

Άσκηση 1

Δίνεται το πολυώνυμο $A(x) = (x-1)^3 - x^2(x-1) + (2x-3)(2x+3) + 8$

α) Να αποδείξετε ότι $A(x) = 2x^2 + 3x - 2$

β) Να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 0$

γ) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $A(x)$.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\Gamma(x) = \frac{A(x)}{x^2-4}$ και στη συνέχεια, να την απλοποιήσετε.

ε) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης $\Gamma(x)$ για $x = 0$ και $x = 2$

Λύση

α) **Θυμάμαι ταυτότητες!!!** $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$A(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + x^2 + 4x^2 - 9 + 8 = 2x^2 + 3x - 2$$

$$\beta) 2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \alpha = 2, \beta = 3, \gamma = -2$$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$, άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες

πραγματικές λύσεις τις $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ και

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2.$$

(Θυμάμαι: Αν $\Delta=0$ η εξίσωση έχει μία διπλή λύση την $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, ενώ αν $\Delta < 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη)

γ) (Θυμάμαι: Παραγοντοποίηση τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$:

$$\text{Αν } \Delta > 0, \text{ τότε } ax^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{Αν } \Delta=0, \text{ τότε } ax^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)^2$$

Αν $\Delta < 0$ δεν παραγοντοποιείται.)

$$2x^2 + 3x - 2 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - (-2)) = (2x - 1)(x + 2)$$

δ) Για να ορίζεται μία ρητή αλγεβρική παράσταση πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός!

$$\text{Πρέπει } x^2 - 4 \neq 0$$

Λύνω την εξίσωση $x^2 - 4 = 0$

A' τρόπος: $(x - 2)(x + 2) = 0$

B' τρόπος: $x^2 = 4$

Γ' τρόπος με τη

$$x - 2 = 0 \text{ ή } x + 2 = 0$$

$$x = \sqrt{4} \text{ ή } x = -\sqrt{4}$$

βοήθεια της διακρίνουσας

$$x = 2 \text{ ή } x = -2$$

$$x = 2 \text{ ή } x = -2$$

όπου $\alpha=1, \beta=0, \gamma=-4$ (όπως

β' ερώτημα)

Άρα, πρέπει $x \neq -2$ και $x \neq 2$

Απλοποίηση: Παραγοντοποιώ αριθμητή και παρονομαστή και στη συνέχεια απλοποιώ..

$$\Gamma(x) = \frac{A(x)}{x^2-4} = \frac{(2x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x-1}{x-2}, x \neq \pm 2$$

$$\epsilon) \text{ Για } x = 0, \text{ έχουμε: } \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 - 2} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Για $x=2$ η τιμή της παράστασης δεν ορίζεται!

Άσκηση 2

Δίνεται αμβλεία γωνία ω για την οποία ισχύει: $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$

α) Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{-\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\omega)+\eta\mu(180^\circ-\omega)+\eta\mu 180^\circ}{\epsilon\varphi(180^\circ-\omega)+\sigma\upsilon\nu 90^\circ}$

γ) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} -\sigma\upsilon\nu\omega \cdot x + \eta\mu\omega y = 1 \\ -\epsilon\varphi 135^\circ x + \eta\mu 90^\circ y = 1 \end{cases}$

Λύση

α) **Θυμάμαι τις δύο βασικές ταυτότητες:**

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \text{ και } \epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ στον τύπο $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ έχουμε:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\frac{9}{25} + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{25}{25} - \frac{9}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{16}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$$

Θυμάμαι: Αν η γωνία ω είναι οξεία, έχουμε $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$ και $\epsilon\varphi\omega > 0$

Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, έχουμε $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$ και $\epsilon\varphi\omega < 0$

Η γωνία ω είναι αμβλεία επομένως, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$

Από τον τύπο $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$, $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ έχουμε:

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 4} = -\frac{3}{4}$$

β) Θυμάμαι τους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών:

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

$$A = \frac{-\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) + \eta\mu(180^\circ - \omega) + \eta\mu 180^\circ}{\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu 90^\circ} = \frac{-(-\sigma\upsilon\nu\omega) + \eta\mu\omega + 0}{-\epsilon\varphi\omega + 0} =$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega}{-\epsilon\varphi\omega} = \frac{-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{4}} = +\frac{4}{15}$$

