχουν το ίσο εμβαδό. Άρα το εμβαδό του EFGD είναι 20 τετραγωνικές μονάδες.

227.Ένα γεωμετρικό πρόβλημα…

Το πρόβλημα ήταν να βρεθεί η πλευρά ενός ισόπλευρου τρίγωνου το οποίο περιλαμβάνει ένα σημείο D που απέχει 3,4 και 5 μονάδες από τις κορυφές του τρίγωνου. Οι διακεκομμένες ευθείες γραμμές του σχήματος (1) κατασκευάζονται έτσι ώστε το τρίγωνο DCE να είναι ισόπλευρο και η AE να είναι κάθετη στην προς τα αριστερά προέκταση της CD στο F. Τότε είναι: BCA $=60^{O}-$ DCB=BCE.Κατά συνέπεια,τα τρίγωνα DCA και ECB είναι ισα,ενώ BE=AD=5.Επειδη τα τρίγωνα BDE είναι κατά το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος,ορθογώνιο, έπεται ότι: BDF=180^{o} -60^{o} -90^{o} =30^{o} .Έτσι, συμπεραίνουμε πως η BF είναι 2 και η FΔ $2\sqrt{3}$.Κατά συνέπεια, είναι:

$$BC=\sqrt{2^2+(3+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{25+12\sqrt{3}}$$

Που είναι η ζητούμενη πλευρά του αρχικού ισόπλευρου τρίγωνου και ισούται περίπου με 6,766.



Σχήμα 1

228.Έξι…

• Από την πρώτη συνθήκη είναι φανερό ότι ο Γεωργίου πήρε την τέταρτη θέση. Από την δεύτερη συνθήκη προκύπτει ότι ο Βασιλείου ήταν δεύτερος και από την τελευταία συνθήκη ότι ο Δημητρίου ήταν πρώτος και τελικά ο Αντωνίου ήταν τρίτος.

• Από το γινόμενο είναι προφανές ότι οι αριθμοί που αναζητούμε πρέπει να είναι τριψήφιοι. Έστω ότι ο ένας είναι ο αβγ=100α+10β+γ και ο άλλος είναι ο γβα. Αφού το α*γ λήγει σε 5 τότε ο ένας από τους δυο (α ή γ) είναι 5 έστω ο α=5 και εφόσον 92565/500<200 έπεται ότι γ=1.Συνεπως έχουμε τους αριθμούς $\overline{5\beta 1},\overline{1\beta 5}$

Για να βρούμε τον β :

$$\left(\overline{5\beta 1}\right)\cdot\left(\overline{1\beta 5}\right)=\left(500+10\beta+1\right)\cdot\left(100+10\beta+5\right)=50000+5000\beta+2500+1000\beta+100\beta^2+50\beta+100+10\beta+5=$$
$$=52605+6060\beta+100\beta^2$$

Αλλά

$$52605+6060\beta+100\beta^2=92565\Leftrightarrow 6060\beta+100\beta^2=39960\Leftrightarrow$$
$$606\beta+10\beta^2=3996\Leftrightarrow \beta(606+10\beta)=3996 \quad (1)$$

Από την (1) παρατηρούμε ότι για κάθε τιμή του β ο αριθμός $606+10\beta$ έχει τελευταίο ψηφίο το 6 άρα το β θα πρέπει να είναι β=1 ή β=6.Αν ελέγξουμε τις δυο αυτές περιπτώσεις τότε προκύπτει ότι οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 561 και 165.Αρα ο Δημητρίου πήρε 561 ψήφους και ο Γεωργίου 165.

229.*Έστω x-1,x,x+1 οι τρεις θερμοκρασίες του Ιανουάριου και y-1,y,y+1 οι τρεις θερμοκρασίες του Φεβρουαρίου τότε από υπόθεση*

(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)=pq όπου p,q πρώτοι αριθμοί , x,y μη αρνητικοί αριθμοί.

Το (x-1)x(x+1) είναι γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων άρα διαιρείται με το 2 διαιρείται και με το 3 συνεπώς διαιρείται με το 6.

Ομοίως ο (y-1)y(y+1) διαιρείται με το 6 άρα από την (1) προκύπτει ότι ο 6 είναι διαιρέτης του pq και εφόσον p,q πρώτοι αριθμοί θα ισχύει pq=6

Άρα η εξίσωση (x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)=6 .Αν $x,y\geq 2$ *τότε*

$$(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)\geq 6+6=12$$

οπότε κάποιος είναι μικρότερος του 2 έστω ο y ,τότε όμως (y-1)y(y+1)=0 οπότε (x-1)x(x+1)=6 και αφού x μη αρνητικός ακέραιος πρέπει x=2 άρα οι λύσεις είναι:

(x,y)={(2,0),(2,1), (0,2),(1,2)}

Και οι ζητούμενες θερμοκρασίες είναι:

- *1 C^o,2 C^o,3 C^o στις 1,2,3 Ιανουαρίου και -1 C^o,0 C^o,1 C^o στις 27,28,29 Φεβρουαρίου*
- *1 C^o,2 C^o,3 C^o στις 1,2,3 Ιανουαρίου και 0 C^o,1 C^o,2 C^o στις 27,28,29 Φεβρουαρίου*
- *-1 C^o,0 C^o,1 C^o στις 1,2,3 Ιανουαρίου και 1 C^o,2 C^o,3 C^o στις 27,28,29 Φεβρουαρίου*

- *0 C^o,1 C^o,2 C^o στις 1,2,3 Ιανουαρίου και 1 C^o,2 C^o,3 C^o στις 27,28,29 Φεβρουαρίου*

230.

Θέση Σπιτιού:	1	2	3	4	5
Χρώμα Σπιτιού:	**Κίτρινο**	**Μπλε**	**Κόκκινο**	**Πράσινο**	Άσπρο
Εθνικότητα:	Νορβηγός	Δανός	Άγγλος	Γερμανός	Σουηδός
Είδος Ποτού:	Νερό	Τσάι	Γάλα	Καφές	Μπίρα
Είδος Τσιγάρων:	Dunhill	Blends	Pall Mall	Prince	Bluemasters
Κατοικίδιο:	Γάτες	Άλογο	Πουλιά	Ψάρι	Σκύλο

231.

Σ	Φ	Κ	Α	Ε
Α	Ε	Σ	Φ	Κ
Ε	Σ	Α	Κ	Φ
Φ	Κ	Ε	Σ	Α
Κ	Α	Φ	Ε	Σ

232.Είναι δυνατό να φτάσουμε σε κάθε όροφο του κτιρίου. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται πως κάθε όροφος είναι προσβάσιμος . Οι γραμμές παριστάνουν την άνοδο του ασανσέρ κατά 8 ορόφους ,ενώ οι στήλες την κάθοδο κατά 11 ορόφους. Με εκκίνηση το 1 στο παρακάτω πίνακα κινούμαστε δεξιά ανεβαίνοντας κατά 8 ορόφους και κινούμενοι κάτω κατεβαίνουμε 11 ορόφους . Οι διαφορετικές διαδρομές που υπάρχουν στον πίνακα μπορούν να οδηγήσουν σε κάθε όροφο.

	Πατάμε το κουμπί για άνοδο (8 ορόφων)
Πατάμε το κουμπί για κάθοδο (11 ορόφων)	9 17 25 33 41 49 57 65 6 14 22 30 38 46 54 62 3 11 19 27 35 43 51 59 8 16 24 32 40 48 56 64 5 13 21 29 37 45 53 61 2 10 18 26 34 42 50 56 7 15 23 31 39 47 55 63 4 12 20 28 36 44 52 60

Ουσιαστικά η λύση του προβλήματος ανάγεται κάθε φορά στην λύση της εξίσωσης :
8χ-9ψ=αριθμός ορόφου ή 8χ-9ψ= ν , ν=1,2,3…,64,65

Οι εξισώσεις αυτής της μορφής αχ+βψ=γ όπου α,β, γ ακέραιοι ονομάζονται γραμμικές διοφαντικες εξισώσεις και έχουν λύση αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β διαιρεί το γ.

Στην εξίσωση του προβλήματος ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 8,11 είναι το 1 που προφανώς διαιρεί κάθε αριθμό άρα η εξίσωση έχει πάντα λύση και κατ επέκταση για κάθε αριθμό από 1 μέχρι το 65.
(περισσότερα για τις διοφαντικές γραμμικές εξισώσεις ΠΑΤΗΣΤΕ ΕΔΩ)
Η μεγαλύτερη διαδρομή που πρέπει να κάνει κάποιος με όροφο εκκίνησης τον πρώτο είναι να καταλήξει στον 60^o όροφο. Δείτε την ακολουθία των ορόφων που απαιτούνται.
1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, 65, 54, 43, 32, 21, 10, 18, 7, 15, 4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60.

233.ψηφιακό άθροισμα

Αν πολλαπλασιάσουμε δυο αριθμούς τότε το άθροισμα των ψηφίων του γινομένου(συνεχές άθροισμα μέχρι να καταλήξουμε σε μονοψήφιο,digital root) είναι το ίδιο με το γινόμενο του αθροισμάτων των ψηφίων τους (επίσης συνεχή αθροίσματα μέχρι να καταλήξουμε σε μονοψήφιους) .

Για παράδειγμα , 23 και 51 τότε :

23, 2+3=5   51, 5+1=6   5*6=30 , 3+0=3

23*51=1173 1+1+7+3=12 , 1+2=3

Κάθε αριθμός έχει συνεχές άθροισμα ψηφίων ένα μονοψήφιο από το 1 μέχρι το 9.

Και στην περίπτωση των κύβων

1^3 έχει συνεχές άθροισμα ψηφίων 1

2^3 έχει συνεχές άθροισμα ψηφίων 8

3^3 έχει συνεχές άθροισμα ψηφίων 9

4^3 έχει συνεχές άθροισμα ψηφίων 1

5^3 έχει συνεχές άθροισμα ψηφίων 8

6^3 έχει συνεχές άθροισμα ψηφίων 9

……..

234.Είναι $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$ και $\mathrm{B} = \overline{\gamma\beta\alpha} = 100\gamma + 10\beta + \alpha$.Συνεπώς έχουμε:

$\mathrm{B} - \mathrm{A} = 594 \Leftrightarrow 100\gamma + 10\beta + \alpha - 100\alpha - 10\beta - \gamma = 594 \Leftrightarrow 99(\gamma - \alpha) = 594 \Leftrightarrow \gamma = 6 + \alpha$

Άρα γ=7 και α=1 ή γ=8 και α=2 ή γ=9 και α=3 και $0 \le \beta \le 9$

Επιπλέον έχουμε $\mathrm{A} - 12 = 16(\alpha + \beta + \gamma) \Leftrightarrow 100\alpha + 10\beta + \gamma - 12 = 16\alpha + 16\beta + 16\gamma$

Η παραπάνω σχέση ικανοποιεί την ανίσωση $0 \le \beta \le 9$ για γ=8 και α=2.Ο ζητούμενος αριθμός Β είναι ο 862.

