

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α - ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

1) Να γίνουν οι πράξεις :

i) $(2x+3)^2 + (x-2)^2 + (x-3)(x+3)$

ii) $(x-3)^2 - 2(4x+3)^2 + 3(x-2)(x+2)$

iii) $(3x+4)^2 - (2x-3)^2 - (5x+4)(5x-4)$

iv) $(2x^2+1)^2 - (3-4x)^2 - (3x+2)(3x-2)$

v) $(3x+2)^2 - (4x-1)^2 - (3x+7)(7-3x)$

2) Να αποδείξετε τις ισότητες :

i) $(\alpha^2+1)(x^2+1) - (\alpha x-1)^2 = (\alpha+x)^2$ ii) $(\alpha^2+\beta^2+1)(x^2+\psi^2) - (\alpha x+\beta \psi)^2 = (\alpha \psi - \beta x)^2 + x^2 + \psi^2$

iii) $(x^2-1)^2 + (x^2+1)^2 - 2(x^2+1)(x^2-1) = 4$ iv) $(\mu+\nu)^2 - (\mu-\nu)^2 + (\mu+\nu)(\mu-\nu) = \mu^2 + 4\mu\nu - \nu^2$

v) $\left(\frac{\beta-2\gamma}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\gamma+\beta}{2}\right)^2 = -\beta\gamma$

3) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

i) $\frac{(\alpha\beta-1)^2 - (a+1)^2}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$

ii) $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \alpha - \beta - \beta^2}$

iii) $\frac{(x^2-4)^2 - (x+2)^2}{x^2 - 4x + 3}$

iv) $\frac{3\alpha^4 + 9\alpha^3 + 6\alpha^2}{\alpha^4 + \alpha^3 - 2\alpha^2}$

v) $\frac{2x(\psi-3x) + 5\psi(3x-\psi)}{3x(2x-5\psi) - 2\psi(5\psi-2x)}$

vi) $\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$

vii) $\frac{(3x-2y)^2}{4y^2-9x^2}$

viii) $\frac{a+2}{\beta-4} \cdot \frac{\beta^2-\alpha\beta}{4-\alpha^2}$

ix) $\frac{x^4-x^2-4x+4}{x^3+8} \cdot \frac{x^2-4x+4}{x^3-4x}$

x) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12} \cdot \frac{x+3}{x-3}$

4) Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = \frac{x^2-x^3}{4x^2+20x+25} \cdot \frac{4x^2-25}{1-x^2} \cdot \frac{1}{2x^2-5x}, \quad B = \frac{x-1}{4x^2-25} \cdot \frac{4x^2-20x+25}{x^2-1} \cdot (x+1),$$

$$\Gamma = \frac{1}{-2x(x-2)+5}$$

α) Απλοποιήστε τις Α και Β

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $(A-B) \cdot \Gamma$

5) Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{(\alpha + \beta)^4 - (\alpha^2 - \beta^2)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2}$ και να βρείτε την

αριθμητική τιμή του εξαγόμενου αν $\frac{\alpha}{\beta} = 2$

6) Αν είναι $\alpha = (x-2)^2$, $\beta = x^2 - 4$, $\gamma = 3(x-2)$ να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{2\alpha - \beta}{\gamma - 2x}$

ΜΕΡΟΣ Β - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

1) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

- i) $x^2 - 4x = 0$ ii) $x^2 - 16x = 0$ iii) $x^2 + 4 = 0$ iv) $3x^2 = 4x$
- v) $-2x(x-1)(x^2-9) = 0$ vi) $x^2 - x + 1 = 0$ vii) $x^2 - 6x = 7$ viii) $2x^2 + x - 15 = 0$
- ix) $-\frac{1}{2}x^2 + 5x + 1 = 0$ x) $5x^2 - 18x - 8 = 0$ xi) $(x^2 - 7x + 12)(3x^2 - 5x + 2) = 0$
- xii) $(x-3) + (x-3)^2 = x^2 - 9$ xiii) $(2x-3)(x+5) = 4x^2 - 9$ xiv) $(x+1)^2 - 1 = 0$
- xv) $(x^3 - 1) - 2(x-1)^2 = 2(1-x^2)$ xvi) $(x-3)^2 + (2x-1)^2 = 0$

2) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

- i) $(2x-3)(x+5) = 4x^2 - 9$ ii) $(x+1)^2 - 1 = 0$ iii) $(x^3 - 1) - 2(x-1)^2 = 2(1-x^2)$
- iv) $(x-3)^2 + (2x-1)^2 = 0$ v) $4x^3 - 4\sqrt{3}x^2 - x + \sqrt{3} = 0$ vi) $(x+1)^2 + 1 = 0$
- vii) $(3x-5)(2x-5) = (x+1)^2 - 4$ viii) $2x(x^2-9)(x^2+5) = 0$
- ix) $\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{4}\right)^2 = -\frac{8}{9}$ x) $6x^3 + 10x^2 - 4x = 0$

3) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

- i) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{2}{x^2-2x} = \frac{1}{x}$ ii) $\frac{4}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{x}{x^2-4}$ iii) $\frac{5x-3}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{13}{x+1}$
- iv) $\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-2} + \frac{1}{x^2-2x} = 0$ v) $\frac{2x-3}{x} + \frac{5x-3}{x^2} = \frac{2x^2+x+6}{x^3} + 2$ vi) $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x^2-x-2}$
- vii) $1 - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{2x}{x^2-4}$ viii) $\frac{12}{3x-2} - \frac{8}{3x+2} = \frac{2-33x}{4-9x^2}$ ix) $\frac{2x^2+4}{x^2-4} - \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{x-2}$
- x) $\frac{25}{4x^2-1} - \frac{1}{27} = \frac{13-x}{2x-1}$ xi) $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = \frac{74}{x^2+2x}$ xii) $\frac{2x-2}{x-2} + \frac{3x-1}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$

- 4) Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου διαφέρουν κατά 4 cm. Αν το εμβαδόν του είναι $E = 117\text{cm}^2$ να βρεθούν οι διαστάσεις του.
- 5) Να βρεθούν δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 39 και γινόμενο 368.
- 6) Να βρεθούν δύο αριθμοί που έχουν διαφορά 6 και γινόμενο 315.
- 7) Να βρεθούν δύο διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί που έχουν άθροισμα τετραγώνων 265.
- 8) Να βρεθούν δύο αριθμοί με διαφορά 3 και γινόμενο 40.
- 9) Σε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο η κάθετη πλευρά του είναι κατά 4 cm μικρότερη από τη βάση του. Να βρεθεί το εμβαδόν του.
- 10) Να βρεθεί ένας αριθμός του οποίου το 9/πλάσιο του είναι κατά 14 μεγαλύτερο από το τετράγωνο του.
- 11) Το ύψος ενός τριγώνου είναι κατά 4 cm μικρότερο από τη βάση του. Αν το εμβαδόν του είναι 30cm^2 να βρεθούν η βάση του αυτή και το ύψος του.
- 12) Τα μήκη των τριών πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.
- 13) Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + 2x - \mu + 3 = 0$. Να βρεθούν για ποιες τιμές του μ αυτή έχει
α) δύο διαφορετικές ρίζες β) μια διπλή ρίζα γ) δεν έχει ρίζες
- 14) Να βρείτε τις πλευρές ενός ορθογωνίου με περίμετρο 68cm και διαγώνιο 26cm.
- 15) Αν το 2 είναι μία ρίζα της εξίσωσης $ax^2 - 5x - 2 = 0$
α) να βρείτε την τιμή του a
β) να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.
- 16) Πότε η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ έχει το μηδέν ως μία και μοναδική ρίζα;
- 17) Πότε έχει λύση η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$;

