100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Διαγωνισμός Μαθηματικών ικανοτήτων
ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ
http://www.hms.gr/pythagoras/index.html

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΗΣ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ

Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

- Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή δεκαδικού ή περιοδικού δεκαδικού αριθμού και συμβολίζεται όπως φαίνεται στα παραδείγματα.
  π.χ. $\frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$ *και* $\frac{1.000.000}{7} = 142857{,}\overline{142857}$.
- Το τμήμα των επαναλαμβανομένων δεκαδικών ψηφίων κάθε περιοδικού αριθμού ονομάζεται περίοδος. (1, 6□5=1,65656565…)
- Κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλασματικού ρητού.

Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

Το γινόμενο $\overbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\;\dots\;\cdot\alpha}^{\nu\ \text{παράγοντες}}$ *(είτε ο α είναι θετικός είτε αρνητικός ρητός)*, συμβολίζεται με το α^ν και λέγεται **δύναμη** με **βάση** το α και **εκθέτη** το φυσικό ν>1.

εκθέτης

$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\;\dots\;\cdot\alpha}_{\nu\ \text{παράγοντες}}$

βάση

- Για **ν = 1**, γράφουμε $\boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}$
- Η **δύναμη** $\boldsymbol{\alpha^\nu}$ διαβάζεται και **νιοστή δύναμη του α**.
- Η **δύναμη** $\boldsymbol{\alpha^2}$ λέγεται και **τετράγωνο του α** ή **α στο τετράγωνο**.
- Η **δύναμη** $\boldsymbol{\alpha^3}$ λέγεται **κύβος του α** ή **α στον κύβο**.

Ιδιότητες δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό

1. $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$ **2.** $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ **3.** $(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$

4. $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$ **5.** $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \alpha^{\nu}/\beta^{\nu}$

Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

- Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός με εκθέτη το μηδέν είναι ίση με μονάδα, $\alpha^0 = 1$
- Η δύναμη κάθε αριθμού**,** διάφορου του μηδενός, με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη**.** Επειδή τα και $\frac{\beta}{\alpha}$ είναι αντίστροφοι αριθμοί, όπως και τα **α** και $\frac{1}{\alpha}$ ισχύει: $\alpha^{-\nu}=(1/\alpha^{\nu})=(1/\alpha)^{\nu}$ και $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

Εξισώσεις

Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις

Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς, λέγεται, όπως γνωρίζουμε, **αριθμητική παράσταση**.
Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**. Οι προσθετέοι λέγονται **όροι** αυτής.

Εξίσωση α΄ βαθμού λέμε κάθε εξίσωση που έχει τη μορφή αχ+β=0.

Αν α≠0 έχει τη μοναδική λύση χ= **-** $\frac{\beta}{\alpha}$

αν **α=0** και **β≠0** είναι **αδύνατη** και

αν **α=0** και **β=0** είναι **ταυτότητα.**

Για να λύσουμε μία εξίσωση, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών. (Αν υπάρχουν κλάσματα)

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου.

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με τη βοήθεια εξίσωσης, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Διαβάζουμε καλά το πρόβλημα και διακρίνουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα.

Χρησιμοποιούμε ένα γράμμα (συνήθως το x) για να εκφράσουμε τον άγνωστο αριθμό που πρέπει να προσδιορίσουμε.

Εκφράζουμε όλα τα άλλα μεγέθη του προβλήματος με τη βοήθεια του x.

Γράφουμε την εξίσωση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της εκφώνησης.

Λύνουμε την εξίσωση.

Ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Πραγματικοί αριθμοι

Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος,
όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α
συμβολίζεται με $\sqrt{α}$. Επειδή, $0^2=0$, ορίζουμε ως $\sqrt{0}=0$

Δεν ορίζουμε ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός.

- Αν $\sqrt{\alpha} = x$, όπου $\alpha \geq 0$, τότε $x \geq 0$ και $x^2 = \alpha$.
- Αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.

Άρρητοι αριθμοί- Πραγματικοί αριθμοί

Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός, δηλαδή δεν μπορεί να γραφεί ως κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ με μ,ν ακέραιους και $\nu \neq 0$, ονομάζεται **άρρητος αριθμός**.