235. • Είναι γνωστό ότι το άθροισμα δυο περιττών αριθμών δίνει άρτιο αριθμό συνεπώς αν θεωρήσουμε ότι και οι έξι αριθμοί είναι περιττοί, το άθροισμα τους θα ήταν άρτιος .Άτοπο ,καθώς το άθροισμα είναι πρώτος αριθμός και μεγαλύτερο του 2. Άρα ένας από τους 6 αριθμούς είναι άρτιος και πρώτος, ο μοναδικός άρτιος πρώτος είναι ο 2 οπότε οι μόνοι διαδοχικοί πρώτοι που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος είναι 2,3,5,7,11,13,

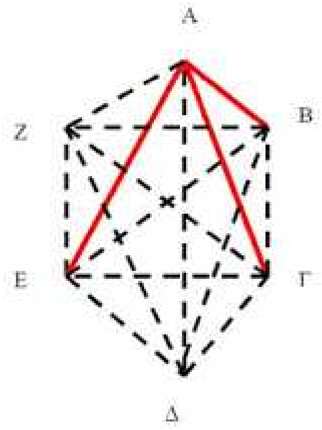
• Αν Γ τα σοκολατάκια γάλακτος και Κ τα σοκολατάκια καραμέλα τότε προκύπτουν από την υπόθεση οι εξισώσεις :

(1/7)(Κ+Γ-1)= Γ-1

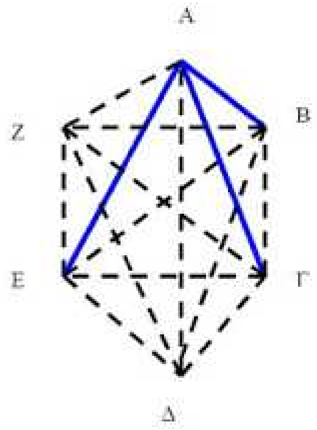
(1/5)(Κ+Γ-2)=Γ

Λύνουμε το σύστημα και προκύπτει Κ=18 , Γ=4

236.Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί γραφικά.Έξι τελείες στο επίπεδο αναπαριστούν τους έξι μουσικούς. Όλες οι τελείες ενώνονται με διακεκομμένες γραμμές που συμβολίζουν μια σχέση συμπάθειας η αντιπάθειας. Με τις μπλε γραμμές συμβολίζουμε την σχέση συμπάθειας ενώ με τις κόκκινες μια σχέση αντιπάθειας.
Ας δούμε την τελεία Α, από τις πέντε γραμμές που ξεκινούν από αυτή τουλάχιστον οι τρεις πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα.
-Έστω ότι οι τρεις γραμμές ίδιου χρώματος είναι κόκκινες. Αν οι γραμμές που απαρτίζουν το τρίγωνο ΒΕΓ είναι και οι τρεις μπλε τότε έχουμε μια ομάδα τριών μουσικών που συμπαθούν αμοιβαία ο ένας τον άλλα. Άτοπο, από υπόθεση.Συνεπώς, μια πλευρά του τριγώνου είναι κόκκινη. Ανεξάρτητα ποια από τις τρεις είναι κόκκινη,όποια και αν επιλέξουμε τότε σχηματίζεται ένα τρίγωνο με τρεις κόκκινες πλευρές. Άρα τουλάχιστον μια ομάδα τριών μουσικών της μπάντας έχουν αμοιβαία αντιπάθεια. (σχήμα 1)
-Έστω ότι οι τρεις γραμμές ίδιου χρώματος είναι μπλε. Στο τρίγωνο ΒΕΓ όλες οι γραμμές είναι κόκκινες.Αν έστω και μια ήταν μπλε τότε θα σχηματιζόταν ένα τρίγωνο με μπλε πλευρές ,άτοπο από υπόθεση. Άρα και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ένα τουλάχιστον τρίγωνο με τρεις κόκκινες πλευρές (σχήμα 2)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

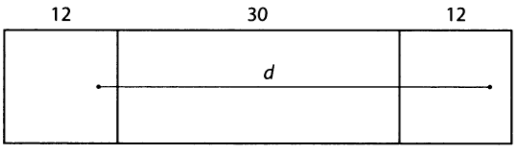
237. Κάθε αριθμός του πίνακα πρόεκυψε από άθροισμα δυο αριθμών. Οι αριθμοί προέρχονται από τα σύνολα {3,1,5,2,4,0},{25,31,13,1,7,19}.(δες το παρακάτω σχήμα) Με την παραπάνω διαδικασία επιλογής αριθμών και διαγραφής όσων βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη ουσιαστικά επιλεγούμε έξι ζεύγη αριθμών που όλα μαζί αποτελούν τους δώδεκα αριθμούς των δυο παραπάνω συνόλων ,άρα είναι βέβαιο ότι το άθροισμα θα είναι πάντα το άθροισμα των δώδεκα αριθμών.

(3+1+5+2+4+0)+(25+31+13+1+7+19)=111

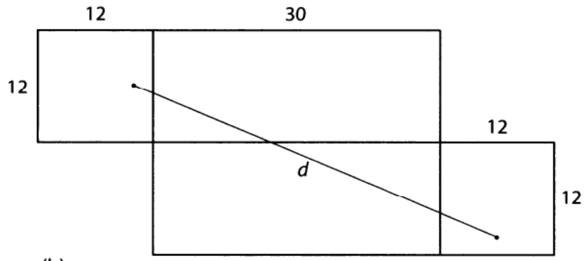
	3	1	5	2	4	0
25	~~28~~	26	~~30~~	~~27~~	~~29~~	~~25~~
31	~~34~~	~~32~~	~~36~~	~~33~~	35	~~31~~
13	~~16~~	~~14~~	~~18~~	15	~~17~~	~~13~~
1	4	~~2~~	~~6~~	~~3~~	~~5~~	~~1~~
7	~~10~~	~~8~~	12	~~9~~	~~11~~	~~7~~
19	~~22~~	~~20~~	~~24~~	~~21~~	~~23~~	19

238.

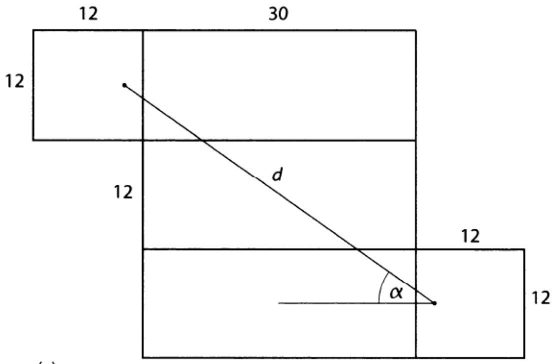
Η λύση προκύπτει ισοπεδώνοντας το παραλληλεπίπεδο,όπως πατικώνουμε ένα κουτί πριν το πετάξουμε στον κάδο ανακύκλωσης.Αυτό μπορεί να γίνει,με τρεις τρόπους:



(a)



(b)

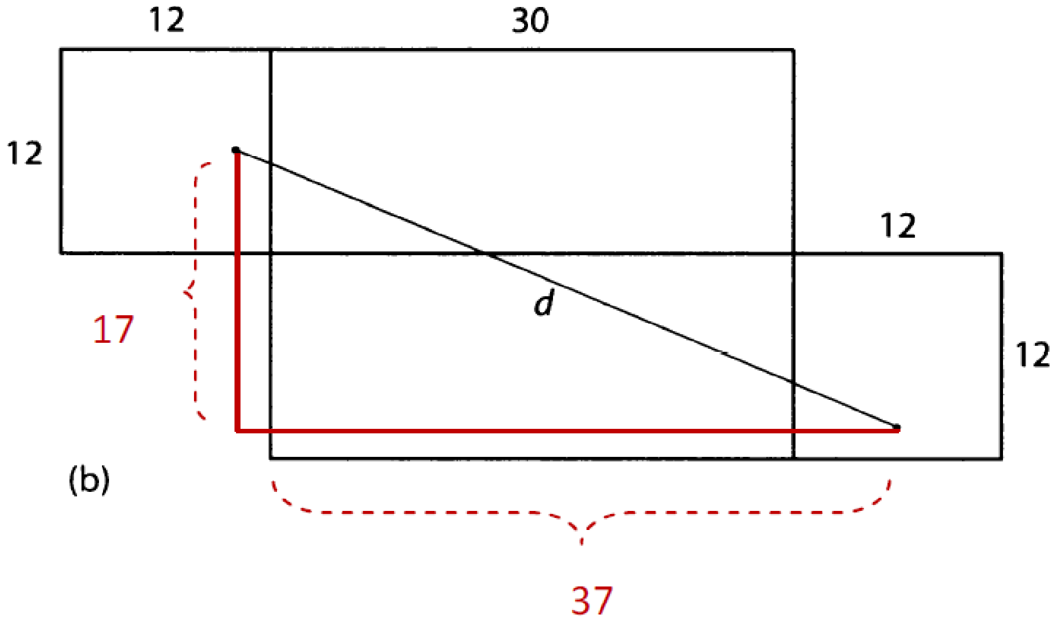


(c)

▪ Στην περίπτωση (α) η απόσταση είναι d=1+30+11=42 πόδια.
▪ Στην περίπτωση (β) απαιτείται η χρήση του πυθαγορείου θεωρήματος.

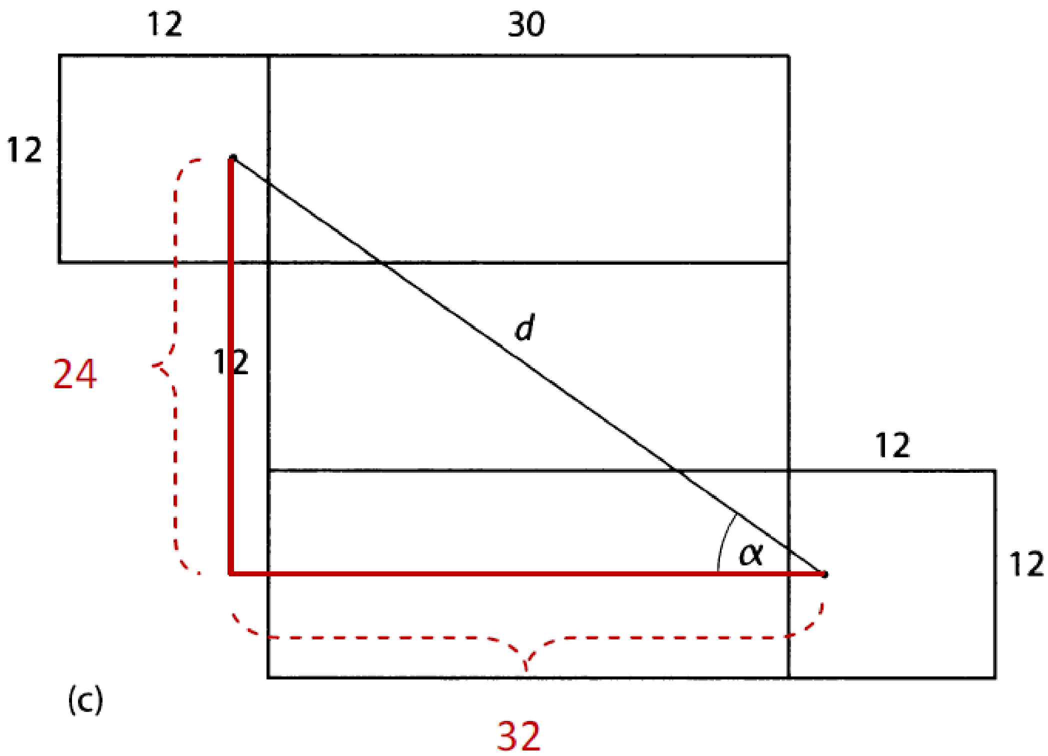
Η οριζόντια απόσταση ανάμεσα στην αράχνη και την μύγα είναι 1+30+6=37 ενώ η κάθετη απόσταση είναι 6+11=17 πόδια.

