

B.1.8. Παραπληρωματικές, Συμπληρωματικές, Κατακορυφών Γωνίες

Ασκ 3/Σελ

γωνία $\hat{\omega}$ / Παραπληρωματική $\hat{\phi}$
 α) αμβλεία $90^\circ < \hat{\omega} < 180^\circ$ οξεία $0^\circ < \hat{\phi} < 90^\circ$
 β) ορθή $= 90^\circ$ ορθή $= 90^\circ$
 γ) οξεία $\rightarrow 90^\circ < \hat{\omega} < 180^\circ$ αμβλεία $\rightarrow 90^\circ < \hat{\phi} < 180^\circ$

Άσκηση Έστω $\hat{\omega} = 35^\circ$

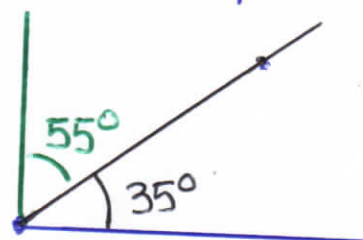
Παραπληρωματική $\hat{\phi} = 180 - 35^\circ$
 $\hat{\phi} = 145^\circ$



Άσκ. 4.

Συμπληρωματικές: Δύο γωνίες με άθροισμα 90° .
 Οπότε $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

Εφεξής και Παραπληρωματικές.

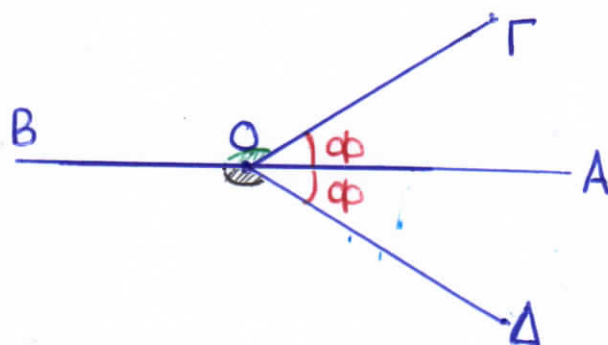


Άσκ. 5

$\hat{\Gamma}\hat{O}B = 180^\circ - \hat{\phi}$ (παραπληρωματικές)

$\hat{\Delta}\hat{O}B = 180^\circ - \hat{\phi}$ (//

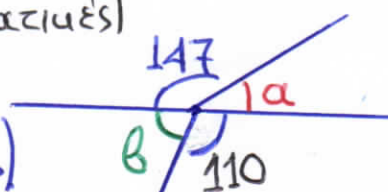
Άρα $\hat{\Delta}\hat{O}B = \hat{\Gamma}\hat{O}B$



Άσκ 7

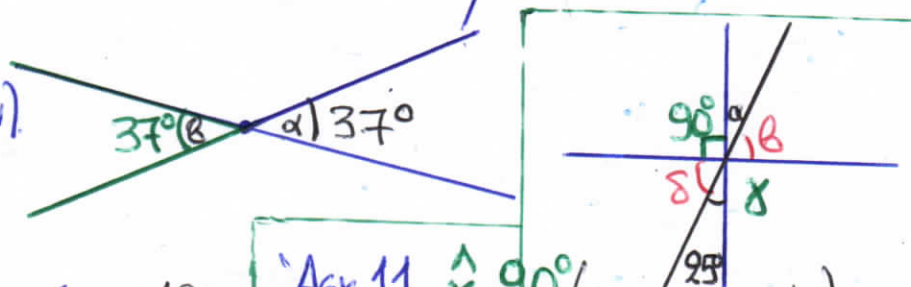
$\hat{a} = 180^\circ - 147^\circ = 33^\circ$ (παραπληρωματικές)

$\hat{b} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ (παραπληρωματικές)



Άσκ. 8.

$\hat{a} = \hat{b} = 37^\circ$ (κατακορυφών)



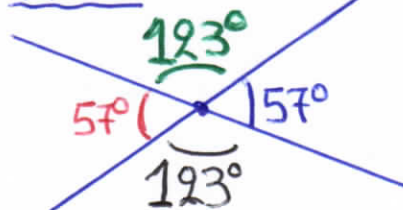
Άσκ. 9.

$\hat{b} = \hat{\delta}, \hat{\gamma} = \hat{\alpha}$

$\hat{\lambda} = \hat{\nu}, \hat{\kappa} = \hat{\mu}$

(κατακορυφών).

Άσκ. 10.



180
- 57
123

Άσκ. 11

$\hat{\gamma} = 90^\circ$ (κατακορυφών).

$\hat{a} = 95^\circ$ (κατακορυφών)

$\hat{b} = 90 - \hat{a} = 90^\circ - 95^\circ = 65^\circ$ (συμπληρωματικές)

$\hat{\delta} = \hat{b} = 65^\circ$ (κατακορυφών).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Β.1.9. ΘΕΩΡΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΕΣΤΙ ΕΠΙΠΕΔΟ.

