

Ρητές Αλγεβρικές παραστάσεις

Περιορισμοί - Απλοποίηση

Βασική Θεωρία

Μια αλγεβρική παράσταση που είναι **κλάσμα**, του οποίου οι όροι είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση**.

Κάθε κλάσμα για να ορίζεται, πρέπει ο **παρονομαστής** του να είναι **διάφορος του μηδενός**. Έτσι, σε μια ρητή παράσταση, οι μεταβλητές δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

Ισχύει η ιδιότητα

Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε συμπεραίνουμε ότι $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$

Αν $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 0$ τότε συμπεραίνουμε ότι $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$

Αν $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = 0$ τότε συμπεραίνουμε ότι $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$ ή $\delta = 0$

Ισχύει η ιδιότητα

Αν $\alpha \cdot \beta \neq 0$ τότε συμπεραίνουμε ότι $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

Αν $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$ τότε συμπεραίνουμε ότι $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ και $\gamma \neq 0$

Αν $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \neq 0$ τότε συμπεραίνουμε ότι $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ και $\gamma \neq 0$ και $\delta \neq 0$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ - ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ

Για να απλοποιήσουμε μία ρητή παράσταση εκτελούμε τα εξής βήματα

1° Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της παράστασης. Αν δεν παραγοντοποιούνται γράφουμε τους όρους του κλάσματος ως έχουν

2° Θέτουμε (γράφουμε) τους περιορισμούς του παρονομαστή

3° Κάνουμε τις απλοποιήσεις μεταξύ των όρων του κλάσματος (αριθμητή και παρονομαστή), δηλαδή διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντές τους

Προσοχή: οι περιορισμοί τίθενται (γράφονται) πριν να κάνουμε οποιαδήποτε απλοποίηση. Οι περιορισμοί αυτοί ισχύουν και για την απλοποιημένη μορφή της ρητής παράστασης.

Λυμένα παραδείγματα

Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παρακάτω ρητές παραστάσεις και μετά να τις απλοποιήσετε.

1) $\frac{4x}{3\alpha - 15}$ Πρέπει να είναι $3\alpha - 15 \neq 0$

Θεωρούμε (γράφουμε) ότι $3\alpha - 15 = 0$ και λύνουμε την

$$\text{εξίσωση } 3\alpha - 15 = 0 \rightarrow 3\alpha = 15 \rightarrow \frac{3\alpha}{3} = \frac{15}{3} \rightarrow \alpha = 5$$

Άρα για $\alpha = 5$ ο παρονομαστής μηδενίζεται και επειδή αυτό δεν είναι αποδεκτό, ο περιορισμός που πρέπει να τεθεί είναι $\alpha \neq 5$.

$$\frac{4x}{3\alpha - 15} = \frac{4x}{3(\alpha - 5)} \quad \text{Δεν απλοποιείται η παράσταση}$$

2) $\frac{3x}{3\alpha - 15}$ Ισχύει ο ίδιος περιορισμός: $\alpha \neq 5$

$$\frac{3x}{3\alpha - 15} = \frac{3x}{3(\alpha - 5)} = \frac{x}{\alpha - 5}$$

3) $\frac{x - 16}{2(x + 5) - 3(x - 2)} = \frac{x - 16}{2x + 10 - 3x + 6} = \frac{x - 16}{-x + 16}$

Πρέπει να είναι $-x + 16 \neq 0$

Γράφουμε ότι $-x + 16 = 0 \rightarrow 16 = x \rightarrow x = 16$

Άρα ο περιορισμός είναι $x \neq 16$

$$\frac{x - 16}{2(x + 5) - 3(x - 2)} = \frac{x - 16}{-x + 16} = \frac{(x - 16)}{-(x - 16)} = \frac{1}{-1} = -1$$

4) $\frac{7\alpha - 7}{(\alpha + 2)^2 - 9}$ Πρέπει να είναι $(\alpha + 2)^2 - 9 \neq 0$