Άρα d=$(37^2+17^2)^{(1/2)}$ περίπου 40,7 πόδια.



▪ Στην περίπτωση (γ) η οριζόντια απόσταση είναι 1+30+1=32 πόδια,ενώ η κάθετη 6+12+6=24 πόδια κατά συνέπεια

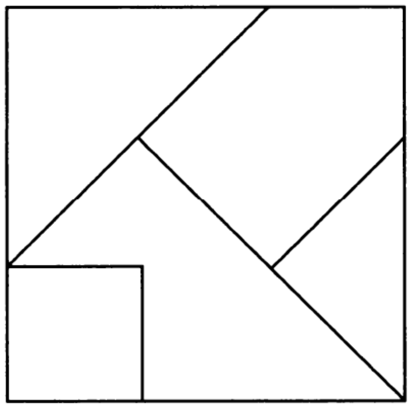
$d=(32^2+24^2)^{(1/2)}=(1600)^{(1/2)}=40$ πόδια



Άρα,η περίπτωση (γ) αποτελεί την συντομότερη διαδρομή.Τα παραπάνω αποδεικνύουν ότι η ευθεία διαδρομή (περίπτωση (α)) δεν αποτελεί την συντομότερη διαδρομή για την συγκεκριμένη επιφάνεια που εξετάζουμε.

239. Δίκιο έχει η Μαρία,ο Τοτος έλυσε άλλο πρόβλημα με διαφορετικό δειγματικό χώρο. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε ένα σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και να απέχει από το Α απόσταση μεγαλύτερη από το μισό του ΑΒ.

240.



241.Το πλήθος των επταγώνων που καλύπτουν το επίπεδο είναι άπειρο ,η μέση τιμή μιας άπειρης ακολουθίας όρων εξαρτάται από την τοποθέτηση των όρων.

Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε τους όρους

1,0,1,0,1,0, 1,0,1,0,1,0,….

Έχουν μέσο όρο το 1/2 .

Αν αναδιατάξουμε τους όρους

1,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1….

Έχουν μέσο όρο το 0.

Άρα το σφάλμα στο συλλογισμό είναι ότι δεν λαμβάνονται υπόψη οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε τους απείρους όρους μιας ακολουθίας , όροι που στο εν λόγω παράδειγμα είναι οι γωνίες των επταγώνων που καλύπτουν το επίπεδο. Άρα σίγουρα το επίπεδο δεν καλύπτεται μονοσήμαντα από επτάγωνα.

241. Για να βρούμε την απόσταση από την φωλιά του φιδιού μέχρι και το σημείο που θα συναντηθούν το φίδι με το παγωνι,σκεφτόμαστε ως εξής:

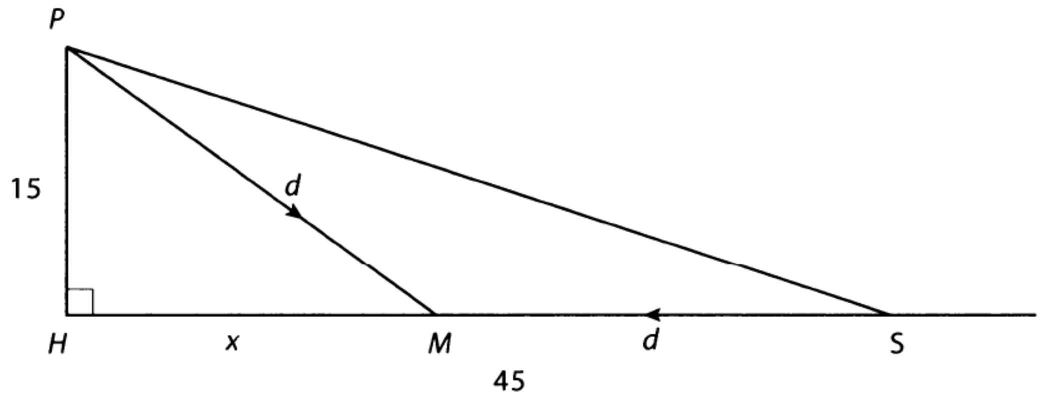
Το παγώνι βρίσκεται στο σημείο P ,η φιδοφωλιά στο H ,το φίδι αρχικά στην θέση S και το σημείο συνάντησης τους στο M.Έστω HM=χ,PM=SM=d

Έχουμε ,$d^2=15^2+x^2$ (1) και d+x=45 (2)

Η (1): $d^2=15^2+x^2$ ή $d^2+x^2=15^2$ ή $(d+x)(d-x)=15^2$ (3)

Η (3) με χρήση της (2) : $45(d-x)=15^2$ ή $45(d-x)=225$ ή $d-x=5$ (4)

Από το σύστημα των (4) ,(3) προκύπτει χ=20 μέτρα,d=25 μέτρα.



242. Μια πρώτη ιδέα είναι να ρωτήσουμε *«πόσες φορές χωράει το 10 στο 1000000;»* και να δώσουμε το αποτέλεσμα,δηλαδή 100000,σαν απάντηση.Προφανώς είναι λανθασμένη προσέγγιση.Πράγματι το 1000000! αρχίζει με

1*2*3*4*5*6*…

Και βλέπουμε το 2 και το 5 να συνωμοτούν για να παράξουν δεκάρι που δεν περιέχεται στον αρχικό μας υπολογισμό.
Ας διορθώσουμε την ερώτηση:
«πόσες φορές χωρεί το 5 στο 100000 και πόσες το 2;»
Αν το καλοσκεφτούμε,το 2 δεν πρέπει να μας προβληματίσει.Υπάρχουν όσα δυάρια θέλουμε για να τα ζευγαρώσουμε με τα πεντάρια που θα βρούμε.*Πόσες λοιπόν φορές χωράει το 5 στο 1000000;*Απάντηση:200000.Είναι η σωστή απάντηση και επιλύει το πρόβλημα;
Όχι,αλλά τώρα για άλλο λόγο.Η λέξη «χωραει»,που υπονοεί ακριβή διαίρεση, είναι παραπλανητική.Ας θεωρήσουμε την περίπτωση των μηδενικών στο τέλος του 10! .Η διαίρεση του 10 με το 10 δίνει την λανθασμένη απάντηση (ένα) ενώ η διαίρεση του 10 με το 5 δίνει την σωστή (2)
Πραγματικά (με την βοήθεια του wolframalpha) διαπιστώνουμε
10!=1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=3628800
https://www.wolframalpha.com/input/?i=10!
Όμως ακόμα και αυτή η δεύτερη ερώτηση δεν είναι σωστή σκεφτείτε την περίπτωση του 11! ,θα έπρεπε το 11! να μην τελειώνει σε μηδενικό,όμως πάλι με την βοήθεια του wolframalpha διαπιστώνουμε:
11!=1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11=39916800
https://www.wolframalpha.com/input/?i=11!!
Προφανώς περνώντας από 10! Σε 11! δεν χάνουμε μηδενικά.
Αλλάζουμε την ερώτηση με σκοπό να αποφύγουμε τα μηδενικά του αρχικού αριθμού (1000000) είναι:
Πόσα πολλαπλάσια του 5 υπάρχουν κάτω (συμπεριλαμβανόμενου και) του 1000000;
Η απάντηση είναι 200000, όπως και για το 1000001,ενθαρρυντικό σημάδι. Η ερώτηση όμως παραμένει ανεπαρκής, όπως παρατηρούμε εξετάζοντας τον αριθμό 30 (η ακόμα και το 31) αντί του 1000000.Υπάρχουν 6 πολλαπλάσια του 5 κάτω από το 31 , αλλά πάλι σύμφωνα με το wolframalpha το 31! ττελειώνει σε 7 μηδενικά και όχι ή 6
(https://www.wolframalpha.com/input/?i=31!!)
Η αιτία είναι ότι το 31! εχει 6 πολλαπλάσια του 5
5,10,15,20,25,30
Από τους οποίους ένας ο 25, συνεισφέρει δυο πεντάρια, άρα δυο μηδενικά στο τέλος.

Η σωστή διατύπωση είναι:
Ρόσα 5 εμφανίζονται στην διάσπαση σε πρώτους παράγοντες όλων των θετικών ακεραίων έως και 1000000;
Εδώ τωρα τιθενται πολλές ερωτήσεις. Υπάρχουν

200000 πολλαπλάσια του 5 έως και 1000000

40000 πολλαπλάσια του 5^2

8000 πολλαπλάσια του 5^3

1600 πολλαπλάσια του 5^4

320 πολλαπλάσια του 5^5

64 πολλαπλάσια του 5^6

Καθώς το 5^7 δεν διαιρεί το 1000000,πρεπει να σταματήσουμε σε αυτό το σημείο; Ας προσθέσουμε τα αποτελέσματα. Το άθροισμα είναι
200000+40000+8000+1600+320+64=249984
Αποτελεί απάντηση στο αρχικό ερώτημα;

Όχι, χρειάζεται μια τελευταία προσπάθεια, Είναι αλήθεια ότι το 5^7 δεν διαιρεί το 1000000 αλλά δεν έχει καμία σημασία. Αν ψάχναμε τα μηδενικά στο τέλος του 1000001! Θα έχουμε ακολουθήσει την ίδια διαδικασία παρά το γεγονός ότι το 1000001! δεν διαιρείται από κανένα πολλαπλάσιο του 5.Το σημαντικό δεν είναι η διαιρετότητα αλλά η απαρίθμηση όλων των πολλαπλάσιων δυνάμεων του 5 κάτω του 1000000. Έχουμε

12 πολλαπλάσια του 5^7

2 πολλαπλάσια του 5^8

Και εδώ σταματάμε γιατί το wolframalpha μας πληροφορεί ότι το 5^9 είναι μεγαλύτερο από 1000000.Υπάρχουν 12 πολλαπλάσια του 5^7 διότι
1000000/78125=12,8 (5^7=78125)
Και το δεκαδικό μέρος δεν συνεισφέρει στο μέτρημα άρα τελικά 249984+14=249998 μηδενικά.

