

1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

Ένα μεγάλο μέρος των μαθηματικών που έχουμε σήμερα προέρχεται από την ανάγκη του ανθρώπου να «αντιμετωπίσει» ένα πρόβλημα είτε της καθημερινότητας είτε μιας άλλης επιστήμης (Φυσική, Οικονομία, Βιολογία, Ιατρική κα).

Μια πολύ απλή μορφή αυτού είναι η επίλυση «απλών» προβλημάτων μέσα από την χρήση εξισώσεων.

Ας δούμε ένα πρόβλημα

Ο Γιώργος, η Μαρία και ο Κώστας θα μοιραστούν 72€ . Ο Γιάννης θα πάρει διπλάσια χρήματα από την Μαρία και η Μαρία θα πάρει 4€ λιγότερα από τον Κώστα. Να βρείτε πόσα χρήματα θα πάρει ο καθένας.

Λύση

Αφότου διαβάσουμε πολλές φορές το πρόβλημα και εντοπίσουμε τα σημεία-κλειδιά, παρατηρούμε ότι τα χρήματα του Γιάννη σχετίζονται με τα χρήματα της Μαρίας και τα χρήματα της Μαρίας σχετίζονται με εκείνα του Κώστα. Αν γνωρίζαμε τα χρήματα του Κώστα, άμεσα θα υπολογίζαμε και των άλλων δύο.

Επιλέγουμε να συμβολίσουμε με x τα χρήματα του Κώστα.

Θα εκφράσουμε με τη βοήθεια του x τα χρήματα των υπόλοιπων που αναφέρονται στο πρόβλημα.

- ✚ Τα χρήματα της Μαρίας είναι 4€ λιγότερα από του Κώστα (δηλαδή από το x).
Άρα τα χρήματα της Μαρίας είναι $x - 4$.
- ✚ Τα χρήματα του Γιώργου είναι διπλάσια από της Μαρίας (δηλαδή από το $x - 4$).
Άρα η ηλικία του Γιώργου είναι $2(x - 4)$.

Κατασκευάζουμε μία εξίσωση η οποία περιγράφει το πρόβλημα. Γνωρίζουμε ότι τα συνολικά χρήματα είναι 72€.

Έτσι έχουμε την εξίσωση :

$$x + (x - 4) + 2(x - 4) = 72$$

τα χρήματα του Κώστα

τα χρήματα της Μαρίας

τα συνολικά χρήματα

τα χρήματα του Γιώργου

Λύνουμε την εξίσωση

$$x + (x - 4) + 2(x - 4) = 72$$

$$x + x - 4 + 2x - 8 = 72$$

$$x + x + 2x = 72 + 4 + 8$$

$$4x = 84$$

$$x = 21$$

Συμπέρασμα:

Τα χρήματα του Κώστα είναι 21€, της Μαρίας είναι $21 - 4 = 17$ € και του Γιώργου είναι $2 \cdot 17 = 34$ €.

Κάνουμε και μία επαλήθευση $21 + 17 + 34 = 72$

Πώς αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα;;;

1. Διαβάζουμε αρκετές φορές το πρόβλημα σημειώνοντας τις λέξεις-κλειδιά.
2. Ξεκαθαρίζουμε τι ψάχνουμε και το θεωρούμε ως τον άγνωστο x .
3. Προσδιορίζουμε – εκφράζουμε τα υπόλοιπα δεδομένα – παραμέτρους τους προβλήματος με τη βοήθεια του x .
4. Κατασκευάζουμε μία εξίσωση (μοντελοποίηση) η οποία «περιγράφει» το πρόβλημα.
5. Λύνουμε την εξίσωση.
6. Ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τους περιορισμούς ή τα χαρακτηριστικά του προβλήματος.

Πρόβλημα 2

Η Ιωάννα έχει σήμερα διπλάσια ηλικία από τον Νίκο. Πριν από 5 χρόνια, η Ιωάννα είχε τριπλάσια ηλικία από τον Νίκο. Να βρείτε τις σημερινές ηλικίες του Νίκου και της Ιωάννας.

Λύση

Έστω x η ηλικία του Νίκου.

