## Οι Πυθαγόρειες τριάδες

Οι τριάδες των ακέραιων αριθμών (χ, ψ, z) που ικανοποιούν την ισότητα $\chi^2 + \psi^2 = z^2$ λέγονται **Πυθαγόρειες τριάδες**. Η μικρότερη Πυθαγόρεια τριάδα είναι η τριάδα των αριθμών (3, 4, 5), αφού
$3^2 + 4^2 = 5^2$.
Οι Πυθαγόρειες τριάδες είναι άπειρες.

**Μία μέθοδος κατασκευής τέτοιων τριάδων, που αποδίδεται στον Πυθαγόρα, είναι:**

- Εάν ο μ είναι περιττός αριθμός, τότε οι τριάδες των αριθμών

$$\left(\mu, \frac{\mu^2-1}{2}, \frac{\mu^2+1}{2}\right)$$

είναι Πυθαγόρειες τριάδες.
Πράγματι , αν μ = 5, τότε είναι:

$$\frac{\mu^2-1}{2} = \frac{5^2-1}{2} = 12$$

και

$$\frac{\mu^2+1}{2} = \frac{5^2+1}{2} = 13$$

και η τριάδα (5, 12, 13) αποτελεί μία Πυθαγόρεια τριάδα, αφού $5^2 + 12^2 = 13^2$.
Με τον ίδιο τρόπο για μ = 7, 9, 11, ... βρίσκουμε τις Πυθαγόρειες τριάδες (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85),...

**Μία άλλη μέθοδος κατασκευής τέτοιων τριάδων είναι αυτή του Πλάτωνα:**

- Εάν ο ν είναι άρτιος αριθμός ($\nu \geq 4$) , τότε οι αριθμοί

$$\nu, \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 - 1, \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + 1$$

είναι Πυθαγόρειοι αριθμοί.
Πράγματι, αν ν = 6, τότε είναι:

$$\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 - 1 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 - 1 = 8$$

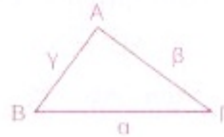
$$\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 1 = 10$$

και οι αριθμοί (6, 8, 10) αποτελούν μία Πυθαγόρεια τριάδα, αφού
$6^2 + 8^2 = 10^2$
Με τον ίδιο τρόπο για μ = 12, 14, ... βρίσκουμε τις Πυθαγόρειες τριάδες (12, 35, 37), (14, 48, 49), ...

## Το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

Ισχύει και η αντίστροφη πρόταση του Πυθαγορείου θεωρήματος. Δηλαδή:

Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

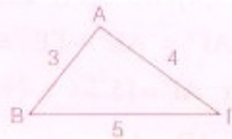



Δηλαδή:

$$\textbf{Αν} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad \textbf{τότε} \quad \widehat{A} = 90^\circ .$$

παράδειγμα

**Να εξετάσετε αν το τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι ορθογώνιο.**




**Λύση**

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ η μεγαλύτερη πλευρά είναι η $ΒΓ$ και έχουμε:

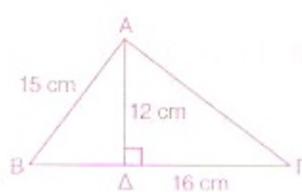
- $ΒΓ^2 = 5^2 = 25$
- $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

Οπότε $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ , άρα $\widehat{A} = 90^\circ$ .

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α. Πυθαγόρειο θεώρημα

**1. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ και το ύψος του $ΑΔ$ . Αν $ΑΒ = 15\text{ cm}$ , $ΑΔ = 12\text{ cm}$ και $ΓΔ = 16\text{ cm}$ , να υπολογίσετε:**




**α. το μήκος του $ΑΓ$**

**β. το μήκος του $ΑΒ$ .**

**Λύση**

α. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, στο τρίγωνο $ΔΑΓ$ , έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$$

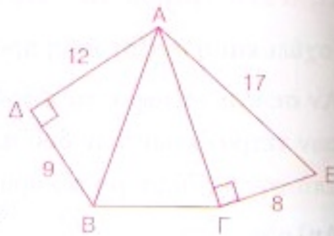
Άρα $ΑΓ = 20\text{ cm}$ .

β. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, στο τρίγωνο $ΔΑΒ$ , έχουμε:

$$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 - ΑΔ^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81 = 9^2$$

Άρα $ΒΔ = 9\text{ cm}$ .

**2.** **Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές.**




**Λύση**

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα:

- στο τρίγωνο ΑΔΒ και έχουμε

  $$AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 = 15^2$$

  Άρα $AB = 15$ .

- στο τρίγωνο ΑΓΕ και έχουμε

  $$A\Gamma^2 = AE^2 - \Gamma E^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225 = 15^2$$

  Άρα $A\Gamma = 15$ .

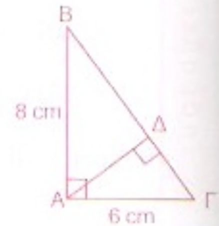
Οπότε $AB = A\Gamma$ , επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

## Β. Πυθαγόρειο θεώρημα – Εμβαδά

**3.** **Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 8$ cm , $A\Gamma = 6$ cm .**

**α. Να βρείτε την ΒΓ .**

**β. Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ .**




**Λύση**

α. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 = 10^2$$

Άρα $B\Gamma = 10$ cm .