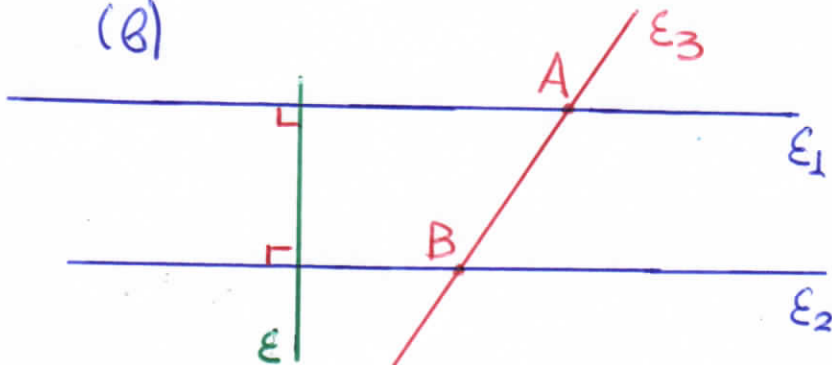
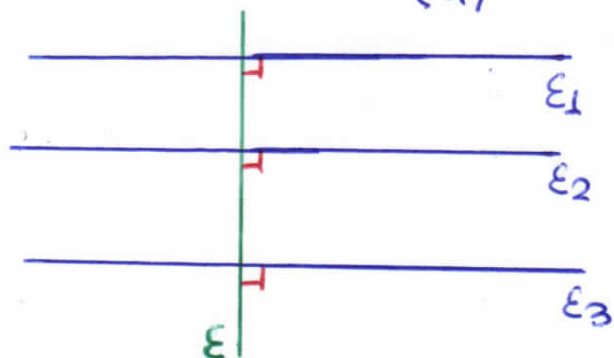
Αγκ.1/Σελ 183 (α) Παράλληλες (β) Μία και μοναδική κάθετη ευθεία εσθν (ε).
(γ) Παράλληλες

Αγκ.2/Σελ 183 (α) ἀπειρες (β) τεμνόμενες
(γ) παράλληλες (δ) παράλληλες (ε) τεμνόμενες, τομή

Αγκ.3/Σελ 183

(α)

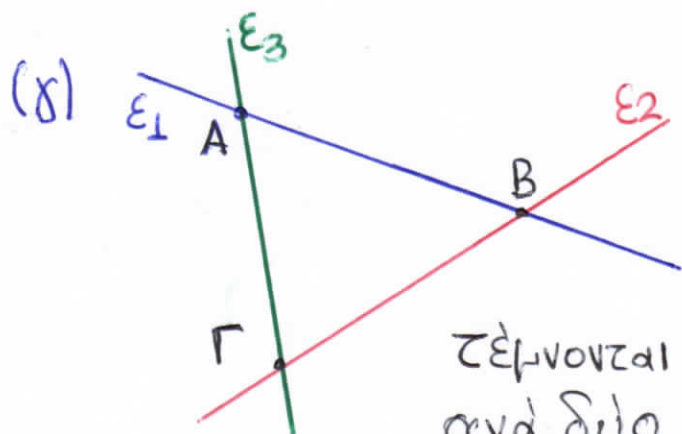
(β)



$\epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \parallel \epsilon_3$ (ως κάθετες εσθν ε).

$\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ (ως κάθετες εσθν ε)

και η ε3 τις τεμνει (Α, Β σημεία τομής)

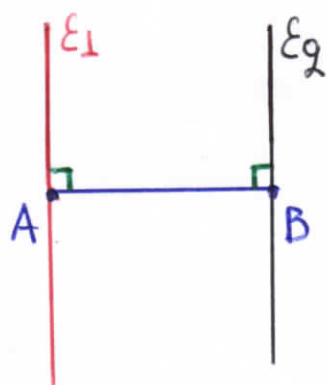


τεμνονται (Α, Β, Γ τα
συνδ δύο. σημεία τομής)



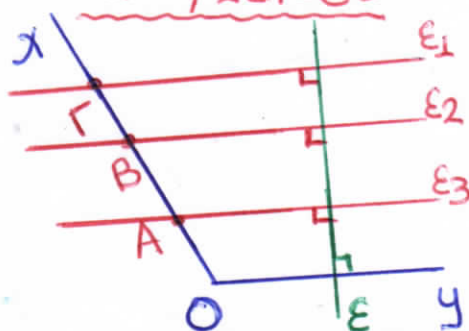
έχουν κοινό σημείο
(Α: το σημείο τομής)

Αγκ.4/Σελ 183



Τότε $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$
(ως κάθετες στο ΑΒ)

Αγκ.5/Σελ 183



φέρνω ευθεία $\epsilon \perp \gamma$

φέρνω $\epsilon_1 \perp \epsilon$ που να διέρχεται αν' το Α. Τότε

$\epsilon_2 \perp \epsilon$ $\parallel$ ϵ_1 $\parallel$ ϵ_3
 $\epsilon_2 \perp \epsilon$ $\parallel$ ϵ_1 $\parallel$ ϵ_3
B. $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \parallel \epsilon_3$
ως κάθετες
εσθν ίδια ευθ. ε.

Αγκ.6/Σελ 183

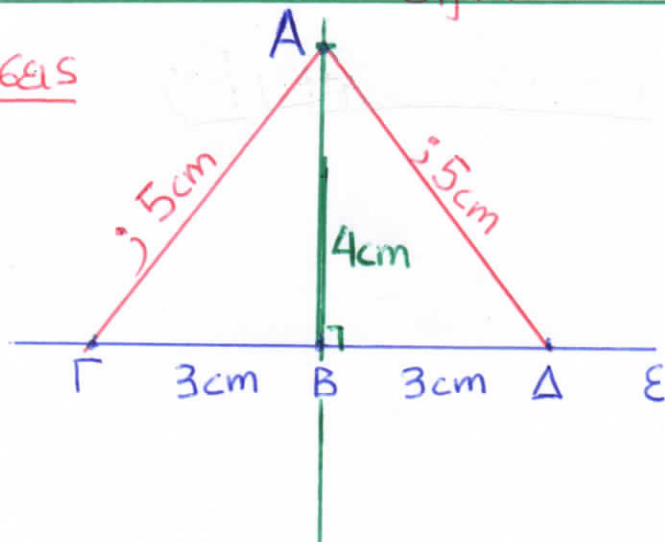


$\epsilon_1 \equiv \epsilon_2$

B.1.10 Απόσταση σημείου από ευθεία Σελ. 186

Ασκήσεις

2)

