

## Α' Γυμνασίου/ Άλγεβρα/ Φυσικοί Αριθμοί

### Λυμένες Ασκήσεις

1. Να γράψετε τους άρτιους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από το 10 και μικρότεροι από το 22.

**Απάντηση**

12,14,16,18,20

2. Να γράψετε τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από το 101 και μικρότεροι από το 122.

**Απάντηση**

103,105,107,109,111,113,115,117,119,121

3. Ποιοι είναι οι πέντε προηγούμενοι αριθμοί του 183 και ποιοι οι τρεις επόμενοι;

**Απάντηση**

Οι πέντε προηγούμενοι αριθμοί του 183 είναι οι 178,179,180,181,182, ενώ οι τρεις επόμενοι είναι οι 184, 185 και 186.

4. Στρογγυλοποιήστε στην πλησιέστερη εκατοντάδα τους αριθμούς: 675, 897, 2.567, 27.124, 89.675, 3.227, 46.908

**Απάντηση**

Η στρογγυλοποίηση στην πλησιέστερη εκατοντάδα των παραπάνω αριθμών είναι: 700, 900, 2.600, 27.100, 89.700, 3.200, 46.900

5. Τοποθετήστε το κατάλληλο σύμβολο: <, =, >, στο κενό μεταξύ των αριθμών:

(α) 136...145 (β) 789...789 (γ) 6.789...6.760 (δ) 123.456...123.456.000

**Απάντηση**

(α)  $136 < 145$  (β)  $789 = 789$  (γ)  $6.789 > 6.760$  (δ)  $123.456 < 123.456.000$

6. Τοποθετήστε σε φθίνουσα σειρά τους αριθμούς: 987, 1.234, 1.324, 4.321, 1.111, 789

**Απάντηση**

Θα τοποθετήσω τους αριθμούς από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο:  
 $4.321 > 1.324 > 1.234 > 1.111 > 987 > 789$

## Α' Γυμνασίου/ Άλγεβρα/ Πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών

### Λυμένες Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα - διαφορές:

$$23+34=$$

$$12+15+23=$$

$$67-13-24=$$

$$19+20-3+12=$$

$$120-(23-3)=$$

#### **Απάντηση**

Εκτελούμε τις πράξεις

$$23+34=57$$

$$12+15+23=50$$

$$67-13-24=(67-13)-24=54-24=30$$

$$19+20-3+12=19+(20-3)+12=19+17+12=48$$

$$120-(23-3)=120-20=100$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:

$$4 \cdot 18 =$$

$$6 \cdot 11 =$$

$$24 \cdot 13 =$$

$$4 \cdot 120 =$$

$$4 \cdot 99 =$$

$$5 \cdot 111 =$$

$$45 \cdot 98 =$$

#### **Απάντηση**

Εκτελούμε τις πράξεις χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα

$$4 \cdot 18 = 4 \cdot (10 + 8) = 4 \cdot 10 + 4 \cdot 8 = 40 + 32 = 72$$

$$4 \cdot 18 = 4 \cdot (20 - 2) = 4 \cdot 20 - 4 \cdot 2 = 80 - 8 = 72$$

$$6 \cdot 11 = 6 \cdot (10 + 1) = 6 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 60 + 6 = 66$$

$$24 \cdot 13 = 24 \cdot (10 + 3) = 24 \cdot 10 + 24 \cdot 3 = 240 + 72 = 312$$

$$4 \cdot 120 = 4 \cdot (100 + 20) = 4 \cdot 100 + 4 \cdot 20 = 400 + 80 = \mathbf{480}$$

$$4 \cdot 99 = 4 \cdot (100 - 1) = 4 \cdot 100 - 4 \cdot 1 = 400 - 4 = \mathbf{396}$$

$$5 \cdot 111 = 5 \cdot (100 + 10 + 1) = 5 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 500 + 50 + 5 \\ = \mathbf{555}$$

$$45 \cdot 98 = 45 \cdot (100 - 2) = 45 \cdot 100 - 45 \cdot 2 = 4500 - 90 = \mathbf{4.410}$$

3. Ο Δημήτρης είχε μαζί του 210€ και αγόρασε ένα ζευγάρι αθλητικά παπούτσια αξίας 95€, 5 ζευγάρια κάλτσες αξίας 12€ κάθε ζευγάρι και ένα καπέλο αξίας 25€. Πόσα χρήματα του περίσσεψαν μετά από αυτές τις αγορές;

#### Απάντηση

Οι αγορές που έκανε ο Δημήτρης μπορούμε να τις υπολογίσουμε ως εξής:

$$95\text{€} + (5 \cdot 12\text{€}) + 25\text{€} = 95\text{€} + 60\text{€} + 25\text{€} = 180\text{€}$$

Επομένως τα χρήματα που του περίσσεψαν θα είναι  $210\text{€} - 180\text{€} = \mathbf{30\text{€}}$

4. Ο Δημήτρης γεννήθηκε το 1990 και είναι 30 χρόνια μικρότερος από την μητέρα του.
- α) Πόσο χρονών είναι ο Δημήτρης;
- β) Ποια χρονολογία γεννήθηκε η μητέρα του;

#### Απάντηση

α) Απο το 1990 μέχρι το 2009 είναι  $2009 - 1990 = 19$  χρόνια, επομένως ο Δημήτρης είναι **19 χρονών**.

β) Εφόσον ο Δημήτρης είναι 30 χρόνια μικρότερος από την μητέρα του και γεννήθηκε το 1990, η μητέρα του θα έχει γεννηθεί το  $1990 - 30 = \mathbf{1960}$ .

## Α' Γυμνασίου/ Άλγεβρα/ Δυνάμεις φυσικών αριθμών

### Λυμένες Ασκήσεις

1. Γράψτε με τη μορφή δυνάμεων τα παρακάτω γινόμενα:

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 =$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 =$$

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$$

$$6 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 9 =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 =$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$$

#### Απάντηση

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^7$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7^4 \cdot 6^4$$

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 9^3 \cdot 6^3 \cdot 7^4$$

$$6 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 9 = 6^3 \cdot 9^3$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1^4 \cdot 6^3$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8$$

2. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις  $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8, 3^9, 3^{10}$

#### Απάντηση

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

$$3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$$

$$3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2.187$$

$$3^8 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 6.561$$

$$3^9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 19.683$$

$$3^{10} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 59.049$$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

$$2^3 + (2^4 + 3^2) - (3 - 2)^7 =$$

$$2^2 \cdot (2^2 + 3^2) - 4^2 =$$

$$2^3 + (3 + 2)^2 =$$

$$10^3 + (10^4 + 10^2) =$$

**Απάντηση**

$$\begin{aligned} 2^3 + (2^4 + 3^2) - (3 - 2)^7 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 + (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) - 1^7 = \\ &= 8 + (16 + 9) - 1 = 8 + 25 - 1 = \mathbf{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot (2^2 + 3^2) - 4^2 &= 2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) - 4 \cdot 4 = 4 \cdot (4 + 9) - 16 = \\ &= 4 \cdot 4 + 4 \cdot 9 - 16 = 16 + 36 - 16 = \mathbf{36} \end{aligned}$$

$$2^3 + (3 + 2)^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 5^2 = 8 + 25 = \mathbf{33}$$

$$\begin{aligned} 10^3 + (10^4 + 10^2) &= 10 \cdot 10 \cdot 10 + (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10) = \\ &= 1.000 + (10.000 + 100) = 1.000 + 10.100 = \mathbf{11.100} \end{aligned}$$

## Α' Γυμνασίου/ Άλγεβρα/ Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

### Λυμένες Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω ισότητες παριστάνουν Ευκλείδειες διαιρέσεις:
- (α)  $158 = 11 \cdot 13 + 15$
  - (β)  $173 = 9 \cdot 17 + 20$
  - (γ)  $80 = 9 \cdot 8 + 8$
  - (δ)  $259 = 15 \cdot 17 + 4$
  - (ε)  $192 = 16 \cdot 12$
  - (στ)  $65 = 7 \cdot 9 + 2$