ΜΕΡΟΣ Γ - ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1) Να λυθούν τα συστήματα :

i) $\begin{cases} -x + 5\psi = 9 \\ 3\chi + 4\psi = 11 \end{cases}$	ii) $\begin{cases} -3\chi + 2\psi = 25 \\ 5\chi + \psi = 45 \end{cases}$	iii) $\begin{cases} \psi - 2\chi = 1 \\ 7\psi - 5\chi = -2 \end{cases}$	iv) $\begin{cases} \chi - \psi = 4 \\ \chi + \psi = 2 \end{cases}$
v) $\begin{cases} 4\chi + 7\psi = 11 \\ 3\chi - 5\psi = -2 \end{cases}$	vi) $\begin{cases} 3\chi + \psi = 15 \\ 5\chi - 4\psi = 8 \end{cases}$	vii) $\begin{cases} 2\chi - 5\psi = 25 \\ 3\chi + \psi = 12 \end{cases}$	viii) $\begin{cases} 6\chi + 3\psi = 12 \\ 7\chi - \psi = 28 \end{cases}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{ix)} \begin{cases} 9\chi - 13\psi = 32 \\ \chi = 5\psi \end{cases} & \text{x)} \begin{cases} 3\chi - \psi = 23 \\ 4\chi + 3\psi = 48 \end{cases} & \text{xi)} \begin{cases} 0,2\chi + 0,5\psi = 2 \\ 0,3\chi + \psi = -0,5 \end{cases} & \text{xii)} \begin{cases} 6\chi - 2\psi = 11 \\ 9\chi - 3\psi = 15 \end{cases} \\
 \text{xiii)} \begin{cases} 4,5\chi - 3\psi = 9 \\ 5\chi + 2\psi = 2 \end{cases} & \text{xiv)} \begin{cases} \chi - 2\psi = 6 \\ 3\chi + 4\psi = 8 \end{cases} & \text{xv)} \begin{cases} 3\chi + 5\psi = 7 \\ 4\chi - 2\psi = 1 \end{cases} & \text{xvi)} \begin{cases} 2\chi + \psi = 7 \\ 4 + 5\psi = 3\chi \end{cases}
 \end{array}$$

2) Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{array}{lll}
 \text{i)} \begin{cases} 2(\chi - \psi) = 3(\chi + \psi) \\ 3(\chi - 4) - 6 = 2(\psi + 8) \end{cases} & \text{ii)} \begin{cases} 3(\chi + \psi) - 5(\psi - \chi) = 14 \\ 3(\chi + \psi) - 2(\chi - \psi) = 7 \end{cases} & \text{iii)} \begin{cases} 3(\chi + 4) - 2\psi = 7(\chi - \psi) \\ 0,5(\chi - 1) + 2\psi = 3(\chi + \psi) - 0,5 \end{cases} \\
 \text{iv)} \begin{cases} 2(3\chi - \psi) + 3(\chi + \psi) - (\chi - \psi) = 70 \\ 3(\chi + 2\psi) - 2(\chi - \psi) + 5(2\chi - \psi) = 98 \end{cases} & \text{v)} \begin{cases} 3(7\chi + 9\psi) - 162 = 6(4 - 2\chi) \\ 4(6\chi - 8\psi) + 24 = 7(\chi + 2\psi) \end{cases} \\
 \text{vi)} \begin{cases} 4(\chi - 2\psi) - (5\chi + 3\psi) = 30 \\ 3(3\chi + 7\psi) - 2(\chi + 9\psi) = 12 \end{cases} & \text{vii)} \begin{cases} 2(\chi + \psi) - 3(\psi - \chi) = 14 \\ 4(\chi + \psi) - 5(\chi - \psi) = 6 \end{cases} \\
 \text{viii)} \begin{cases} 4(2\chi + 3\psi - 7) - 3(5\chi - 2\psi) = 12 \\ 5(7\chi - 9\psi + 15) - 2(4\chi - 5\psi) = 24 \end{cases} & \text{ix)} \begin{cases} 3(5\chi + \psi) - 5(\chi + \psi) = 40 \\ 2(\psi - 2\chi) - (2\chi - \psi) = 24 \end{cases}
 \end{array}$$