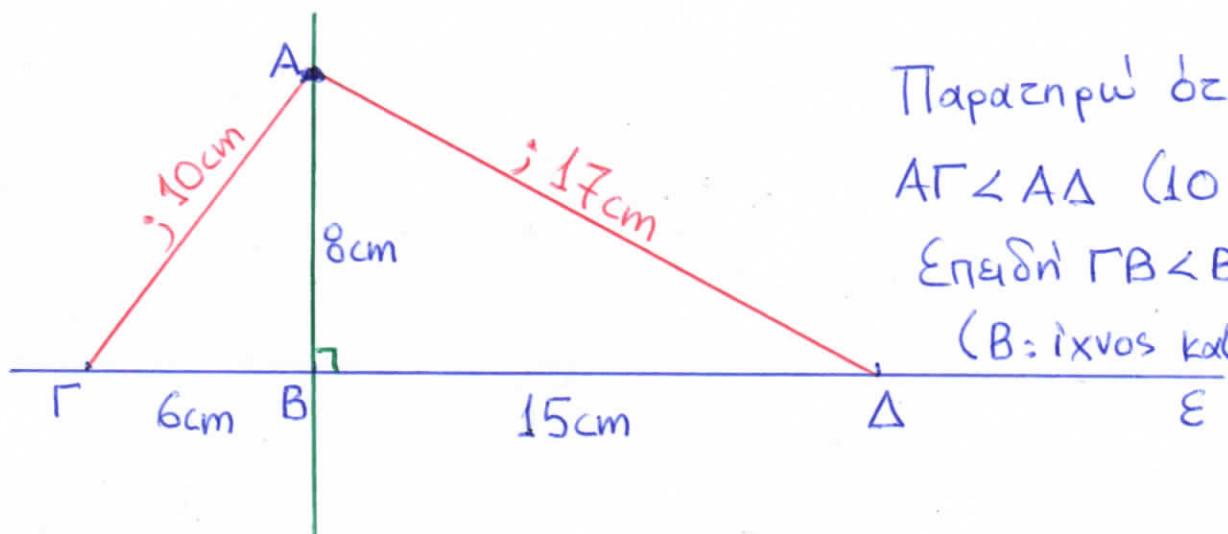


1) α) απόσταση

β) απόσταση.

Παρατηρώ ότι $AG = AD = 5\text{cm}$
Επειδή $GB = BD = 3\text{cm}$.
(B: ίχνος καθέτου).

3)



Παρατηρώ ότι:

$AG < AD$ ($10 < 17$)

Επειδή $GB < BD$

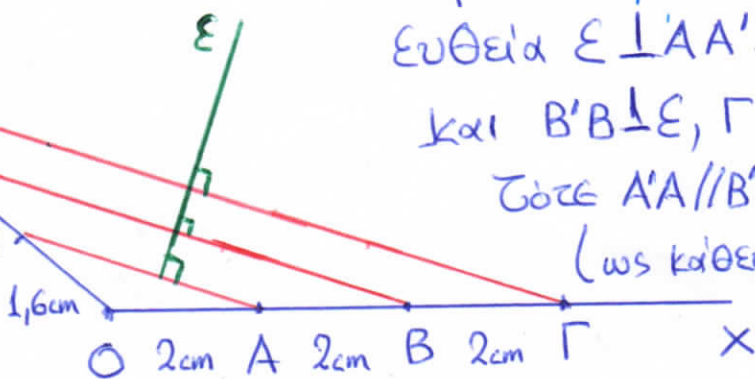
(B: ίχνος καθέτου).

4)

γ

Συμπέρασμα.

$A'B' = B'\Gamma' = 1,6\text{cm}$
(Είναι ίσα με το OA').

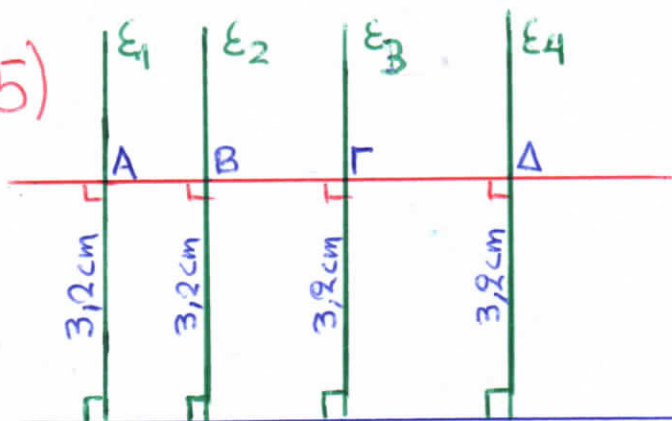


φέρνω βοηθητική
ευθεία $\epsilon \perp AA'$.

και $B'B \perp \epsilon$, $\Gamma'\Gamma \perp \epsilon$.

Τότε $AA' \parallel B'B \parallel \Gamma'\Gamma$
(ως κάθετες στην ϵ)

5)



από τα σημεία A, B, Γ, Δ αντιστοίχα ϵ $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ που να διέρχονται
όλες συμπιπτουν. Δύο παράλληλες υπάρχουν.

Σχεδιάζω 4 βοηθητικές ευθείες

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ κάθετες στην ϵ .

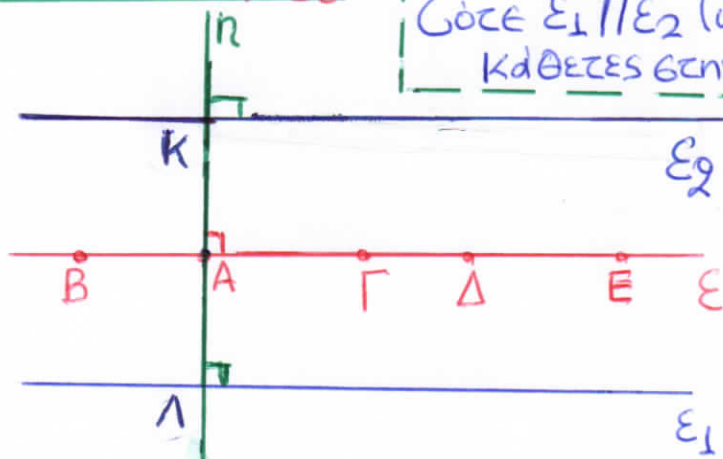
Παίρνω 4 σημεία A, B, Γ, Δ το
κάθενα να απέχει 3,2cm από την ϵ .

