

Ισότητα τριγώνων

Βασική Θεωρία

Για να αποδείξουμε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι 2 τουλάχιστον τρίγωνα είναι ίσα χρησιμοποιούμε τα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων (3 θεωρήματα ή 3 μαθηματικές προτάσεις)

1^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

Για συντομογραφία γράφουμε Π-Γ-Π που σημαίνει «πλευρά – περιεχόμενη γωνία – πλευρά»

2^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Για συντομογραφία γράφουμε Γ-Π-Γ που σημαίνει «γωνία προσκείμενη – πλευρά – γωνία προσκείμενη»

3^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Για συντομογραφία γράφουμε Π-Π-Π που σημαίνει «πλευρά – πλευρά – πλευρά»

Σε ίσα τρίγωνα ισχύει ότι:

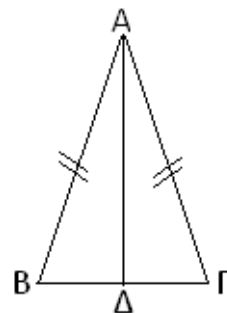
- 1) οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους είναι ίσες μία προς μία
- 2) απέναντι από τις ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

Λυμένες ασκήσεις

1^η ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και φέρνουμε τη διχοτόμο AD . Να αποδείξετε ότι:

- το τμήμα AD είναι διάμεσος του $AB\Gamma$
- οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του $AB\Gamma$ είναι ίσες
- το τμήμα AD είναι ύψος του $AB\Gamma$



Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\Delta$ τα οποία έχουν:

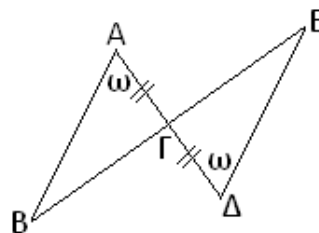
$$\left. \begin{array}{l} 1) AB = AG \text{ (δεδομένο)} \\ 2) AD = AD \text{ (κοινή πλευρά)} \\ 3) \hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{G}\hat{A}\hat{D} \text{ (} AD \text{ διχοτόμος της } \hat{A} \text{)} \end{array} \right\} \xrightarrow[1^\circ \text{ κριτήριο}]{\Pi-\Gamma-\Pi} \triangle AB\Delta = \triangle AG\Delta$$

→ τα υπόλοιπα αντίστοιχα κύρια στοιχεία τους (πλευρές και γωνίες) είναι ίσα

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4) B\Delta = G\Delta \rightarrow AD \text{ διάμεσος του } \triangle AB\Gamma \text{ (απεδείχθη)} \\ 5) \hat{B} = \hat{G} \text{ (απεδείχθη)} \\ 6) \hat{A}\hat{D}B = \hat{A}\hat{D}G \text{ και επειδή οι γωνίες } \hat{A}\hat{D}B, \hat{A}\hat{D}G \text{ είναι} \\ \text{παραπληρωματικές, δηλαδή } \hat{A}\hat{D}B + \hat{A}\hat{D}G = 180^\circ \text{ συμπεραίνουμε ότι} \\ \hat{A}\hat{D}B = \hat{A}\hat{D}G = 90^\circ \rightarrow AD \perp \text{ (κάθετη) } BG \rightarrow AD \text{ ύψος του } \triangle AB\Gamma \\ \text{(απεδείχθη)} \end{array} \right.$$

2^η ΑΣΚΗΣΗ

Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $\hat{A} = \hat{\Delta} = \omega$ και $AG = GD$. Να αποδείξετε ότι $AB = DE$.



Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $G\Delta E$ τα οποία έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} 1) AG = GD \text{ (δεδομένο)} \\ 2) \hat{B}\hat{A}\hat{G} = \hat{G}\hat{\Delta}E = \omega \text{ (δεδομένο)} \\ 3) \hat{A}\hat{G}B = \hat{\Delta}\hat{G}E \text{ (κατακορυφήν γωνίες)} \end{array} \right\} \xrightarrow[2^\circ \text{ κριτήριο}]{\Gamma-\Pi-\Gamma} \triangle AB\Delta = \triangle G\Delta E$$

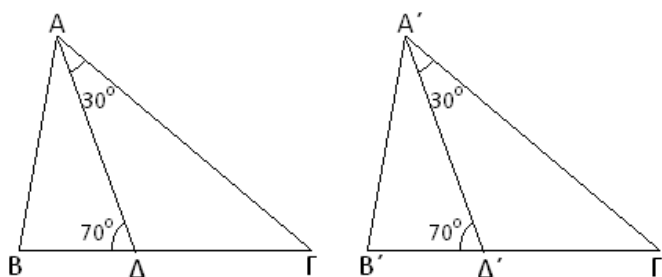
→ τα υπόλοιπα αντίστοιχα κύρια στοιχεία τους (πλευρές και γωνίες) είναι ίσα

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4) BG = GE \\ 5) AB = DE \text{ (απεδείχθη)} \\ 6) \hat{A}\hat{B}\hat{G} = \hat{G}\hat{E}\hat{\Delta} \end{array} \right.$$

