

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ - ΘΕΩΡΙΑ

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για κάθε τιμή των μεταβλητών της (π.χ: $0 \cdot x = 0$).

Ερ: Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες;

i) $x + y = 0$ ii) $\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$ iii) $\alpha \cdot \beta = 0$ iv) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ v) $0 \cdot x = 0$ (Απ.: ii, iv, v)

**ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ – ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ**

i) Τετράγωνο αθροίσματος: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη: $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta)$

$$= \alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

ii) Τετράγωνο διαφοράς: $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη: $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta)$

$$= \alpha \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \beta + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

iii) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφοράς: $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

Απόδειξη: $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha - \beta \cdot \beta$

$$= \alpha^2 - \cancel{\alpha \cdot \beta} + \cancel{\alpha \cdot \beta} - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

iv) Κύβος αθροίσματος: $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Απόδειξη: $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$

$$= \alpha \cdot \alpha^2 + \alpha \cdot 2\alpha\beta + \alpha \cdot \beta^2 + \beta \cdot \alpha^2 + \beta \cdot 2\alpha\beta + \beta \cdot \beta^2$$

$$= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

v) Κύβος διαφοράς: $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

Απόδειξη: $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$

$$= \alpha \cdot \alpha^2 - \alpha \cdot 2\alpha\beta + \alpha \cdot \beta^2 - \beta \cdot \alpha^2 + \beta \cdot 2\alpha\beta - \beta \cdot \beta^2$$

$$= \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Παρατήρηση: $(\alpha + \beta)^2 \neq \alpha^2 + \beta^2$ και $(\alpha - \beta)^2 \neq \alpha^2 - \beta^2$

$(\alpha + \beta)^3 \neq \alpha^3 + \beta^3$ και $(\alpha - \beta)^3 \neq \alpha^3 - \beta^3$