

B.1.1 ΣΗΜΕΙΟ – ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ – ΕΥΘΕΙΑ ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ – ΕΠΙΠΕΔΟ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Πως μπορείς να ονομάσεις το σχήμα μιας τεντωμένης κλωστής;
Το σχήμα που φαίνεται πιο κάτω αποτελείται από μερικά σημεία το ένα δίπλα στο άλλο.

Μπορείς να το χαρακτηρίσεις με τον ίδιο τρόπο; Κι αν όχι γιατί;

Απάντηση

Το σχήμα που σχηματίζει μία τεντωμένη κλωστή που κρατάμε με τα δύο χέρια μας ονομάζεται ευθύγραμμο τμήμα.

Το πιο κάτω σχήμα δεν μπορεί να ονομαστεί ευθύγραμμο τμήμα γιατί τα σημεία που βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο δεν ενώνονται.

Γ
Ε
Ω
Ν
Ε
Α
Μ
Σ
Ι
Κ
Ρ
Ι
Ε
Σ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Δίνονται τρία διαφορετικά σημεία Α, Β, και Γ. Ένωσε τα με ευθύγραμμα τμήματα, ανά δύο και δώσε ονομασία σε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζονται.

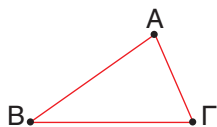
– Τι παρατηρείτε;

Απάντηση

Στη 1^η περίπτωση έχουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ.

Στη 2^η περίπτωση έχουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ όμως αυτά τα τρία ευθύγραμμα τμήματα βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

1η περίπτωση



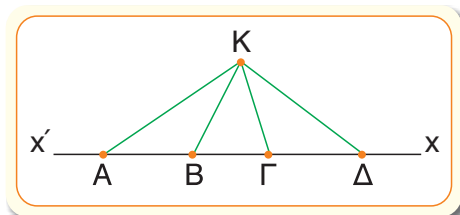
2η περίπτωση



3. Πάρε τα σημεία A, B, Γ, Δ πάνω σε μία ευθεία και ένα σημείο K που δεν βρίσκεται στην παραπάνω ευθεία. Ένωσε το K με τα A, B, Γ, Δ και ονόμασε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα του σχήματος.

 **Λύση**

Τα ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζονται στο σχήμα είναι τα:
 $KA, KB, K\Gamma, K\Delta, AB, A\Gamma, A\Delta, B\Gamma, B\Delta$ και $\Gamma\Delta$.



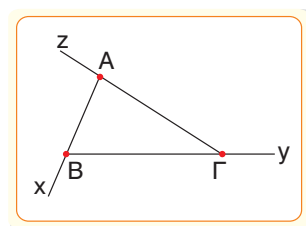
4. Πάνω σε μία ευθεία xx' παίρνουμε δύο σημεία A και B . Ονόμασε ως αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το A και τις αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το B .

 **Λύση**

Οι αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το A είναι οι Ax και Ax' , ενώ οι αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το B είναι οι Bx και Bx' .



5. Στο διπλανό σχήμα χάραξε τις αντικείμενες ημιευθείες των ημιευθειών ABx , $B\Gamma y$ και ΓAz .



 **Λύση**

Η αντικείμενη ημιευθεία της ABx είναι η Ax' . Η αντικείμενη ημιευθεία της $B\Gamma y$ είναι η $B\Gamma y'$, ενώ η αντικείμενη ημιευθεία της ΓAz είναι η $\Gamma Az'$.



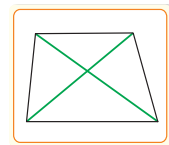
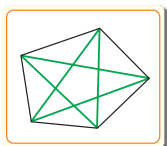
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ



1. Σχεδιάσε ένα πολύγωνο που να έχει;
 - α. Λιγότερες διαγώνιες από πλευρές.
 - β. Ίδιο αριθμό διαγωνίων και πλευρών.
 - γ. Περισσότερες διαγώνιες από πλευρές.

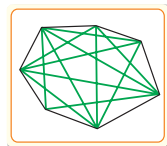
Απάντηση

- α. Το τετράπλευρο έχει 4 πλευρές, ενώ έχει δύο διαγώνιες.



- β. Το πεντάγωνο έχει 5 πλευρές και πέντε διαγώνιες.

- γ. Ένα πολύγωνο που έχει από 6 και πάνω πλευρές έχει περισσότερες διαγώνιες από τον αριθμό των πλευρών. Για παράδειγμα, το διπλανό επτάγωνο έχει 7 πλευρές και 14 διαγώνιες.



2. Στο διπλανό χάρτη φαίνονται έξι (6) πόλεις της Ελλάδας, που δεν βρίσκονται ανά τρεις στην ίδια ευθεία.

A (Αλεξανδρούπολη), Ρ (Ρόδος), Η (Ηράκλειο), Χ (Χανιά), Κ (Κέρκυρα) και Θ (Θεσσαλονίκη). Μπορείς να σχεδιάσεις τις απευθείας αεροπορικές συνδέσεις μεταξύ των πόλεων αυτών; Ονόμασε τις συνδέσεις αυτές χρησιμοποιώντας τα γράμματα των πόλεων. Μπορείς να βρεις πόσες τέτοιες συνδέσεις υπάρχουν, δικαιολογώντας κατάλληλα την απάντησή σου;



Απάντηση

Οι συνδέσεις που υπάρχουν είναι:

AΘ, AK, AX, AH, AP

ΘK, ΘX, ΘH, ΘP

KX, KH, KP

XH, XP

HP

Συνολικά υπάρχουν 15 συνδέσεις. Είναι δηλαδή οι 6 πλευρές του εξαγώνου που σχηματίζουν οι 6 πόλεις και οι 9 διαγώνιοι, αυτού του εξαγώνου.

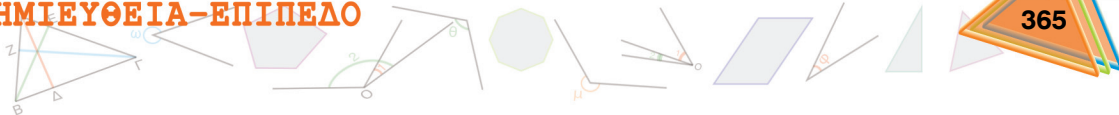
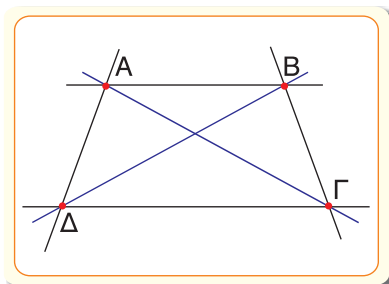


ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. i. Να πάρετε 4 σημεία ώστε τα τρία να μην ανήκουν στην ίδια ευθεία και να χαράξετε όλες τις ευθείες που διέρχονται από αυτά. Πόσες τέτοιες ευθείες υπάρχουν;
- ii. Μπορείτε να δώσετε το γενικό κανόνα.
- iii. Πόσες ευθείες διέρχονται από μη συνευθειακά ανά τρία σημεία, όταν το πλήθος των σημείων είναι:
- α. 3,
β. 5,
γ. 6.