Θυμάμαι τις τιμές των βασικών τριγωνομετρικών αριθμών:

ω	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\eta\mu\omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\sigma\upsilon\nu\omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\epsilon\varphi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0

γ) $\begin{cases} -\sigma\upsilon\nu\omega \cdot x + \eta\mu\omega y = 1 \\ -\epsilon\varphi 135^\circ x + \eta\mu 90^\circ y = 1 \end{cases}$ Αντικαθιστώ τις τιμές που βρήκα στο α' ερώτημα. Λύνω το σύστημα με όποιον τρόπο θέλω. Μέθοδο αντίθετων συντελεστών ή μέθοδο αντικατάστασης ή γραφική επίλυση.

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}, \eta\mu\omega = \frac{3}{5}, \eta\mu 90^\circ = 1,$$

$$\epsilon\varphi 135^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = -\epsilon\varphi 45^\circ = -1$$

$$\begin{cases} -\left(-\frac{4}{5}\right)x + \frac{3}{5}y = 1 \\ -(-1)x + 1y = 1 \end{cases} \text{ Πολλαπλασιάζω όλους τους όρους με το ΕΚΠ των παρονομαστών.}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot \frac{4}{5}x + 5 \cdot \frac{3}{5}y = 5 \cdot 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \text{ Απλοποιώ τους παρονομαστές}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Μέθοδος Αντίθετων συντελεστών:

Πολλαπλασιάζω τις 2 εξισώσεις με κατάλληλους αριθμούς ώστε να προκύψουν σε έναν από τους δύο αγνώστους αντίθετοι συντελεστές.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 5 \cdot 1 \\ x + y = 1 \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ -4x - 4y = -4 \end{cases}$$

Προσθέτω κατά μέλη τις εξισώσεις: $4x + 3y - 4x - 4y = 5 - 4$

$$-y = 1$$

$$y = -1$$

Αντικαθιστώ στην πιο εύκολη εξίσωση την τιμή που βρήκα ώστε να βρω και τον δεύτερο άγνωστο. Δηλαδή,

Για $y = -1$ στην $x + y = 1$ έχουμε $x + (-1) = 1$

$$x = 2$$

Επομένως, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (2, -1)$

Άσκηση 3

α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{5}{6} - \frac{(x-1)(x+1)}{2} = \frac{2-x}{3} - \frac{(x-4)^2}{6}$

β) Αν k η μεγαλύτερη ρίζα της παραπάνω εξίσωσης να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 2k(2x - y) - (2x - y) = 3k \\ \frac{kx-2y}{2} - \frac{(k+1)x-5y}{4} = \frac{3}{k+1} \end{cases}$$

γ) Να εξετάσετε αν οι ρίζες του α) ερωτήματος είναι λύσεις της ανίσωσης:

$$4 - x(2x + 1) > 3x - 2x^2$$

Λύση

α) Βρίσκω το ΕΚΠ των παρονομαστών και πολλαπλασιάζω όλους τους όρους με αυτό.

Επιπλέον, βρίσκω και τα αναπτύγματα. $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$,

$$(x - 4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$\frac{5}{6} - \frac{(x-1)(x+1)}{2} = \frac{2-x}{3} - \frac{(x-4)^2}{6}$$

$$6 \cdot \frac{5}{6} - 6 \cdot \frac{x^2-1}{2} = 6 \cdot \frac{2-x}{3} - 6 \cdot \frac{x^2-8x+16}{6}$$

Απλοποιώ τους παρονομαστές. ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Οι γραμμές κλάσματος γίνονται παρενθέσεις!!!

$$5 - 3(x^2 - 1) = 2(2 - x) - (x^2 - 8x + 16)$$

Κάνουμε επιμεριστική ιδιότητα και φέρνουμε όλους στους όρους στο πρώτο μέλος.

$$5 - 3x^2 + 3 = 4 - 2x - x^2 + 8x - 16$$

$$-3x^2 + x^2 + 2x - 8x + 5 + 3 - 4 + 16 = 0$$

$$-2x^2 - 6x + 20 = 0$$

Ελέγχω για τυχόν απλοποιήσεις. Διαιρώ όλους τους όρους με το -2

$$x^2 + 3x - 10 = 0, \quad a = 1, \beta = 3, \gamma = -10$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 > 0, 2 \text{ άνισες πραγματικές ρίζες}$$