φέρνω ευθείες κάθετες στις

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ που να διέρχονται
όλες συμπιπτουν. Δύο παράλληλες υπάρχουν.

Απόσταση σημείου από ευθεία Β.1.10

Άσκηση 6/ΣΕ 186



Φέρνω ευθεία $\varepsilon_2 \perp n$ που διέρχεται αὐτὸ Κ.
Τότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ (ὡς
κάθετες ἐπὶ τῇ n)

Φέρνω ευθεία $n \perp \varepsilon_1$.

Παίρνω πάνω ἐπὶ n

εὐθ. τμήτ-α $\text{ΚΛ} = 35\text{mm} = 3.5\text{cm}$

Βρίσκω τὸ μέσο Α τοῦ ΚΛ.

$$\text{ΚΑ} = \text{ΑΛ} = \frac{3.5}{2}\text{cm} = 1.75\text{cm}$$

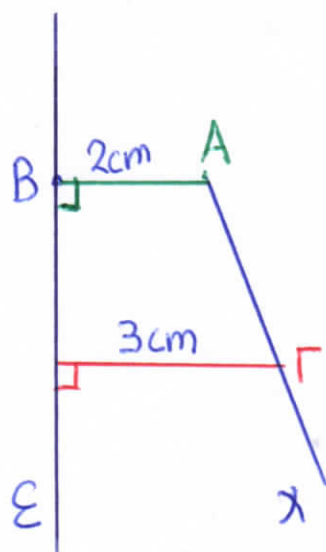
Φέρνω ευθεία $\varepsilon \perp n$ που νὰ διέρχεται αὐτὸ τὸ σημεῖο Α.

Πάνω ἐπὶ ε παίρνω τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ, Ε.

Ὅλα τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε ἰσχυρῶς αὐτὶς ευθεῖες ε_1 καὶ ε_2 .

Ἡ ε ονομάζεται μέσοπαράλληλη τῶν ευθειῶν ε_1 καὶ ε_2 .

Άσκηση 7/ΣΕ 186



Τοποθετῶ τὸ γνῶμονα μὲ τὴν
κάθετη πλευρὰ τοῦ νὰ ἐφαρμόζει
ἀντίστοιχα ἐπὶ τὴν ευθεία ε .

Ἡ ἄλλη κάθετη πλευρὰ τοῦ γνῶμονα
τέμνει τὴν ημιευθεία Αχ

Μετακινῶ τὸ γνῶμονα κατὰ τὴν Αχ
ἐστὼς νὰ θρῶ σημεῖο Γ τῆς Αχ

που νὰ ἀπέχει αὐτὴν ευθεία ε
ἀπόστασιν ἴση μὲ 3cm.

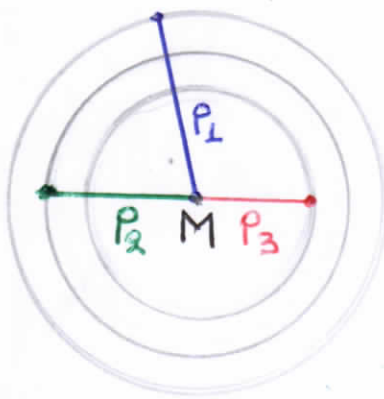
B.1.11 Κύκλος και εσοχία του κύκλου

Α6κ.1/Σελ 189

$$P_1 = 2,4 \text{ cm}$$

$$P_2 = 2 \text{ cm}$$

$$P_3 = 15 \text{ mm} \stackrel{10}{=} 1,5 \text{ cm}$$



Και οι τρεις κύκλοι
έχουν το ίδιο
κέντρο Μ,
Οπότε ονομάζονται
ΟΜΟΚΕΝΤΡΟΙ.

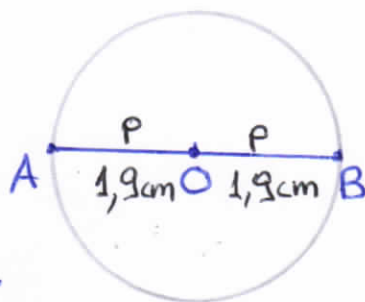
Α6κ.2/Σελ 189

$AB = 3,8$ διάμετρος (cm).

Οπότε ακτίνα $r = \frac{3,8}{2} = 1,9 \text{ cm}$

Βρίσκω το μέσο Ο του ΑΒ.

Κατασκευάζω κύκλο (Ο, ΑΟ) Ο: κέντρο κύκλου, r: ακτίνα



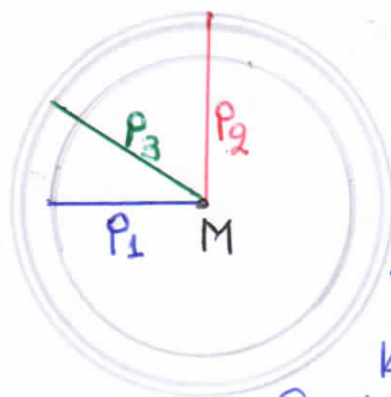
Ο κύκλος
διέρχεται και από
το σημείο Β.