3) Να λυθούν τα συστήματα :

$$\begin{array}{lll}
 \text{i)} \begin{cases} \frac{\chi}{2} + \frac{\psi}{3} = 6 \\ \frac{\chi}{4} + \frac{\psi}{2} = 5 \end{cases} & \text{ii)} \begin{cases} \frac{\chi}{7} = \frac{\psi}{8} \\ \chi + \psi = 45 \end{cases} & \text{iii)} \begin{cases} \frac{\chi - 1}{3} = \frac{\psi - 2}{4} \\ 4\chi + 3\psi = 8 \end{cases} & \text{iv)} \begin{cases} \frac{\chi - 1}{2} = \frac{\psi + 2}{3} \\ 3\chi - \psi = 11 \end{cases} \\
 \text{v)} \begin{cases} \frac{\chi + \psi}{8} - \frac{\psi - \chi}{6} = 5 \\ \frac{\chi + \psi}{4} - \frac{\chi - \psi}{3} = 10 \end{cases} & \text{vi)} \begin{cases} \frac{2\chi + 3}{2} = \frac{\psi - 5}{7} \\ \psi + \frac{2\chi - 5}{3} = \frac{3\psi + 4}{5} \end{cases} & \text{vii)} \begin{cases} \frac{\chi - 2\psi}{2} - \frac{5\chi - 3\psi}{8} = \frac{15}{4} \\ \frac{3\chi + 7\psi}{4} - \frac{\chi + 9\psi}{6} = 1 \end{cases} \\
 \text{viii)} \begin{cases} \frac{2\chi - 1}{3} = 4 - \frac{\psi + 2}{4} \\ \frac{\chi + 3}{2} - 3 = \frac{\chi - \psi}{3} \end{cases} & \text{ix)} \begin{cases} 2\psi - 3\chi - \frac{3\chi - 2\psi}{3} = 4 \\ 2\chi - 8 + \frac{\chi - \psi}{4} = \frac{\chi + 2}{7} \end{cases} & \text{x)} \begin{cases} \frac{2\chi - 4}{2} + \frac{2(3\psi - 1)}{3} = \frac{13}{3} \\ \frac{2\chi + \psi}{6} - \frac{\chi + 2\psi}{2} = -\frac{8}{3} \end{cases} \\
 \text{xi)} \begin{cases} \frac{2\chi + 3}{2} = \frac{\psi - 5}{7} \\ \psi + \frac{2\chi - 5}{3} = \frac{3\psi + 4}{5} \end{cases} & \text{xii)} \begin{cases} \frac{\chi + 1}{10} - \frac{\psi + 5}{4} = 1 \\ \frac{\chi + 2}{3} - \frac{\psi - 3}{2} = 7 \end{cases} & \text{xiii)} \begin{cases} \frac{2\psi - 5}{7} + \frac{\chi - 10\psi}{12} = \frac{\psi - 4\chi}{4} \\ \frac{\psi + 9}{3} - \frac{\chi + 3\psi}{10} = 7 - \frac{3\chi - 2\psi}{2} \end{cases}
 \end{array}$$

4) Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \begin{cases} \chi + 3\psi = 5 \\ 5\chi - \psi^2 = 9 \end{cases} & \text{ii)} \begin{cases} \chi - \psi = 1 \\ \psi^2 + \chi\psi = 36 \end{cases} & \text{iii)} \begin{cases} \chi + \psi = 3 \\ 2\chi^2 - \psi^2 = 7 \end{cases} & \text{iv)} \begin{cases} \chi + \psi = 7 \\ 3\chi^2 - 81 = \psi^2 - \chi\psi \end{cases} \\ \text{v)} \begin{cases} 7\chi - 3\psi = 27 \\ 7\chi^2 - 3\psi^2 = 135 \end{cases} & \text{vi)} \begin{cases} \psi = 3\chi^2 \\ 12\chi - 3\psi = 4 \end{cases} & \text{vii)} \begin{cases} \chi^2 + \psi^2 = 9 \\ \chi - \psi = 0 \end{cases} & \text{ix)} \begin{cases} \chi^2 + \psi^2 + \chi\psi = 3 \\ \chi + \psi = 1 \end{cases} \end{array}$$