Οι **πραγματικοί αριθμοί** αποτελούνται όχι μόνο από τους **ρητούς** αλλά και όλους τους **άρρητους**. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για το λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία ή άξονα των πραγματικών αριθμών**.

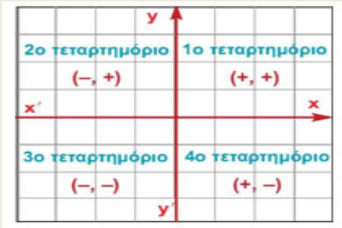
Η έννοια της συνάρτησης

Μία σχέση **ψ=αχ,** όπου **κάθε τιμή της μεταβλητής x** αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο τιμή της μεταβλητής y,** στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση**. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **«η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x»**.

Σύστημα συντεταγμένων –Γραφική παράσταση συνάρτησης

Δύο κάθετοι άξονες χχ΄ και ψψ΄ με κοινή αρχή το 0 αποτελούν ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Αν οι μονάδες μέτρησης στους δύο άξονες είναι ίδιες τότε λέμε ότι αυτοί αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Ο άξονας χχ΄ ονομάζεται άξονας των τετμημένων και ο ψψ΄ άξονας των τεταγμένων.

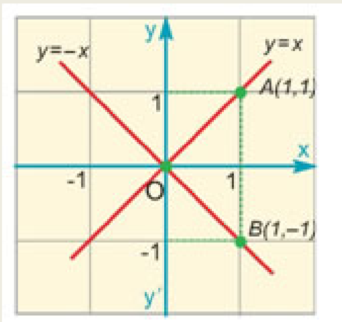
Κάθε σημείο Μ του επιπέδου που αντιστοιχεί στο μοναδικό ζεύγος των πραγματικών αριθμών (α,β) συμβολίζεται Μ(α΄β). Το α λέγεται **τετμημένη** του σημείου Μ το β, **τεταγμένη** του σημείου Μ και τα δύο συντεταγμένες του σημείου Μ . Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος συντεταγμένων και, αντιστρόφως, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.



Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x. Ονομάζουμε **γραφική παράσταση της συνάρτησης** αυτής το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y).

Ποσά ανάλογα – Η συνάρτηση y = αx

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων.

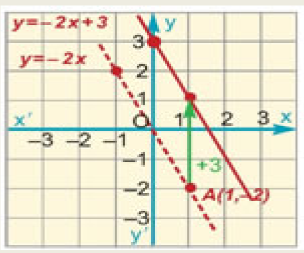


Παρατηρούμε ότι στην ευθεία y = αx ο λόγος $\frac{\psi}{\chi}$ είναι πάντα σταθερός και ίσος με α. Ο λόγος αυτός λέγεται **κλίση της ευθείας y = αx**.

Τα ποσά χ και ψ είναι ανάλογα ποσά ανάλογα γιατί, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

Η ευθεία με εξίσωση y = αx + β

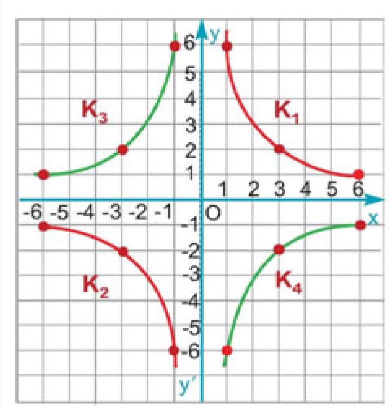
Η γραφική παράσταση της y = αx + β, β≠0 είναι μια ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση y = αx, που διέρχεται από το σημείο (0, β) του άξονα y'y.



Ποσά αντιστρόφως ανάλογα - Η υπερβολή

Όταν δύο ποσά **x** και **y** είναι **αντιστρόφως ανάλογα**, τότε το **γινόμενο** των αντιστοίχων τιμών τους είναι **σταθερό**. Αν **α ≠ 0** είναι το σταθερό γινόμενο των x και y, τότε το **y** εκφράζεται ως συνάρτηση του **x** από τον τύπο **y**=$\frac{\alpha}{\chi}$
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης **y=α/χ**, όπου α≠0, λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται

- Στο **1ο** και στο **3ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν **α > 0**.
- Στο **2ο** και στο **4ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν **α < 0**.



