

Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

Βασική Θεωρία

Δύο ή περισσότερες εξισώσεις τις οποίες εξετάζουμε ως προς το σύνολο των κοινών τους λύσεων, λέμε ότι αποτελούν ένα σύστημα.

Ειδικότερα: Αν έχουμε ένα σύστημα της μορφής:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

λέμε ότι έχουμε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων (γραμμικό σύστημα) με δύο αγνώστους.

Το παρακάτω σύστημα είναι ένα **παράδειγμα** γραμμικού συστήματος:

$$(\Sigma): \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$$

Λύση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

Επίλυση του συστήματος ονομάζουμε τη διαδικασία που κάνουμε για να βρούμε τα ζεύγη (x, y) που επαληθεύουν συγχρόνως και τις δύο γραμμικές εξισώσεις.

Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y επιλύεται γραφικά αλλά και αλγεβρικά.

Λυμένα παραδείγματα με αλγεβρική επίλυση

Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

1)

$$\begin{cases} x + y = -8 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3 = -8 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -8 - 3 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 3 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος (Σ) είναι η $(x, y) = (-11, 3)$ ή $(y, x) = (3, -11)$

2)

$$\begin{cases} 5x - y = -4 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 1 - y = -4 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 - y = -4 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -y = -4 - 5 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y = -9 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ x = 1 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος (Σ) είναι η $(x, y) = (1, 9)$ ή $(y, x) = (9, 1)$

3)

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

1^{ος} τρόπος (με αντικατάσταση του x)

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3(-1 + y) + y = 1 \\ x = -1 + y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 + 3y + y = 1 \\ x = -1 + y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4y = 1 + 3 \\ x = -1 + y \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 4y = 4 \\ x = -1 + y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{4y}{4} = \frac{4}{4} \\ x = -1 + y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος (Σ) είναι η $(x, y) = (0, 1)$ ή $(y, x) = (1, 0)$

2^{ος} τρόπος (με αντικατάσταση του y)

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - 3x \\ x - (1 - 3x) = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - 3x \\ x - 1 + 3x = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - 3x \\ 4x = -1 + 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 1 - 3x \\ 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - 3x \\ \frac{4x}{4} = \frac{0}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - 3x \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - 3 \cdot 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

3^{ος} τρόπος (με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών των όρων με τον ίδιο άγνωστο)

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + \underline{1}y = 1 \\ x - \underline{1}y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Προσθέτουμε τα πρώτα μέλη και τα} \\ \text{δεύτερα μέλη των 2 εξισώσεων και} \\ \text{γράφουμε μία εξίσωση από τις 2} \\ \text{αρχικές} \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x + 1y + x - 1y = 1 - 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + x + 1y - 1y = 0 \\ x - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ x - y = -1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

1^{ος} τρόπος (δημιουργούμε αντίθετους συντελεστές στους όρους του x)

$$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Πολλαπλασιάζουμε} \\ \text{την 1^η εξίσωση με } -2 \end{array} \quad \begin{cases} -2x - (-2)3y = -2 \cdot 6 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + 6y = -12 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x + 6y + 2x + 5y = -12 + 1 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + 2x + 11y = -11 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 11y = -11 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{11y}{11} = \frac{-11}{11} \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ 2x + 5(-1) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 2x - 5 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 2x = 1 + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 2x = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος (Σ) είναι η (x, y) = (3, -1)

2^{ος} τρόπος (δημιουργούμε αντίθετους συντελεστές στους όρους του y)

$$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Πολλαπλασιάζουμε την 1^η εξίσωση με το 5} \\ \text{Πολλαπλασιάζουμε την 2^η εξίσωση με το +3} \end{array}$$

$$\begin{cases} 5x - 5 \cdot 3y = 5 \cdot 6 \\ 3 \cdot 2x + 3 \cdot 5y = 3 \cdot 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x - 15y = 30 \\ 6x + 15y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x - 15y + 6x + 15y = 30 + 3 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 11x - 15y + 15y = 33 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 11x = 33 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{11x}{11} = \frac{33}{11} \\ x - 3y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 3 - 3y = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ -3y = 6 - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ -3y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{-3y}{-3} = \frac{3}{-3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Καθήκοντα

- 1) Να διαβάσετε προσεκτικά τα παραπάνω λυμένα παραδείγματα 1 – 4
- 2) Να λύσετε ξανά τα παραπάνω παραδείγματα 1 – 4 στο τετράδιό σας χωρίς να τα αντιγράψετε
- 3) Να διαβάσετε προσεκτικά τις σελίδες 133 – 136 του σχολικού βιβλίου
- 4) Να λύσετε με 2 τρόπους τις ασκήσεις 1, 2/137 του σχολικού βιβλίου

Φιλιππίδου Σοφία
Μαθηματικός