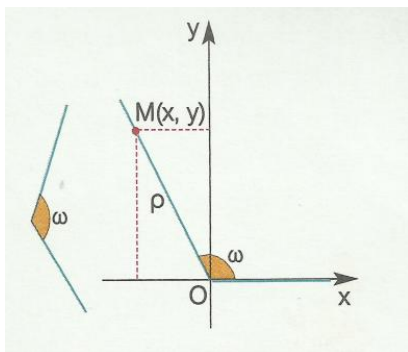


ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ($0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$)

1. Πως ορίζονται οι **τριγωνομετρικοί αριθμοί** μιας γωνίας ω ($0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$);

Απ: Τοποθετούμε τη γωνία ω σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε η κορυφή της να συμπίπτει με την αρχή $O(0, 0)$ και η μια πλευρά της να συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα Ox . Τότε, η δεύτερη πλευρά θα βρεθεί στο 2^ο τεταρτημόριο αν η γωνία είναι αμβλεία ($90^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$), όπως φαίνεται στο σχήμα, ή στο 1^ο τεταρτημόριο αν η γωνία είναι οξεία ($0^\circ \leq \omega \leq 90^\circ$). Τότε:



απόσταση του M από το O: $\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τετμημένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{x}{\rho}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M} = \frac{y}{x}$$

Παρατηρήσεις:

- i. Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε $x > 0$, $y > 0$ και $\rho > 0$. Επομένως:

$$\eta\mu\omega > 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega > 0, \quad \epsilon\phi\omega > 0$$

- ii. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε $x < 0$, $y > 0$ και $\rho > 0$. Επομένως:

$$\eta\mu\omega > 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \quad \epsilon\phi\omega < 0$$

- iii. Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν τα εξής:

$$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$$

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	$0^\circ / 360^\circ$	30°	45°	60°	90°	180°
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	δεν ορίζεται	0

3. α) Ποιες σχέσεις συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών;

Απ: Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και $180^\circ - \omega$ ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned}\eta\mu(180^\circ - \omega) &= \eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) &= -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \epsilon\phi(180^\circ - \omega) &= -\epsilon\phi\omega\end{aligned}$$



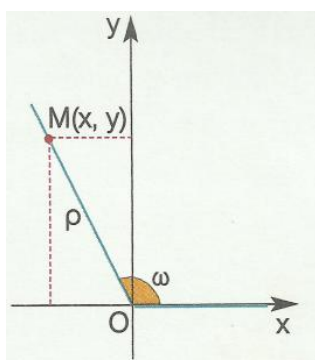
β) Παραδείγματα:

- (i) $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu 30^\circ = 1/2$ (ii) $\sigma\upsilon\nu 120^\circ = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -1/2$
(iii) $\epsilon\phi 120^\circ = -\epsilon\phi 60^\circ = -\sqrt{3}$ (iv) $\epsilon\phi 135^\circ = -\epsilon\phi 45^\circ = -1$

4. Να αποδείξετε ότι για μια οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν τα εξής:

(i) $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ (ii) $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$

Απ: Ισχύουν τα εξής: $\rho^2 = x^2 + y^2$, όπου $\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ και



$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x}$$

(i) $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 = \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{x^2 + y^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$

(ii) $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y \cdot \rho}{x \cdot \rho} = \frac{y}{x} = \epsilon\phi\omega$

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ):

- i. Για κάθε γωνία ω ισχύει $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$. ()
- ii. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία τότε $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$. ()
- iii. Η εφαπτομένη μιας αμβλείας γωνίας είναι θετικός αριθμός. ()
- iv. Υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = 3$. ()
- v. Υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$. ()
- vi. Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν αντίθετα συνημίτονα. ()
- vii. Για κάθε γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega = 1$. ()

(Απ: i: Σ, ii: Λ, iii: Λ, iv: Λ, v: Λ, vi: Σ, vii: Λ)