Και στις δύο περιπτώσεις η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει:

- Κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- Άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες **ψ=χ** και **ψ=-χ**

Βασικές έννοιες της Στατιστικής

Ένα σύνολο του οποίου μελετάμε τα στοιχεία ως προς τουλάχιστον ένα χαρακτηριστικό λέγεται **πληθυσμός**. Το χαρακτηριστικό στοιχείο του πληθυσμού που μελετάμε, λέγεται μεταβλητή. Επειδή η έρευνα ολόκληρου του πληθυσμού δεν είναι πάντοτε εφικτή, καταφεύγουμε στη **δειγματοληψία**. Επιλέγουμε, δηλαδή, ένα **αντικειμενικό** δείγμα από το οποίο μπορούμε να βγάλουμε αξιόπιστα συμπεράσματα για όλο τον πληθυσμό.

Η παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων γίνεται με **πίνακες** και **διαγράμματα**. Υπάρχουν διαφόρων μορφών διαγράμματα, όπως **το εικονόγραμμα, το ραβδόγραμμα, το κυκλικό διάγραμμα και το χρονόγραμμα.**

Συχνότητα μιας τιμής λέγεται ο αριθμός που εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται στο δείγμα η τιμή αυτή.

Η **σχετική συχνότητα** μιας τιμής είναι **το πηλίκο** της συχνότητας της τιμής αυτής με το πλήθος όλων των παρατηρήσεων, και εκφράζεται ως ποσοστό επί τοις εκατό.

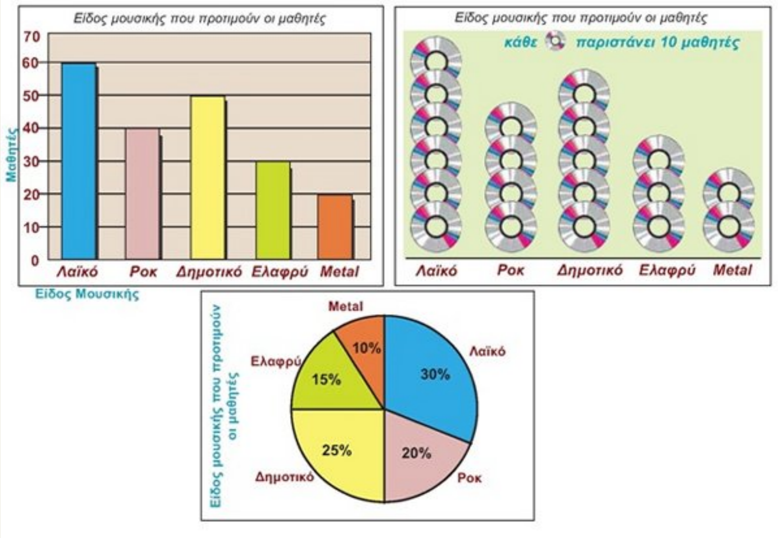
Όταν κάνουμε **ομαδοποίηση** των παρατηρήσεων, χωρίζουμε τις παρατηρήσεις σε **ομάδες ή κλάσεις** και παρουσιάζουμε την κατανομή με **ιστόγραμμα** συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων.

Για να βρούμε τη μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων, **προσθέτουμε** όλες τις παρατηρήσεις **και διαιρούμε** με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών.

