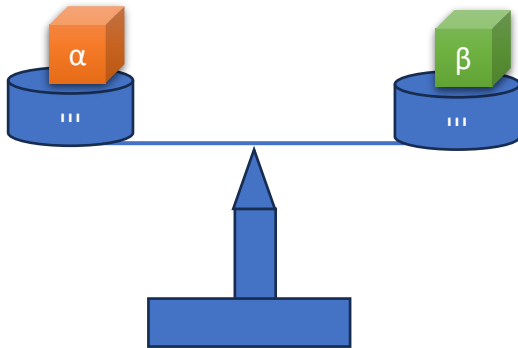


1.2 Εξισώσεις α' βαθμού



Σε μία ζυγαριά που ισορροπεί έχουμε τα κουτιά βάρους α kg και β kg.

Ας σκεφτούμε:

- Αν προσθέσουμε και στα δύο κουτιά 1 μπουκάλι χυμό (το ίδιο στο καθένα), θα αλλάξει η ισορροπία της ζυγαριάς;
- Λογικά όχι, αφού **προσθέτουμε** το ίδιο βάρος **και στα δύο** κουτιά.

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

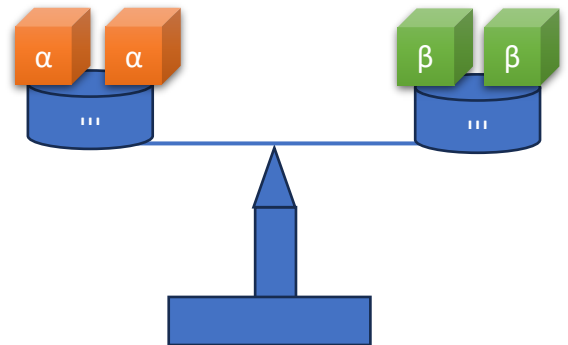
$$\text{Δηλαδή, αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

- Αν αφαιρέσουμε και από τα δύο κουτιά 1 κουτί σοκολατάκια (το ίδιο από το καθένα), θα αλλάξει η ισορροπία της ζυγαριάς;
- Λογικά πάλι όχι, αφού **αφαιρούμε** το ίδιο βάρος **και από τα δύο** κουτιά.

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

$$\text{Δηλαδή, αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \alpha - \gamma = \beta - \gamma$$

- Αν διπλασιάσουμε τα κουτιά σε καθένα μέρος της ζυγαριάς, θα αλλάξει η ισορροπία της ζυγαριάς;
- Λογικά όχι, αφού **τα αρχικά κουτιά** ισορροπούσαν, θα ισορροπούν και **τα διπλάσια τους**.
- Αν τριπλασιάσουμε τα κουτιά σε καθένα μέρος της ζυγαριάς, θα αλλάξει η ισορροπία της ζυγαριάς;
- Λογικά πάλι όχι, αφού **τα αρχικά κουτιά** ισορροπούσαν, θα ισορροπούν και **τα τριπλάσιά τους**.



Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

$$\text{Δηλαδή, αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$$

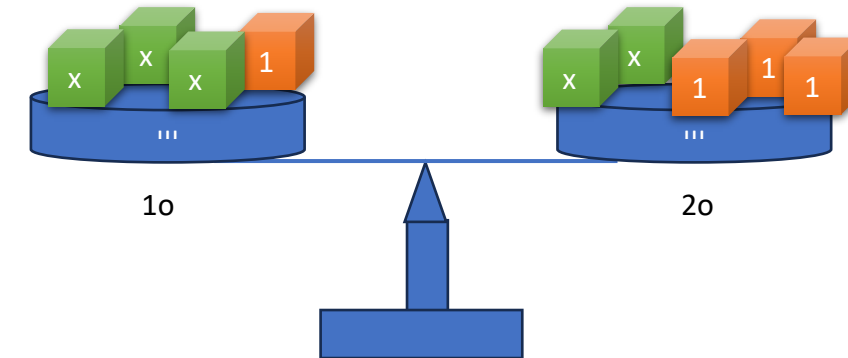
- Αν αφήσουμε το μισό καθενός κουτιού σε καθένα μέρος της ζυγαριάς, θα αλλάξει η ισορροπία της ζυγαριάς;
- Λογικά όχι, αφού **τα αρχικά κουτιά** ισορροπούσαν, θα ισορροπούν και **τα μισά τους**.

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας διαιρεθούν με τον ίδιο (μη μηδενικό) αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

$$\text{Δηλαδή, αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}, \gamma \neq 0$$

Πρόβλημα

Αν η παρακάτω ζυγαριά **ισορροπεί**, μπορείτε να βρείτε το βάρος x ;



ισορροπεί

$$\underbrace{3x + 1}_{1^\circ \text{ μέλος}} = \underbrace{2x + 3}_{2^\circ \text{ μέλος}}$$

Δημιουργήσαμε
μία εξίσωση
που περιγράφει
το πρόβλημα!



Αναζητούμε πόσο πρέπει να είναι το x , ώστε η ζυγαριά να ισορροπεί.