Α6κ.3/Σελ 189

$$d_1 = 4 \text{ cm} \Rightarrow r_1 = 2 \text{ cm}$$

$$d_2 = 5 \text{ cm} \Rightarrow r_2 = 2,5 \text{ cm}$$

$$d_3 = 48 \text{ mm} \Rightarrow r_3 = 2,4 \text{ cm}$$

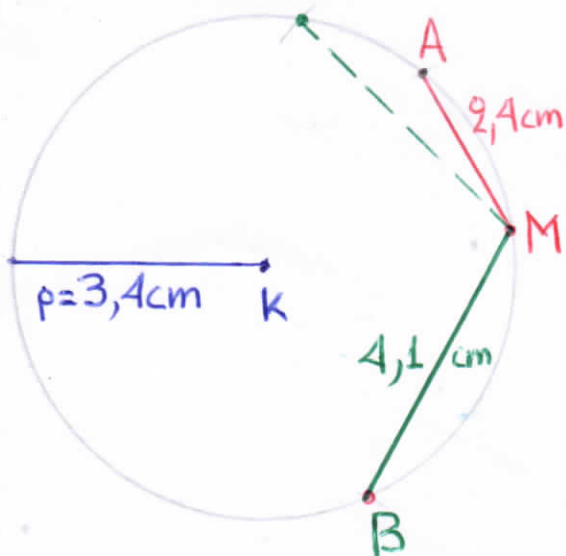


ΟΜΟΚΕΝΤΡΟΙ

ΚΥΚΛΟΙ:

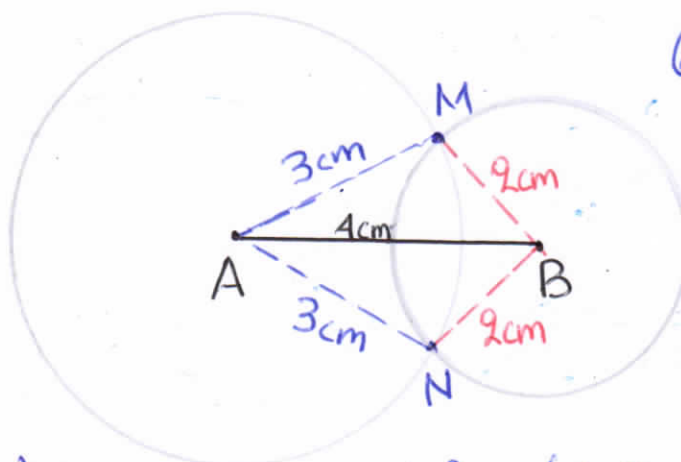
Έχουν το ίδιο
κέντρο και
διαφορετικές ακτίνες.

Α6κ.4/Σελ 189



$$MA = 2,4 \text{ cm}, MB = 4,1 \text{ cm}$$

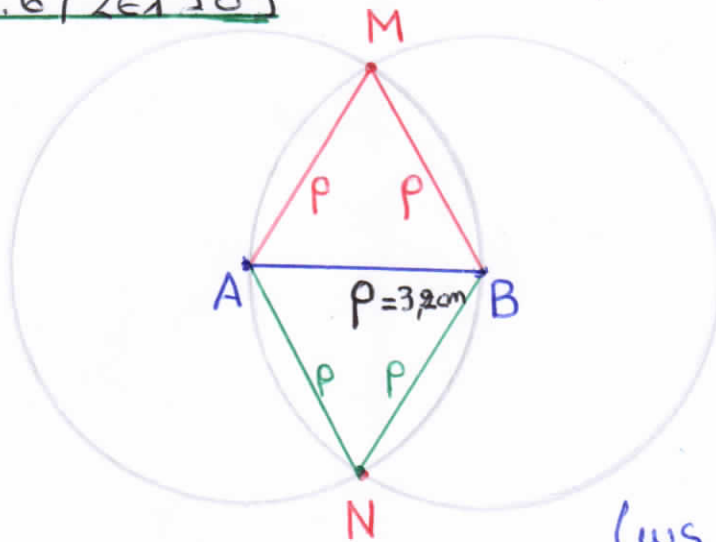
Α6κ.5/Σελ 189



β) Τα ση-
μεία το-
μής των
δύο κύ-
κλων
Μ και Ν.

α) Τα σημεία του κύκλου (Α, 3cm) απέχουν
3cm από το Α και τα σημεία του κύκλου
(Β, 2cm) απέχουν 2cm από το Β.

B.1.11 Άσκ. 6 / Σελ 189



Οι δύο τόχοι είναι
ίσοι αφού έχουν
ίσες ακτίνες ($\rho = AB$)

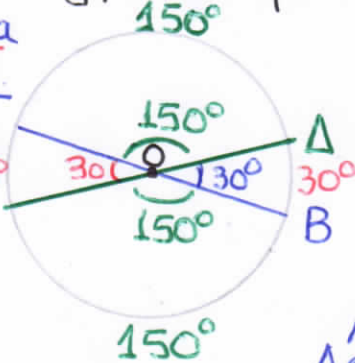
Οπότε και τα ευθ.
τμήματα $MA = MB =$
 $= NA = NB = \rho$
(ως ακτίνες των ίσων κύκλων)

B.1.19. Ακτίνας Σελ 192 Επίκεντρο γωνία

Άσκ. 1 α) κύκλος $\rightarrow 360^\circ$ β) ημικύκλιο $\rightarrow 180^\circ$
γ) τεταρτοκύκλιο $\rightarrow 90^\circ$