β. Έστω $A\Delta = x$ . Είναι:

- $(AB\Gamma) = \dfrac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$

- $(AB\Gamma) = \dfrac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2}$ ή $24 = \dfrac{10 \cdot x}{2}$ ή $24 = 5x$ ή $x = \dfrac{24}{5}$ ή $x = 4{,}8$

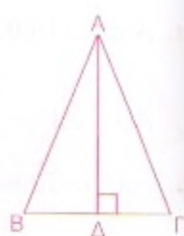
Άρα $A\Delta = 4{,}8$ cm .

**4.** **Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές, με βάση τη $B\Gamma = 10$ cm και περίμετρο $\Pi = 36$ cm . Να βρείτε:**

**α. Τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ .**

**β. Το ύψος ΑΔ .**

**γ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .**




**Λύση**

α. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, έχουμε $ΑΒ = ΑΓ$.

Έστω $ΑΒ = ΑΓ = x$. Έχουμε

$Π = 36$ ή $ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ = 36$ ή $x + x + 10 = 36$ ή $2x = 36 - 10$

ή $2x = 26$ ή $x = \frac{26}{2}$ ή $x = 13$

Άρα $ΑΒ = ΑΓ = 13$ cm.

β. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, το ύψος του $ΑΔ$ είναι και διάμεσος, οπότε το $Δ$ είναι το μέσο της $ΒΓ$. Άρα $ΒΔ = 5$ cm.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΑΒΔ$, έχουμε:

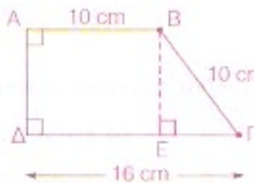
$$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2$$

Οπότε $ΑΔ = 12$ cm.

γ. Είναι $(ΑΒΓ) = \frac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ cm}^2$.

**5. Έστω το τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\widehat{Α} = \widehat{Δ} = 90°$, $ΑΒ = ΒΓ = 10$ cm και $ΓΔ = 16$ cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου.**

Λύση




Φέρουμε τη $ΒΕ \perp ΔΓ$.

Το τετράπλευρο $ΑΒΕΔ$ είναι ορθογώνιο.

Οπότε $ΔΕ = ΑΒ = 10$ cm.

Άρα $ΕΓ = ΔΓ - ΔΕ = 16 - 10 = 6$ cm.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ΒΕΓ$ και έχουμε:

$$ΒΕ^2 = ΒΓ^2 - ΕΓ^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

Άρα $ΒΕ = 8$ cm.

Είναι $(ΑΒΓΔ) = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} \cdot ΒΕ = \frac{10 + 16}{2} \cdot 8 = 104 \text{ cm}^2$.

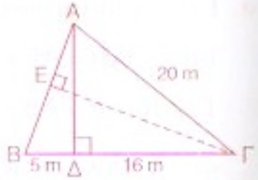
**6. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΓ = 20$ m και $ΒΓ = 21$ m. Αν $ΑΔ$ το ύψος του και $ΒΔ = 5$ m, να υπολογίσετε:**

**α. το ύψος $ΑΔ$**

**β. τη πλευρά $ΑΒ$**

**γ. το ύψος $ΓΕ$.**

Λύση




**α.** Είναι $ΔΓ = ΒΓ - ΒΔ = 21 - 5 = 16\,m$ .

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ και έχουμε:

$$ΑΔ^2 = ΑΓ^2 - ΔΓ^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 = 12^2$$

Άρα $ΑΔ = 12\,m$ .

**β.** Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΒ και έχουμε

$$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2 = 144 + 5^2 = 169 = 13^2$$

Άρα $ΑΒ = 13\,m$ .

**γ.** Έστω $ΓΕ = x$ .

Είναι: • $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 12 = 126\ m^2$

• $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΓΕ = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot x = \frac{13x}{2}$

Οπότε $\frac{13x}{2} = 126$ ή $13x = 2 \cdot 126$ ή $13x = 252$ ή $x = \frac{252}{13}$ ή $x \simeq 19{,}38\,m$ .

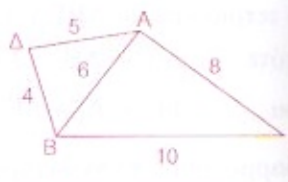
Άρα $ΓΕ \simeq 19{,}38\,m$ .

## Γ. Αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

**7. Να εξετάσετε στο διπλανό σχήμα:**

**α. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.**

**β. Αν η γωνία $\hat{Δ}$ είναι ορθή.**




**Λύση**

**α.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ η μεγαλύτερη πλευρά είναι η ΒΓ.

Έχουμε: • $ΒΓ^2 = 10^2 = 100$

• $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Οπότε $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ , επομένως $Β\hat{Α}Γ = 90°$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

**β.** Στο τρίγωνο ΑΔΒ η μεγαλύτερη πλευρά είναι η ΑΒ.

Έχουμε: • $ΑΒ^2 = 6^2 = 36$

• $ΑΔ^2 + ΔΒ^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$

Επειδή $ΑΒ^2 \neq ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ προκύπτει ότι $\hat{Δ} \neq 90°$ .

Άρα η γωνία $\hat{Δ}$ δεν είναι ορθή.

**Μέθοδος**

Βρίσκουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του τριγώνου ΑΒΓ και το συγκρίνουμε με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του.