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

β) Αντικαθιστώ όπου k την μεγαλύτερη ρίζα της παραπάνω εξίσωσης. Άρα για k=2 έχουμε,

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 \cdot (2x - y) - (2x - y) = 3 \cdot 2 \\ \frac{2x - 2y}{2} - \frac{(2+1)x - 5y}{4} = \frac{3}{2+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(2x - y) - (2x - y) = 6 \\ \frac{2x - 2y}{2} - \frac{3x - 5y}{4} = \frac{3}{3} \end{cases}$$

Εκτελώ τις πράξεις στην πρώτη εξίσωση, ενώ στη δεύτερη πολλαπλασιάζω όλους τους όρους με το ΕΚΠ.

$$\begin{cases} 8x - 4y - 2x + y = 6 \\ 4 \frac{2x - 2y}{2} - 4 \frac{3x - 5y}{4} = 4 \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 3y = 6 \\ 2(2x - 2y) - 1(3x - 5y) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 3y = 6 \\ 4x - 4y - 3x + 5y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 3y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Προσοχή! Φέρνουμε το σύστημα πάντα στη μορφή $ax + by = \gamma$

$$\begin{cases} 6x - 3y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 3y = 6 \\ x + y = 4 \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 3y = 6 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases}$$

Προσθέτω κατά μέλη τις εξισώσεις και έχουμε:

$$6x - 3y + 3x + 3y = 6 + 12$$

$$9x = 18$$

$$x = 2$$

Αντικαθιστώ σε όποια εξίσωση θέλω για να βρω και τον δεύτερο άγνωστο.

Για $x = 2$ στην $x + y = 4$ έχουμε $2 + y = 4$

$$y = 4 - 2$$

$$y = 2$$

$$\gamma) 4 - x(2x + 1) > 3x - 2x^2$$

$$4 - 2x^2 - x > 3x - 2x^2$$

$$4 - 2x^2 - x - 3x + 2x^2 > 0$$

$$-4x > -4$$

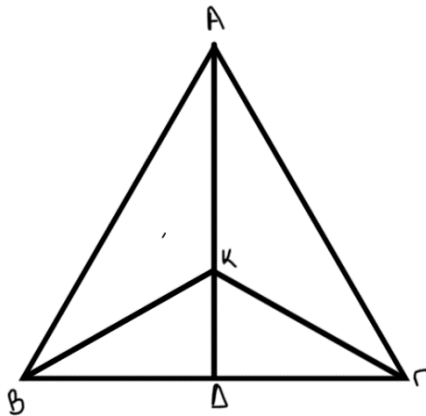
ΠΡΟΣΟΧΗ!!!! ΟΤΑΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΖΩ Η' ΔΙΑΙΡΩ ΜΕ ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ ΑΛΛΑΖΩ ΤΗ ΦΟΡΑ ΤΗΣ ΑΝΙΣΩΣΗΣ!!!!

$$\frac{-4x}{-4} < \frac{-4}{-4}$$

$$x < 1 \text{ (} x \text{ μικρότερο του 1)}$$

Οι λύσεις του α) ερωτήματος είναι $x_1 = 2, x_2 = -5$

Η ρίζα $x_2 = -5$ είναι λύση της ανίσωσης $x < 1$.



Άσκηση 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=AG$, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ και Κ ένα τυχαίο σημείο της ΑΔ.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΚ.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

Λύση

ΑΒΓ ισοσκελές οπότε $AB=AG$ και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Επιπλέον, επειδή ΑΔ διχοτόμος θα είναι διάμεσος ($BD=DG$) και ύψος ($\widehat{A} = 90^\circ$),

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΚ

1) $AB=AG$ (ΑΒΓ ισοσκελές)

2) ΑΚ κοινή πλευρά

3) $\widehat{BAK} = \widehat{KAG}$ (ΑΔ διχοτόμος)

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Δηλαδή,

4) $BK=KG$

5) $\widehat{ABK} = \widehat{AGK}$

6) $\widehat{BKA} = \widehat{AKG}$

β) Από το α ερώτημα έχουμε ότι $BK=KG$ συνεπώς το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 5

