

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Άσκηση 1

Δίνεται το πολυώνυμο $A(x) = (x - 1)^3 - x^2(x - 1) + (2x - 3)(2x + 3) + 8$

α) Να αποδείξετε ότι $A(x) = 2x^2 + 3x - 2$

β) Να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 0$

γ) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $A(x)$.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\Gamma(x) = \frac{A(x)}{x^2 - 4}$ και στη συνέχεια, να την απλοποιήσετε.

ε) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης $\Gamma(x)$ για $x = 0$ και $x = 2$

Λύση

α) **Θυμάμαι ταυτότητες!!!** $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$A(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + x^2 + 4x^2 - 9 + 8 = 2x^2 + 3x - 2$$

$$\beta) 2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \alpha = 2, \beta = 3, \gamma = -2$$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$, άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες

πραγματικές λύσεις τις $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ και

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2.$$

(Θυμάμαι: Αν $\Delta=0$ η εξίσωση έχει μία διπλή λύση την $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, ενώ αν $\Delta < 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη)

γ) (Θυμάμαι: Παραγοντοποίηση τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$:

$$\text{Αν } \Delta > 0, \text{ τότε } ax^2 + bx + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{Αν } \Delta=0, \text{ τότε } ax^2 + bx + \gamma = \alpha(x - x_1)^2$$

Αν $\Delta < 0$ δεν παραγοντοποιείται.)

$$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - (-2)) = (2x - 1)(x + 2)$$

δ) Για να ορίζεται μία ρητή αλγεβρική παράσταση πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός!

Πρέπει $x^2 - 4 \neq 0$

Λύνω την εξίσωση $x^2 - 4 = 0$

A' τρόπος: $(x - 2)(x + 2) = 0$ B' τρόπος: $x^2 = 4$

Γ' τρόπος με τη

$x - 2 = 0$ ή $x + 2 = 0$ $x = \sqrt{4}$ ή $x = -\sqrt{4}$ βοήθεια της διακρίνουσας

$x = 2$ ή $x = -2$

$x = 2$ ή $x = -2$

όπου $\alpha=1, \beta=0, \gamma=-4$ (όπως
β' ερώτημα)

Άρα, πρέπει $x \neq -2$ και $x \neq 2$

Απλοποίηση: Παραγοντοποιώ αριθμητή και παρονομαστή και στη συνέχεια απλοποιώ..

$$\Gamma(x) = \frac{A(x)}{x^2-4} = \frac{(2x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x-1}{x-2}, x \neq \pm 2$$

ε) Για $x = 0$, έχουμε: $\frac{2 \cdot 0 - 1}{0 - 2} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

Για $x=2$ η τιμή της παράστασης δεν ορίζεται!

Άσκηση 2

Δίνεται το πολυώνυμο $A(x) = -(x - 1)^2 - (x - 1)(x - 2)$

α) Να αποδείξετε ότι $A(x) = -2x^2 + 5x - 3$

β) Να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 0$

γ) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $A(x)$.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\Gamma(x) = \frac{A(x)}{4x^3 - 9x}$ και στη συνέχεια, να την απλοποιήσετε.

ε) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης $\Gamma(x)$ για $x = 1$

Άσκηση 3

α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{5}{6} - \frac{(x-1)(x+1)}{2} = \frac{2-x}{3} - \frac{(x-4)^2}{6}$

β) Να εξετάσετε αν οι ρίζες του α) ερωτήματος είναι λύσεις της ανίσωσης:

$$4 - x(2x + 1) > 3x - 2x^2$$

Λύση

α) Βρίσκω το ΕΚΠ των παρονομαστών και πολλαπλασιάζω όλους τους όρους με αυτό.