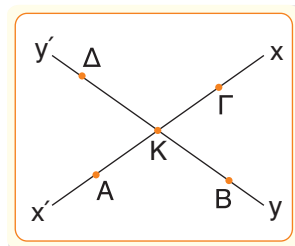
✏️ Λύση

- i. Από το σημείο A με καθένα από τα άλλα τρία σημεία ορίζονται τρεις ευθείες: Όμοια και από τα άλλα σημεία από το σημείο A: **AB, AG, AD**
από το σημείο B: BA, **BG, BD**
από το σημείο Γ: ΓA, ΓB, **ΓΔ**
από το σημείο Δ: ΔA, ΔB, ΔΓ
Όμως επειδή από δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία στην ουσία από τις 12 προηγούμενες ευθείες έχουμε τις μισές γιατί για παράδειγμα η ευθεία AG και η ευθεία ΓA είναι η ίδια.
Άρα συνολικά υπάρχουν 6 ευθείες που ορίζονται από τα 4 σημεία.
- ii. Κάθε σημείο με όλα τα υπόλοιπα ορίζει μία ευθεία.
Αν τα σημεία είναι n τότε από το καθένα ορίζονται $(n - 1)$ ευθείες.
Επειδή όμως αυτές τις μετράμε 2 φορές στην πραγματικότητα είναι μισές, δηλαδή $\frac{n(n-1)}{2}$.
- iii. α. για $n = 3$ είναι $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ ευθείες
β. για $n = 5$ είναι $\frac{5(5-1)}{2} = 10$ ευθείες
γ. για $n = 6$ είναι $\frac{6(6-1)}{2} = 15$ ευθείες.



ΕΞΑΣΚΗΣΗ

7. Χρησιμοποιώντας το διπλανό σχήμα να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστό ή λάθος:



- i. Τα σημεία B, K, Δ είναι συνευθειακά.
- ii. Τα σημεία K, A, B είναι συνευθειακά.
- iii. Οι ημιευθείες Kx, Ky είναι αντικείμενες.
- iv. Οι ημιευθείες Ky, Ky' είναι αντικείμενες.
- v. Η ευθεία BΔ περιέχει μόνο τρία σημεία.
- vi. Η ευθεία ΓΑ είναι ίδια με την ευθεία ΚΑ.
- vii. Οι ημιευθείες ΚΑ και ΚΓ είναι αντικείμενες.

Σωστό Λάθος

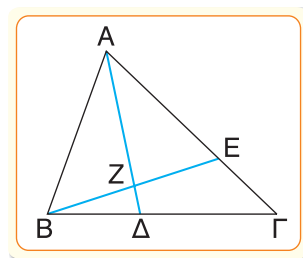
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐

(Απ.: i. Σ, ii. Λ, iii. Λ, iv. Σ, v. Λ, vi. Σ, vii. Σ)

8. Σε μία ευθεία ε παίρνουμε στη σειρά τα σημεία K, Λ, Μ, Ρ. Να ονομάσετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζονται.

(Απ.: 6 ευθύγραμμα τμήματα)

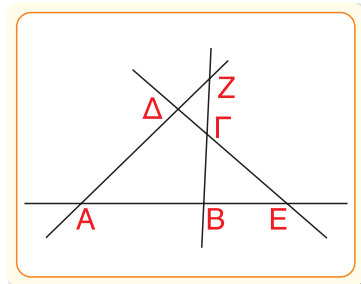
9. Στο διπλανό σχήμα να ονομάσετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζονται.



10. Να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να φέρετε τις αντικείμενες ημιευθείες ΒΑ, ΔΓ και ΑΒ.

B.1.2**ΓΩΝΙΑ – ΓΡΑΜΜΗ – ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ – ΙΣΑ ΣΧΗΜΑΤΑ****ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η**

Ποιες γωνίες και ποια σχήματα σχηματίζονται από τις ευθείες του διπλανού σχήματος;



Γ
Ε
Ω
Μ
Ν
Ο
Ι
Ε
Σ
Β
Α
Σ
Ι
Κ
Ε
Σ

✍️ Απάντηση

Οι γωνίες που σχηματίζονται στο σχήμα είναι:

$\Delta\hat{A}B$, $\Gamma\hat{B}A$, $\Gamma\hat{B}E$, $\Gamma\hat{E}A$, $B\hat{\Gamma}E$, $B\hat{\Gamma}\Delta$, $E\hat{\Gamma}Z$, $Z\hat{\Gamma}\Delta$, $\Gamma\hat{\Delta}A$, $\Gamma\hat{\Delta}Z$, $\Gamma\hat{Z}\Delta$

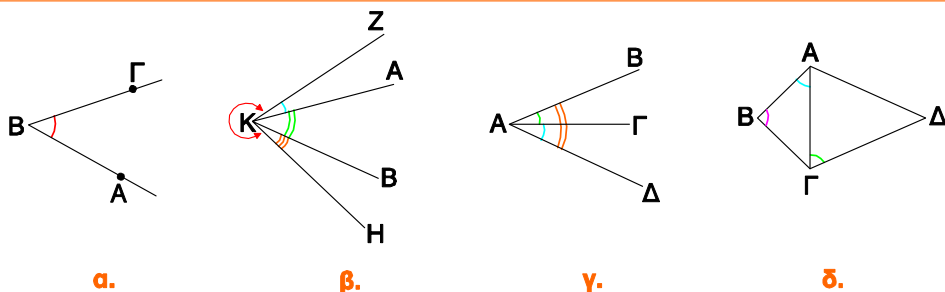
Τα ευθύγραμμα σχήματα που σημειώνονται είναι:

Τα τρίγωνα: $\Delta E\Delta$, $B E\Gamma$, $\Delta \Gamma Z$, $Z A B$

Τα τετράπλευρα: $A B\Gamma\Delta$, $A E\Gamma Z$.



1. Να ονομάσεις με τρία γράμματα τις γωνίες που σημειώνονται στα παρακάτω σχήματα.

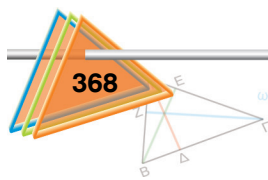
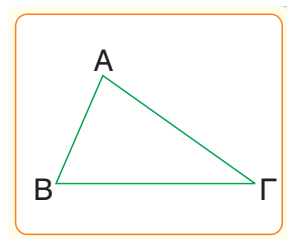


Λύση

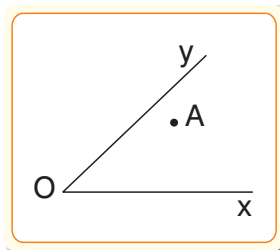
- α. $\widehat{AB\Gamma}$
 β. $\widehat{ZKA}$, $\widehat{AKB}$, $\widehat{BK\text{H}}$ και η μη κυρτή $\widehat{ZKH}$
 γ. $\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A\Delta}$, $\widehat{B\hat{A}\Delta}$
 δ. $\widehat{\Gamma AB}$, $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{A\hat{\Gamma}\Delta}$
2. Να σχεδιάσεις ένα τρίγωνο $AB\Gamma$.
- α. Ποια γωνία του τριγώνου περιέχεται στις πλευρές AB και $B\Gamma$;
 β. Ποια πλευρά είναι απέναντι από τη γωνία $\hat{\Gamma}$;
 γ. Ποιες γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά $A\Gamma$;

Λύση

- α. Η περιεχόμενη γωνία των πλευρών AB και $B\Gamma$ είναι η $\hat{B}$.
 β. Απέναντι από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ βρίσκεται η πλευρά AB .
 γ. Οι προσκείμενες γωνίες στην πλευρά $A\Gamma$ είναι οι $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.