#### **Απάντηση**

- (α) Το 15 είναι μεγαλύτερο και από το 11 και από το 13, επομένως δεν μπορεί να είναι υπόλοιπο ούτε στη διαίρεση  $158:11$  αλλά ούτε και στην  $158:13$ , άρα δεν είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης.
- (β) Το 20 είναι μεγαλύτερο και από το 9 και από το 17, επομένως δεν μπορεί να είναι υπόλοιπο ούτε στη διαίρεση  $173:9$  αλλά ούτε και στην  $173:17$ , άρα δεν είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης.
- (γ) Αυτή η ισότητα παριστάνει Ευκλείδεια διαίρεση με Διαιρετέο το 80, διαιρέτη το 9, πηλίκο 8 και υπόλοιπο 8.
- (δ) Αυτή η ισότητα παριστάνει δυο Ευκλείδειες διαιρέσεις, η πρώτη με Διαιρετέο το 259, διαιρέτη το 15, πηλίκο 17 και υπόλοιπο 4 και η δεύτερη με Διαιρετέο το 259, διαιρέτη το 17, πηλίκο 15 και υπόλοιπο 4.
- (ε) Αυτή η ισότητα παριστάνει δυο Ευκλείδειες διαιρέσεις, η πρώτη με Διαιρετέο το 192, διαιρέτη το 16, πηλίκο 12 και υπόλοιπο 0 και η δεύτερη με Διαιρετέο το 192, διαιρέτη το 16, πηλίκο 12 και υπόλοιπο 0.
- (στ) Αυτή η ισότητα παριστάνει δυο Ευκλείδειες διαιρέσεις, η πρώτη με Διαιρετέο το 65, διαιρέτη το 7, πηλίκο 9 και υπόλοιπο 2 και η δεύτερη με Διαιρετέο το 65, διαιρέτη το 9, πηλίκο 7 και υπόλοιπο 2.

2. Αν ο  $n$  είναι φυσικός αριθμός, να γράψετε τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης  $n:6$

**Απάντηση**

Ισχύει ο τύπος της Ευκλείδειας διαίρεσης, δηλαδή ( $n=6\pi+u$ ) επομένως το υπόλοιπο  $u$  θα πρέπει να είναι μικρότερο από τον διαιρέτη που είναι το 6. Άρα  $u=0$  ή 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5

3. Να υπολογίσετε ποια μέρα θα έχουμε μετά από 134 ημέρες, αν σήμερα είναι Κυριακή.

**Απάντηση**

Κάθε επτά ημέρες έχουμε την ίδια ημέρα επομένως εάν διαιρέσουμε το 134 με το 7 θα έχουμε πηλίκιο 19 και υπόλοιπο 1. Άρα θα έχουμε μια μέρα μετά από την Κυριακή δηλαδή Δευτέρα.

## Χαρακτήρες διαιρετότητας – ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

**Πολλαπλάσια** ενός φυσικού αριθμού  $a$  είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του  $a$  με όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Πολλαπλάσια του  $a$  είναι:  $0, a, 2a, 3a, \dots$

- Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
- Αν ένας φυσικός αριθμός  $\beta$  διαιρείται από τον φυσικό αριθμό  $a$ , τότε ο  $\beta$  είναι πολλαπλάσιο του  $a$ .
- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλο, τότε θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.
- Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών που δεν είναι μηδέν το ονομάζουμε **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών.
- Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού  $a$  λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.
- Κάθε αριθμός  $a$  έχει διαιρέτες του αριθμούς **1 και  $a$** .
- Ένας αριθμός που έχει διαιρέτες μόνο τον **εαυτό του** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός**, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.
- Δύο φυσικοί αριθμοί  $a$  και  $\beta$  μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** των  $a$  και  $\beta$  και συμβολίζεται **ΜΚΔ( $a, \beta$ )**.
- Δύο αριθμοί  $a$  και  $\beta$  λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι **ΜΚΔ( $a, \beta$ ) = 1**.

### Κριτήρια Διαιρετότητας

**Κριτήρια Διαιρετότητας** με **2, 3, 4, 5, 9, 10** ή **25** λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς αυτούς.

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10** αν το τελευταίο του ψηφίο είναι το **0**.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2**, αν το τελευταίο ψηφίο είναι **0, 2, 4, 6, 8**.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5**, αν το τελευταίο ψηφίο είναι **0 ή 5**.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το **3** ή το **9** αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται συγχρόνως με το **4** ή και το **25**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία του** είναι μηδέν.



## Ασκήσεις

### 1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά

- α) Ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 8 είναι ο αριθμός ..... και το  $EKP(5, 8) = \dots\dots\dots$
- β) Αν το  $EKP(\alpha, \beta) = \beta$ , ο  $\beta$  είναι ..... του  $\alpha$ .
- γ) Πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που ..... και σύνθετοι λέγονται οι αριθμοί που .....
- δ) Δύο αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους όταν .....

Λύση

- α) Ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 8 είναι ο αριθμός **40** και το  $EKP(5, 8) = \mathbf{40}$ .
- β) Αν το  $EKP(\alpha, \beta) = \beta$ , ο  $\beta$  είναι **πολλαπλάσιο** του  $\alpha$ .
- γ) Πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που **διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και το ένα** και σύνθετοι λέγονται οι αριθμοί που **δεν είναι πρώτοι**.
- δ) Δύο αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους όταν **ο ΜΚΔ τους είναι το 1**.

### 2. Να συμπληρώσετε το κενό με το κατάλληλο ψηφίο ώστε, ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το 9:

- α) 6  4                      β) 95  4                      γ) 601

Λύση

- α) Γνωρίζουμε ότι ένας αριθμός διαιρείται με το 9, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9. Επειδή  $6 + 4 = 10$ , και από το 10 έως το 20 ο μόνος αριθμός που διαιρείται με το 9 είναι το  $18 = 10 + 8$ , το ζητούμενο ψηφίο είναι το 8, οπότε ο αριθμός είναι ο **684**.
- β) Είναι  $9 + 5 + 4 = 18$ . Επειδή το ψηφίο που λείπει είναι αριθμός από το 0 έως το 9, το συνολικό άθροισμα των ψηφίων του αριθμού θα είναι από 18 έως και 27. Ένας αριθμός όμως διαιρείται με το 9 όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9, οπότε το ψηφίο που λείπει θα είναι το 0 ή το 9 και ο αριθμός είναι ο **9504** ή ο **9594**.
- γ) Είναι  $6 + 0 + 1 = 7$ . Επειδή το ψηφίο που λείπει είναι αριθμός από το 0 έως το 9, το συνολικό άθροισμα των ψηφίων του αριθμού θα είναι από 7 έως και 16. Από τους αριθμούς αυτούς όμως ο μόνος που διαιρείται με το 9 είναι το 9, άρα το ψηφίο που λείπει είναι το 2 και ο αριθμός είναι ο **6012**.

### 3. Τοποθετήστε ένα «x» στην αντίστοιχη θέση.

|                      |                             |                             |                             |                              |
|----------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| α) $EKP(3, 5)$       | 8 <input type="checkbox"/>  | 9 <input type="checkbox"/>  | 15 <input type="checkbox"/> | 30 <input type="checkbox"/>  |
| β) $EKP(11, 6)$      | 17 <input type="checkbox"/> | 36 <input type="checkbox"/> | 66 <input type="checkbox"/> | 132 <input type="checkbox"/> |
| γ) $EKP(5, 10)$      | 10 <input type="checkbox"/> | 15 <input type="checkbox"/> | 45 <input type="checkbox"/> | 50 <input type="checkbox"/>  |
| δ) $EKP(3, 2, 5)$    | 15 <input type="checkbox"/> | 20 <input type="checkbox"/> | 30 <input type="checkbox"/> | 60 <input type="checkbox"/>  |
| ε) $EKP(3, 6, 9)$    | 9 <input type="checkbox"/>  | 18 <input type="checkbox"/> | 36 <input type="checkbox"/> | 27 <input type="checkbox"/>  |
| στ) $EKP(8, 12, 15)$ | 15 <input type="checkbox"/> | 30 <input type="checkbox"/> | 60 <input type="checkbox"/> | 120 <input type="checkbox"/> |

Λύση

- α) Επειδή οι αριθμοί 3 και 5 είναι πρώτοι μεταξύ τους, είναι:  $EKP(3, 5) = 3 \cdot 5 = 15$ .