Παρόμοια
Άσκ. 2

Με Άσκ. Α
Βιβλίου



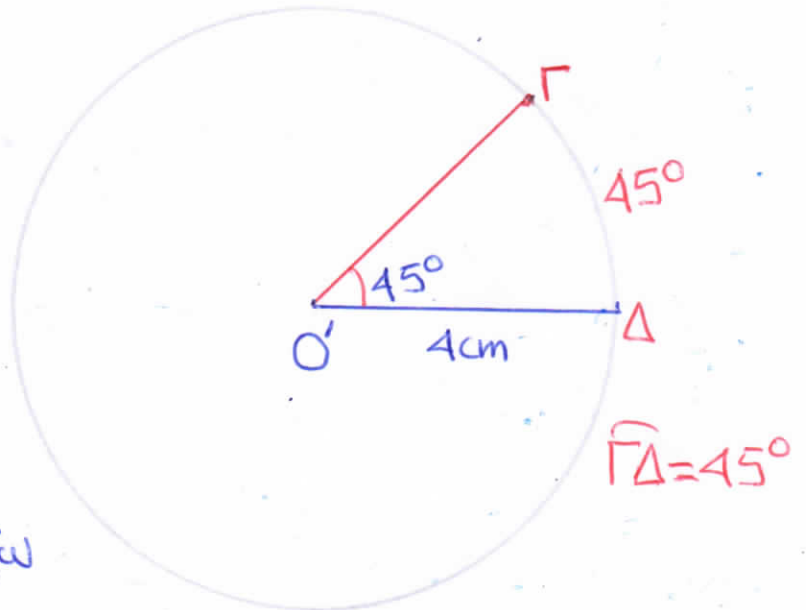
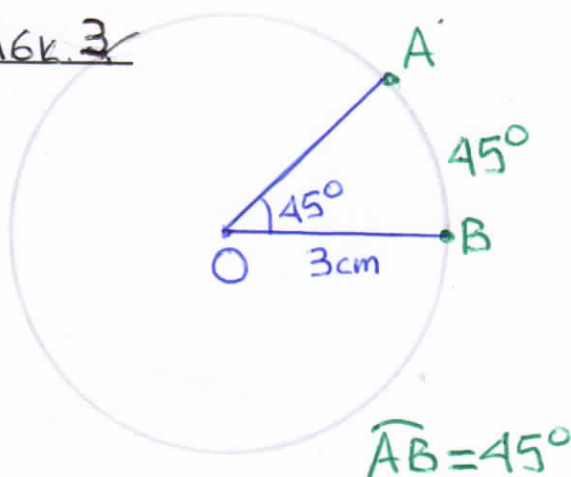
Επίκεντρο γωνία: Έχει την κορυφή
της πάνω στο κέντρο του κύκλου (Ο).

Ισούται: με το αντίστοιχο τόξο της.

$\hat{AOB} = \hat{AOG} = 30^\circ$ (ως κατακορυφήν) $\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AG} = 30^\circ$

$\hat{AOD} = \hat{GOB} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ (παραπληρωματικές) $\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{GB} = 150^\circ$

Άσκ. 3

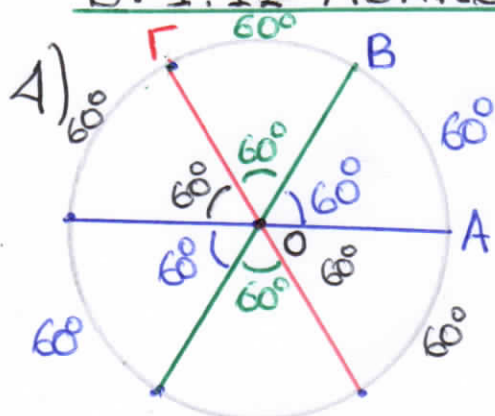


Σε κάθε κύκλο κατασκευάζω

επίκεντρο γωνία 45° . Τότε

και τα αντίστοιχα τους τόξα θα είναι 45° . Τα τόξα αυτά
δεν είναι ίσα γιατί βρίσκονται σε άνισους κύκλους.

B. 1.12 Ασκήσεις 4,5,6 Σελ. 192. Επίκεντρο γωνία



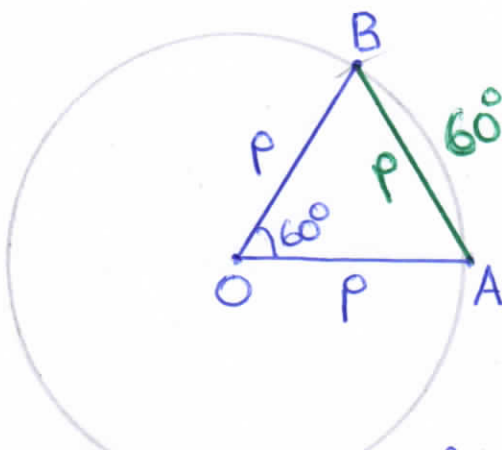
Ο κύκλος είναι 360° . Θέλω να τον χωρίσω σε έξι ίσα τμήα.

Κάθε τμήο θα έχει μέτρο $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

Κατασκευάζω επίκεντρο γωνία 60° .

Έστω $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Πάιρνω 5 ίσα διαδοχικά τμήα με το $\widehat{AB} = 60^\circ$. Φέρνω τις επίκεντρες γωνίες που αντιστοιχούν ε'αυτά τα τμήα σχεδιάζοντας τις τρεις διαμέτρους του κύκλου. Τα 6 τμήα είναι ίσα. Οπότε και οι 6 επίκεντρες γωνίες είναι ίσες. Κάθε μία είναι 60° , ό60 και τα αντίστοιχα τμήα τους.

5)



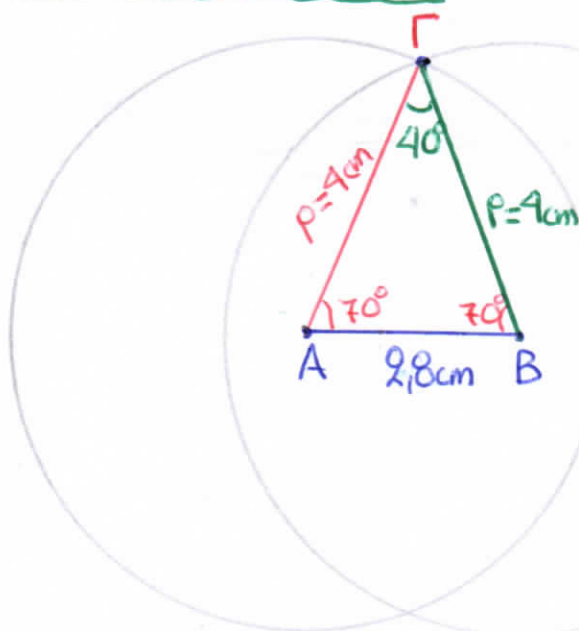
Το τρίγωνο $\triangle AOB$ είναι ισοπλευρό. (Όλες οι πλευρές του ίσες)

Μετρώ με το μοιρογνωμόνιο τη γωνία $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Οπότε και το αντίστοιχο τμήο της $\widehat{AB} = 60^\circ$

Τμήο $\widehat{AB} = \frac{1}{6}$ κύκλου.