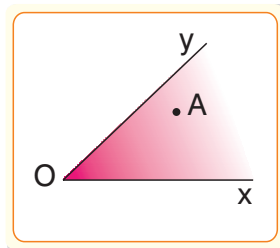


3. Να γραμμοσκιάσεις και να ονομάσεις τη γωνία στην οποία ανήκει στο σημείο A.



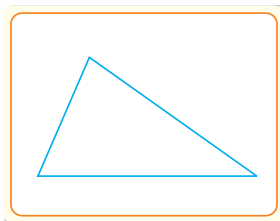
Λύση

Θα είναι η γωνία $\widehat{xOy}$.



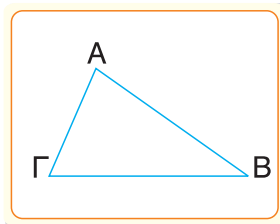
4. Στο διπλανό σχήμα να ονομάσεις $\widehat{A}$ τη γωνία που είναι απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά, $\widehat{B}$ τη γωνία που είναι απέναντι από τη μικρότερη πλευρά και $\widehat{\Gamma}$ την τρίτη γωνία.

- α. Ποιες γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά ΒΓ;
β. Ποια γωνία βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΑΒ;



Λύση

- α. Οι προσκείμενες γωνίες στην πλευρά ΒΓ είναι η $\widehat{B}$ και η $\widehat{\Gamma}$.
β. Η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΑΒ είναι η γωνία $\widehat{\Gamma}$.



5. Τοποθετήστε ένα «x» στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

 Λύση

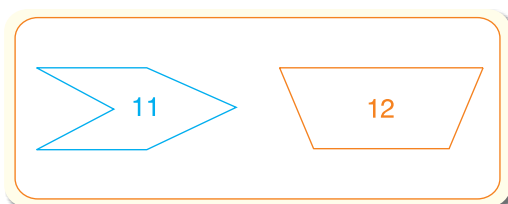
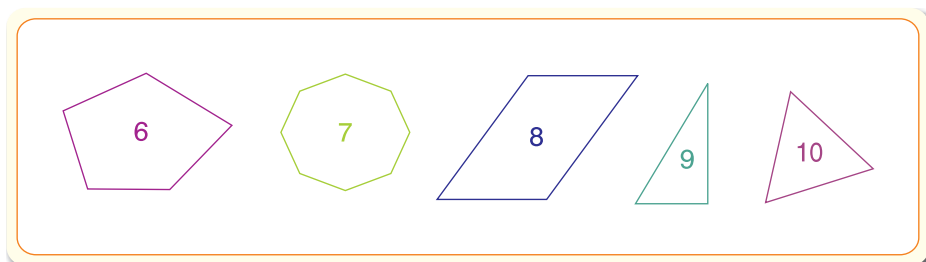
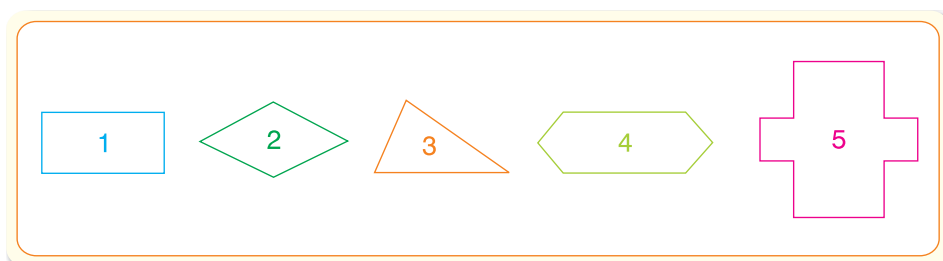
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ	ΚΟΡΥΦΕΣ					ΠΛΕΥΡΕΣ				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
ΓΩΝΙΑ	x						x			
ΤΡΙΓΩΝΟ			x					x		
ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ				x					x	
ΠΕΝΤΑΠΛΕΥΡΟ					x					x

ΑΡΙΘΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	x														
3			x												
4						x									
5										x					
6															x



ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Για τα παρακάτω σχήματα να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τοποθετώντας στα αντίστοιχα κουτάκια τον αριθμό του σχήματος.



Λύση

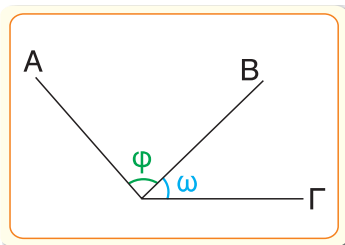
	ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΛΕΥΡΩΝ					
	3	4	5	6	8	12
ΚΥΡΤΟ	3, 9, 10	1, 28, 12	6	4	7	
ΜΗ ΚΥΡΤΟ				11		5

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ
ΒΑΜΕΝΟΙ

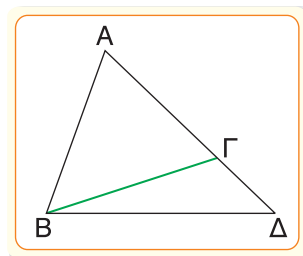


ΕΞΑΣΚΗΣΗ

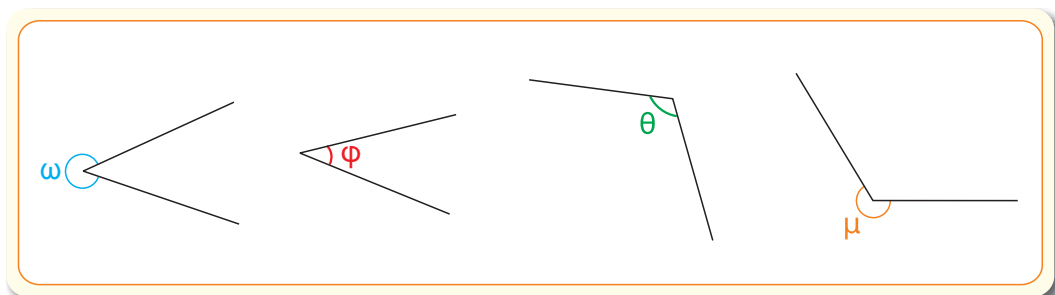
7. Να ονομάσεις τις γωνίες ω και φ του διπλανού σχήματος χρησιμοποιώντας τρία γράμματα.