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 2x + 3 \\ 3x + 1 - 2x &= 2x + 3 - 2x \\ 3x - 2x + 1 &= \underbrace{2x - 2x}_{0} + 3 \\ 3x - 2x + 1 - 1 &= 3 - 1 \\ 3x - 2x &= 3 - 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων
που αναφέραμε στην αρχή της
ενότητας!

Αφαιρέσαμε και από τα δύο
μέλη το $2x$

Αφαιρέσαμε και από τα δύο
μέλη το 1

Άρα, για να ισορροπεί η ζυγαριά πρέπει το κουτί x να είναι 2 κιλά.



Από τα παραπάνω, «βλέπουμε» ότι μπορούμε να μεταφέρουμε όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας πρόσημο!

Πώς λύνεται μια εξίσωση τελικά;;;;;

$$4(2x + 1) - 6(x - 1) = 3(x + 2)$$

Κάνω επιμεριστική ιδιότητα.

$$8x + 4 - 6x + 6 = 3x + 6$$

$$8x - 6x - 3x = 6 - 6 - 4$$

Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους.

Μεταφέρω όρους αλλάζοντας πρόσημο.

Κάνω πράξεις.

$$-x = -4$$

$$\frac{-x}{-1} = \frac{-4}{-1}$$

Διαιρώ με τον (μη μηδενικό) συντελεστή του αγνώστου.

$$x = 4$$

Η λύση της εξίσωσης είναι $x = 4$, αλλά τι σημαίνει αυτό; Αν βάλουμε στην αρχική μας εξίσωση όπου x τον αριθμό 4, τότε βλέπουμε ότι η εξίσωση επαληθεύεται (αληθεύει).

$$4(2 \cdot 4 + 1) - 6(4 - 1) = 3(4 + 2)$$

$$4(8 + 1) - 6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$$

$$4 \cdot 9 - 6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$$

$$36 - 18 = 18$$

$$18 = 18$$

Αδύνατη εξίσωση

$$5(x - 2) + 3x = 2(4x - 3) + 4$$

$$5x - 10 + 3x = 8x - 6 + 4$$

$$5x + 3x - 8x = -6 + 4 + 10$$

$$0x = 8$$

Ερώτημα: Ποιος αριθμός αν πολλαπλασιαστεί με το μηδέν μας δίνει 8; Κανένας αριθμός.

Η εξίσωση είναι **αδύνατη**, δεν έχει καμία λύση. Δηλαδή, δεν υπάρχει αριθμός που να την επαληθεύει!

Αόριστη εξίσωση ή Ταυτότητα

$$5(x - 2) + 3x = 2(4x - 3) - 4$$

$$5x - 10 + 3x = 8x - 6 - 4$$

$$5x + 3x - 8x = -6 - 4 + 10$$

$$0x = 0$$

Ερώτημα: Ποιος αριθμός αν πολλαπλασιαστεί με το μηδέν μας δίνει μηδέν; Κάθε πραγματικός αριθμός.

Η εξίσωση είναι **ταυτότητα**, έχει άπειρες λύσεις. Δηλαδή, κάθε πραγματικός αριθμός την επαληθεύει!

Εξισώσεις – Ισοδύναμα κλάσματα

Από την Α Γυμνασίου θυμόμαστε ότι αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\alpha\delta = \beta\gamma$, δηλαδή τα χιαστί γινόμενα είναι ίσα.

Ας λύσουμε την εξίσωση:

$$\frac{2x + 3}{2} = \frac{3x - 5}{4}$$

$$4(2x + 3) = 2(3x - 5)$$

$$8x + 12 = 6x - 10$$

$$8x - 6x = -12 - 10$$

$$2x = -22$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{-22}{2}$$

$$x = -11$$

$$\frac{2x + 3}{2} = \frac{3x - 5}{4}$$

Κάνω χιαστί γινόμενα

Άλλο παράδειγμα

$$\frac{7x - 6}{3} = \frac{5x + 2}{4}$$

$$4(7x - 6) = 3(5x + 2)$$

$$28x - 24 = 15x + 6$$

$$28x - 15x = 24 + 6$$

$$13x = 30$$

$$\frac{13x}{13} = \frac{30}{13}$$

$$x = \frac{30}{13}$$

Εξισώσεις με κλάσματα (με περισσότερους από 2 όρους)

Ας λύσουμε την παρακάτω εξίσωση

$$\frac{x+4}{5} - \frac{x-4}{3} = \frac{1-3x}{15} - 2$$

$$15 \cdot \frac{x+4}{5} - 15 \cdot \frac{x-4}{3} = 15 \cdot \frac{1-3x}{15} - 15 \cdot 2$$

$$3(x+4) - 5(x-4) = 1 - 3x - 30$$



$$3x + 12 - 5x + 20 = 1 - 3x - 30$$

$$3x - 5x + 3x = 1 - 12 - 20 - 30$$

$$x = -61$$

Για να απαλλαγώ από τους παρονομαστές:

Βρίσκω το ΕΚΠ των παρονομαστών
ΕΚΠ (3,5,15)=15

Πολλαπλασιάζω όλους τους όρους με το ΕΚΠ των παρονομαστών

Προσοχή: δεν ξεχνάω την παρένθεση!