Κλάσμα: $\frac{\text{τμήο } \widehat{AB}}{\text{κύκλος}} = \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ Άρα:

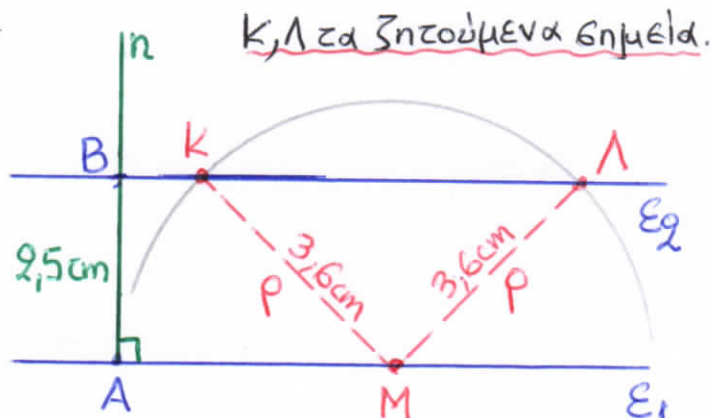
6)



Το τρίγωνο $\triangle ABC$ είναι ισοσκελές (έχει δύο πλευρές ίσες)

Με το μοιρογνωμόνιο βρίσκουμε $\hat{A} \approx 70^\circ$ (περίπου), $\hat{B} \approx 70^\circ$ και $\hat{C} \approx 40^\circ$.

1)



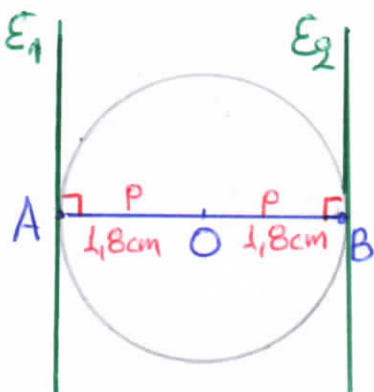
Σχεδιάζω ευθεία E_1 και βοηθητική ευθεία $n \perp E_1$

Πάνω στην n παίρνω ευθ. τμήμα $AB = 2,5 \text{ cm}$

φέρνω ευθεία $E_2 \perp n$, η

οποία διέρχεται από το σημείο B. Τότε $E_1 \parallel E_2$ (ως κάθετες στην ίδια ευθεία n). Έστω τυχαίο σημείο M της ευθείας E_1 . Με κέντρο το σημείο M και ακτίνα $3,6 \text{ cm}$ ($(M, 3,6 \text{ cm})$) σχεδιάζω τόξο το οποίο τέμνει την ευθεία E_2 στα σημεία K, Λ. Τότε $KM = LM = \rho = 3,6 \text{ cm}$

2)

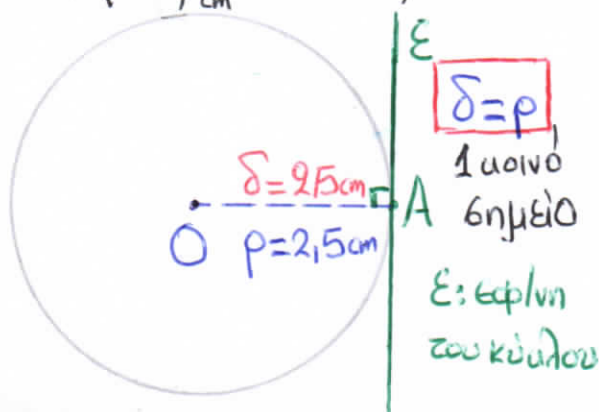


$AB = 3,6 \text{ cm}$. Βρίσκω το μέσο O του AB ($AO = OB = \frac{3,6 \text{ cm}}{2} = 1,8 \text{ cm}$). Με κέντρο το O και $\rho = 1,8 \text{ cm}$

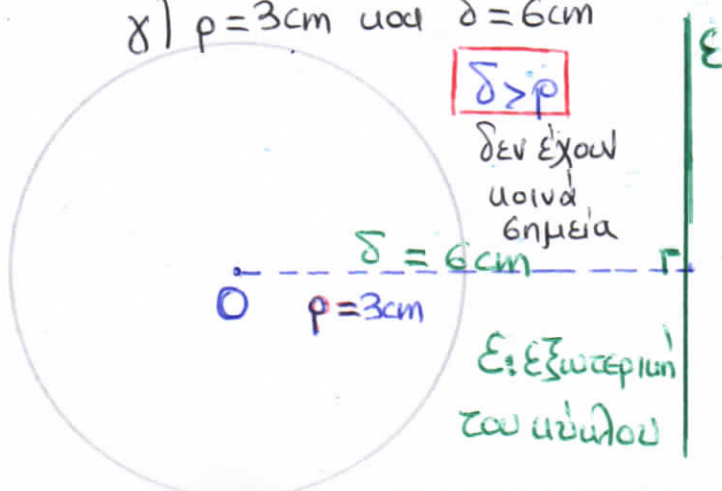
σχεδιάζω κύκλο ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B. Σχεδιάζω ευθεία $E_1 \perp OA$ στο σημείο A και $E_2 \perp OB$ στο

σημείο B. Τότε $\delta(E_1, O) = OA = \rho \Rightarrow E_1$ εφαπτομένη του κύκλου. και $\delta(E_2, O) = OB = \rho \Rightarrow E_2$ εφαπτομένη του κύκλου. Επίσης $E_1 \parallel E_2$ (ως κάθετες στο ίδιο ευθ. τμήμα AB).