Επιπλέον, βρίσκω και τα αναπτύγματα. $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$,

$$(x - 4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$\frac{5}{6} - \frac{(x - 1)(x + 1)}{2} = \frac{2 - x}{3} - \frac{(x - 4)^2}{6}$$

$$6 \cdot \frac{5}{6} - 6 \cdot \frac{x^2 - 1}{2} = 6 \cdot \frac{2 - x}{3} - 6 \cdot \frac{x^2 - 8x + 16}{6}$$

Απλοποιώ τους παρονομαστές. ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Οι γραμμές κλάσματος γίνονται παρενθέσεις!!!

$$5 - 3(x^2 - 1) = 2(2 - x) - (x^2 - 8x + 16)$$

Κάνουμε επιμεριστική ιδιότητα και μεταφέρουμε όλους στους όρους στο πρώτο μέλος.

$$5 - 3x^2 + 3 = 4 - 2x - x^2 + 8x - 16$$

$$-3x^2 + x^2 + 2x - 8x + 5 + 3 - 4 + 16 = 0$$

$$-2x^2 - 6x + 20 = 0$$

Ελέγχω για τυχόν απλοποιήσεις. Διαιρώ όλους τους όρους με το -2 για να είναι οι πράξεις πιο απλές.

$$x^2 + 3x - 10 = 0, \quad a = 1, \beta = 3, \gamma = -10$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 > 0, 2 \text{ άνισες πραγματικές ρίζες}$$

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$\beta) 4 - x(2x + 1) > 3x - 2x^2$$

$$4 - 2x^2 - x > 3x - 2x^2$$

$$4 - 2x^2 - x - 3x + 2x^2 > 0$$

$$-4x > -4$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!! ΟΤΑΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΖΩ Η' ΔΙΑΙΡΩ ΜΕ ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ ΑΛΛΑΖΩ ΤΗ ΦΟΡΑ ΤΗΣ ΑΝΙΣΩΣΗΣ!!!!

$$\frac{-4x}{-4} < \frac{-4}{-4}$$

$$x < 1 \text{ (} x \text{ μικρότερο του 1)}$$

Οι λύσεις του α) ερωτήματος είναι $x_1 = 2, x_2 = -5$

Η ρίζα $x_2 = -5$ είναι λύση της ανίσωσης $x < 1$.

Άσκηση 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με μία πλευρά x . Η δεύτερη πλευρά του είναι το διπλάσιο της πρώτης αυξημένη κατά 1 ενώ η τρίτη το διπλάσιο της πρώτης μειωμένη κατά 1. Να βρείτε τις πλευρές του τριγώνου.

Λύση

Έστω x η μία πλευρά του τριγώνου. Τότε οι άλλες δύο θα είναι $2x - 1, 2x + 1$. Θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Η υποτεινούσα θα είναι η μεγαλύτερη από τις πλευρές ($2x + 1$).

$$(2x + 1)^2 = x^2 + (2x - 1)^2$$

$$4x^2 + 4x + 1 = x^2 + 4x^2 - 4x + 1$$

$$4x^2 + 4x + 1 - x^2 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$-x^2 + 8x = 0$$

$$-x(x - 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x - 8 = 0$$

$x = 0$ απορρίπτεται (πλευρές του τριγώνου θετικές)

$$x = 8 \text{ δεκτή}$$

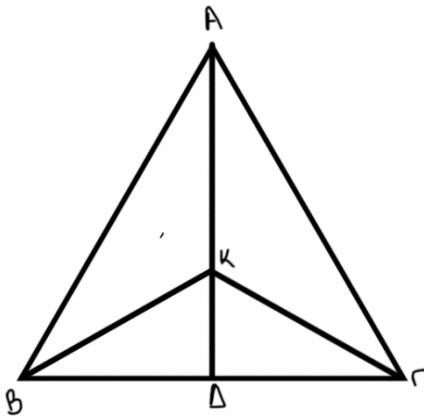
Επομένως, οι πλευρές του τριγώνου είναι 8, $2 \cdot 8 - 1 = 15$, $2 \cdot 8 + 1 = 17$

Άσκηση 5

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BAG}$ και Κ ένα τυχαίο σημείο της ΑΔ.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΚ.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.