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές με βάση τη ΒΓ και σημείο Μ μέσο της ΒΓ. Φέρουμε τα ύψη ΜΚ, ΜΛ στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου αντιστοίχως.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΜ, ΓΛΜ είναι ίσα

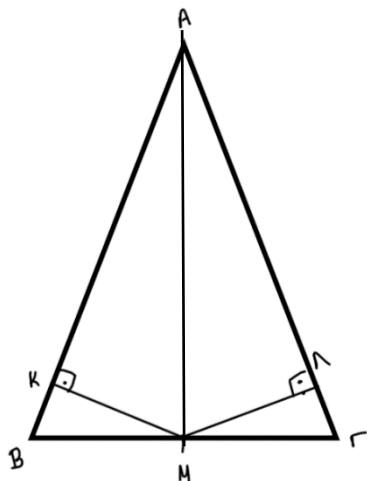
β) Να δείξετε ότι $AK=AL$

γ) Αν $\widehat{B} = 40^\circ$ να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{KML}$

δ) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΚΒΜ είναι όμοια. Στην περίπτωση που είναι να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.

Θυμάμαι: Κριτήρια Ισότητας τριγώνων, Κριτήρια Ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Λύση



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΚΜ, ΓΛΜ

1) $BM = M\Gamma$ (Μ μέσο της ΒΓ)

2) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ΑΒΓ ισοσκελές)

3) $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$ (ΚΜ, ΜΛ ύψη)

Από κριτήριο ορθογωνίων τριγώνων, τα τρίγωνα είναι ίσα επομένως, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

4) $BK = \Gamma\Lambda$

5) $MK = M\Lambda$

6) $\widehat{BMK} = \widehat{\Gamma M\Lambda}$

β) Έχουμε, $AK + KB = AB$ και $AL + \Lambda\Gamma = A\Gamma$ ή $AL = A\Gamma - \Lambda\Gamma$

$AK = AB - KB$ Επειδή $AB = A\Gamma$ και $BK = \Gamma\Lambda$ έχουμε $AK = A\Gamma - \Gamma\Lambda$

Επομένως, $AK = AL$ (ως διαφορά ίσων τμημάτων)

Β' τρόπος: Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΚΜ, ΑΛΜ όπως στο α ερώτημα.

γ) Στο τρίγωνο ΒΚΜ έχουμε: $\hat{B} = 40^\circ, \hat{K} = 90^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου έχουμε:

$$\hat{B} + \hat{K} + \widehat{BMK} = 180^\circ$$

$$40^\circ + 90^\circ + \widehat{BMK} = 180^\circ$$

$$\widehat{BMK} = 180^\circ - 130^\circ$$

$$\widehat{BMK} = 50^\circ$$

Επειδή τα τρίγωνα ΒΚΜ, ΜΛΓ είναι ίσα $\widehat{BMK} = \widehat{\Gamma M\Lambda} = 50^\circ$

$$\widehat{BMK} + \widehat{K M \Lambda} + \widehat{\Lambda M \Gamma} = 180^\circ \text{ ως ευθεία γωνία}$$

$$50 + \widehat{K M \Lambda} + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{K M \Lambda} = 80^\circ$$

δ) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΚΒΜ

1) $\hat{K} = \hat{M} = 90^\circ$ (ΑΜ διάμεσος και ύψος)

2) $\hat{B}$ κοινή γωνία

Τα τρίγωνα έχουν 2 ίσες γωνίες άρα είναι όμοια.

Λόγοι ομοιότητας: $\frac{AB}{MB} = \frac{BM}{BK} = \frac{AM}{MK}$

(το δ ερώτημα μπορεί να επεκταθεί. Δηλαδή, μπορεί να μας δίνει ότι $MB = 6 \text{ cm}$, $BK = 4 \text{ cm}$

και να ζητάει την ΑΒ. Από τους λόγους θα έχω: $\frac{AB}{MB} = \frac{BM}{BK}$

$$\frac{AB}{6} = \frac{6}{4} \text{ ή } 4AB = 6 \cdot 6 \text{ ή } 4AB = 36 \text{ ή } AB = \frac{36}{4} \text{ ή } AB = 9)$$