8. Να σημειώσετε στο διπλανό σχήμα τις παρακάτω γωνίες, γράφοντας ένα τόξο στο άνοιγμα τους και να τις ονομάσετε με ένα μικρό γράμμα $\hat{A}$, $\hat{A\Gamma B}$, $\hat{\Gamma\Delta B}$, $\hat{\Delta\Gamma A}$

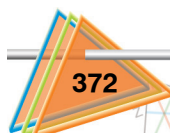
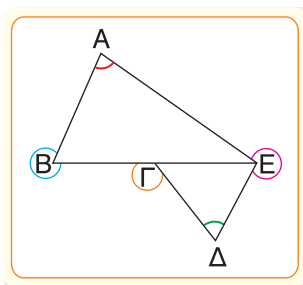


9. Ποιες από τις παρακάτω γωνίες είναι κυρτές και ποιες μη κυρτές;

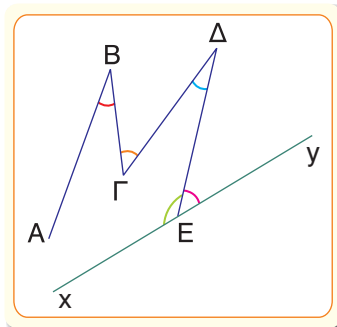


(Απ.: Μη κυρτές ω και μ)

10. Να ονομάσετε τις γωνίες που είναι σημειωμένες στο διπλανό σχήμα.

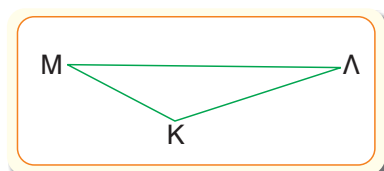


11. Να ονομάσετε με τρία γράμματα τις γωνίες που είναι σημειωμένες στο διπλανό σχήμα.



12. Δίνεται το τρίγωνο ΚΛΜ.

- Ποια γωνία του τριγώνου περιέχεται στις πλευρές ΚΜ, ΛΜ.
- Ποια πλευρά είναι απέναντι από τη γωνία Λ.
- Ποιες γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά ΜΚ.



Γ
Ε
Β
Α
Σ
Ι
Κ
Ε
Σ
Μ
Ν
Ο
Ι
Ε
Σ



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:
 - Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, που ενώνει δύο σημεία A και B λέγεται **απόσταση** των σημείων.
 - Μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος AB ονομάζουμε το σημείο του M που **απέχει εξίσου** από τα άκρα του.
- Τοποθετήστε ένα «x» στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:
Από δύο σημεία μπορεί να περάσουν:
 - ☐ Άπειρες ευθείες,
 - ☒ Μία μόνο ευθεία,
 - ☐ Δύο μόνο ευθείες.
- Ένα τόπι είναι 65m. Πουλήθηκαν κομμάτια με μήκη: 3,5m, 25cm, 7,95m και 3,74m. Πόσα μέτρα ύφασμα έμειναν στο τόπι;

 Λύση

Πρέπει να τρέψουμε όλα τα κομμάτια που πουλήθηκαν σε μέτρα (m).

Οπότε $25\text{cm} = 0,25\text{m}$.

Τα κομμάτια που πουλήθηκαν έχουν συνολικό μήκος

$$3,5 + 0,25 + 7,95 + 3,74 = 15,44 \text{ m.}$$

Άρα έμειναν στο τόπι $65 - 15,44 = 49,56 \text{ m}$.

- Το εμπορικό τρίγωνο της Αθήνας περικλείεται από τις οδούς Ιπποκράτους, μήκους 619m, Κλεισθένους, μήκους 271m και Περικλέους, μήκους 205m. Πόσα βήματα θα κάνει ένας πεζός που κινείται περιμετρικά στο εμπορικό τρίγωνο, αν το κάθε βήμα του είναι 75cm;



Λύση

Το εμπορικό τρίγωνο περιμετρικά είναι συνολικά

$$619 + 271 + 205 = 1095 \text{ m}$$

Είναι $75\text{cm} = 0,75\text{m}$ οπότε τα βήματα που θα κάνει ένας πεζός για να το περπατήσει περιμετρικά είναι

$$1095 : 0,75 = 1460 \text{ βήματα.}$$

5. Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει έναν αγρό σχήματος τετραγώνου πλευράς $15,3\text{m}$. Διαθέτει συρματόπλεγμα, μήκους 60m 3dm 18cm . Να βρεθεί αν θα του φτάσει το συρματόπλεγμα ή αν πρέπει να αγοράσει κι άλλο.

Λύση

Η περίμετρος του αγρού είναι $4 \cdot 15,3 = 61,2 \text{ m}$.

Επειδή $3\text{dm} = 0,3\text{m}$ και $18\text{cm} = 0,18\text{m}$,

το συρματόπλεγμα που διαθέτει ο αγρότης έχει μήκος

$$60 + 0,3 + 0,18 = 60,48.$$

Επομένως θα πρέπει να αγοράσει κι άλλο συρματόπλεγμα.

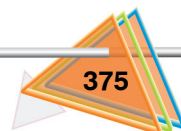
Δηλαδή $61,2 - 60,48 = 0,72\text{m}$ ή 72cm συρματόπλεγμα.

6. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την ακτίνα σε m και σε Km τεσσάρων πλανητών. Να συμπληρωθούν τα κενά:

Ακτίνα	σε m	σε Km
ΑΦΡΟΔΙΤΗ	6.085.000	6.085
ΓΗ	6.378.000	6.378
ΑΡΗΣ	3.750.000	3.750
ΔΙΑΣ	71.400.000	71.400

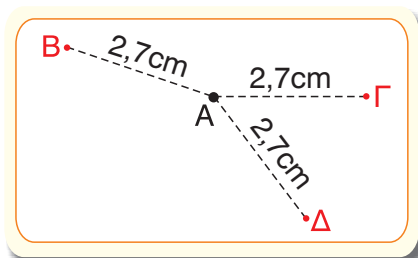
7. Οι αριθμοί που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα είναι τα μήκη των πέντε πλευρών του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, εκφρασμένα με διαφορετικές μονάδες. Να συμπληρωθεί ο πίνακας και να υπολογιστεί η περίμετρος του πολυγώνου σε cm, dm και m.

	ΑΒ	ΒΓ	ΓΔ	ΔΕ	ΕΑ	Περίμετρος
cm	517	420	84	1250	76	2.347
dm	51,7	42	8,4	125	7,6	234,7
m	5,17	4,2	0,84	12,5	0,76	23,47



8. Πάρε ένα σημείο A. Να βρεις τρία σημεία που το καθένα να απέχει 2,7cm από το A.