- β) Επειδή οι αριθμοί 11 και 6 είναι πρώτοι μεταξύ τους, είναι:  $\text{ΕΚΠ}(11,6)=11 \cdot 6=66$ .
- γ) Είναι  $10=5 \cdot 2$  και  $5=5 \cdot 1$ , οπότε  $\text{ΕΚΠ}(5,10)=5 \cdot 2=10$ .
- δ) Επειδή οι αριθμοί 3, 2 και 5 είναι πρώτοι μεταξύ τους, είναι:  $\text{ΕΚΠ}(3,2,5)=3 \cdot 2 \cdot 5=30$
- ε) Είναι  $3=3 \cdot 1$ ,  $6=3 \cdot 2$  και  $9=3 \cdot 3$  άρα  $\text{ΕΚΠ}(3,6,9)=3 \cdot 2 \cdot 3=18$ .
- στ) Είναι  $8=2^3$ ,  $12=2^2 \cdot 3$  και  $15=3 \cdot 5$ , άρα  $\text{ΕΚΠ}(8,12,15)=2^3 \cdot 3 \cdot 5=120$ .

**4. Η εταιρεία Α βγάζει νέο μοντέλο αυτοκινήτου κάθε 2 χρόνια ενώ η εταιρεία Β κάθε 3 χρόνια και η εταιρεία Γ κάθε 5 χρόνια. Αν το 2001 έβγαλαν και οι τρεις εταιρείες νέα μοντέλα, τότε θα ξαναβγάλουν και οι τρεις μαζί νέο μοντέλο;**

**Λύση**

Επειδή  $\text{ΕΚΠ}(2, 3, 5) = 30$ , θα ξαναβγάλουν και οι τρεις μαζί νέο μοντέλο μετά από 30 χρόνια, δηλαδή το 2031.

**5. Ένας γυμναστής παρατήρησε ότι όταν τοποθετεί τους μαθητές της Α΄ γυμνασίου ανά 3, ανά 5 και ανά 7 δεν περισσεύει κανένας. Πόσοι είναι οι μαθητές της Α΄ γυμνασίου στο σχολείο αυτό, αν γνωρίζουμε ότι το πλήθος τους είναι μεταξύ 100 και 200;**

**Λύση**

Επειδή, αν τοποθετηθούν οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου ανά 3, ανά 5 ή ανά 7 δεν περισσεύει κανένας, το πλήθος τους είναι αριθμός πολλαπλάσιος του  $\text{ΕΚΠ}(3,5,7)$ .

Επειδή οι αριθμοί 3,5 και 7 είναι πρώτοι μεταξύ τους, ισχύει ότι:  $\text{ΕΚΠ}(3,5,7)=3 \cdot 5 \cdot 7=105$ .

Επειδή το πλήθος των μαθητών είναι μεταξύ του 100 και του 200 και είναι πολλαπλάσιο του 105, τελικά οι μαθητές είναι 105.

**6. Ο Γιάννης πηγαίνει στον κινηματογράφο κάθε 10 ημέρες και ο Νίκος κάθε 12 ημέρες. Αν συναντήθηκαν στις 10 Μαρτίου στον κινηματογράφο, τότε θα ξανασυναντηθούν; Στο διάστημα μεταξύ δύο συναντήσεων τους, πόσες φορές έχει πάει ο καθένας τους χωριστά στον κινηματογράφο;**

**Λύση**

Είναι  $10=5 \cdot 2$  και  $12=3 \cdot 2^2$ .  $\text{ΕΚΠ}(10,12)=5 \cdot 3 \cdot 2^2=60$ .

Ο Γιάννης και ο Νίκος θα ξανασυναντηθούν μετά από 60 ημέρες.

Από 10 Μαρτίου έως 10 Απριλίου είναι 31 ημέρες και από 11 Απριλίου έως 9 Μαΐου είναι 29 ημέρες, άρα θα ξανασυναντηθούν στις 9 Μαΐου.

Επειδή  $60 : 10 = 6$  και  $60 : 12 = 5$ , ο Γιάννης μεταξύ των δύο συναντήσεων θα έχει πάει 5 φορές και ο Νίκος 4.

**7. Τοποθετήστε ένα «x» στην αντίστοιχη θέση.**

|                     |                            |                             |                             |                             |
|---------------------|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| α) ΜΚΔ (5, 8)       | 1 <input type="checkbox"/> | 5 <input type="checkbox"/>  | 8 <input type="checkbox"/>  | 40 <input type="checkbox"/> |
| β) ΜΚΔ (16, 24)     | 4 <input type="checkbox"/> | 8 <input type="checkbox"/>  | 16 <input type="checkbox"/> | 24 <input type="checkbox"/> |
| γ) ΜΚΔ (30, 15)     | 3 <input type="checkbox"/> | 5 <input type="checkbox"/>  | 15 <input type="checkbox"/> | 30 <input type="checkbox"/> |
| δ) ΜΚΔ (10, 30, 60) | 5 <input type="checkbox"/> | 10 <input type="checkbox"/> | 30 <input type="checkbox"/> | 60 <input type="checkbox"/> |
| ε) ΜΚΔ (22, 32, 50) | 2 <input type="checkbox"/> | 11 <input type="checkbox"/> | 72 <input type="checkbox"/> | 82 <input type="checkbox"/> |

### Λύση

α) Επειδή οι αριθμοί 5 και 8 είναι πρώτοι μεταξύ τους, ισχύει ότι:  $\text{ΜΚΔ}(5,8) = 1$ .

β) Επειδή  $16 = 2^4$  και  $24 = 2^3 \cdot 3$ , είναι  $\text{ΜΚΔ}(16,24) = 2^3 = 8$ .

γ) Επειδή  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$  και  $15 = 3 \cdot 5$ , είναι  $\text{ΜΚΔ}(30,15) = 3 \cdot 5 = 15$

δ) Επειδή  $10 = 2 \cdot 5$ ,  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$  και  $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ , είναι  $\text{ΜΚΔ}(10,30,60) = 2 \cdot 5 = 10$

ε) Επειδή  $22 = 2 \cdot 11$ ,  $32 = 2^5$  και  $50 = 2 \cdot 5^2$ , είναι  $\text{ΜΚΔ}(22,32,50) = 2$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

**8. Δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ το 24. Να δικαιολογήσετε γιατί έχουν και άλλους κοινούς διαιρέτες διαφορετικούς από τη μονάδα.**

### Λύση

Επειδή οι δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ το 24, θα είναι πολλαπλάσια του 24. Γνωρίζουμε ότι αν ένας αριθμός διαιρεί έναν άλλο, τότε θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του. Επειδή οι αριθμοί 2, 3, 4, 6, 8, 12 είναι διαιρέτες του 24, θα διαιρούν και τους δύο αριθμούς.

**9. Βρείτε τους διαιρέτες των αριθμών: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Ποιοι από τους αριθμούς αυτούς είναι πρώτοι; Ποιοι είναι σύνθετοι;**

### Λύση

Επειδή  $10 = 2 \cdot 5 = 1 \cdot 10$ , διαιρέτες του 10 είναι οι αριθμοί: 1, 2, 5, 10.  
Επειδή  $11 = 1 \cdot 11$ , διαιρέτες του 11 είναι οι αριθμοί: 1, 11.  
Επειδή  $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ , διαιρέτες του 12 είναι οι αριθμοί: 1, 2, 3, 4, 6, 12.  
Επειδή  $13 = 1 \cdot 13$ , διαιρέτες του 13 είναι οι αριθμοί 1, 13.  
Επειδή  $14 = 1 \cdot 14 = 2 \cdot 7$ , διαιρέτες του 14 είναι οι αριθμοί 1, 2, 7, 14.  
Επειδή  $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$ , διαιρέτες του 15 είναι οι αριθμοί 1, 3, 5, 15.  
Επειδή  $16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$ , διαιρέτες του 16 είναι οι αριθμοί 1, 2, 4, 8, 16.  
Επειδή  $17 = 1 \cdot 17$ , διαιρέτες του 17 είναι οι αριθμοί 1, 17.  
Επειδή  $18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ , διαιρέτες του 18 είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 6, 9, 18.  
Επειδή  $19 = 1 \cdot 19$ , διαιρέτες του 19 είναι οι αριθμοί 1, 19.  
Επειδή  $20 = 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$ , διαιρέτες του 20 είναι οι αριθμοί 1, 2, 4, 5, 10, 20.  
Οι αριθμοί 11, 13, 17, 19 διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και με τη μονάδα οπότε είναι πρώτοι. Όλοι οι άλλοι είναι σύνθετοι.