3^η ΑΣΚΗΣΗ

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του παρακάτω σχήματος έχουν τις διχοτόμους $A\Delta$ και $A'\Delta'$ ίσες. Να αποδείξετε ότι:

- $AB = A'B'$
- τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα
- $A\Gamma = A'\Gamma'$



Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$ τα οποία έχουν:

- $A\Delta = A'\Delta'$ (δεδομένο)
 - $\hat{A}\Delta B = \hat{A}'\Delta'B' = 70^\circ$ (δεδομένο)
 - $\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{B}'\hat{A}'\Delta' = 30^\circ$ ($A\Delta, A'\Delta'$ διχοτόμοι των 2 τριγώνων)
- $$\left. \begin{array}{l} \text{Γ-Π-Γ} \\ 2^\circ \text{ κριτήριο} \end{array} \right\} \xrightarrow{\Delta} AB\Delta = A'B'\Delta'$$
- τα υπόλοιπα αντίστοιχα κύρια στοιχεία τους (πλευρές και γωνίες) είναι ίσα

- $$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4) AB = A'B' \text{ (απεδείχθη)} \\ 5) B\Delta = B'\Delta' \\ 6) \hat{B} = \hat{B}' = 180^\circ - (70^\circ + 30^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \end{array} \right.$$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ τα οποία έχουν:

- $AB = A'B'$ (απεδείχθη προηγουμένως)
 - $\hat{B}\hat{A}\Gamma = \hat{B}'\hat{A}'\Gamma' = 60^\circ$ (δεδομένο, $A\Delta, A'\Delta'$ διχοτόμοι)
 - $\hat{B} = \hat{B}' = 80^\circ$ (απεδείχθη προηγουμένως)
- $$\left. \begin{array}{l} \text{Γ-Π-Γ} \\ 2^\circ \text{ κριτήριο} \end{array} \right\} \xrightarrow{\Delta}$$

→ $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$ (απεδείχθη)

→ τα υπόλοιπα αντίστοιχα κύρια στοιχεία τους (πλευρές και γωνίες) είναι ίσα

- $$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4) A\Gamma = A'\Gamma' \text{ (απεδείχθη)} \\ 5) B\Gamma = B'\Gamma' \\ 6) \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ \end{array} \right.$$

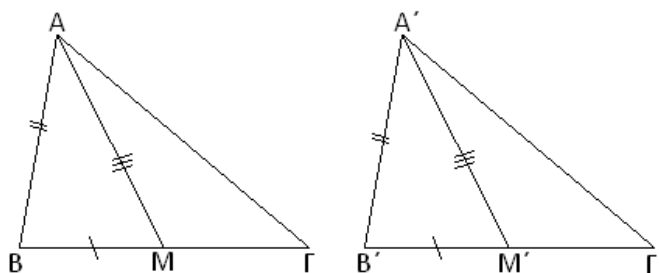
4^η ΑΣΚΗΣΗ

Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του παρακάτω σχήματος οι διάμεσοι AM και $A'M'$ ίσες. Αν $AB = A'B'$ και $BM = B'M'$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{B}'$

β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα

γ) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$



Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABM και $A'B'M'$ τα οποία έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} 1) AB = A'B' \text{ (δεδομένο)} \\ 2) BM = B'M' \text{ (δεδομένο)} \\ 3) AM = A'M' \text{ (δεδομένο)} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{3}^\circ \text{ κριτήριο}]{\text{Π-Π-Π}} \triangle ABM = \triangle A'B'M'$$

→ τα υπόλοιπα αντίστοιχα κύρια στοιχεία τους (πλευρές και γωνίες) είναι ίσα

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4) \hat{B} = \hat{B}' \text{ (απεδείχθη)} \\ 5) \hat{BAM} = \hat{B'A'M'} \\ 6) \hat{AMB} = \hat{A'M'B'} \end{array} \right.$$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ τα οποία έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} 1) AB = A'B' \text{ (δεδομένο)} \\ 2) BM = B'M' \rightarrow 2BM = 2B'M' = B\Gamma = B'\Gamma' \\ 3) \hat{B} = \hat{B}' \text{ (απεδείχθη προηγουμένως)} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{1}^\circ \text{ κριτήριο}]{\text{Π-Γ-Π}}$$

$$\rightarrow \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma' \text{ (απεδείχθη)}$$

→ τα υπόλοιπα αντίστοιχα κύρια στοιχεία τους (πλευρές και γωνίες) είναι ίσα

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4) A\Gamma = A'\Gamma' \\ 5) \hat{BAG} = \hat{B'A'\Gamma'} \\ 6) \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \text{ (απεδείχθη)} \end{array} \right.$$

Καθήκοντα

- 1) Να απομνημονεύσετε τα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων
- 2) Να λύσετε ξανά χωρίς να τις αντιγράψετε τις 4 παραπάνω ασκήσεις
- 3) Να λύσετε τις ασκήσεις 1, 2, 3, 4/194 και 5, 6, 10, 11, 12, 14/195, 196 του σχολικού βιβλίου

Φιλιππίδου Σοφία
Μαθηματικός