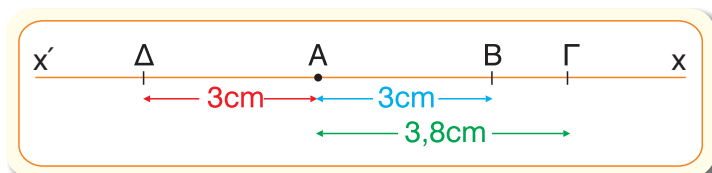
 Λύση



9. Σχεδιάσε δύο αντικείμενες ημιευθείες Ax και Ax'. Να βρεις πάνω στην ημιευθεία Ax δύο σημεία B και Γ, έτσι ώστε $AB = 3\text{cm}$ και $A\Gamma = 3,8\text{cm}$. Επίσης στην ημιευθεία Ax' να πάρεις ένα σημείο Δ έτσι, ώστε $AD = 3\text{cm}$. Να συγκρίνεις:

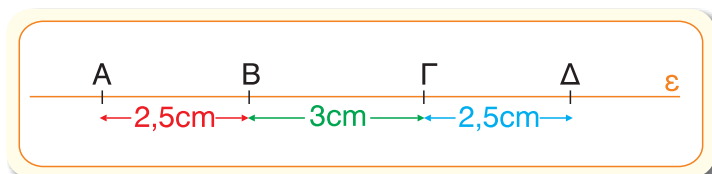
- α. τα ευθύγραμμα τμήματα AΓ και AΔ
β. τα ευθύγραμμα τμήματα AB και AΔ.

 Λύση



- α. Είναι $A\Gamma > A\Delta$
β. Είναι $AB = A\Delta = 3\text{cm}$
10. Σε μία ευθεία ε, πάρε στη σειρά τα σημεία A, B, Γ και Δ έτσι ώστε να είναι: $AB = 2,5\text{cm}$, $B\Gamma = 3\text{cm}$ και $\Gamma\Delta = 2,5\text{cm}$. Εξέτασε αν τα τμήματα AΓ και BΔ είναι ίσα.

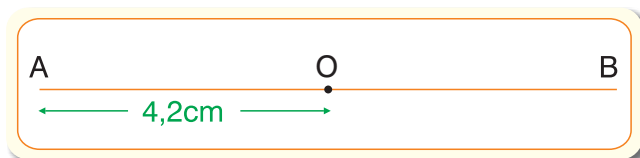
 Λύση



Είναι $A\Gamma = 2,5 + 3 = 5,5\text{cm}$ και $B\Delta = 3 + 2,5 = 5,5\text{cm}$
Οπότε $A\Gamma = B\Delta$

11. Το μέσο O ευθύγραμμου τμήματος AB απέχει $4,2\text{cm}$ από το άκρο A . Πόσο είναι το μήκος του AB ;

 Λύση



Επειδή το O είναι μέσο AB τότε θα είναι $AO = OB = 4,2\text{cm}$.

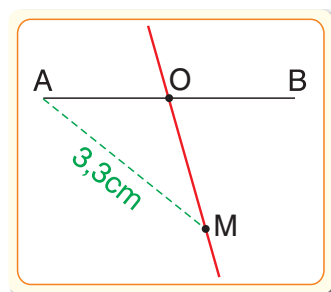
Οπότε το AB είναι $AB = 2 \cdot 4,2 = 8,4\text{cm}$

12. Σχεδίασε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB . Να βρεις ένα σημείο M , το οποίο να απέχει $3,3\text{cm}$ από το A και να μη βρίσκεται στην ευθεία AB . Να φέρεις την ευθεία, η οποία να περνάει από το M και από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB .

 Λύση

Έστω O το μέσο του AB .

Τότε η ζητούμενη ευθεία είναι η ευθεία OM



1

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ

13. Να συμπληρωθούν τα κενά του πίνακα:

mm	3.270	60	730				
cm				254	700	2.000	
dm							40
m							
Km							

mm								
cm								
dm	150							
m		5	2	6,4	0,7			
Km						4,27	0,2	2

 Λύση

mm	3.270	60	730	2540	7000	20000	4000
cm	327	6	73	254	700	2.000	400
dm	32,7	0,6	7,3	25,4	70	200	40
m	3,27	0,06	0,73	2,54	7	20	4
Km	0,00327	0,00006	0,00073	0,00254	0,007	0,02	0,004

mm	15000	5000	2000	6400	700	4270000	200000	2000000
cm	1500	500	200	640	70	427000	20000	200000
dm	150	50	20	64	7	42700	2000	20000
m	15	5	2	6,4	0,7	4270	200	2000
Km	0,015	0,005	0,002	0,0064	0,0007	4,27	0,2	2



ΜΕΤΡΗΣΗ, ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΑΙ ΙΣΟΤΗΤΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ
ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ-ΜΕΣΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

14. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Συμμηνής	2m 7dm	3cm 5mm	4Km 350m	3dm 7cm	35m 6dm 8mm	12cm 11mm	7dm 3mm	1m 2cm	5dm 3mm	3m 4dm	5cm 6mm	3m 4dm 7cm	1m 37cm 8mm
mm	2700												
cm	270												
dm	27												
m	2,7												

 Λύση

Συμμηνής	2m 7dm	3cm 5mm	4Km 350m	3dm 7cm	35m 6dm 8mm	12cm 11mm
mm	2700	35	4350000	370	35608	131
cm	270	3,5	435000	37	3560,8	13,1
dm	27	0,35	43500	3,7	356,08	1,31
m	2,7	0,035	4350	0,37	35,608	0,131

Συμμηνής	7dm 3mm	1m 2cm	5dm 3mm	3m 4dm	5cm 6mm	3m 4dm 7cm	1m 37cm 8mm
mm	703	1020	503	3400	56	3470	1378
cm	70,3	102	50,3	340	5,6	347	137,8
dm	7,03	10,2	5,03	34	0,56	34,7	13,78
m	0,703	1,02	0,503	3,4	0,056	3,47	1,378

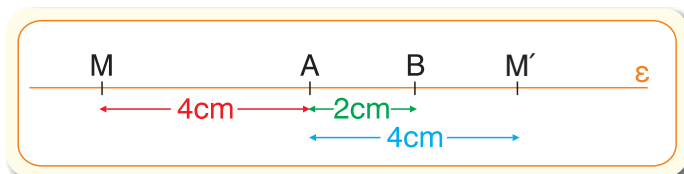
ΜΕΤΡΗΣΗ, ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΑΙ ΙΣΟΤΗΤΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ-ΜΕΣΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ



15. Να σημειωθούν πάνω σε μία ευθεία ε δύο σημεία A και B, έτσι ώστε $AB = 2\text{cm}$. Να βρεθεί στην ε ένα σημείο M, τέτοιο ώστε $MA = 4\text{cm}$. Πόσα τέτοια σημεία υπάρχουν; Τι παρατηρούμε για το σημείο B;

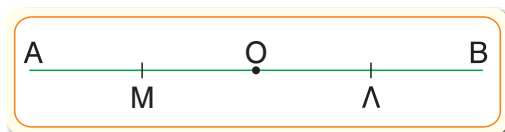
 Λύση



Υπάρχουν δύο σημεία M και M' πάνω στην ε που απέχουν από το A 4cm. Παρατηρούμε ότι το B είναι μέσο του τμήματος AM'.

16. Να πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6\text{cm}$. Να βρεθεί το μέσο του O και στη συνέχεια τα μέσα των AO και OB. Τι παρατηρούμε;

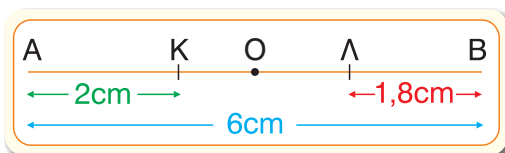
 Λύση



Έστω O το μέσο του AB, M το μέσο του AO και Λ το μέσο του OB. Παρατηρούμε ότι το O είναι μέσο και του ευθύγραμμου τμήματος ML.

17. Πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6\text{cm}$, να πάρουμε σημείο K, τέτοιο ώστε $AK = 2\text{cm}$ και ένα σημείο Λ τέτοιο, ώστε $BL = 1,8\text{cm}$. Αν O είναι το μέσο του τμήματος BL, να συγκριθούν τα τμήματα KO και OL.

 Λύση



Είναι $KO = 3 - 2 = 1\text{cm}$ και

$OL = 3 - 1,8 = 1,2\text{cm}$

Οπότε $KO < OL$.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

18. Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα:

mm	4.250					
cm		830				18
dm			43			
m				4		
Km					0,3	

19. Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα:

Συμμιγής	3m 2dm	4cm 2mm	5dm 7cm	4m 2cm	7m 5mm	1m 47cm 8mm	5m 4dm 3cm	7m 8dm 9mm	12dm 9mm
mm	3200								
cm	320								
dm	32								
m	3,2								

20. Οι αριθμοί που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα είναι τα μήκη των πλευρών ενός τετράπλευρου ΑΒΓΔ, εκφρασμένα με διαφορετική μονάδα. Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να υπολογίσετε την περίμετρο του σε m, dm, cm και mm.

	ΑΒ	ΒΓ	ΓΔ	ΔΑ	Περίμετρος
m	0,5				
dm		12			
cm			105		
mm				900	

ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ
ΒΑΣΙΚΕΣ



21. Να μετατρέψεις σε cm τα μήκη:

- i. 5m ii. 7dm
iii. 13mm iv. 5m 9dm

(Απ.: i. 500, ii. 70, iii. 1,3, iv. 590)

22. Να γράψετε τα παρακάτω μήκη από το μικρότερο στο μεγαλύτερο:

- α. 0,2m β. 3,4dm γ. 1,34cm
δ. 34mm ε. 1.3m

(Απ.: $\gamma < \delta < \alpha < \beta < \epsilon$)

23. Από μία κορδέλα μήκους 100m, κόψαμε 4 κομματάκια με μήκη 7,2m, 72cm, 49dm και 1250mm.

(Απ.: 85,93m)

24. Να γράψετε σημείο Α. Να βρείτε τρία άλλα σημεία του που το καθένα να απέχει 3cm από το Α.

25. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ. Να βρείτε και να ονομάσετε το μέσο Μ του ΚΛ. Να βρείτε ένα σημείο Ρ που να απέχει 4cm από το Κ και να μη βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΚΛ. Να σχεδιάσετε την ευθεία που περνά από τα σημεία Μ και Ρ.

26. Το μέσο Μ ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ απέχει 3,6cm από το άκρο Α. Πόσο είναι το μήκος του ΑΒ;

(Απ.: 7,2cm)

27. Πάρε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ = 8cm. Να βρείτε το μέσο του Μ και στη συνέχεια να βρείτε τα μέσα των ΚΜ και ΜΛ. Τι παρατηρείτε;

28. Πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 7cm, να πάρετε ένα σημείο Γ τέτοιο ώστε ΑΓ = 1,5cm και ένα σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ = 2cm. Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, να συγκρίνετε τα τμήματα ΓΜ και ΔΜ.

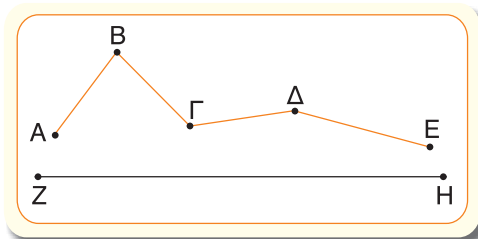
(Απ.: $ΜΓ > ΜΔ$)



B.1.4 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να συγκρίνεις το μήκος της γραμμής ΑΒΓΔΕ με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΖΗ, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Λύση

Μετρώντας με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε

$AB = 1,3\text{cm}$, $B\Gamma = 1,3\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 1,4\text{cm}$ και $\Delta E = 2,4\text{cm}$

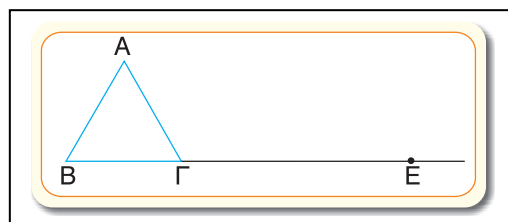
Επίσης $ZH = 6,4\text{cm}$. Άρα το μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔΕ είναι $1,3 + 1,3 + 1,4 + 2,4 = 6,4\text{cm}$

Άρα οι δύο γραμμές έχουν το ίδιο μήκος.

2. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με όλες τις πλευρές του ίσες, με $2,5\text{cm}$. Βρες στην ημιευθεία ΒΓ, με αρχή το σημείο Β, ένα σημείο Ε έτσι, ώστε το μήκος ΒΕ να ισούται με την περίμετρο του τριγώνου.

Λύση

Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι $3 \cdot 2,5 = 7,5\text{cm}$,
οπότε πρέπει $BE = 7,5\text{cm}$.



3. Μία τεθλασμένη γραμμή αποτελείται από πέντε διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα. Τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΖ είναι αντίστοιχα 16mm , 9mm , 12mm , 14mm και 2cm . Να βρεις το μήκος της τεθλασμένης ΑΖ.

Λύση

Είναι $2\text{cm} = 20\text{mm}$, οπότε η τεθλασμένη γραμμή ΑΖ έχει μήκος

$$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EZ = 16 + 9 + 12 + 14 + 20 = 71\text{mm}.$$

Γ
Ε
Μ
Ε
Ν
Τ
Ο
Ι
Κ
Ε
Σ



4. Να βρεις το μήκος μιας τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔΕ με πλευρές $AB = 0,4m$, $ΒΓ = 3dm$, $ΓΔ = 50cm$, και $ΔΕ = 380mm$.

 Λύση

Είναι $AB = 0,4m = 40cm$

$ΒΓ = 3dm = 30cm$

και $ΔΕ = 380mm = 38cm$

οπότε το μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔΕ είναι

$$AB + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ = 40 + 30 + 50 + 38 = 158cm$$

5. Να πάρεις σε μία ευθεία με τη σειρά τα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν έτσι, ώστε: $ΚΛ = 6cm$, $ΚΜ = 16cm$ και $ΚΝ = 20cm$.

Να βρεις τα μήκη των τμημάτων ΛΜ, ΛΝ και ΜΝ.