**10. Το διπλάσιο ενός πρώτου αριθμού είναι πρώτος αριθμός ή σύνθετος και γιατί;**

### Λύση

Έστω  $a$  ο πρώτος αριθμός.  
Τότε ο  $a$  θα διαιρείται μόνο με τον εαυτό του και με τη μονάδα.  
Το διπλάσιο του  $a$  είναι το  $2a$  που διαιρείται με τους 1,  $a$ , 2,  
οπότε δεν είναι πρώτος και είναι σύνθετος αριθμός.

**11. Να βρείτε όλους τους διαιρέτες των παρακάτω αριθμών:**

α) 28    β) 82    γ) 95    δ) 105    ε) 124    στ) 345    ζ) 1232    η) 3999

### Λύση

- α) Επειδή  $28 = 1 \cdot 28 = 2 \cdot 14 = 4 \cdot 7$ , διαιρέτες του 28 είναι οι αριθμοί 1, 28, 2, 14, 4, 7.
- β) Επειδή  $82 = 1 \cdot 82 = 2 \cdot 41$ , διαιρέτες του 82 είναι οι αριθμοί 1, 82, 2, 41.
- γ) Επειδή  $95 = 1 \cdot 95 = 5 \cdot 19$ , διαιρέτες του 95 είναι οι αριθμοί 1, 95, 5, 19.
- δ) Επειδή  $105 = 1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$ , διαιρέτες του 105 είναι οι αριθμοί 1, 105, 3, 35, 5, 21, 7, 15.
- ε) Επειδή  $124 = 1 \cdot 124 = 2 \cdot 62 = 4 \cdot 31$ , διαιρέτες του 124 είναι οι αριθμοί 1, 124, 2, 62, 4, 31.
- στ) Επειδή  $345 = 1 \cdot 345 = 3 \cdot 115 = 5 \cdot 69 = 15 \cdot 23$ , διαιρέτες του 345 είναι οι αριθμοί 1, 345, 5, 69, 15, 23.
- ζ) Επειδή  $1232 = 2^4 \cdot 7 \cdot 11$ , είναι  
 $1232 = 1 \cdot 1232 = 2 \cdot 616 = 4 \cdot 308 = 7 \cdot 176 = 8 \cdot 154 = 11 \cdot 112 = 14 \cdot 88 = 16 \cdot 77 = 22 \cdot 56 = 28 \cdot 44$   
 οπότε διαιρέτες του 1232 είναι οι αριθμοί 1, 1232, 2, 616, 4, 308, 7, 176, 8, 154, 11, 112, 14, 88, 16, 77, 22, 56, 28, 44.
- η) Είναι  $3.999 = 3 \cdot 31 \cdot 43$ , είναι  $3.999 = 3 \cdot 1.333 = 31 \cdot 129 = 43 \cdot 93$ , οπότε διαιρέτες του 3.999 είναι οι αριθμοί 1, 3.999, 3, 1.333, 31, 129, 43, 93.

### 12. Να αναλυθούν οι παρακάτω αριθμοί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

α) 78

β) 348

γ) 1.210

δ) 2.344

### Λύση

α) 
$$\begin{array}{r|l} 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \quad 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

β) 
$$\begin{array}{r|l} 348 & 2 \\ 174 & 2 \\ 87 & 3 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array} \quad 348 = 2^2 \cdot 3 \cdot 29$$

γ) 
$$\begin{array}{r|l} 1210 & 2 \\ 605 & 5 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad 1.210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2$$

δ) 
$$\begin{array}{r|l} 2344 & 2 \\ 1172 & 2 \\ 586 & 2 \\ 293 & 293 \\ 1 & \end{array} \quad 2.344 = 2^3 \cdot 293$$

## Εξάσκηση

13. Να βρείτε τους κοινούς διαιρέτες και τον ΜΚΔ των αριθμών:  
α) 6 και 9      β) 22 και 44
14. Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των αριθμών 36 και 70.
15. Να γράψετε από τους αριθμούς 1245, 108, 715, 1420, 23706, αυτούς που διαιρούνται:  
α) με το 2      β) με το 5      γ) με το 3      δ) με το 9.
16. Τοποθετήστε στα κενά τα κατάλληλα ψηφία στους παρακάτω αριθμούς.  
α)  $21 \square 7$  ώστε να διαιρείται με το 3.  
β)  $2 \square 3 \square$  ώστε να διαιρείται με το 5 και το 9.  
γ)  $1 \square 4 \square$  ώστε να διαιρείται με το 2 και το 9.
17. Να βρείτε το ΜΚΔ των παρακάτω αριθμών:  
α) 24 και 36      β) 16 και 40      γ) 9 και 32      δ) 22, 32, 50
18. Να βρείτε το ΕΚΠ των παρακάτω αριθμών:  
α) 3 και 10      β) 3, 6, 10      γ) 16, 12      δ) 18, 30
19. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 108 και 420.
20. Ποιο ψηφίο πρέπει να τοποθετηθεί στη θέση του α στον  $32\alpha 1\alpha$ , ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να είναι διαιρέτος;  
α) με το 3      β) με το 9
21. Ένας αριθμός διαιρείται με το 3. Αν αλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του, ο αριθμός που θα προκύψει θα διαιρείται με το 3;
22. Το γινόμενο δύο πρώτων αριθμών είναι πρώτος ή σύνθετος; Δικαιολογείστε την απάντησή σας και δώστε ένα κατάλληλο παράδειγμα.
23. Τρία λεωφορεία με αφετηρία την ίδια πλατεία εκτελούν τη συγκοινωνία σε 3 διαφορετικά σημεία της πόλης. Το πρώτο εκτελεί μία διαδρομή σε 18min, το δεύτερο σε 24min και το τρίτο σε 36min. Αν στις 12 ακριβώς ξεκινήσουν μαζί, ύστερα από πόσο χρόνο θα ξεκινήσουν και πάλι μαζί και πόσες διαδρομές θα έχει κάνει το καθένα στον ενδιάμεσο χρόνο;
24. Πόσες το πολύ ομοιόμορφες ανθοδέσμες μπορούμε να σχηματίσουμε από 48 τριαντάφυλλα, 80 γαρύφαλλα και 112 τουλίπες; Πόσα άνθη από κάθε είδος θα περιλαμβάνει κάθε ανθοδέσμη;
25. Ένας βοσκός μετρώνοντας τα πρόβατά του τα έβρισκε πάντα κάπου ανάμεσα στα 118 και 127. Τα μετρούσε σε οκτάδες, δεκάδες ή δωδεκάδες χωρίς να του περισσεύει κανένα κάθε φορά. Πόσα πρόβατα είχε ο βοσκός;
26. Δύο πλοία αναχωρούν ταυτόχρονα από ένα λιμάνι προς διαφορετικές κατευθύνσεις και όταν επιστρέφουν ξαναφεύγουν αμέσως. Το ταξίδι του ενός διαρκεί 4 ημέρες και του άλλου 6 ημέρες. Μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί τα δύο πλοία να αναχωρούν από το ίδιο λιμάνι ταυτόχρονα;

## ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Γνωρίζουμε ότι  $3 \cdot 3 = 3^2$ ,  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ .

Γενικά αν  $a$  είναι φυσικός αριθμός και  $n$  είναι φυσικός αριθμός διάφορος του μηδέν, τότε ορίζουμε ως **νιοστή δύναμη του  $a$**  και συμβολίζουμε με  $a^n$  το γινόμενο που αποτελείται από  $n$  παράγοντες ίσους με  $a$ .

Δηλαδή:  $a^n = a \cdot a \cdot a \dots \cdot a$ ,  $n \neq 0$ .

Ο αριθμός  $a$  λέγεται **βάση** της δύναμης και ο  $n$  **εκθέτης**.

- Αν  $n = 2$ , τότε έχουμε τη δύναμη  $a^2$  και διαβάζουμε τετράγωνο του  $a$  ή  $a$  στο τετράγωνο.
- Αν  $n = 3$ , τότε έχουμε τη δύναμη  $a^3$  και διαβάζουμε κύβος του  $a$  ή  $a$  στο κύβο.
- Αν  $n = 1$ , τότε  $a^1 = a$ .
- Αν  $a = 1$ , τότε  $1^n = 1$
- Αν  $a = 0$ , τότε  $0^n = 0$

### Αριθμητική παράσταση – προτεραιότητα πράξεων

- **Αριθμητική παράσταση** λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.
- Η σειρά με την οποία πρέπει να κάνουμε τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση (**προτεραιότητα πράξεων**) είναι η εξής:

1. Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
2. Κάνουμε όλους τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
3. Κάνουμε όλες τις προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Αν στη παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις, τότε εκτελούμε **πρώτα** τις πράξεις στις παρενθέσεις με την προηγούμενη σειρά.