5) Να λυθούν τα συστήματα :

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \begin{cases} 5\chi - 4\psi = 3 \\ 15\chi - 12\psi = 7 \end{cases} & \text{ii)} \begin{cases} 2\chi + 5\psi = 4 \\ 6\chi + 15\psi = 9 \end{cases} & \text{iii)} \begin{cases} 4\chi - 7\psi = 10 \\ 2\chi - 3,5\psi = 5 \end{cases} & \text{iv)} \begin{cases} 3\chi - 2\psi = 1 \\ 15\chi - 10\psi = 7 \end{cases} \\ \text{v)} \begin{cases} 2\chi - 5\psi = 7 \\ 4\chi - 10\psi = 9 \end{cases} & \text{vi)} \begin{cases} 3\chi - \psi = 2 \\ 6\chi - 2\psi = 4 \end{cases} & \text{vii)} \begin{cases} 3\chi - 12\psi = 8 \\ \chi - 4\psi = 5 \end{cases} & \text{viii)} \begin{cases} 2\chi - 7\psi = 8 \\ \chi - 3,5\psi = 4 \end{cases} \end{array}$$

6) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία :

- i) A(2,3) και B(-1,5)
- ii) Γ(1,3) και Δ(-2,5)
- iii) E(2,4) και Z(-1,-3)

7) Βρείτε τις τιμές των α και β ώστε η εξίσωση $\chi^2 - (3\alpha - 4)\chi - 2\beta = 0$ να αληθεύει για $\chi=2$ και $\chi=-5$

ΜΕΡΟΣ Δ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1) Ένα σημείο M που βρίσκεται στο τρίτο τεταρτημόριο έχει τετμημένη -6 και απέχει από την αρχή O των αξόνων απόσταση 10. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{x}OM$.

2) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των παραστάσεων :

$$\alpha) A = 4\eta\mu\chi + 5 \quad \beta) B = 3\sigma\upsilon\nu\chi + 4 \quad \gamma) \Gamma = 2\eta\mu\chi + 7\sigma\upsilon\nu\psi$$

3) Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) A = (2\sigma\upsilon\nu 0^\circ + 3\sigma\upsilon\nu 180^\circ)(4\eta\mu 90^\circ + 5\eta\mu 0^\circ) \quad \beta) B = (3 + \epsilon\phi 180^\circ)(2 - \epsilon\phi 0^\circ)$$

4) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) A = \eta\mu 120^\circ \eta\mu 150^\circ \eta\mu 135^\circ \quad \beta) B = \sigma\upsilon\nu 120^\circ \sigma\upsilon\nu 150^\circ \sigma\upsilon\nu 135^\circ \quad \gamma) \Gamma = \frac{\eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 135^\circ \epsilon\phi 60^\circ}{\epsilon\phi 150^\circ}$$

5) Να βρεθεί το x όταν $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ και

$$\alpha) 4\eta\mu\chi - 2,12 = 0 \quad \beta) 3\sigma\upsilon\nu\chi + 2,91 = 0 \quad \gamma) 5\epsilon\phi\chi + 8 = 0 \quad \delta) 3\eta\mu^2\chi - 1,08 = 0 \quad \epsilon) 3\eta\mu\chi + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi = 0$$

6) Να βρεθεί η γωνία x όταν $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ και

$$\alpha) 12\sigma\upsilon\nu\chi - 3\eta\mu\chi = 0 \quad \beta) 5\eta\mu\chi + 4\sigma\upsilon\nu\chi = 3\eta\mu\chi + 5\sigma\upsilon\nu\chi$$

7) Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \sigma\upsilon\nu^2 127^\circ + \eta\mu^2 53^\circ = 1 \quad \beta) \eta\mu^2 21^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 159^\circ = 1$$

8) Να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω αν :

α) $0^\circ \leq \omega \leq 90^\circ$ και $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$

ε) $0^\circ \leq \omega \leq 90^\circ$ και $\eta\mu\omega = -\frac{8}{17}$

β) $90^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}$

στ) $90^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ και $\eta\mu\omega = -\frac{15}{17}$

γ) $0^\circ \leq \omega \leq 90^\circ$ και $\eta\mu\omega = -0,6$

ζ) $90^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0,5$

δ) $90^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$

η) $0^\circ \leq \omega \leq 90^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{5}{13}$

9) Να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω αν

α) $90^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ και $\epsilon\phi\omega = -2$

β) $0^\circ \leq \omega \leq 90^\circ$ και $3\eta\mu\omega + 4\sigma\upsilon\nu\omega = 5$

10) Να αποδείξετε ότι :

α) $5\eta\mu^2x + 5\sigma\upsilon\nu^2x = 5$ β) $(2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)^2 + (3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x)^2 = 13$ γ) $\sigma\upsilon\nu^4x - \eta\mu^4x = 1 - 2\eta\mu^2x$

11) Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{\eta\mu\alpha + \epsilon\phi\alpha}{\epsilon\phi\alpha} = 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha$

β) $\eta\mu^2\alpha + \epsilon\phi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^4\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

γ) $\frac{\epsilon\phi^2\omega - 1}{\epsilon\phi^2\omega + 1} = \eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega$

12) Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{\eta\mu\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{2}{\eta\mu\theta}$

β) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$

γ) $\frac{\epsilon\phi\alpha + 1}{\epsilon\phi\alpha - 1} = \frac{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}$

13) Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{1}{1 - \eta\mu x} + \frac{1}{1 + \eta\mu x} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2x}$

β) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x} + \frac{1}{\eta\mu^2x} = \frac{1}{\eta\mu^2x \cdot \sigma\upsilon\nu^2x}$

γ) $\frac{\eta\mu^3x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu x} = \epsilon\phi x$

14) Να αποδείξετε ότι :

α) $\epsilon\phi^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \epsilon\phi^2\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha$ β) $\sigma\upsilon\nu^2x\sigma\upsilon\nu^2\psi - \eta\mu^2x\eta\mu^2\psi = \sigma\upsilon\nu^2x + \sigma\upsilon\nu^2\psi - 1$ γ) $\eta\mu^4x + \sigma\upsilon\nu^4x = 1 - 2\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x$

15) Να αποδείξετε ότι :

α) $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)(1 - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x) = \eta\mu^3x + \sigma\upsilon\nu^3x$ β) $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \left(1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)(1 + \epsilon\phi x) = 1 + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$

16) Αν $0^\circ \leq \omega \leq 90^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α) $A = \eta\mu(180^\circ - \omega) - 2\epsilon\phi\omega + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega)$

β) $B = \eta\mu(90^\circ - \omega) + \epsilon\phi(180^\circ - \omega) - 2\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)$

17) Αν $\varepsilon\phi\theta = \sqrt{2}$ και $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $A = \varepsilon\phi\theta + \eta\mu(180^\circ - \theta) - \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta)$

β) $B = \eta\mu\theta + \eta\mu(90^\circ - \theta) - 2\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta)$

18) Να απλοποιήσετε την παράσταση :

$$A = \frac{\varepsilon\phi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta) \cdot \eta\mu\theta \cdot \varepsilon\phi(180^\circ - \theta)}$$

19) Για ποιες τιμές του κ υπάρχει γωνία ω ώστε να ισχύει : $\eta\mu\omega = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2\kappa}{\kappa - 1}$

20) Αν $x = 3\eta\mu\theta$ και $y = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ να αποδείξετε ότι $4x^2 + 9y^2 = 36$

21) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες να ισχύουν ταυτόχρονα :

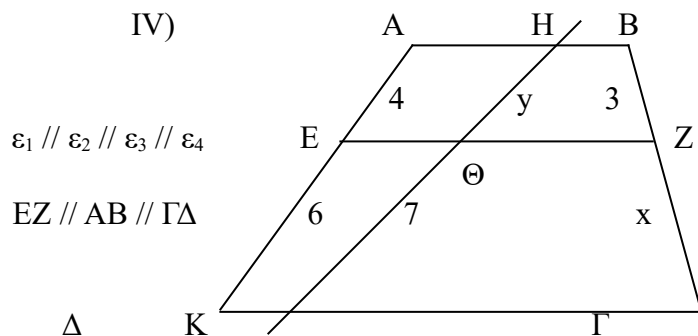
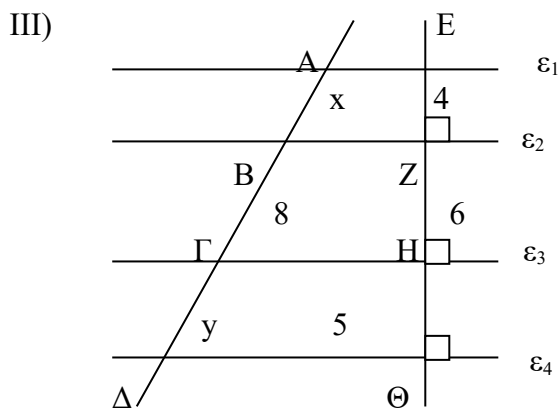
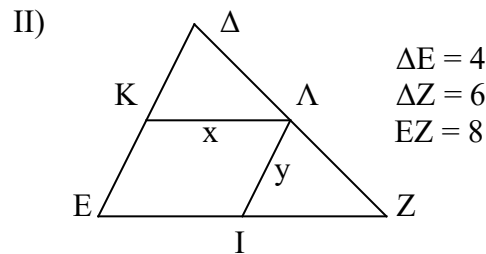
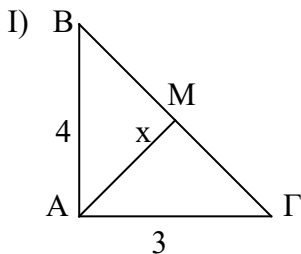
α) $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$ β) $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$ γ) $\eta\mu x = \frac{1}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{3}$

22) Αν A, B, Γ είναι γωνίες ενός τριγώνου $AB\Gamma$ να δειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις

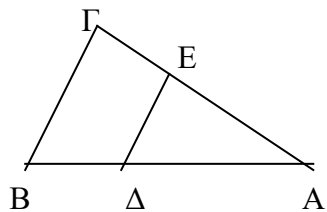
α) $\eta\mu \frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$ β) $\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma}{2}$ γ) $\eta\mu(A+B) = \eta\mu\Gamma$ δ) $\varepsilon\phi(A+B) = -\varepsilon\phi\Gamma$

ΜΕΡΟΣ E - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

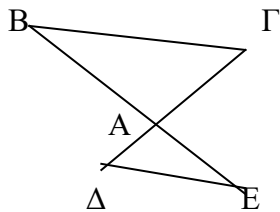
1) Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ($x, y, \dots$) στα επόμενα σχήματα :



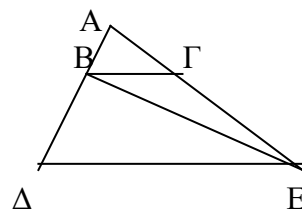
2 . Αν σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα ισχύει $\Delta E \parallel B\Gamma$ να συμπληρωθεί η αντίστοιχη αναλογία.



$$\frac{E\Gamma}{\dots} = \frac{\dots}{AB}$$



$$\frac{\dots}{AE} = \frac{\Delta\Gamma}{\dots}$$



$$\frac{AB}{\dots} = \frac{A\Gamma}{\dots}$$