243. Πως τίθεται το πρόβλημα.Φανταστείτε ότι σας δίνουν μια μηχανή που παράγει τυχαία ένα από τους αριθμούς 1,2,3,4,5 και με την χρήση αυτής της μηχανής θέλετε να επιλέξετε στην τύχη ένα από τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6,7.Μια πρώτη σκέψη είναι να κάνετε δυο ρίψεις του ζαριού να υπολογίσετε το άθροισμα τους και να το αντιστοιχίσετε σε ένα από τους 7 αριθμούς. Ο Γιάνος Φον Νιούμαν έλεγε*: «Οποιοσδήποτε ανακαλύπτει αριθμητικές μεθόδους παραγωγής τυχαίων αριθμητικών ψηφίων είναι βέβαιο ότι αμαρτάνει!!»*
Δεν θα είναι πραγματικά τυχαίο το αποτέλεσμα ,κάθε παλιός μπαρμπουτιέρης γνωρίζει ότι άλλα αθροίσματα εμφανίζονται συχνότερα και άλλα πιο αραιά. Μια άλλη πρόταση θα ήταν να ρίξουμε επτά φορές το ζάρι και ο αύξοντας αριθμός της μεγαλύτερης ένδειξης να αποτελεί την επιλογή του αριθμού, σε περίπτωση ισότητας των μέγιστων ενδείξεων επαναλαμβάνουμε.Είναι αρκούντως τυχαία η διαδικασία, όμως απαιτεί αρκετές ρίψεις.Μπορούμε καλύτερα;
Η λύση που δίνει το εγχειρίδιο της εταιρείας είναι διαφορετική. Θα χρησιμοποιήσουμε το δυαδικό αριθμητικό σύστημα και την μετατροπή σε αυτό των αριθμών από το 1 μέχρι το 7.

Δεκαδικό σύστημα	Δυαδικό σύστημα
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Ρίχνουμε το ζάρι,αν έρθει 1 ή 2 γράφουμε το 1 ,αν έρθει 3 ή 4 γράφουμε το 0,αν έρθει 5 ,ξαναρίχνουμε. Άρα, με τρεις ρίψεις (ίσως λίγο περισσότερες αν έρθει 5) δημιουργούμε ένα τριψήφιο αριθμό με μοναδικά ψηφία 0 και 1.Έναν αριθμό στο δυαδικό που θα μας δώσει στο δεκαδικό ένα αριθμό από το 1 μέχρι το 7.Αν προκύψει 000 τότε οι τρεις ρίψεις πρέπει να επαναληφθούν.Η επιλογή θα είναι απολύτως τυχαία.

243. Ονομάζουμε τα τρία μπιφτέκια Α, Β και Γ και τις δύο πλευρές τους 1 και 2. Ένας τρόπος για να ψηθούν είναι ο εξής: Ψήνει πρώτα το Α1 με το Β1 για 5 λεπτά. Στη συνέχεια το Α2 με το Γ1 για άλλα 5 και τέλος το Β2 με το Γ2 για άλλα 5. Συνολικός χρόνος και για τα τρία: 15 λεπτά.

244. Αντιστοιχίζουμε τα κουδούνια στην είσοδο από πάνω μέχρι κάτω με τους αριθμούς 1,2,3,4,...κλπ. Αφού έχω ανοίξει το κασετόφωνο και το έχω τοποθετήσει δίπλα στο θυροτηλέφωνο στο διαμέρισμά μου, κατεβαίνω στην είσοδο και χτυπώ: το πρώτο κουδούνι 1 φορά, το δεύτερο 2 φορές, το τρίτο 3 φορές κλπ. Αφού τα χτυπήσω όλα, ανεβαίνω στο διαμέρισμά μου και ακούω την κασέτα. Ο αριθμός των χτυπημάτων που έχουν καταγραφεί στην κασέτα αντιστοιχεί στο κουδούνι με τον αντίστοιχο αριθμό.

245. Οι συνδυασμοί τριών αριθμών που μας δίνουν γινόμενο 36 και δίπλα το άθροισμά των είναι οι εξής:

Γ:36 = 3 - 3 - 4 Α:10=3+3+4

Γ:36 = 2 - 2 - 9 Α:13=2+2+9

Γ:36 = 1 - 4 - 9 Α:14=1+4+9

Γ:36 = 2 - 3 - 6 Α:11=2+3+6

Γ:36 = 1 - 6 - 6 Α:13=1+6+6

Γ:36 = 1 - 2 -18 Α:21=1+2+18

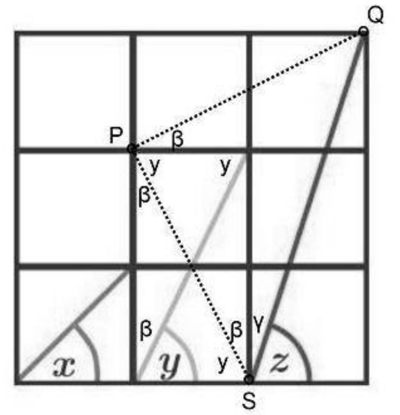
Γ:36 = 1 - 1 - 36 Α:38=1+1+36

Γ:36 = 1 - 3 - 12 Α:16=1+3+12

Η αδυναμία του φίλου να ξέρει με βεβαιότητα τους αριθμούς παρ' ότι γνωρίζει τον αριθμό της οδού που μένει μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τουλάχιστον δύο από τους συνδυασμούς έχουν το ίδιο άθροισμα, κάτι που επιβεβαιώνεται από τον παραπάνω πίνακα. Άρα το άθροισμα των ηλικιών και ταυτόχρονα ο αριθμός των παραθύρων της απέναντι πολυκατοικίας είναι το 13. Ωστόσο δεν έχει διευκρινιστεί ακόμη ποιος από τους δύο συνδυασμούς είναι ο σωστός. Η απάντηση του Χρήστου (ο μεγαλύτερος γιος μου παίζει πολύ καλό μπάσκετ),αλλά ότι υπάρχει μεγαλύτερος από τους άλλους δύο μας δίνει απευθείας και την σωστή λύση: Οι δύο γιοι έχουν ηλικία 2 ετών έκαστος και η μεγαλύτερος 9 ετών. Ο δε αριθμός της οδού που μένει ο Σωτήρης είναι ο 13!! Αν ο αριθμός των παραθύρων της απέναντι πολυκατοικίας ήταν άλλος από τον αριθμό 13 θα καταλάβαινε αμέσως για ποιον συνδυασμό πρόκειται, επειδή όμως το 13 επαναλαμβάνεται 2 φορές, στο 1x6x6 και στο 2x2x9, χρειάζεται και η διευκρίνιση για το μεγάλο γιο. Ο συνδυασμός 1x6x6 απορρίπτεται λόγω του ότι υπάρχουν δύο μεγάλοι γιοι.

246. Απάντηση. Το σχήμα είναι λανθασμένο, η διχοτόμος της γωνίας Α και η μεσοκαθέτου της ΒΓ τέμνονται σε σημείο Η εκτός τριγώνου.

247.



Το τρίγωνο PQS είναι ορθογώνιο και ισοσκελές συνεπώς PQS=45^o ,έτσι

PQS+y+z=180^o ή 45^o+y+z=180^o άρα x+y+z=180^o

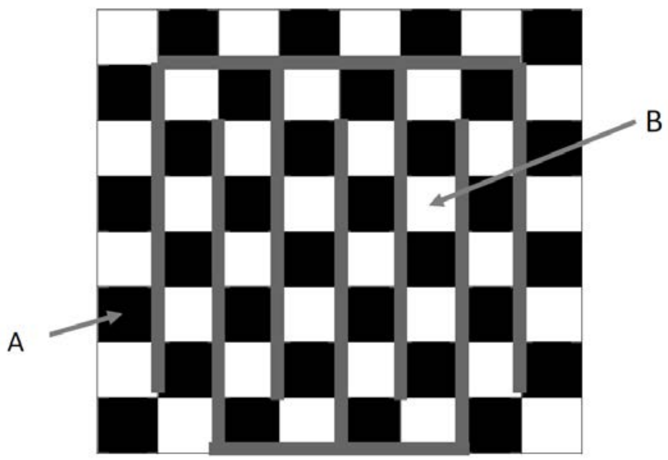
Περισσότερα προβλήματα στην ομάδα:

https://www.facebook.com/groups/119060981470596/

248.Ειναι αδύνατο καθώς η γραμμή που θα περιέχει το 2 θα έχει περιττό άθροισμα ένα μια στήλη που δεν περιέχει το δυο θα έχει άρτιο άθροισμα.

249.Αν κόψουμε ένα από αυτά τα χαρτιά προκύπτουν 5 χαρτιά, έχουμε αύξηση κατά 4 χαρτιά .Αν κόψουμε δυο τότε προκύπτουν 10 χαρτιά με αύξηση 8 χαρτιών. Σκεπτόμενοι όμοια για οποιοδήποτε αριθμό η αύξηση θα είναι πάντα κατά άρτιο αριθμό χαρτιών .Τελικά τα χαρτιά που θα έχουμε ξεκινώντας από 5 χαρτιά θα είναι 5+2ν που είναι περιττός άρα είναι αδύνατο να έχουμε 2016 κομμάτια.