### Ασκήσεις

1. Συμπλήρωσε στον πίνακα τα τετράγωνα και τους κύβους των αριθμών:

| $a$   | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 25 |
|-------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $a^2$ |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| $a^3$ |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

Λύση

| $a$   | 8   | 9   | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   | 25    |
|-------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| $a^2$ | 64  | 81  | 100  | 121  | 144  | 169  | 196  | 225  | 256  | 289  | 324  | 361  | 400  | 625   |
| $a^3$ | 512 | 729 | 1000 | 1331 | 1728 | 2197 | 2744 | 3375 | 4096 | 4913 | 5832 | 6859 | 8000 | 15625 |

2. Να γράψετε με τη μορφή δυνάμεων τα παρακάτω γινόμενα:

α)  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

β)  $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

γ)  $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

δ)  $a \cdot a \cdot a \cdot a$

ε)  $x \cdot x \cdot x$

στ)  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a$

Λύση

$$\alpha) \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6 \text{ φορές}} = 5^6$$

$$\beta) \underbrace{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}_{6 \text{ φορές}} \cdot \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6}_{3 \text{ φορές}} = 8^6 \cdot 6^3$$

$$\gamma) \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}_{6 \text{ φορές}} = 1^6$$

$$\delta) \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^4$$

$$\epsilon) x \cdot x \cdot x = x^3$$

$$\sigma\tau) 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = 2^4 \cdot \alpha^3$$

**3. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:  $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$ .**

Λύση

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

$$2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$$

$$2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$$

$$2^9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 512$$

$$2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$$

**4. Να βρείτε τα τετράγωνα των αριθμών: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 και 90.**

Λύση

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$20^2 = 20 \cdot 20 = 400$$

$$30^2 = 30 \cdot 30 = 900$$

$$40^2 = 40 \cdot 40 = 1600$$

$$50^2 = 50 \cdot 50 = 2500$$

$$60^2 = 60 \cdot 60 = 3600$$

$$70^2 = 70 \cdot 70 = 4900$$

$$80^2 = 80 \cdot 80 = 6400$$

$$90^2 = 90 \cdot 90 = 8100$$

**5. Βρες τους κύβους των αριθμών: 10, 20, 30, 40, 50.**

Λύση

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

$$20^3 = 20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$$

$$30^3 = 30 \cdot 30 \cdot 30 = 27.000$$

$$40^3 = 40 \cdot 40 \cdot 40 = 64.000$$

$$50^3 = 50 \cdot 50 \cdot 50 = 125.000$$

**6. Κάνε τις πράξεις:**

|                             |                               |                               |
|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| <b>α)</b> $3 \cdot 5^2$     | <b>β)</b> $3 \cdot 5^2 + 2$   | <b>γ)</b> $3 \cdot 5^2 + 2^2$ |
| <b>δ)</b> $3 \cdot 5 + 2^2$ | <b>ε)</b> $3 \cdot (5 + 2)^2$ |                               |

Λύση

$$\alpha) 3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$$

β)  $3 \cdot 5^2 + 2 = 3 \cdot 25 + 2 = 75 + 2 = 77$

γ)  $3 \cdot 5^2 + 2^2 = 3 \cdot 25 + 4 = 75 + 4 = 79$

δ)  $3 \cdot 5 + 2^2 = 3 \cdot 5 + 4 = 15 + 4 = 19$

ε)  $3 \cdot (5 + 2)^2 = 3 \cdot 7^2 = 3 \cdot 49 = 147$

**7. Κάνε τις πράξεις: α)  $3^2 + 3^3 + 2^3 + 2^4$**

**β)  $(13 - 2)^4 + 5 \cdot 3^2$**

**Λύση**

α)  $3^2 + 3^3 + 2^3 + 2^4 = 9 + 27 + 8 + 16 = 60$

β)  $(13 - 2)^4 + 5 \cdot 3^2 = 11^4 + 5 \cdot 9 = 14.641 + 45 = 14.686$

**8. Βρες τις τιμές των παραστάσεων:**

**α)  $(6 + 5)^2$  και  $6^2 + 5^2$**

**β)  $(3 + 6)^2$  και  $3^2 + 6^2$ . Τι παρατηρείς;**

**Λύση**

α)  $(6 + 5)^2 = 11^2 = 11 \cdot 11 = 121$  και  $6^2 + 5^2 = 6 \cdot 6 + 5 \cdot 5 = 36 + 25 = 61$

β)  $(3 + 6)^2 = 9^2 = 81$  και  $3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$

Παρατηρούμε ότι το τετράγωνο του αθροίσματος και το άθροισμα των τετραγώνων είναι δύο διαφορετικοί αριθμοί.

**9. Να γράψετε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:**

**α)  $\alpha + \alpha + \alpha$**

**β)  $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$**

**γ)  $x + x + x + x$**

**δ)  $x \cdot x \cdot x \cdot x$**

**Λύση**

α)  $\alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$

β)  $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3$

γ)  $x + x + x + x = 4x$

δ)  $x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$

**10. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε ανεπτυγμένη μορφή με χρήση των δυνάμεων του 10.**

**α) 34.720**

**β) 123.654**

**γ) 890.650**

**Λύση**

α)  $34.720 = 30.000 + 4.000 + 700 + 20 = 3 \cdot 10.000 + 4 \cdot 1.000 + 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 = 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1$

β)  $123.564 = 100.000 + 20.000 + 3.000 + 500 + 60 + 4 = 100.000 + 2 \cdot 10.000 + 3 \cdot 1.000 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$



$$\gamma) 890.650 = 800.000 + 90.000 + 600 + 50 = 8 \cdot 100.000 + 9 \cdot 10.000 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 10 = 8 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1$$

11. Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα με το εξαγόμενο των πράξεων κάθε γραμμής του πρώτου πίνακα.

|                           |    |
|---------------------------|----|
| $(1+2) \cdot (3+4)$       | 20 |
| $1 \cdot (2+3 \cdot 4)$   | 21 |
| $(1 \cdot 2 + 3) \cdot 4$ | 9  |
| $1 + (2+3) \cdot 4$       | 14 |

Λύση

$$\begin{aligned} (1+2) \cdot (3+4) &= 3 \cdot 7 = 21 \\ 1 \cdot (2+3 \cdot 4) &= 1 \cdot (2+12) = 1 \cdot 14 = 14 \\ (1 \cdot 2 + 3) \cdot 4 &= (2+3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20 \\ 1 + (2+3) \cdot 4 &= 1 + 5 \cdot 4 = 1 + 20 = 21 \end{aligned}$$

12. Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα με την αριθμητική παράσταση κάθε γραμμής του πρώτου πίνακα.