Για να βρούμε τη **διάμεσο** μιας κατανομής, γράφουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά και βρίσκουμε α) την μεσαία παρατήρηση όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό και β) όταν είναι άρτιο, παίρνουμε ως διάμεσο το μέσο όρο των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Στη συνέχεια βλέπουμε τρία είδη διαγραμμάτων:

Ραβδόγραμμα, εικονόγραμμα, και κυκλικό διάγραμμα



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ-ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

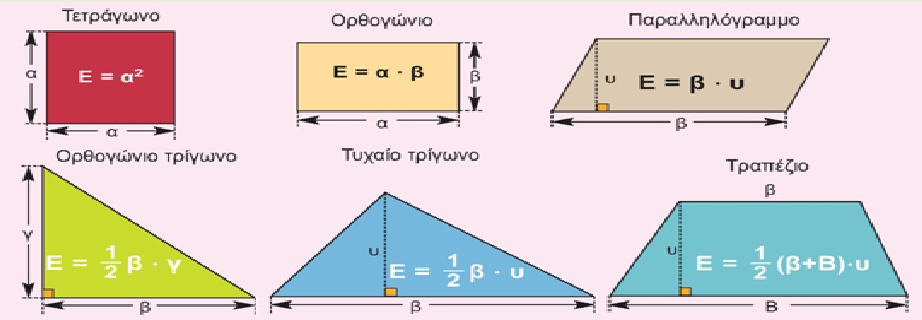
ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ-ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Το **εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας** είναι ο θετικός αριθμός που εκφράζει το πλήθος των μονάδων μέτρησης, το οποίο χρειάζεται να πάρουμε, ώστε να καλύψουμε τη δοσμένη επιφάνεια.

Μονάδες μέτρησης εμβαδών

1 m^2 =	100 dm^2 =	10.000 cm^2 =	1.000.000 mm^2
	1 dm^2 =	100 cm^2 =	10.000 mm^2
		1 cm^2 =	100 mm^2

Εμβαδά των βασικών επιπέδων σχημάτων.



Πυθαγόρειο θεώρημα: $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Αντίστροφο Πυθαγόρειου θεωρήματος

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

<u>Τριγωνομετρία</u>

Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

Αν ω είναι μια οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, τότε:

$$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$συνω = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$εφω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

Για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω ισχύουν:

- $0 < ημω < 1$
- $0 < συνω < 1$
- $εφω = \frac{ημω}{συνω}$

Όταν μια οξεία γωνία μεγαλώνει, τότε αυξάνεται το ημίτονό της και η εφαπτομένη της, αλλά ελαττώνεται το συνημίτονό της.

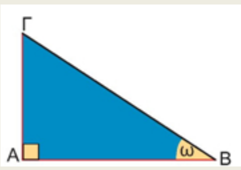
Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα ημίτονα ή ίσα συνημίτονα ή ίσες εφαπτομένες, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί 30° - 45° - 60°

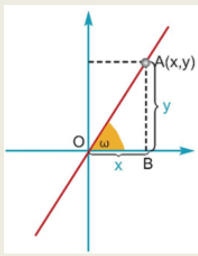
	30°	45°	60°
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Εφαπτομένη οξείας γωνίας

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **εφαπτομένη της γωνίας ω**.



$$εφω = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{x} = α$$



Η κλίση α της ευθείας με εξίσωση y = αx είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας ω, που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x'x.

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

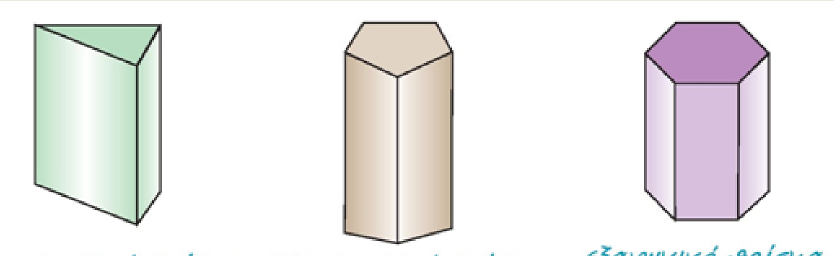
- **Εγγεγραμμένες γωνίες** ενός κύκλου που βαίνουν **στο ίδιο τόξο** ή σε **ίσα τόξα** ειναι μεταξύ τους **ίσες**.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.
- Κανονικό πολύγωνο: → **ίσες πλευρές**, → **ίσες γωνίες**
- Κεντρική γωνία κανονικού ν-γώνου: $\omega = \dfrac{360°}{\nu}$
- Γωνία κανονικού ν-γώνου: $\varphi = 180° - \omega$
- Μήκος κύκλου: $\dfrac{L}{\delta} = \pi$ ή $L = 2\pi\rho$
- Μήκος τόξου: $\ell = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360}$ ή $\ell = \alpha\rho$
- Εμβαδό κυκλικού δίσκου: $E = \pi\rho^2$
- Εμβαδό κυκλικού τομέα: $E = \pi\rho^2 \cdot \dfrac{\mu}{360}$ ή $E = \dfrac{\alpha\rho^2}{2}$