250.Μετατρέπουμε την σκακιέρα σε λαβύρινθο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



Αφαιρούμε ένα μαύρο και άσπρο τετράγωνο, για παράδειγμα το Α και το Β. Για να πάμε από το Α στο Β υπάρχουν δυο διαδρομές κατά μήκος του λαβυρίνθου , που ξεκινούν από καθένα από τα δυο γειτονικά στο Α τετράγωνα. Τα τετράγωνα αυτά είναι και τα δυο άσπρα,ενώ τα γειτονικά στο Β τετράγωνα είναι μαύρα. Έτσι καλύπτοντας με ντόμινο ένα άσπρο και ένα μαύρο κάθε φορά ζεύγος και ακολουθώντας τις παραπάνω διαδρομές , θα καλυφτούν όλα τα τετράγωνα της κολοβής σκακιέρας , χωρίς να περισσέψει κανένα. Βλέπουμε ότι αρκεί να φανταστούμε ότι κινούμαστε για να μας επιτρέψει να συλλάβουμε την απόδειξη με μια μάτια .Αν αφαιρέσουμε δύο τετραγωνάκια ίδιου χρώματος είναι αδύνατη η κάλυψη της κολοβής σκακιέρας με ντόμινο.
(θεώρημα της κολοβής σκακιέρας του R . E.Gomory)

251. Οι τέλειοι αριθμοί εφόσον είναι άρτιοι , είναι της μορφής 2^(ν−1)(2^ν − 1) με το ν να είναι πρώτος.
Ας δούμε τις δυνάμεις του 2
2^1=2
2^2 =4
2^3=8
2^4=16
2^5=32
2^6=64
2^7=128
…..
Όταν ο έκθετης είναι άρτιος τελειώνουν σε 4 ή 6 ενώ όταν ο έκθετης είναι περιττός έχουν τελευταίο ψηφίο το 2 ή το 8.Ο ν είναι πρώτος άρα περιττός συνεπώς το 2^ν τελειώνει σε 2 η 8, το 2^ν -1 τελειώνει σε 1 ή 7 και το 2^(ν-1) τελειώνει σε 6 ή 4 αντιστοιχα(2^5=32,2^(5-1)=15 και 2^3=8,2^(3-1)=4)Ετσι,το γινόμενο 2^(ν−1)(2^ν − 1) θα έχει ψηφίο μονάδων το 6,αφου 1*6=6 ή το 8 αφού 4*7=28.

ΑΣΤΡΑΠΙΑΙΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΓΙΑ ΑΡΧΑΡΙΟΥΣ

2/2+2*2^2=;;;

Η ικανότητα ενός ατόμου να εκτελεί αριθμητικές πράξεις με το μυαλό, είναι ανεξάρτητη από την γενική του νοημοσύνη,την μαθηματική του ενορατικότητα και την δημιουργικότητα του.Μερικοί από τους πιο διακεκριμένους μαθηματικούς αντιμετώπιζαν δυσκολίες στο να κάνουν πράξεις με απλούς αριθμούς .(Διαβάστε σχετικό περιστατικό με τον Κούμερ). Αντίθετα πολλοί επαγγελματίες αριθμομνήμονες είχαν ελαττωμένη απόδοση, (ιδιοφυείς μικρόνοες) στις άλλες νοητικές ικανότητες τους. Παρόλα αυτά σαν διαδικασία είναι θεαματική και συνάμα αποτελεί μέρος της ιστορίας των ψυχαγωγικών μαθηματικών αγαπημένο θέμα του ιστολογίου. Τίποτα βέβαια δεν αποτελεί κανόνα. Σταχυολογώ λοιπόν τα πιο γνωστά τρικ αστραπιαίων υπολογισμών διανθισμένα με ιστορικές αναφορές.

1.Προσθέτοντας τμηματικά.

Εκτελούμε την πρόσθεση σταδιακά, «σπάζοντας» τα βήματα. Αρχίζουμε με τα μεγαλύτερης τάξης ψηφία .

Για παράδειγμα η πρόσθεση :1325+2594.Έτσι:

1. 1325 + 2000 = 3325

2. 3325 + 500 = 3825

3. 3825 + 90 = 3915

4. 3915+ 4 = 3919.

Εμπειρικά όλοι το έχετε κάνει, η πρόκληση είναι χωρίς μολύβι και χαρτί.

2.Πρόσθεση με στρογγυλοποίηση του ενός προσθετέου.

Στρογγυλοποιούμε είτε τον ένα είτε τον άλλο προσθετέο, εκτελούμε ευκολότερα την πρόσθεση και δεν παραλείπουμε να «διορθώσουμε» το αποτέλεσμα.

Για παράδειγμα η πρόσθεση 5492+8739

Στρογγυλοποιούμε το 5492 και το κάνουμε 5500, η πρόσθεση γίνεται

5500+8739=14239

Αφαιρούμε και το 8 και έχουμε 14239-8=14231.

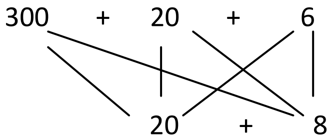
3.Πολλαπλασιάζοντας τμηματικά

Χωρίζουμε τους μεγάλους αριθμούς που αποτελούν τους όρους του γινομένου σε μικρότερα κομμάτια και στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε από αριστερά προς τα δεξιά «σταυρωτά». Για παράδειγμα το γινόμενο 326Χ28 μετατρέπεται σε (300+20+6)Χ(20+8)και συνεχίζουμε όπως στο σχήμα

326Χ28

326=300+20+6

28=20+8



1. 20Χ300=6000

2.6000+(20Χ20)=6400

3.6400+(20Χ6)=6520

4.6520+(8Χ300)=8920

5.8920+(20Χ8)=9080

6.9080+(6Χ8)=9128

Φαίνεται πολύπλοκο ,όμως μετά από κάθε βήμα μόνο ένας παράγοντας πρέπει να κρατηθεί στην μνήμη για την συνέχεια .Σύμφωνα με τον Μάρτιν Γκαρντνερ στο Πανηγύρι των μαθηματικών του ,την παραπάνω μέθοδο χρησιμοποιούσε επί σκηνής ο αριθμομνήμονας G.P.Bidder.Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ,ότι ο Bidder άρχισε τις εμφανίσεις του επί σκηνής από την ηλικία των 9 ετών με την συνοδεία του πάτερα του. Ο Γκαρντνερ αναφέρει χαρακτηριστικά ότι των ρωτούσαν ερωτήσεις του τύπου: Αν το φεγγάρι απείχε 123256 μίλια και ο ήχος ταξιδεύει με ταχύτητα 4 μιλίων το λεπτό , σε πόσο χρόνο θα ακούγαμε στην γη-αν ήταν δυνατόν- έναν ήχο από το φεγγάρι; Ο Bidder σε λιγότερο από ένα λεπτό απαντουσε:21 ημέρες , 9 ώρες ,34 λεπτά!

4.Πως διαιρούμε ένα αριθμό με το 5.

Διπλασιάζουμε τον αριθμό και μεταφέρουμε την υποδιαστολή μια θέση αριστερά

Π.χ $\frac{348}{5}$.Διπλασιάζουμε το 348 (2x348=796) μεταφέρουμε την υποδιαστολή μια θέση αριστερά 79,6 άρα τελικά $\frac{348}{5} = 79,6$

5.Για να πολ/σουμε με το 5

Αρκεί να διαιρέσουμε τον αριθμό με το 2 και μετά να πολλαπλασιάσουμε με το 10 .
5x13
13/2=6.5
6.5X10=65

6.Για να πολ/σουμε με το 9
Αρκεί να πολ/σουμε με το 10 και κατόπιν από το αποτέλεσμα να αφαιρέσουμε τον ίδιο τον αριθμό.
9X453
10 X453=4530
4530-453=4077

7.Ποσοστά…

● Για να βρούμε το 15% ενός αριθμού , τον διαιρούμε με το 10 και στο αποτέλεσμα προσθέτουμε το μισό του πηλίκου. Παράδειγμα: 15% του 20 , 20/10=2 ,2+2/2=2+1=3

● Για να βρούμε το 20% ενός αριθμού , τον διαιρούμε με το 10 και διπλασιάζουμε το αποτέλεσμα. Παράδειγμα: 20% του 400 , 400/10=40 , 2X40=80

● Για να βρούμε το 5% ενός αριθμού , τον διαιρούμε με το 10 και στην συνέχεια διαιρούμε το αποτέλεσμα με το 2. Παράδειγμα: 5% του 500 , 500/10=50 , 50 /2=25

8.Πως διαιρούμε με αριθμούς που έχουν πολλαπλάσιο το 100 .

Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό με το πηλίκο του 100 με τον αριθμό και μετατοπίζουμε την υποδιαστολή δυο θέσεις αριστερά:

Π.χ

$\frac{54}{20}$ (100/20=5) πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με το 5 (54x5=270) μεταφέρουμε την υποδιαστολή δυο θέσεις αριστερά 2,7.Αρα $\frac{54}{20}=2,7$.

$\frac{490}{25}$ (100/25=4) πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με το 4 (490x4=1960) μεταφέρουμε την υποδιαστολή δυο θέσεις αριστερά 19,60.Αρα $\frac{490}{25}=19,60$.

9.Πολ/σμος κάθε διψήφιου αριθμού με το 11

Έστω ένας διψήφιος π.χ το 54

Χωρίζουμε τον αριθμό νοερά αφήνοντας κενό ανάμεσα στο 5 και στο 4.

(5___4)

Προσθέτουμε τους δυο αριθμούς: 5+4=9

Τοποθετούμε το αποτέλεσμα ανάμεσα στο 5 και στο 4 (5_9_4)

Τελικά: 54 X 11=594

● Αν το άθροισμα των δυο αριθμών είναι μεγαλύτερο του 10 προσθέτουμε το κρατούμενο στον πρώτο αριθμό για παράδειγμα ο αριθμός 67.

(6___7)

6+7=13

(7_3__7)

67X 11=737

10.Πως θα υψώσουμε στο τετράγωνο κάθε διψήφιο αριθμό που τελειώνει σε 5.

● Για παράδειγμα το 35

● Πάρτε το ψηφίο της δεκάδας και αυξήστε το κατά 1 . (3+1=4)

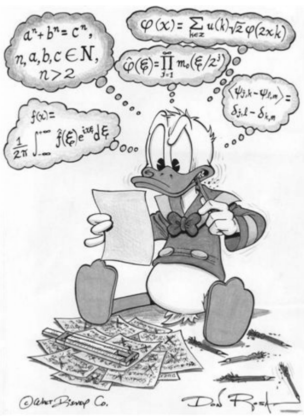
● Πολλαπλασιάστε τον αριθμό που βρήκες (4) με το ψηφίο της δεκάδας

3X4=12

● Γράψτε το αποτέλεσμα και δίπλα το 25 (1225)

35^2=1225

http://www.massey.ac.nz/~wwifs/mathnews/centrefolds/63/Apr1995.shtml



11.Πως θα υψώσουμε στο τετράγωνο κάθε διψήφιο αριθμό.

Συμφώνα με τον Martin Gardner το παρακάτω τρικ το

χρησιμοποιούσε ο μαθηματικός A.C.Aitken.

O Aitken χρησιμοποίησε την ταυτότητα

$$\alpha^2 = (\alpha - d)(\alpha + d) + d^2$$

Επιλέγουμε το d έτσι ώστε να προκύπτει πολλαπλάσιο του 10

Για παράδειγμα το 36, επιλέγουμε ως d =4 γιατί προκύπτει

ως ένας όρος του γινομένου το 40:

36^2=(36-4)(36+4)+4^2=32x40+16=1296

Για παράδειγμα το 48, επιλέγουμε ως d =2 γιατί προκύπτει

ως ένας όρος του γινομένου το 50:

48^2=(48-2)(48+2)+2^2=50x46+4=2304

Με εξάσκηση γίνεται νοερά , χωρίς μολυβί και χαρτί.