	Σήμερα	Πριν από 5 χρόνια
Νίκος	x	$x - 5$
Ιωάννα	$2x$	$2x - 5$

Σχηματίζουμε την εξίσωση και έχουμε:

$$2x - 5 = 3(x - 5)$$

$$2x - 5 = 3x - 15$$

$$2x - 3x = -15 + 5$$

$$-x = -10$$

$$\frac{-x}{-1} = \frac{-10}{-1}$$

$$x = 10$$

Άρα ο Νίκος σήμερα είναι 10 ετών και η Ιωάννα 20 ετών.

Πρόβλημα 3

Δέκα μικρά λεωφορεία των 5 και 7 ατόμων μεταφέρουν συνολικά 58 επιβάτες. Πόσα λεωφορεία είναι των 5 και πόσα των 7 ατόμων;

Λύση

Έστω x τα λεωφορεία των 5 ατόμων (θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως x και εκείνα των 7 ατόμων).

$$(\text{Λεωφορεία των 5 ατόμων}) + (\text{Λεωφορεία των 7 ατόμων}) = 10$$

Δηλαδή x (Λεωφορεία των 5 ατόμων) και κάποια (Λεωφορεία των 7 ατόμων) είναι 10

Άρα τα (Λεωφορεία των 7 ατόμων) είναι $10 - x$.

	Πόσα είναι;	Πόσους μεταφέρουν;
Λεωφορεία των 5 ατόμων	x	$5x$
Λεωφορεία των 7 ατόμων	$10 - x$	$7(10 - x)$

Σχηματίζουμε την εξίσωση και έχουμε:

$$5x + 7(10 - x) = 58$$

$$5x + 70 - 7x = 58$$

$$5x - 7x = 58 - 70$$

$$-2x = -12$$

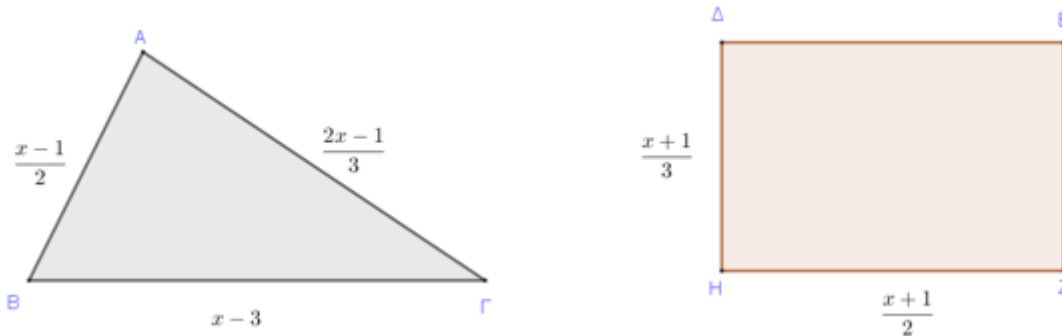
$$\frac{-2x}{-2} = \frac{-12}{-2}$$

$$x = 6$$

Άρα 6 Λεωφορεία (των 5 ατόμων) και 4 Λεωφορεία (των 7 ατόμων).

Πρόβλημα 4

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ορθογώνιο ΔEZH έχουν την ίδια περίμετρο. Να βρείτε το x , καθώς και την περίμετρο του κάθε σχήματος.

**Λύση**

$$\text{Περίμετρος } AB\Gamma = \frac{x-1}{2} + \frac{2x-1}{3} + x - 3$$

$$\text{Περίμετρος } \Delta EZH = 2 \frac{(x+1)}{3} + 2 \frac{(x+1)}{2}$$

Σχηματίζουμε την εξίσωση και έχουμε:

$$\frac{x-1}{2} + \frac{2x-1}{3} + x - 3 = 2 \frac{(x+1)}{3} + 2 \frac{(x+1)}{2}$$

$$6 \frac{x-1}{2} + 6 \frac{2x-1}{3} + 6(x-3) = 6 \cdot 2 \frac{(x+1)}{3} + 6 \cdot 2 \frac{(x+1)}{2}$$

$$3(x-1) + 2(2x-1) + 6(x-3) = 4(x+1) + 6(x+1)$$

$$3x - 3 + 4x - 2 + 6x - 18 = 4x + 4 + 6x + 6$$

$$3x + 4x + 6x - 6x - 4x = +18 + 3 + 2 + 4 + 6$$

$$3x = 33$$

$$x = 11$$