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

Εμβαδόν πρίσματος

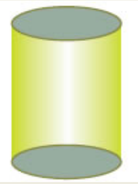
Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: E_Π = (περίμετρος βάσης) · (ύψος)

Ολικό εμβαδόν: $E_{o\lambda} = E_\Pi + 2E_\beta$



τριγωνικό πρίσμα πενταγωνικό πρίσμα εξαγωνικό πρίσμα

Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου



Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: $E_\Pi = 2\pi\rho \cdot \upsilon$

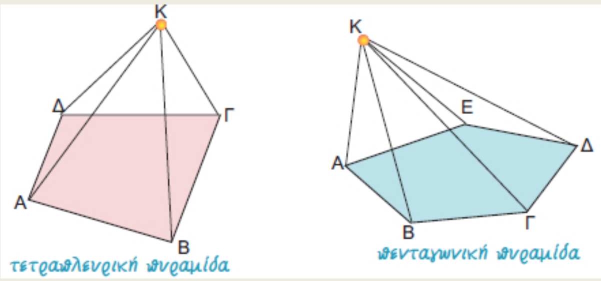
Ολικό εμβαδόν: $E_{o\lambda} = E_\Pi + 2E_\beta$

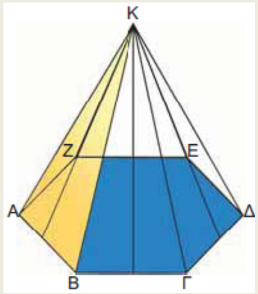
Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

Όγκος πρίσματος: $V = (\text{εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$

Όγκος κυλίνδρου: $V = \pi\rho^2 \upsilon$

Πυραμίδα





Μια πυραμίδα λέγεται **κανονική**, αν η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της στη βάση είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου.

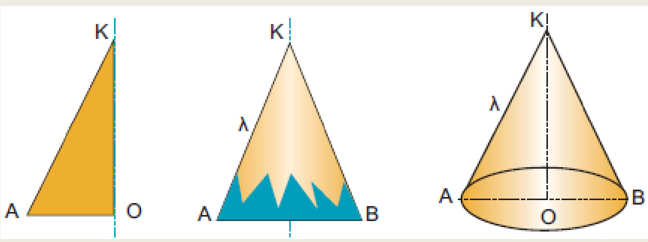
Εμβαδόν κανονικής πυραμίδας: $E_\Pi = \frac{1}{2}(\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα})$

$E_{ολ} = E_\pi + E_\beta$

Όγκος πυραμίδας: $V = \frac{1}{3}(\text{εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$

Κώνος

Κώνος λέγεται το στερεό σχήμα που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μία κάθετη πλευρά του

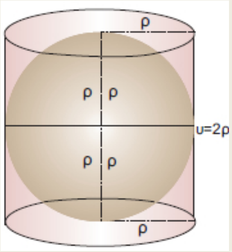


Εμβαδόν επιφάνειας κώνου: $E_\Pi = \pi\rho\lambda$

$E_{ολ} = E_\Pi + E_\beta = \pi\rho\lambda + \pi\rho^2$

Όγκος κώνου: $V = \frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon$

Σφαίρα



Σφαίρα είναι το στερεό σχήμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε έναν κυκλικό δίσκο γύρω από μια διάμετρό του.

Εμβαδόν σφαίρας: $E_{\sigma\varphi} = 4\pi\rho^2$

Όγκος σφαίρας: $V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi\rho^3$