Λύση

ΑΒΓ ισοσκελές οπότε ΑΒ=ΑΓ και $\widehat{B} = \widehat{C}$. Επιπλέον, επειδή ΑΔ διχοτόμος θα είναι διάμεσος (ΒΔ=ΔΓ) και ύψος ($\widehat{D} = 90^\circ$),

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΚ

- i. ΑΒ=ΑΓ (ΑΒΓ ισοσκελές)
- ii. ΑΚ κοινή πλευρά
- iii. $\widehat{BAK} = \widehat{CAG}$ (ΑΔ διχοτόμος)

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Δηλαδή,

- i. ΒΚ=ΚΓ
- ii. $\widehat{ABK} = \widehat{ACK}$
- iii. $\widehat{BKA} = \widehat{CKA}$

β) Από το α ερώτημα έχουμε ότι ΒΚ=ΚΓ συνεπώς το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 6

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές με βάση τη ΒΓ και σημείο Μ μέσο της ΒΓ. Φέρουμε τα ύψη ΜΚ, ΜΛ στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου αντιστοίχως.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΜ, ΓΛΜ είναι ίσα

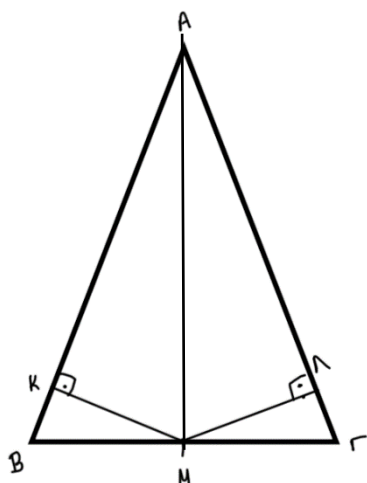
β) Να δείξετε ότι $AK=AL$

γ) Αν $\hat{B} = 40^\circ$ να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{KML}$

δ) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα AMB και KBM είναι όμοια. Στην περίπτωση που είναι να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.

Θυμάμαι: Κριτήρια Ισότητας τριγώνων, Κριτήρια Ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Λύση



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα $BKM, ΓΛΜ$

- i. $BM=MG$ (M μέσο της $BΓ$)
- ii. $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ($ABΓ$ ισοσκελές)
- iii. $\hat{K} = \hat{L} = 90^\circ$ (KM, ML ύψη)

Από κριτήριο ορθογωνίων τριγώνων, τα τρίγωνα είναι ίσα επομένως, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

- i. $BK=ΓΛ$
- ii. $MK=ML$
- iii. $\widehat{BMK} = \widehat{ΓML}$

β) Έχουμε, $AK+KB=AB$ και $AL+ΛΓ=AG$ ή $AL=AG-ΛΓ$

$AK= AB-KB$ Επειδή $AB=AG$ και $BK=ΓΛ$ έχουμε $AK=AG-ΓΛ$

Επομένως, $AK=AL$ (ως διαφορά ίσων τμημάτων)

Β' τρόπος: Φέρουμε τη διάμεσο AM και συγκρίνουμε τα τρίγωνα AKM, ALM όπως στο α ερώτημα.

γ) Στο τρίγωνο BKM έχουμε: $\hat{B} = 40^\circ, \hat{K} = 90^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου έχουμε:

$$\hat{B} + \hat{K} + \widehat{BMK} = 180^\circ$$

$$40^\circ + 90^\circ + \widehat{BMK} = 180^\circ$$

$$\widehat{BMK} = 180^\circ - 130^\circ$$

$$\widehat{BMK} = 50^\circ$$

Επειδή τα τρίγωνα $BKM, MLΓ$ είναι ίσα $\widehat{BMK} = \widehat{ΓML} = 50^\circ$

$$\widehat{BMK} + \widehat{KML} + \widehat{ΛMG} = 180^\circ \text{ ως ευθεία γωνία}$$

$$50 + \widehat{KML} + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{KML} = 80^\circ$$

δ) Συγκρίνω τα τρίγωνα AMB και KBM

1) $\hat{K} = \hat{M} = 90^\circ$ (AM διάμεσος και ύψος)

2) $\hat{B}$ κοινή γωνία

Τα τρίγωνα έχουν 2 ίσες γωνίες άρα είναι όμοια.