Alexander Aitken.
Ο ανθρωπινός υπολογιστής

O Alexander Aitken γεννήθηκε στο Dunedin το 1895. Διακεκριμένος μαθηματικός, υπήρξε καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Εδιμβούργου.
Το μοναδικό ταλέντο στους από μνήμης υπολογισμούς τον κατατάσσει στις πρώτες θέσεις των αριθμομνημόνων καθώς τα κατορθώματα του είναι καταγεγραμμένα με μαρτυρίες. Το 1920 κατά την διάρκεια ενός ψυχομετρικού τεστ εκτέλεσε τον πολλαπλασιασμό 987,654,321 x123,456,789 σε μόλις 30 δευτερόλεπτα .Στο ίδιο τεστ του ζητήθηκε να μετατρέψει το κλάσμα 4/47 σε δεκαδικό και σε 4 δευτερόλεπτα απάντησε 0.85106382978723404255531914 .O Aitken ήταν σε θέση να παραθέσει από μνήμης 100 ψηφία του π. Πέθανε το 1967 σε ηλικία 72 ετών.

12.Υπολογισμος τετραγώνου από τον φυσικό Hans Bethe

Hans A. Bethe (1906 –2005)

Αντιγράφω από το ιστολόγιο physicsgg

O **Richard Feynman** στο κεφάλαιο «Τυχεροί αριθμοί», του βιβλίου του

«**Σίγουρα θα αστειεύεστε , κύριε Φάινμαν**» αναφέρει μεταξύ άλλων και το

εξής περιστατικό:

*….. Όταν βρισκόμουν το Λος Άλαμος, είχα διαπιστώσει ότι ο **Hans Bethe** έκανε πράξεις με το νου του σαν υπολογιστής. Για παράδειγμα, μια φορά αντικαθιστούσαμε τις αριθμητικές τιμές των μεγεθών σε έναν τύπο, και έφτασα στο τετράγωνο του 48. Πήγα λοιπόν στη **μηχανή Marchan**t για να το βρω, αλλά αυτός με έκοψε:*
«Άστο, είναι 2300».
Άρχισα να πατώ τα κουμπιά, και αυτός συμπλήρωσε:
«Αν το θέλεις ακριβώς είναι 2304».
Η μηχανή έγραψε 2304. «Μπράβο! Πως έτσι;» απόρησα.
«Δεν ξέρεις πώς να βρίσκεις το τετράγωνο αριθμών κοντά στο 50;
Βρίσκεις το τετράγωνο του 50 και αφαιρείς το εκατονταπλάσιο της διαφοράς του αριθμού σου από το 50 (στην προκειμένη περίπτωση το 2), οπότε

2500 – 200 = 2300
Αν θέλεις ακριβώς τον αριθμό, βρίσκεις το τετράγωνο της διαφοράς και το προσθέτεις (2300+4=2304)»…..

Πράγματι έτσι είναι. Για παράδειγμα
$41^2 = 2500 - 100 \bullet 9 + 9^2 = 1681$
ή αν θέλουμε το τετράγωνο αριθμού μεγαλύτερου του 50
$54^2 = 2500 + 100 \bullet 4 + 4^2 = 2916$
Μόνο που τώρα, το εκατονταπλάσιο της διαφοράς του αριθμού από το πενήντα, προστίθεται στο 2500 αντί να αφαιρείται.
Μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι ο παραπάνω τυφλοσούρτης ισχύει και για αριθμούς που απέχουν πολύ από το 50, με τη μόνη διαφορά ότι τότε οι πράξεις γίνονται όλο και δυσκολότερες με το μυαλό.
Πως σκέφτηκε ο μεγάλος φυσικός **Hans Bethe** τον παραπάνω τυφλοσούρτη;
Βασίστηκε στην γνωστή από το γυμνάσιο ταυτότητα του τέλειου τετραγώνου:

$$(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$$

για α=50 προκύπτει:

$$(50 \pm \beta)^2 = 50^2 \pm 2 \cdot 50 \cdot \beta + \beta^2 = 2500 \pm 100\beta + \beta^2$$

Έτσι για να υπολογίσουμε το τετράγωνο οποιουδήποτε αριθμού που διαφέρει κατά β από το 50 αρκεί: να αφαιρέσουμε από το 50^2=2500, το εκατονταπλάσιο της διαφοράς του αριθμού μας από το 50 και αν θέλουμε περισσότερη ακρίβεια να προσθέσουμε το τετράγωνο της διαφοράς!

13.Αριθμητικά τρικ με την ημερομηνία γέννησης σας και ένα…. κατά παραγγελία μαγικό τετράγωνο!!

Ζητείστε από ένα εθελοντή (κατά προτίμηση όχι γυναίκα) να πει την ημερομηνία γεννήσεως του, για παράδειγμα **12/3/74** και σε ένα φύλλο χαρτί άμεσα κατασκευάζετε ένα μαγικό τετράγωνο με την ημερομηνία του στην πρώτη σειρά .

Α	Β	Γ	Δ
Γ-Χ	Δ+Χ	Α-Χ	Β+Χ
Δ+Χ	Γ+Χ	Β-Χ	Α-Χ
Β	Α-2Χ	Δ+2Χ	Γ

Το παραπάνω μαγικό τετράγωνο έχει μαγική σταθερά 26.

Πως το έκανε; Υπάρχει τύπος που είναι εύκολο να απομνημονευτεί, και με την χρήση του να κατασκευαστεί το μαγικό τετράγωνο επιτόπου. Αν η ημερομηνία γέννησης είναι Α/Β/ΓΔ τότε ο τύπος είναι:

12	3	7	4
6	5	11	4
5	8	2	11
3	10	6	7

Οπού Χ οποιοσδήποτε αριθμός ,στο παραπάνω παράδειγμα για ευκολία Χ=1.

14.Πώς να πολλαπλασιάσετε νοερά δυο διψήφιους μικρότερους του 20.

Έστω το γινόμενο 19x13

● Αρχικά προσθέτουμε στον πρώτο αριθμό τις μονάδες του δευτέρου: 19+3=22

● Βάζουμε ένα μηδενικό στο τέλος του αθροίσματος: 22->220

● Πολλαπλασιάζουμε τα ψηφία των μονάδων: 9x3=27

● Προσθέτουμε τα δυο αποτελέσματα : 220+27=247

15.Πώς να πολλαπλασιάσετε νοερά δυο διψήφιους αριθμούς που βρίσκονται σε απόσταση μέχρι 9 μονάδων από το 100.

Θα σας φανεί πολύπλοκο στην αρχή, αλλά με λίγη εξάσκηση μπορεί να γίνει νοερά πολύ γρήγορα.

Έστω το γινόμενο 95x97

● Αρχικά προσθέτουμε αριθμούς : 95+97=192

● Σβήνουμε το ψηφίο της εκατοντάδας : 92

● Βάζουμε δυο μηδενικά στο τέλος: <u>9200</u>

● Αφαιρούμε από το 100 τον καθένα από τους αρχικούς αριθμούς και πολλαπλασιάζουμε:

(100-95)(100-97)=5*3=<u>15</u>

● Προσθέτουμε τα δυο υπογραμμισμένα αποτελέσματα:9200+15=9215

16.Πώς να πολλαπλασιάσετε διαδοχικούς αριθμούς

Έστω ο πολλαπλασιασμός 13x14

Υψώνουμε τον πρώτο αριθμό στο τετράγωνο και στην συνέχεια προσθέτουμε τον ίδιο τον αριθμό.

$13x14 = 13x(13+1) = 13^2 + 1x13 = 169 + 13 = 182$

17.Πολ/σμος κάθε αριθμού με το 11

Για παράδειγμα , 51236 X 11

-Στην αρχή γράφουμε τον αριθμό με ένα μηδενικό στην αρχή σαν πρώτο ψηφίο

051236

-Τραβάμε μια γραμμή κάτω από τον αριθμό

0 5 1 2 3 6

.

Αφήνουμε το τελευταίο ψηφίο το 6 ως έχει ,και κινούμαστε από τα αριστερά προς τα δεξιά προσθέτοντας ανά δυο διαδοχικούς αριθμούς, κάθε αριθμό με το γείτονα του. Τα αποτελέσματα τοποθετούνται διαδοχικά . Δηλαδή:

0 5 1 2 3 6 .

(0+5)((5+1)(1+2)(2+3) (3+6) 6

5 6 3 5 9 6

-Τελικά 51236 X 11=563596 .

Shakuntala Devi

Η Shakuntala Devi γεννήθηκε το 1939 στο Bangalore της Ινδίας .

Παρ ότι οι γονείς της δεν διέθεταν μόρφωση εκδήλωσε

έντονο ενδιαφέρον για τους αριθμούς από την ηλικία των 3 ετών.

Δυο χρόνια αργότερα έδειξε τα ταλέντο της σε μια συγκέντρωση των

σπουδαστών και των καθηγητών του Πανεπιστημίου του Mysore στην

Ινδία. Κάτοχος ρεκόρ Γκίνες για τα υπολογιστικά επιτεύγματα της.
Ενδεικτικά αναφέρουμε:
Το 1977 στο πανεπιστήμιο Southern Methodist των Η.Π.Α εξήγαγε την 23η ρίζα ενός ακέραιου με 201 ψηφία σε μόλις 50 δευτερόλεπτα.
Το 1980 στο Imperial College στην μεγάλη Βρετανία πολλαπλασίασε τους αριθμούς 7686369774870,2465099745779 υπολογίζοντας το εικοσαεξαψήφιο γινόμενο τους σε μόλις 28 δευτερόλεπτα.Οι αριθμοί που της δόθηκαν επελέγησαν τυχαία από πρόγραμμα υπολογιστή στο τμήμα υπολογιστών του πανεπιστήμιου.
Το 1988 στο πανεπιστήμιο Stanford των Η.Π.Α :
-εξήγαγε την κυβική ρίζα του 95443993,το 457 σε 2 δευτερόλεπτα.
-υπολόγισε την κυβική ρίζα του 2373927704,το 1334 σε 10 δευτερόλεπτα.
-υπολόγισε την 8η ρίζα του 20047612231936 ,το 46 σε 10 δευτερόλεπτα.
Μπορούσε σε λίγα δευτερόλεπτα για οποιαδήποτε ημερομηνία του προηγουμένου αιώνα να πει σε λίγα δεύτερα ποια μέρα έπεφτε. Αντιπαθούσε τον χαρακτηρισμό που της απέδιδαν "ανθρώπινος υπολογιστής" και ισχυριζόταν ότι όφειλε την εξαιρετική ταχύτητα στις αριθμητικές πράξεις στα Βεδικά μαθηματικά (Vedic Maths) ένα σύστημα εκτέλεσης αριθμητικών υπολογισμών το όποιο κατά την ίδια είναι 10 με 15 φόρες ταχύτερο από συμβατικό που χρησιμοποιούμε. Επινοήθηκε από έναν ινδό μοναχό τον Swami Sri Bharati Krishna Tirthaji Maharaja .