 Λύση

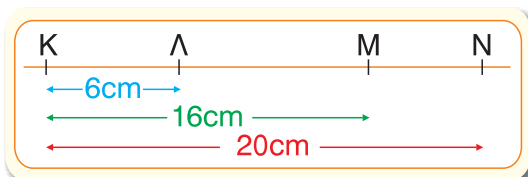
Είναι

$$ΛΜ = ΚΜ - ΚΛ = 16 - 6 = 10cm$$

$$ΛΝ = ΚΝ - ΚΛ = 20 - 6 = 14cm$$

και

$$ΜΝ = ΚΝ - ΚΜ = 20 - 16 = 4cm$$



6. Σε μία ημιευθεία με αρχή το σημείο Ο παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε να είναι $AB = 3cm$, $ΒΔ = 5,5cm$ και $ΑΓ = 4,6cm$. Να βρεθούν τα μήκη των τμημάτων:

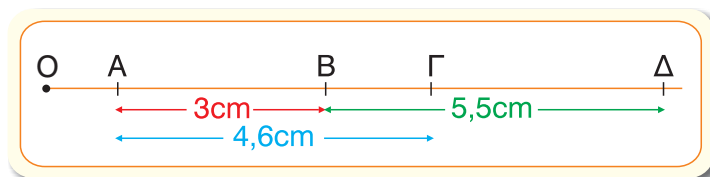
α. ΑΔ

β. ΒΓ

γ. ΑΓ + ΓΔ

δ. ΑΔ - ΔΒ

 Λύση



α. Είναι $ΑΔ = AB + ΒΔ = 3 + 5,5 = 8,5cm$

β. $ΒΓ = ΑΓ - AB = 4,6 - 3 = 1,6cm$

γ. Είναι $ΓΔ = ΒΔ - ΒΓ = 5,5 - 1,6 = 3,9cm$ οπότε

$$ΑΓ + ΓΔ = 4,6 + 3,9 = 8,5cm$$

δ. $ΑΔ - ΔΒ = 8,5 - 5,5 = 3cm$

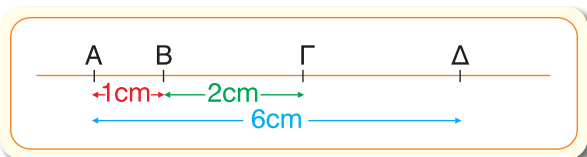


7. Να πάρεις σε μία ευθεία με τη σειρά τα σημεία A, B, Γ και Δ έτσι, ώστε:
 $AD = 6\text{cm}$, $AB = \frac{AD}{6}$ και $B\Gamma = \frac{AD}{3}$. Να βρεις το μήκος του ΓΔ.

 Λύση

Είναι $AB = \frac{AD}{6} = \frac{6}{6} = 1\text{cm}$

και $B\Gamma = \frac{AD}{3} = \frac{6}{3} = 2\text{cm}$



Οπότε το $A\Gamma = AB + B\Gamma = 1 + 2 = 3\text{cm}$

Άρα $\Gamma\Delta = AD - A\Gamma = 6 - 3 = 3\text{cm}$.

8. Να πάρεις σε μία ευθεία με τη σειρά τα σημεία A, B, Γ και Δ έτσι ώστε το BΓ να είναι κατά 4cm μεγαλύτερο από το AB και κατά 3cm μικρότερο από το ΓΔ. Αν είναι $AD = 14\text{cm}$, να βρεις τα μήκη των BΓ και ΓΔ.

 Λύση

Είναι $B\Gamma - AB = 4$ οπότε $AB = B\Gamma - 4$ (1)

Και $\Gamma\Delta - B\Gamma = 3$ ή $\Gamma\Delta = B\Gamma + 3 = 4$ (2)

Όμως $AD = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = 14$.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε

$$B\Gamma - 4 + B\Gamma + B\Gamma + 3 = 14 \text{ ή}$$

$$3 \cdot B\Gamma - 1 = 14 \text{ ή } 3 \cdot B\Gamma = 14 + 1 \text{ ή}$$

$$3 \cdot B\Gamma = 15 \text{ άρα } B\Gamma = \frac{15}{3} = 5\text{cm}.$$

Και από την (2) προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = 5 + 3 = 8\text{cm}$.

9. Να πάρεις σε μία ευθεία τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ και Δ έτσι, ώστε να είναι $AB = 2\text{cm}$, $B\Gamma = 0,5 \cdot AB$ και $AD = 2,5 \cdot AB$. Να βρεις τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΓΔ και ΑΓ.

 Λύση

Είναι

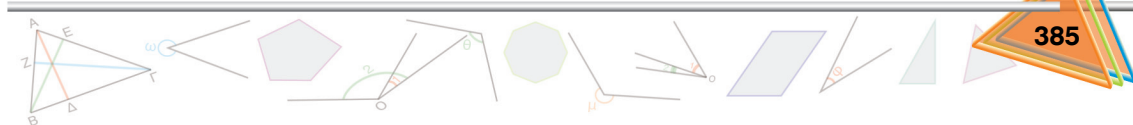
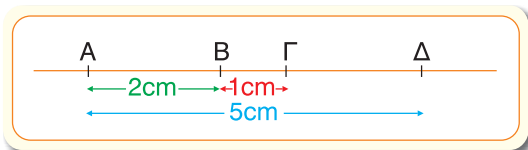
$$B\Gamma = 0,5 \cdot AB = 0,5 \cdot 2 = 1\text{cm} \text{ και}$$

$$AD = 2,5 \cdot AB = 2,5 \cdot 2 = 5\text{cm}$$

Οπότε

$$A\Gamma = AB + B\Gamma = 2 + 1 = 3\text{cm}$$

$$\text{και } \Gamma\Delta = AD - A\Gamma = 5 - 3 = 2\text{cm}$$

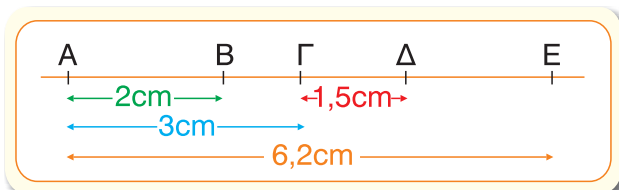


10. Πάρε σε μία ευθεία τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε έτσι, ώστε να είναι $AB = 2\text{cm}$, $AG = 3\text{cm}$, $GD = 1,5\text{cm}$ και $AE = 6,2\text{cm}$. Να βρεθούν τα μήκη των ΑΔ και ΓΕ.

 **Λύση**

Έχουμε $AD = AG + GD = 3 + 1,5 = 4,5\text{cm}$

και $GE = AE - AG = 6,2 - 3 = 3,2\text{cm}$



11. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 4,5\text{cm}$. Πάνω στην ευθεία ΑΒ πάρε ένα σημείο Κ τέτοιο, ώστε $AK = 3\text{cm}$ και ένα άλλο σημείο Λ, τέτοιο ώστε $BL = 3,5\text{cm}$.

α. Να βρεις το μήκος του ΚΛ.

β. Σε ποια περίπτωση συμβαίνει να είναι $KL = 11\text{cm}$;

γ. Να διερευνήσεις, σε ποιες περιπτώσεις το ΚΛ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από 11cm ;

 **Λύση**

- α. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

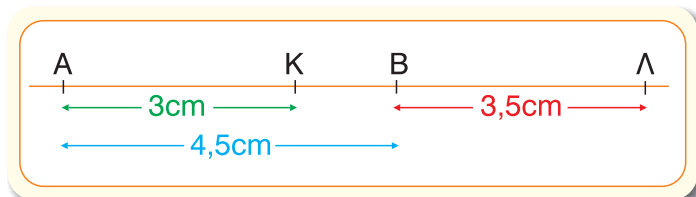
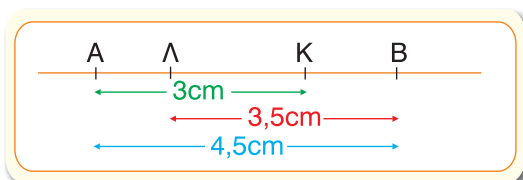
1. Τα Κ και Λ εντός του ΑΒ.