Λόγοι ομοιότητας: $\frac{AB}{MB} = \frac{BM}{BK} = \frac{AM}{MK}$

(το ερώτημα μπορεί να επεκταθεί. Δηλαδή, μπορεί να μας δίνει ότι $MB=6\text{ cm}$, $BK=4\text{ cm}$ και να ζητάει την AB . Από τους λόγους θα έχω: $\frac{AB}{MB} = \frac{BM}{BK}$

$$\frac{AB}{6} = \frac{6}{4} \text{ ή } 4AB = 6 \cdot 6 \text{ ή } 4AB = 36 \text{ ή } AB = \frac{36}{4} \text{ ή } AB = 9)$$

Άσκηση 7

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την AB και $\Gamma\Delta = \Gamma E = \frac{1}{3}\Gamma A$.

Αν το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι:

α) Το $M\Delta E$ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

β) Τα σημεία Δ και E ισαπέχουν από την πλευρά AB

γ) Αν $MK \perp AD$ και DZ η απόσταση του Δ από το AM να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔZA και MKA είναι όμοια.

Λύση

α) Αρκεί να δείξω ότι $DM=EM$

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\Delta AM, MEB$

- i. $A\Delta = A\Gamma - \Gamma\Delta = AB - \Gamma E = EB$
- ii. $\hat{A} = \hat{B}$ ($AB\Gamma$ ισοσκελές)
- iii. $AM = MB$ (M μέσο της AB)

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Δηλαδή,

- i. $\Delta M = ME$
- ii. $\widehat{ADM} = \widehat{MEB}$
- iii. $\widehat{DMA} = \widehat{EMB}$

β) Φέρουμε στο σχήμα μας, τα ύψη DZ, EH .

α' τρόπος

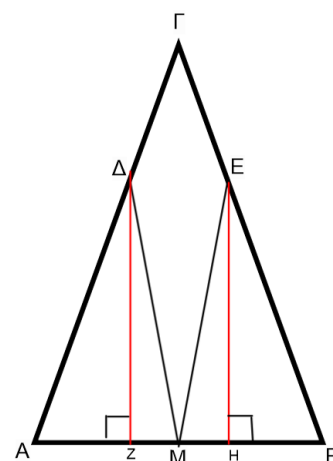
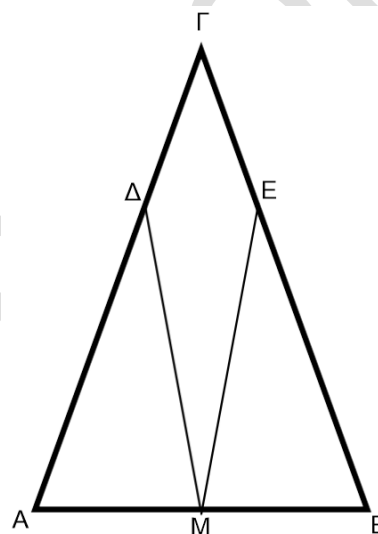
Αφού τα τρίγωνα $\Delta DM, EMB$ είναι ίσα τα ύψη από τις αντίστοιχες κορυφές θα είναι ίσα.

β' τρόπος

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta DM, EHM$

- i. $DM=EM$ (α' ερώτημα)
- ii. $\widehat{ZMD} = \widehat{HME}$ (α' ερώτημα $\widehat{DMA} = \widehat{EMB}$)

Από κριτήριο ορθογωνίων τριγώνων τα τρίγωνα είναι ίσα άρα $DZ=EH$



γ) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΔΖΑ, ΜΚΑ

i. $\hat{Z} = \hat{K}$

ii. $\hat{A}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια (2 ίσες γωνίες)

Λόγοι ομοιότητας: $\frac{\Delta Z}{MK} = \frac{ZA}{KA} = \frac{AM}{AB}$