18.Πως να υψώσεις ένα οποιοδήποτε αριθμό στο τετράγωνο .
Παράδειγμα το 999 .

-Βρίσκεις πόσες μονάδες απέχει ο αριθμός από την πλησιέστερη δύναμη του 10 .Η διαφορά του 999 από το 1000 είναι: (1000-999=1).

-Προσθέτεις και αφαιρείς στον αρχικό αριθμό την διαφορά , βρίσκεις το γινόμενο τους (999-1)Χ(999+1)=998Χ1000=998000

-Προσθέτεις το τετράγωνο της διαφοράς 998000+1^2=998001

Τελικά: 999^2=998001

(χρησιμοποιούμε την γνωστή ταυτότητα του γυμνάσιου $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$)

19.Μεζεδάκια γρήγορων πολλαπλασιασμών

Πολλαπλασιασμός με το 5:Πολλαπλασιαζουμε με το 10 και διαιρούμε με το 2.

Πολλαπλασιασμός με το 6:Πολλαπλασιαζουμε με το 3 και κατόπιν με το 2.

Πολλαπλασιασμός με το 9:Πολλαπλασιαζουμε με το 10 και από το αποτέλεσμα αφαιρούμε τον αρχικό αριθμό.

Πολλαπλασιασμός με το 12:Πολλαπλασιαζουμε με το 10 και στο αποτέλεσμα προσθέτουμε τα διπλάσιο του αρχικού αριθμού.

Πολλαπλασιασμός με το 13:Πολλαπλασιαζουμε με το 10 και προσθέτουμε το τριπλάσιο του αρχικού αριθμού.

Πολλαπλασιασμός με το 14:Πολλαπλασιαζουμε με το 7 και κατόπιν πολλαπλασιάζουμε με το 2.

Πολλαπλασιασμός με το 15:Πολλαπλασιαζουμε με το 10 και κατόπιν προσθέτουμε το πενταπλάσιο του αρχικού αριθμού.

Πολλαπλασιασμός με το 16:Διπλασιαζουμε τον αριθμό τέσσερεις φορές.

Πολλαπλασιασμός με το 17:Πολλαπλασιαζουμε με το 7 και προσθέτουμε στο αποτέλεσμα το δεκαπλάσιο του αρχικού αριθμού.

Πολλαπλασιασμός με το 18:Πολλαπλασιαζουμε με το 20 και αφαιρούμε το διπλάσιο του αρχικού αριθμού.

Πολλαπλασιασμός με το 19:Πολλαπλασιαζουμε με το 20 και αφαιρούμε το αρχικό αριθμό.

Πολλαπλασιασμός με το 24:Πολλαπλασιαζουμε με το 8 και στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με το 3.
Πολλαπλασιασμός με το 27:Πολλαπλασιαζουμε με το 30 και αφαιρούμε το τριπλάσιο του αρχικού αριθμού.

Πολλαπλασιασμός με το 45:Πολλαπλασιαζουμε με το 50 και αφαιρούμε το πενταπλάσιο του αρχικού αριθμού.

Πολλαπλασιασμός με το 98:Πολλαπλασιαζουμε με το 100 και αφαιρούμε το διπλάσιο του αρχικού αριθμού.

Πολλαπλασιασμός με το 99:Πολλαπλασιαζουμε με το 100 και αφαιρούμε τον αρχικό αριθμό.

20.Διαίρεση

Έστω ότι δίνεται η διαίρεση 432/18.Πολλαπλασιάζουμε το διαιρέτη με πολλαπλάσια του 10 μέχρι να ξεπεράσουμε το διαιρετέο.

10X18=180

20X18=360

30X18=540

Γυρίζουμε ένα βήμα πίσω, θυμόμαστε το 20, και αφαιρούμε από το 432 το 360 :

432-360=72

Τώρα σκεπτόμαστε πόσες φορές «χωράει» το 18 στο 72 72/18=4.Αρα το αποτέλεσμα είναι 20+4=24.(Αποτελει βασική τεχνική του Arthur Benjamin, γνωστού και μη εξαιρετέου μαθημάγου)

21.Αριθμητικο τρικ-εξαγωγή κυβικής ρίζας

Πως θα σας φαινόταν να υπολογίζατε την κυβική ρίζα ενός αριθμού σε λίγα δευτερόλεπτα. Αν μη τι άλλο θα ήταν εξαιρετικά εντυπωσιακό. Παρ ότι μοιάζει εξαιρετικά δύσκολο, δεν είναι.Αν το κάνετε μπροστά σε φίλους ,σίγουρα θα κλέψετε την παράσταση.

Ζητείστε από έναν φίλο σας να επιλέξει οποιονδήποτε αριθμό από το 1 μέχρι το 100 χωρίς να σας τον αποκαλύψει ,στην συνέχεια να χρησιμοποιήσει την αριθμομηχανή του κινητού του και να τον υψώσει στην τρίτη δύναμη. Να σας ανακοινώσει το αποτέλεσμα και εσείς αμέσως να βρείτε τον αριθμό. Την κυβική ρίζα του αποτελέσματος.

Δείτε πως θα το κάνετε , αρχικά θα πρέπει να μπορείτε να απομνημονεύσετε όλους τους κύβους από το 1 μέχρι το 10.

1^3	1
2^3	8
3^3	27
4^3	64
5^3	125
6^3	216
7^3	343
8^3	512
9^3	729
10^3	1000

Παρατηρώντας τον παραπάνω πινάκα διαπιστώνουμε ότι όλα τα τελικά ψηφία των κύβων είναι διαφορετικά άρα σίγουρα γνωρίζουμε το τελευταίο ψηφίο της κυβικής ρίζας. Παρατηρούμε επίσης ότι εξαιρώντας τα 2,3,7και 8 το τελευταίο ψηφίο του κύβου και του αριθμού που ψάχνουμε είναι το ίδιο.

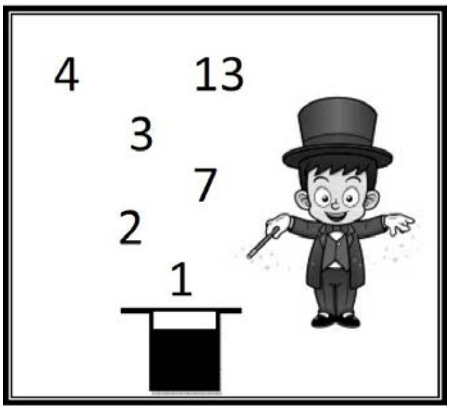
Ας δούμε συγκεκριμένα παραδείγματα , παρακαλείτε ένα φίλο σας να σκεφτεί έναν αριθμό από το 1 μέχρι το 100 , το κάνει , στην συνέχεια τον υψώνει με το κομπιουτεράκι στην τρίτη δύναμη και σας ανακοινώνει το αποτέλεσμα π.χ ο αριθμός 250047 , το τελευταίο ψηφίο του αριθμού είναι το 7 , κοιτάμε τον παραπάνω πίνακα και διαπιστώνουμε τότε το τελευταίο ψηφίο της κυβικής του ρίζας είναι το 3. Στην συνέχεια αγνοούμε από τον αριθμό τα τρία τελευταία ψηφία,ο 250047 γίνεται 250 ,κοιτάμε ξανά τον παραπάνω πινάκα το 250 βρίσκεται ανάμεσα στο 216 και το 343 άρα το ψηφίο που μας ενδιαφέρει βρίσκεται ανάμεσα στο 6 και το 7 .Πάντα επιλέγουμε το μικρότερο αριθμό εν προκειμένω το 6. Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι το 63.

Ένα παράδειγμα ακόμη . Να βρεθεί η κυβική ρίζα του 704969.Από το τελευταίο ψηφίο καταλαβαίνουμε ότι το τελευταίο ψηφίο της κυβικής ρίζας είναι το 9. Αγνοούμε τα τρία τελευταία ψηφία του 704969 άρα μένει 704 . Από τον παραπάνω πίνακα το 704 βρίσκεται ανάμερα στο 8 και στο 9 , παίρνουμε το μικρότερο , άρα κυβική ρίζα είναι το 89.

22. Ένα μαθημαγικό τρικ με κάρτες.

Ζητήστε από το υποψήφιο θύμα να σας πει σε ποιες από τις κάρτες βλέπει την ηλικία του (το υποψήφιο θύμα πρέπει να είναι το πολύ 60 ετών). Εσείς απλά προσθέσετε το πρώτο νούμερο από κάθε κάρτα που σας υποδείξει και θα έχετε ως αποτέλεσμα την ηλικία του

ΚΑΡΤΑ I 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 13, 15 , 17, 19, 21, 23 25, 27, 29, 31, 33,35 37, 39, 41 , 43, 45,47 49, 51, 53, 55, 57,59	ΚΑΡΤΑ II 4, 5 , 6 , 7 , 12 , 13 14, 15 , 20, 21, 22, 23 28, 29, 30, 31, 36,37 38, 39, 44 , 45, 46,47 52, 53, 54, 55,60
ΚΑΡΤΑ III 8, 9 , 10 ,11 , 12 , 13 14, 15 , 24, 25, 26, 27 28, 29, 30, 31, 40,41 42, 43, 44 , 45, 46,47 56, 57, 58, 59,60	ΚΑΡΤΑ IV 2, 3 , 6 ,7 , 10 , 11 14, 15 , 18, 19, 22, 23 26, 27, 30, 31, 34,35 38, 39, 42 , 43, 46,47 50, 51, 54, 55,58,59
ΚΑΡΤΑ V 16, 17 ,18 ,19 , 20 , 21 22, 23 , 24, 25, 26, 27 28, 29, 30, 31, 48, 49 50, 51, 52 , 53, 54,55 56, 57, 58, 59,60	ΚΑΡΤΑ VI 32, 33 ,34 ,35 , 36 , 37 38, 39 , 40, 41, 42, 43 44, 45, 46, 47, 48, 49 50, 51, 52 , 53, 54,55 56, 57, 58, 59,60



Για παράδειγμα, αν είναι 35 ετών τότε θα σας υποδείξει τις κάρτες I, IV,VI προσθέτετε νοερά το πρώτο νούμερο από κάθε κάρτα 1+ 2+32=35.Το τρικ βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δυνάμεων του 2.

23.Εύρεση του τελευταίου ψηφίου ενός πολύ μεγάλου αριθμού

Ένα πολύ γνωστό αριθμητικό τρικ αστραπιαίου υπολογισμού από αυτά που έκαναν επί σκηνής αριθμομνήμονες του παρελθόντος είναι η εύρεση του τελευταίου ψηφίου ενός πολύ μεγάλου αριθμού, χωρίς υπολογιστή τσέπης και σε μερικά δευτερόλεπτα.