Γράφουμε ότι

$$\begin{aligned} (\alpha + 2)^2 - 9 = 0 &\rightarrow (\alpha + 2)^2 - 3^2 = 0 \rightarrow (\alpha + 2 + 3)(\alpha + 2 - 3) = 0 \\ &\rightarrow (\alpha + 5)(\alpha - 1) = 0 \rightarrow \alpha + 5 = 0 \text{ ή } \alpha = 1 \rightarrow \alpha = -5 \text{ ή } \alpha = 1 \end{aligned}$$

Άρα οι περιορισμοί είναι $\alpha \neq -5$ και $\alpha \neq 1$

$$\frac{7\alpha - 7}{(\alpha + 2)^2 - 9} = \frac{7(\alpha - 1)}{(\alpha + 5)(\alpha - 1)} = \frac{7}{\alpha + 5}$$

$$5) \frac{56\alpha^6\gamma^4\omega^2}{77\omega^3\gamma^2\alpha} \quad \text{Πρέπει να είναι } 77\omega^3\gamma^2\alpha \neq 0$$

Γράφουμε $77\omega^3\gamma^2\alpha = 0 \rightarrow 77 = 0$ (αδύνατο) ή $\omega^3 = 0$ ή $\gamma^2 = 0$ ή

$$\alpha = 0 \rightarrow \omega = 0 \text{ ή } \gamma = 0 \text{ ή } \alpha = 0$$

Άρα οι περιορισμοί είναι $\omega \neq 0$ και $\gamma \neq 0$ και $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{56\alpha^6\gamma^4\omega^2}{77\omega^3\gamma^2\alpha} &= \frac{56}{77} \cdot \frac{\alpha^6}{\alpha} \cdot \frac{\gamma^4}{\gamma^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^3} = \frac{8}{11} \alpha^{6-1} \gamma^{4-2} \omega^{2-3} = \frac{8}{11} \alpha^5 \gamma^2 \omega^{-1} \\ &= \frac{8\alpha^5\gamma^2}{11\omega} \end{aligned}$$

$$6) \frac{4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2}{4\alpha^3 - \alpha\beta^2} \quad \text{Πρέπει να είναι } 4\alpha^3 - \alpha\beta^2 \neq 0$$

Γράφουμε $4\alpha^3 - \alpha\beta^2 = 0 \rightarrow \alpha(4\alpha^2 - \beta^2) = 0 \rightarrow \alpha[(2\alpha)^2 - \beta^2] = 0 \rightarrow$

$$\alpha(2\alpha + \beta)(2\alpha - \beta) = 0 \rightarrow \alpha = 0 \text{ ή } 2\alpha + \beta = 0 \text{ ή } 2\alpha - \beta = 0 \rightarrow \alpha = 0 \text{ ή}$$

$$2\alpha = -\beta \text{ ή } 2\alpha = \beta \rightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \alpha = -\frac{\beta}{2} \text{ ή } \alpha = \frac{\beta}{2}$$

Άρα οι περιορισμοί είναι $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq -\frac{\beta}{2}$ και $\alpha \neq \frac{\beta}{2}$

$$\frac{4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2}{4\alpha^3 - \alpha\beta^2} = \frac{(2\alpha + \beta)^2}{\alpha(2\alpha + \beta)(2\alpha - \beta)} = \frac{(2\alpha + \beta)(2\alpha + \beta)}{\alpha(2\alpha + \beta)(2\alpha - \beta)} = \frac{2\alpha + \beta}{\alpha(2\alpha - \beta)}$$

Προαπαιτούμενες γνώσεις

- A. Επίλυση (λύση) εξισώσεων
- B. Ορισμός δύναμης και ιδιότητες δυνάμεων
- Γ. Επιμεριστική ιδιότητα
- Δ. $\beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$
 $(\beta - \alpha)(\gamma - \delta) = (\alpha - \beta)(\delta - \gamma)$
 $(\beta - \alpha)(\gamma - \delta) = -(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)$
 $(\beta - \alpha)(\gamma - \delta) = -(\beta - \alpha)(\delta - \gamma)$
- E. Προπαίδεια
- ΣΤ. Ταυτότητες
- Z. Μεθοδολογία παραγοντοποίησης

Φιλιππίδου Σοφία
Μαθηματικός