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| $2 + 2 \cdot 2$                 | 150 |
| $3 + 3 \cdot 3$                 | 68  |
| $4 + 4 \cdot 4 \cdot 4$         | 16  |
| $5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5$     | 6   |
| $5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5$ | 12  |
| $4 + 4 \cdot 4 - 4$             | 55  |

Λύση

$$\begin{aligned} 2 + 2 \cdot 2 &= 2 + 4 = 6 \\ 3 + 3 \cdot 3 &= 3 + 9 = 12 \\ 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 &= 4 + 16 \cdot 4 = 4 + 64 = 68 \\ 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 &= 5 + 25 + 25 = 55 \\ 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 &= 25 + 25 \cdot 5 = 25 + 125 = 150 \\ 4 + 4 \cdot 4 - 4 &= 16 \end{aligned}$$

13. Να υπολογίσετε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:

α)  $2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10}$

β)  $2 \cdot 3^2 + 4$

γ)  $2 \cdot (3^2 + 4)$

δ)  $(2 \cdot 3)^2 + 4$

ε)  $2 \cdot 3^3 + (3^2 - 2^3) \cdot 6^2$

Λύση

α) Είναι  $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ ,  $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ ,  $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$   
 $2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$  και  $2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$ , άρα  
 $2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} = 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 = 1364$

β)  $2 \cdot 3^2 + 4 =$  (προηγούνται οι δυνάμεις)  
 $2 \cdot 9 + 4 =$  (μετά τις δυνάμεις προηγούνται οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις)

$$18 + 4 = 20 \quad (\text{στο τέλος κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις})$$

γ)  $2 \cdot (3^2 + 4) =$  (προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις όπου θα βρούμε πρώτα τις δυνάμεις)

$$2(9 + 4) = \quad (\text{προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις})$$

$$2 \cdot 13 = 26$$

δ)  $(2 \cdot 3)^2 + 4 =$  (προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις)

$$6^2 + 4 = \quad (\text{προηγούνται οι δυνάμεις})$$

$$36 + 4 \quad (\text{στο τέλος κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις})$$

ε)  $2 \cdot 3^3 + (3^2 - 2^3) \cdot 6^2 =$  (προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις όπου θα υπολογίσουμε πρώτα τις δυνάμεις)

$$2 \cdot 3^3 + (9 - 8) \cdot 6^2 = \quad (\text{προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις})$$

$$2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 6^2 = \quad (\text{προηγούνται οι δυνάμεις})$$

$$2 \cdot 27 + 1 \cdot 36 = \quad (\text{μετά τις δυνάμεις προηγούνται οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις})$$

$$54 + 36 = 90$$

## ΕΞΑΣΚΗΣΗ

14. Να γράψετε με τη μορφή δυνάμεων τα γινόμενα:  
α)  $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$       β)  $k \cdot k$       γ)  $13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$       δ)  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot y \cdot y \cdot y$
15. Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης τα γινόμενα:  
α)  $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3$       β)  $x^2 \cdot x^3$       γ)  $\alpha \cdot \alpha^2 \cdot \alpha \cdot \alpha^5$
16. Να βρείτε ποια δύναμη του 10 είναι οι αριθμοί:  
α) 100      β) 10.000      γ) 1.000.000
17. Γράψε με τη μορφή δυνάμεων τους αριθμούς:  
α) 9      β) 25      γ) 100      δ) 27      ε) 125
18. Υπολόγισε:  
α) τη διαφορά του διπλάσιου του 2,5 από το τετράγωνο του 2,5  
β) τη διαφορά του κύβου 0,5 από το τριπλάσιο του 0,5.
19. Να βρείτε τη τιμή της παράστασης  $5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 4$
20. Να κάνετε τις πράξεις:  
α)  $2 \cdot 4^2$       β)  $2 \cdot 4^2 + 7$       γ)  $2 \cdot (4^2 + 7)$       δ)  $2 \cdot 4^2 + 7^2$       ε)  $2 \cdot (4^2 + 7^2)$
21. Να βρείτε τη τιμή των παρακάτω παραστάσεων:  
α)  $(3+4)^2$  και  $3^2 + 4^2$       β)  $(5-2)^2$  και  $5^2 - 2^2$
22. Να κάνετε τις πράξεις:  
α)  $(2^5 - 3^3) \cdot [2(4 \cdot 9 - 6^2) + 3 \cdot 1^{111}]$       β)  $2 \cdot (3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 5) + 3(4^3 - 6 \cdot 3^2)$
23. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε ανεπτυγμένη μορφή με χρήση των δυνάμεων του 10.  
α) 4923      β) 40207
24. Να κάνετε τις πράξεις:  
α)  $(5 \cdot 14) : 7$       β)  $(4^3 - 3^3) : 37$       γ)  $(91 : 13) : (5^2 - 3 \cdot 2^3)$   
δ)  $(2^4 - 4^2) : 1821$       ε)  $[48 : (4 \cdot 7 - 2^4)] \cdot (10^2 - 9^2)$
25. Αν  $x = 2^6 - (7^2 + 3^2)$  και  $y = 3^4 - 4 \cdot 2^4 - [(3^2 + 1^{2015}) + 5]$ , να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης  $A = x^2 (y^4 - x) - x^2 : y$ .

## Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

- Το γινόμενο δύο κλασμάτων είναι ένα κλάσμα που έχει για αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

- Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού με ένα κλάσμα είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο του φυσικού αριθμού με τον αριθμητή του κλάσματος και τον ίδιο παρονομαστή.

$$\lambda \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \lambda = \frac{\lambda \cdot \gamma}{\delta}$$

- Τα κλάσματα  $\frac{\alpha}{\beta}$  και  $\frac{\beta}{\alpha}$  έχουν γινόμενο 1 και λέγονται αντίστροφα.

### Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού κλασμάτων

- Το 1 δε μεταβάλλει το γινόμενο (είναι ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού)

$$1 \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot 1 = \frac{\alpha}{\beta}$$

- Αντιμεταθετική ιδιότητα:  $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$

- Προσεταιριστική ιδιότητα:  $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left( \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\epsilon}{\zeta} \right) = \left( \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \right) \cdot \frac{\epsilon}{\zeta}$

- Επιμεριστική ιδιότητα:  $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left( \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\epsilon}{\zeta} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\epsilon}{\zeta}$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Συμπλήρωσε τα παραπάνω κενά:

α) Για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα .....

β) Δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι, όταν .....

γ) Ο αντίστροφος του αριθμού κ είναι ο ....., του  $\frac{1}{\kappa}$  είναι ο .... και του  $\frac{\kappa}{\lambda}$  είναι ο .....

δ) Μόνο ο αριθμός ..... ισούται με τον αντίστρόφό του.

### Λύση

α) Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **κλάσματα** πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους τους αριθμητές και προκύπτει ο αριθμητής του κλάσματος του γινομένου και πολλαπλασιάζουμε και μεταξύ τους τους παρονομαστές για να προκύψει ο παρονομαστής του κλάσματος του γινομένου.

β) Δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι, όταν έχουν **γινόμενο 1**.

- γ) Ο αντίστροφος του αριθμού  $\kappa$  είναι ο  $\frac{1}{\kappa}$ , του  $\frac{1}{\kappa}$  είναι ο  $\kappa$  και του  $\frac{\kappa}{\lambda}$  είναι ο  $\frac{\lambda}{\kappa}$ .
- δ) Μόνο ο αριθμός 1 ισούται με τον αντίστρόφό του.

2. Υπολόγισε τα γινόμενα:

α)  $3 \cdot \frac{3}{4}$

β)  $7 \cdot \frac{10}{14}$

γ)  $\frac{4}{2} \cdot 2$

δ)  $\frac{5}{100} \cdot 10$

Λύση

α)  $3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4} = \frac{9}{4}$

β)  $7 \cdot \frac{10}{14} = \frac{7 \cdot 10}{14} = \frac{70}{14} = \frac{70:14}{14:14} = \frac{5}{1} = 5$

γ)  $\frac{4}{2} \cdot 2 = \frac{4 \cdot 2}{2} = \frac{8}{2} = 4$  ή  $\frac{4}{2} \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$

δ)  $\frac{5}{100} \cdot 10 = \frac{5 \cdot 10}{100} = \frac{50}{100} = \frac{50:50}{100:50} = \frac{1}{2}$

3. Βρές τα γινόμενα: α)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8}$

β)  $\frac{8}{10} \cdot \frac{100}{5}$

γ)  $\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9}$

δ)  $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{15}$

Λύση

α)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 8} = \frac{14}{40} = \frac{14:2}{40:2} = \frac{7}{20}$

β)  $\frac{8}{10} \cdot \frac{100}{5} = \frac{8 \cdot 100}{10 \cdot 5} = \frac{800}{50} = \frac{800:50}{50:50} = \frac{16}{1} = 16$

γ)  $\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 9} = \frac{20}{81}$

δ)  $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 15} = \frac{6}{30} = \frac{6:6}{30:6} = \frac{1}{5}$

4. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

| •             | $\frac{5}{7}$ | $\frac{3}{2}$ | 1 | $\frac{3}{4}$ |
|---------------|---------------|---------------|---|---------------|
| $\frac{7}{5}$ |               |               |   |               |
| $\frac{2}{3}$ |               |               |   |               |
| 1             |               |               |   |               |
| $\frac{4}{3}$ |               |               |   |               |