Για παράδειγμα, ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο ενός αριθμού της μορφής:

$2345436267748089^{46836537836488}$

Ζητάτε από ένα φίλο ή φίλη σας να σας πει ένα μεγάλο αριθμό της παραπάνω μορφής α^{β} όπου α,β θετικοί ακέραιοι.

▪ Αν ο αριθμός α έχει τελευταίο ψηφίο 0,1,5 και 6 τότε απαντάτε άμεσα ότι το τελευταίο ψηφίο είναι το ίδιο με του αριθμού α^{β} ανεξάρτητα από το β.

Για παράδειγμα το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $89754687476476^{457604937067654466464}$ είναι το 6.
(http://www.wolframalpha.com/input/?i=89754687476476^457604937067654466464)

▪ Αν το τελευταίο ψηφίο του α δεν είναι 0,1,5 και 6 τότε από τον αριθμό α^{β} αποκόπτουμε νοερά το τελευταίο ψηφίο (το ψηφίο των μονάδων) του α και τα δυο τελευταία ψηφία (μονάδων, δεκάδων) του β.

Για τον αριθμό που τέθηκε στην αρχή θα είχαμε:

$2345436267748089^{46836537836488}$ ->9^{88}

Το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε τον έκθετη (88) ,αν είναι πολλαπλάσιο του 4 αρκεί να υψώσουμε τον αριθμό 9 στην τέταρτη δύναμη, το τελευταίο ψηφίο του αποτελέσματος είναι το ζητούμενο.

9^{88}->9^{4}

Το να υψώσουμε ένα αριθμό στην τετάρτη όταν μας αφορά μόνο το τελευταίο ψηφίο του αποτελέσματος δεν είναι τόσο δύσκολο όσο ακούγεται,υψώνουμε στο τετράγωνο και κατόπιν υψώνουμε πάλι στο τετράγωνο μόνο το τελευταίο ψηφίο του αποτελέσματος και καταλήγουμε το αποτέλεσμα .

9^2 =81 1^2 =1

άρα το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $2345436267748089^{46836537836488}$ είναι το 1.
(http://www.wolframalpha.com/input/?i=2345436267748089^46836537836488)

▪ Αν ο έκθετης δεν είναι πολλαπλάσιο του 4 απλά αφαιρούμε από αυτόν το πλησιέστερο πολλαπλάσιο του 4 και υψώνουμε στον αριθμό που προκύπτει .Για παράδειγμα ο αριθμός

$767866546354896365933578397423^{472359208484738750075527}$->$3^{27}$

27-24=3 (24 το πλησιέστερο πολλαπλάσιο του 4) 3^{27}->3^3=27

άρα το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $767866546354896365933578397423^{472359208484738750075527}$ είναι το 7.
(http://www.wolframalpha.com/input/?i=767866546354896365933578397423^472359208484738750075527)

Μερικά παραδείγματα

▪ $7894378909763478^{973676390760978378975637607890037}$ ->8^{37}

37-36=1 άρα 8^1=8 άρα τελευταίο ψηφίο το 8

▪$908675894064^{76539076307895607073774573747}$->$4^{47}$

47-44=3 4^3=64 άρα τελευταίο ψηφίο το 4

24) Ένα μαθημαγικό τρικ με τρία αντικείμενα και μια..αστυνομική ταυτότητα

Ξεκινάτε με μια εισαγωγή για τις καταπληκτικές τηλεπαθητικές ικανότητες σας και προτίθεστε να κάνετε μια μικρή επίδειξη.
Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον τρεις παρευρισκόμενοι. Ζητείστε από το υποψήφιο θύμα τρία αντικείμενα, δεν έχει σημασία ποια, αρκεί να προσέξετε ο αριθμός των γραμμάτων του ονόματος του κάθε αντικειμένου να είναι διαφορετικός.Αν το θύμα επιλέξει αντικείμενα με τον ίδιο αριθμό γραμμάτων πρέπει τεχνηέντως με κάποια πρόφαση να τον πείσετε να αλλάξει επιλογή.Μια καλή επιλογή είναι **ρολόι** (5 γράμματα), **ευρώ** (4 γράμματα),**κλειδιά** (7 γράμματα). Κατόπιν του ζητάτε να σκεφτεί έντονα ένα από τα τρία αντικείμενα, και νοητά να το συλλαβίσει μετρώντας τα γράμματα.Να πολλαπλασιάσει -πάντα νοερά- τον αριθμό με το 5.Ας υποθέσουμε ότι διαλέγει το ρολόι τότε θα πολλαπλασιάσει 5x5=25.
Στην συνέχεια με μια πρόφαση του τύπου *«έχω δοκιμάσει το κόλπο στο παρελθόν μόνο τρεις φορές ,πρόσθεσε στο γινόμενο το 3»*.Αυτο τότε κάνει 25+3=28.Μετά του ζητάτε να διπλασιάσει το γινόμενο:28x2=56.
Προτρέπετε το θύμα να επιλέξει τυχαία ένα παρευρισκόμενο και αυτός να του ψιθυρίσει στο αυτί το τελευταίο ψηφίο της αστυνομικής του ταυτότητας, αν είναι ανήλικος απλά έναν αριθμό από το 1 μέχρι το 9.Θα πρέπει τώρα να προσθέσει το ψηφίο στο παραπάνω γινόμενο.Αν ψιθυρίσει το 9 τότε θα πρέπει πάλι νοερά να κάνει 56+9=66.
Του ζητάτε να αποκαλύψει τον αριθμό που βρήκε τονίζοντας ότι το τελικό αποτέλεσμα είναι τελείως τυχαίο με τις αρχική του επιλογή αντικειμένου.
Εσείς, τότε από τον αριθμό που θα ανακοινώσει θα αφαιρέσετε 6: 65-6=59, ο αριθμός που προκύψει μας δίνει το πρώτο του ψηφίο το πλήθος των γραμμάτων του αντικειμένου ενώ το δεύτερο ψηφίο το τελευταίο ψηφίο της αστυνομική ταυτότητας και με στόμφο κατονομάζεις ρολόι και 9.
Γιατί δουλεύει το τρικ; Στοιχειώδης άλγεβρα. Αν Χ είναι ο αριθμός των γραμμάτων που επιλέγει το θύμα και Υ το τελευταίο ψηφίο της αστυνομικής ταυτότητας τότε η σειρά των πράξεων που εκτελούνται δίνει:

$$2(5X+3)+Y=10X+6+Y$$

Αφαιρούμε το 6, έτσι 10Χ+Υ

Η διαδικασία με εξάσκηση μπορεί να ολοκληρωθεί νοερά σε λίγα δευτερόλεπτα.

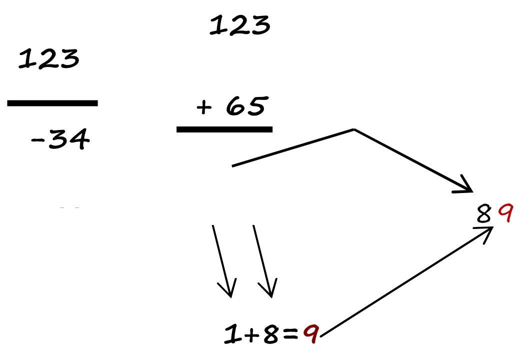
24) Ένα και ένα και ένα….

«Μπορείς να κανείς πρόσθεση;»ρώτησε η Λευκή βασίλισσα.«Τι δίνει ένα και ένα και ένα και ένα και ένα και ένα και ένα και ένα και ένα και ένα;»

«Δεν ξέρω»,είπε η Αλίκη,«Έχασα το μέτρημα».

Λιούις Κάρολ,*Μέσα στον καθρέπτη*

Μπορούμε να κάνουμε αφαίρεση προσθέτοντας**;** Η απάντηση είναι καταφατική.
Δείτε πως γίνεται.Θέλουμε να εκτελέσουμε την αφαίρεση 123-34
Προσθέτουμε στο 123 τον αριθμό 99-34=65(τον αριθμό που προκύπτει από το συμπλήρωμα κάθε ψηφίου του 34 με το 9)Στο άθροισμα 188 αποκόπτουμε από το ψηφίο των εκατοντάδων 1 μονάδα και την προσθέτουμε στο ψηφίο των μονάδων 8 (σχήμα) με τελικό αποτέλεσμα το 89 που είναι και η διαφορά 123-34.



Γιατί δουλεύει η παραπάνω διαδικασία;
Η μέθοδος δουλεύει διότι αν έχουμε τον αριθμό Ν με ν ψηφία τότε το συμπλήρωμα του αριθμού Ν ως προς στο 9 είναι $(10^{\nu}-1)-\mathrm{N}$.Στο δεύτερο βήμα της μεθόδου αφαιρούμε 1 από το πρώτο από αριστερά ψηφίο του αριθμού και το προσθέτουμε
στο τελευταίο ψηφίο από αριστερά.
Αν συμβολίσουμε με Μ τον αφαιρετέο τότε για να βρούμε την διαφορά Μ-Ν. Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\mathrm{M}-\mathrm{N}=\mathrm{M}+(10^{\nu}-1-\mathrm{N})-10^{\nu}+1$$

Η μέθοδος ουσιαστικά είναι βήμα–βήμα από αριστερά προς τα δεξιά η εκτέλεση πράξεων του Β μέλους.

Μπορείτε να επαληθεύετε τα αποτελέσματα σας στον ιστότοπο http://www.wolframalpha.com/
Περισσότερα τρικ υπολογισμών στον ιστότοπο:
http://mathforum.org/k12/mathtips/beatcalc.html
Για όσους κάνουν πρωταθλητισμό η ηλεκτρονική διεύθυνση του παγκοσμίου πρωταθλήματος αστραπιαίων υπολογισμών .
http://www.recordholders.org/en/events/worldcup/index.html

Σχετικά βιβλία

▪ «Το πανηγύρι των μαθηματικών», Μάρτιν Γκάρντνερ
▪ «Secrets of Mental Math: The Mathemagician's Guide to Lightning Calculation and Amazing Math Tricks», Arthur Benjamin
▪«Arithmetricks: 50 Easy Ways to Add, Subtract, Multiply, and Divide Without a Calculator», Edward H. Julius

Τομίδιο πρόχειρο σε όλους

Αργόσχολους μαθηματικούς, ευφάνταστους μαθητές, αποτυχημένους λογιστές , κομπορρήμονες υπουργούς οικονομικών, θεράποντες στατιστικών ψευδοτεχνικών, δυσλεκτικούς αστρολόγους, ερασιτέχνες αλογομούρηδες , αιθεροβάμονες γραφειοκράτες,ατίθασα φοιτητά

αρια, ρηξικέλευθους γραφειοκράτες και λοιπούς …….