3) β) $\rho = 2,5 \text{ cm}$ και $\delta = 2,5 \text{ cm}$



γ) $\rho = 3 \text{ cm}$ και $\delta = 6 \text{ cm}$



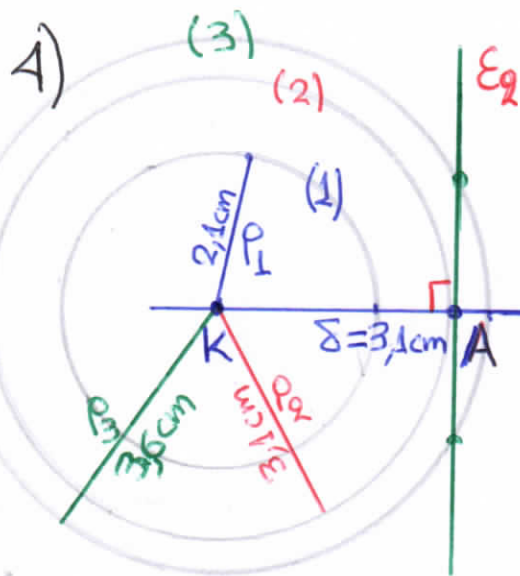
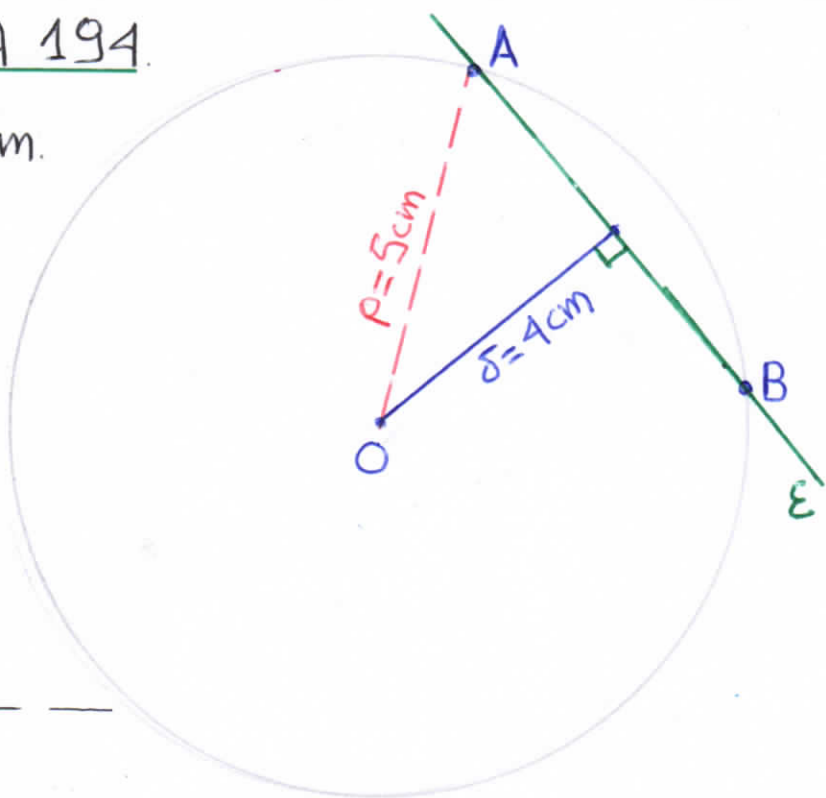
B.113. ΑΓΚΗΣΕΙΣ / ΣΕΛ 194.

3α) $\rho = 5\text{cm}$ και $\delta = 4\text{cm}$.

$\delta < \rho$ Ευθεία και

κύκλος έχουν 2 κοινά
σημεία A, B.

ε : τμήματα του
κύκλου.

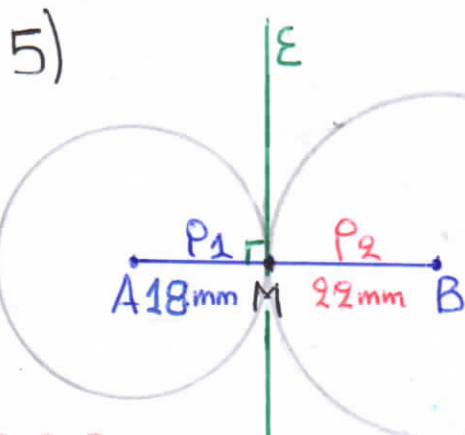


Σχεδιάζω τους κύκλους $(K, \rho_1), (K, \rho_2)$
και (K, ρ_3) . $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

ε_1 Επειδή $d(K, A) > \rho_1 \Rightarrow \varepsilon_2$ Εξωτερική
 $\delta = 3.1\text{cm}$ 2.1cm του κύκλου (1)

$d(K, A) = \rho_2 \Rightarrow \varepsilon_2$ Εφαπτομένη του
 3.1cm 3.1cm κύκλου (2).

$d(K, A) < \rho_3 \Rightarrow \varepsilon_3$ τμήματα του κύκλου (3)



$\left\{ \begin{array}{l} AB = 40\text{mm} \\ AM = 18\text{mm} \\ BM = 22\text{mm} \end{array} \right\}$ Σχεδιάζω τους κύκλους
 $(A, 18\text{mm}), (B, 22\text{mm})$.

Έχουμε: $d(A, \varepsilon) = \rho_1$ Οπότε

η ε είναι εφαπτομένη του κύκλου
(A, 18mm).

Ομοίως $d(B, \varepsilon) = \rho_2$ Οπότε
η ε είναι εφαπτομένη του κύκλου (B, 22mm).

Συνεπώς η
ευθεία ε είναι
κοινή εφαπτομένη
των δύο κύκλων.