Λύση

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} = 1, \quad \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{21}{10}$$

$$\frac{7}{5} \cdot 1 = \frac{7}{5}, \quad \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{21}{20}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1, \quad \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{6 \div 6}{12 \div 6} = \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7}, \quad 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \quad 1 \cdot 1 = 1$$

$$1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{20}{21}, \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{6} = 2, \quad \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} \quad \text{και} \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$$

|               |                 |                 |               |                 |
|---------------|-----------------|-----------------|---------------|-----------------|
| •             | $\frac{5}{7}$   | $\frac{3}{2}$   | 1             | $\frac{3}{4}$   |
| $\frac{7}{5}$ | 1               | $\frac{21}{10}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{21}{20}$ |
| $\frac{2}{3}$ | $\frac{10}{21}$ | 1               | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$   |
| 1             | $\frac{5}{7}$   | $\frac{3}{2}$   | 1             | $\frac{3}{4}$   |
| $\frac{4}{3}$ | $\frac{20}{21}$ | 2               | $\frac{4}{3}$ | 1               |

5. Υπολόγισε τα γινόμενα: α)  $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{21}$  β)  $4 \frac{1}{5} \cdot 2 \frac{1}{2}$  γ)  $3 \frac{1}{8} \cdot 10$  δ)  $1 \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$

Λύση

$$\alpha) 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{21} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 21} = \frac{6}{63} = \frac{6 \div 3}{63 \div 3} = \frac{2}{21}$$

$$\beta) 4 \frac{1}{5} \cdot 2 \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot 5 + 1}{5} \cdot \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{21}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{21 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot 2} = \frac{21}{2} = 10 \frac{1}{2}$$

$$\gamma) 3 \frac{1}{8} \cdot 10 = \frac{3 \cdot 8 + 1}{8} \cdot 10 = \frac{25}{8} \cdot 10 = \frac{250}{8} = \frac{250 \div 2}{8 \div 2} = \frac{125}{4}$$

$$\delta) 1 \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 3 + 2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 2} = \frac{5}{2}$$

6. Να βρείς τους αντίστροφους των αριθμών:

α)  $\frac{4}{7}$  β) 72 γ)  $\frac{5}{8}$  δ)  $\frac{1}{3}$  ε)  $\frac{739}{8}$  στ) 1

Λύση

Γνωρίζουμε ότι ο αντίστροφος του  $\frac{\alpha}{\beta}$  είναι το  $\frac{\beta}{\alpha}$ , οπότε:

$$\alpha) \frac{7}{4}$$

$$\beta) 72 = \frac{72}{1} \text{ και ο αντίστροφός του είναι το } \frac{1}{72}.$$

$$\gamma) \frac{8}{5} \quad \delta) \frac{3}{1} = 3 \quad \epsilon) \frac{8}{739}$$

$$\delta) 1 = \frac{1}{1}, \text{ οπότε ο αντίστροφός του είναι ο ίδιος ο αριθμός.}$$

7. Ο Κώστας ήπια τα  $\frac{2}{3}$  από ένα μπουκάλι, που περιείχε αναψυκτικό όγκου  $1\frac{1}{2}$  του λίτρου. Πόσα λίτρα αναψυκτικού ήπια;

**Λύση**

$$\text{Επειδή } \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1, \text{ ο Κώστας ήπια 1 λίτρο αναψυκτικού.}$$

8. Υπολόγισε τα εξαγόμενα των πράξεων:

$$\alpha) \frac{6}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \quad \beta) \left( \frac{6}{5} + \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{1}{4}$$

**Λύση**

$$\alpha) \frac{6}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{5} + \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{6}{5} + \frac{3}{20} = \frac{24}{20} + \frac{3}{20} = \frac{27}{20}$$

$$\beta) \left( \frac{6}{5} + \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{9}{20}$$

( )

9. Υπολόγισε τα εξαγόμενα των πράξεων:

$$\alpha) \left( \frac{7}{3} + \frac{2}{15} \right) \cdot \frac{3}{8} \quad \beta) \left( \frac{7}{3} - \frac{2}{15} \right) \cdot \frac{3}{8} \quad \gamma) \frac{7}{3} - \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{8}$$

**Λύση**

$$\alpha) \left( \frac{7}{3} + \frac{2}{15} \right) \cdot \frac{3}{8} = \left( \frac{5}{3} + \frac{1}{15} \right) \cdot \frac{3}{8} = \left( \frac{35}{15} + \frac{2}{15} \right) \cdot \frac{3}{8} = \frac{37}{15} \cdot \frac{3}{8} = \frac{37 \cdot 3}{15 \cdot 8} = \frac{37 \cdot \cancel{3}^1}{\cancel{15}^5 \cdot 8} = \frac{37 \cdot 1}{5 \cdot 8} = \frac{37}{40}$$

$$\beta) \left( \frac{7}{3} - \frac{2}{15} \right) \cdot \frac{3}{8} = \left( \frac{5}{3} - \frac{1}{15} \right) \cdot \frac{3}{8} = \left( \frac{35}{15} - \frac{2}{15} \right) \cdot \frac{3}{8} = \frac{33}{15} \cdot \frac{3}{8} = \frac{33 \cdot 3}{15 \cdot 8} = \frac{33 \cdot \cancel{3}^1}{\cancel{15}^5 \cdot 8} = \frac{33 \cdot 1}{5 \cdot 8} = \frac{33}{40}$$

$$\gamma) \frac{7}{3} - \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{3} - \frac{\cancel{2}^1 \cdot \cancel{3}^1}{\cancel{15}^5 \cdot \cancel{8}^4} = \frac{7}{3} - \frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{7}{3} - \frac{1}{20} = \frac{20}{3} - \frac{1}{20} = \frac{20 \cdot 7}{3 \cdot 20} - \frac{1}{20} = \frac{140}{60} - \frac{1}{60} = \frac{139}{60}$$

## Διαίρεση κλασμάτων

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

Το κλάσμα που έχει τουλάχιστον ένα όρο του κλάσμα λέγεται σύνθετο κλάσμα.

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

α) Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα.....

β) Σύνθετο κλάσμα λέγεται το κλάσμα, του οποίου .....

Λύση

α) Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα **αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.**

β) Σύνθετο κλάσμα λέγεται το κλάσμα, του οποίου **ένας τουλάχιστον όρος είναι κλάσμα.**

2. Να κάνεις τις διαιρέσεις:

α)  $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$

β)  $\frac{1}{3} : \frac{1}{3}$

γ)  $\frac{10}{100} : \frac{1}{5}$

δ)  $\frac{7}{3} : \frac{21}{27}$

Λύση

α)  $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{6:2}{4:2} = \frac{3}{2}$

β)  $\frac{1}{3} : \frac{1}{3} = 1$

γ)  $\frac{10}{100} : \frac{1}{5} = \frac{10}{100} \cdot \frac{5}{1} = \frac{10 \cdot 5}{100} = \frac{50}{100} = \frac{50:50}{100:50} = \frac{1}{2}$

δ)  $\frac{7}{3} : \frac{21}{27} = \frac{7}{3} \cdot \frac{27}{21} = \frac{\cancel{7}^1 \cdot \cancel{27}^9}{\cancel{3}^1 \cdot \cancel{21}^3} = \frac{1 \cdot 9}{1 \cdot 3} = \frac{9}{3} = 3$

3. Να βρείς τα ηπλίκα: α)  $2 : \frac{1}{3}$

β)  $\frac{5}{8} : 1$

γ)  $2\frac{1}{2} : 4$

δ)  $4\frac{1}{10} : 3\frac{1}{3}$



---

### Λύση

$$\alpha) 2 : \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{3}{1} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\beta) \frac{5}{8} : 1 = \frac{5}{8}$$

$$\gamma) 2\frac{1}{2} : 4 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} : \frac{4}{1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2 \cdot 4} = \frac{5}{8}$$

$$\delta) 4\frac{1}{10} : 3\frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 10 + 1}{10} : \frac{3 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{41}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{41 \cdot 3}{10 \cdot 10} = \frac{123}{100}$$

4. Να κάνεις τις διαιρέσεις:  $\alpha) \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$        $\beta) \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$        $\gamma) \frac{20}{6} : 10$        $\delta) 10 : \frac{20}{6}$

Τι παρατηρείς;

### Λύση

$$\alpha) \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$$

$$\beta) \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\gamma) \frac{20}{6} : 10 = \frac{20}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2\cancel{0}}{6 \cdot \cancel{10}} = \frac{2^1}{6^3} = \frac{1}{3}$$

$$\delta) 10 : \frac{20}{6} = \frac{10}{1} \cdot \frac{6}{20} = \frac{1\cancel{0} \cdot 6}{2\cancel{0}} = \frac{6}{2} = 3$$

Παρατηρούμε ότι αν αντιστρέψουμε τον διαιρετέο με το διαιρέτη το αποτέλεσμα είναι αντίστροφος αριθμός.

5. Να κάνεις τις διαιρέσεις:  $\alpha) \frac{1}{8} : \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{2}\right)$       και       $\beta) \left(\frac{1}{8} : \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{2}$

Τι παρατηρείς;

### Λύση

$$\alpha) \frac{1}{8} : \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} : \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1}\right) = \frac{1}{8} : \frac{2}{3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8 \cdot 2} = \frac{3}{16}$$

$$\beta) \left(\frac{1}{8} : \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{1}\right) : \frac{1}{2} = \frac{3}{8} : \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3 \cdot 2^1}{8^4} = \frac{3}{4}$$

Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα για τη διαίρεση.

6. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

|               |               |               |   |               |
|---------------|---------------|---------------|---|---------------|
| :             | $\frac{5}{7}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{4}{3}$ |
| $\frac{5}{7}$ |               |               |   |               |
| $\frac{1}{2}$ |               |               |   |               |
| 1             |               |               |   |               |
| $\frac{4}{3}$ |               |               |   |               |

Λύση

$$\frac{5}{7} : \frac{5}{7} = 1, \quad \frac{5}{7} : \frac{1}{2} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{1} = \frac{10}{7}$$

$$\frac{5}{7} : 1 = \frac{5}{7}, \quad \frac{5}{7} : \frac{4}{3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{28}$$

$$\frac{1}{2} : \frac{5}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{10}, \quad \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} : \frac{4}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$1 : \frac{5}{7} = 1 \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{5}, \quad 1 : \frac{1}{2} = 1 \cdot 2 = 2$$

$$1 : 1 = 1, \quad 1 : \frac{4}{3} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{3} : \frac{5}{7} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{28}{15}, \quad \frac{4}{3} : \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{4}{3} : 1 = \frac{4}{3}, \quad \frac{4}{3} : \frac{4}{3} = 1$$

|               |                 |                |               |                 |
|---------------|-----------------|----------------|---------------|-----------------|
| :             | $\frac{5}{7}$   | $\frac{1}{2}$  | 1             | $\frac{4}{3}$   |
| $\frac{5}{7}$ | 1               | $\frac{10}{7}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{15}{28}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{7}{10}$  | 1              | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{8}$   |
| 1             | $\frac{7}{5}$   | 2              | 1             | $\frac{3}{4}$   |
| $\frac{4}{3}$ | $\frac{28}{15}$ | $\frac{8}{3}$  | $\frac{4}{3}$ | 1               |

7. Αντιστοίχισε σε κάθε διαίρεση το σωστό αποτέλεσμα:

Λύση

$$\frac{3}{10} : \frac{4}{10} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{4} = \frac{3 \cdot \cancel{10}^1}{\cancel{10}^1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{9} : \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{4} = \frac{5 \cdot \cancel{9}^1}{\cancel{9}^1 \cdot 4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{45}{90} : \frac{15}{9} = \frac{45}{90} \cdot \frac{9}{15} = \frac{\cancel{45}^3 \cdot \cancel{9}^1}{\cancel{90}^{10} \cdot \cancel{15}^1} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{16}{3} : \frac{8}{9} = \frac{16}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{\cancel{16}^2 \cdot \cancel{9}^3}{\cancel{3}^2 \cdot \cancel{8}^1} = 6$$

$$\frac{3}{10} : \frac{4}{10}$$

$$\frac{5}{9} : \frac{4}{9}$$

$$\frac{45}{90} : \frac{15}{9}$$

$$\frac{16}{3} : \frac{8}{9}$$

$$\frac{5}{4}$$

$$6$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{10}$$

8. Να μετατρέψεις τα σύνθετα κλάσματα σε απλά: α)  $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{5}}$  β)  $\frac{\frac{15}{3}}{4}$  γ)  $\frac{20}{\frac{5}{4}}$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{5}} &= \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 4} = \frac{15}{32} & \beta) \frac{\frac{15}{3}}{4} &= \frac{15}{\frac{3}{1} \cdot 4} = \frac{5}{4} & \gamma) \frac{20}{\frac{5}{4}} &= \frac{20}{5} \cdot \frac{4}{1} = 4 \cdot 4 = 16 \end{aligned}$$

9. Κάνε τις πράξεις και απλοποίησε τα κλάσματα:

$$\begin{aligned} \alpha) \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{4}{6}} & \quad \beta) \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{8}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{11}} & \gamma) \frac{\frac{2}{3} : \frac{4}{3}}{\frac{1}{8} : 2} \end{aligned}$$

Λύση

$$\alpha) \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{4}{6}} = \frac{\frac{15}{10} + \frac{2}{10}}{\frac{4}{6} + \frac{4}{6}} = \frac{\frac{17}{10}}{\frac{8}{6}} = \frac{17 \cdot 3}{10 \cdot 4} = \frac{51}{40}$$

$$\beta) \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{8}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{11}} = \frac{\frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 8}}{\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 11}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{6}{55}} = \frac{55}{42}$$

$$\gamma) \frac{\frac{2}{3} : \frac{4}{3}}{\frac{1}{8} : 2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}} = \frac{16}{2} = 8$$

## ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να βρείτε τα γινόμενα:

α)  $2 \cdot \frac{4}{5}$

β)  $\frac{5}{3} \cdot 2$

γ)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{12}{10}$

δ)  $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4}$

ε)  $2\frac{3}{4} \cdot 6$

στ)  $3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{7}$

2. Να βρείτε τον αντίστροφο των αριθμών:

α)  $\frac{3}{8}$

β) 4

γ)  $\frac{1}{12}$

δ)  $5\frac{1}{7}$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $\frac{3}{14} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)$

β)  $\frac{3}{14} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

γ)  $\frac{3}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

δ)  $\left(2\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right) \cdot 5\frac{5}{6}$

4. Το βήμα ενός ενήλικου είναι περίπου  $\frac{3}{5}$  m. Να βρείτε πόση απόσταση περίπου διανύει, όταν κάνει: α) 10 βήματα β) 250 βήματα γ) 1000 βήματα

5. Σε ένα σχολείο με 240 μαθητές, τα  $\frac{3}{8}$  των μαθητών είναι κορίτσια. Να βρείτε πόσα κορίτσια είναι στο σχολείο αυτό.

6. Σε ένα περιβόλι γεμάτο με δέντρα το  $\frac{1}{3}$  των δέντρων είναι λεμονιές και τα  $\frac{3}{5}$  των λεμονιών έχουν ξεραθεί. Τι μέρος των δέντρων όλου του περιβολιού έχει ξεραθεί;

7. Κάποιος είχε μαζί του στην αρχή της ημέρας 160€. Ξόδεψε τα  $\frac{5}{6}$  των χρημάτων του για επισκευή του αυτοκινήτου του και με τα  $\frac{2}{3}$  των υπολοίπων χρημάτων κέρασε τους φίλους του. Πόσα χρήματα ξόδεψε για τους φίλους του;

8. Να βρείτε τα πηλικά:

α)  $\frac{4}{7} : \frac{3}{5}$

β)  $\frac{5}{9} : \frac{10}{3}$

γ)  $\frac{7}{8} : 1$

δ)  $1 : \frac{7}{8}$

ε)  $2 : \frac{4}{7}$

στ)  $\frac{5}{12} : 10$

ζ)  $3\frac{2}{3} : 11$

η)  $6\frac{2}{5} : 2\frac{1}{2}$

9. Να μετατρέψετε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά: α)  $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{15}}$  β)  $\frac{\frac{21}{4}}{\frac{7}{5}}$  γ)  $\frac{\frac{16}{2}}{\frac{5}{5}}$

10. Κάνε τις πράξεις και απλοποίησε τα κλάσματα: α)  $\frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{6}}{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}}$  β)  $\frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{21}{14}}{\frac{5}{11} \cdot \frac{12}{20}}$  γ)  $\frac{\frac{3}{5} : \frac{9}{20}}{\frac{3}{3} : 6}$