Τότε

$$AL = AB - BL = 4,5 - 3,5 = 1\text{cm},$$

$$\text{οπότε } KL = AK - AL = 3 - 1 = 2\text{cm}$$

2. Το Κ εντός του ΑΒ και το Λ εκτός του ΑΒ.



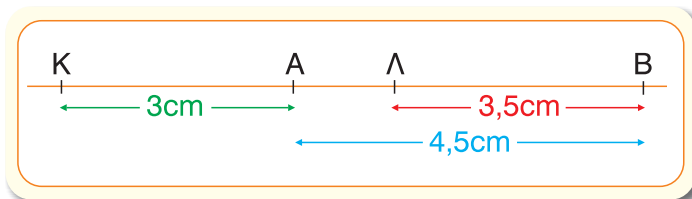
$$\text{Τότε } BK = AB - AK = 4,5 - 3 = 1,5\text{cm} \text{ άρα}$$

$$KL = KB - BL = 1,5 + 3,5 = 5\text{cm}$$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ



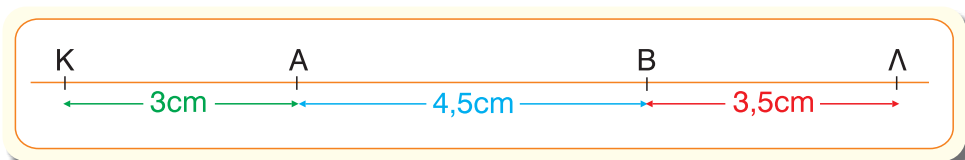
3. Το Κ εκτός του ΑΒ και το Λ εντός του ΑΒ.



Τότε $ΑΛ = ΑΒ - ΒΛ = 4,5 - 3,5 = 1\text{cm}$

άρα $ΚΛ = ΚΑ + ΑΛ = 3 + 1 = 4\text{cm}$

4. Τα Κ και Λ να βρίσκονται εκτός του ΑΒ.



Τότε $ΚΛ = ΚΑ + ΑΒ + ΒΛ = 3,5 + 4,5 + 3,5 = 11\text{cm}$

- β. Το $ΚΛ = 11\text{cm}$ όταν τα Κ και Λ βρίσκονται εκτός του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
γ. Από τη διερεύνηση που κάναμε στο α. ερώτημα το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ δεν υπερβαίνει τα 11cm.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

- Γιατί το αεροπλάνο μπορεί να διανύσει μικρότερη απόσταση από το πλοίο, για να πάει από την Αθήνα στη Σάμο;



Απάντηση

Γιατί το αεροπλάνο κινείται σε μία ευθεία γραμμή, ενώ το πλοίο κινείται στην κόκκινη τεθλασμένη γραμμή που συνδέει την Αθήνα με τη Σάμο. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία είναι μικρότερο από οποιαδήποτε τεθλασμένη γραμμή με άκρα αυτά τα σημεία.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ



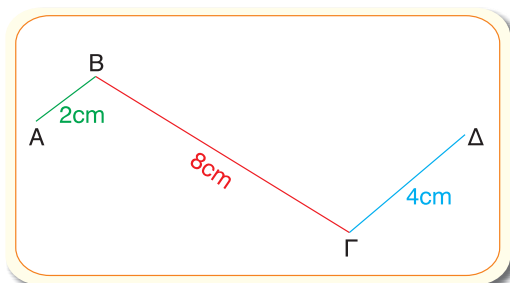
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12. Να σχεδιαστεί μία τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔ έτσι, ώστε $B\Gamma = 4 \cdot AB$ και $\Gamma\Delta = 2 \cdot AB$. Αν είναι $B\Gamma = 8\text{cm}$ να βρεθεί το μήκος της τεθλασμένης.

 Λύση

Αφού $B\Gamma = 8\text{cm}$ και $B\Gamma = 4 \cdot AB$, τότε $4 \cdot AB = 8$

Οπότε $AB = \frac{8}{4} = 2\text{cm}$ και $\Gamma\Delta = 2 \cdot AB = 2 \cdot 2 = 4\text{cm}$



Άρα το μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔ είναι

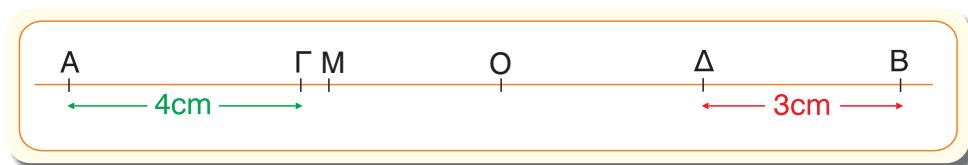
$$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = 2 + 8 + 4 = 14\text{cm}$$

13. Σε ευθύγραμμο τμήμα $AB = 16\text{cm}$ να πάρουμε τα σημεία Γ , Δ και O , τέτοια ώστε: $AB = 4 \cdot A\Gamma$, $\Gamma B = 4 \cdot \Delta B$ και O το μέσο του $\Gamma\Delta$. Να βρεθεί:

i. Μήκος του $O\Delta$

ii. Το μήκος του AM , όπου M το μέσο του AO .

 Λύση



Επειδή $AB = 16\text{cm}$ και $AB = 4 \cdot A\Gamma$

τότε $4 \cdot A\Gamma = 16$

οπότε $A\Gamma = \frac{16}{4} = 4\text{cm}$ άρα $B\Gamma = 16 - 4 = 12\text{cm}$.

Τότε επειδή $\Gamma B = 4 \cdot \Delta B$ θα είναι $4 \cdot \Delta B = 12$

άρα $\Delta B = \frac{12}{4} = 3\text{cm}$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ



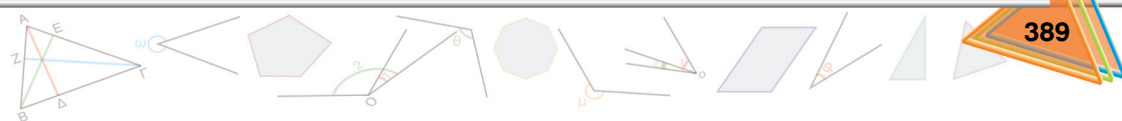
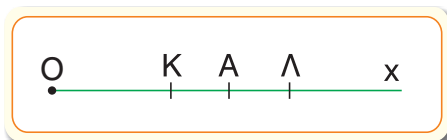
- i. Συνεπώς,
θα είναι $\Gamma\Delta = B\Gamma - B\Delta = 12 - 3 = 9\text{cm}$
και αφού το Ο είναι μέσο του $\Gamma\Delta$
τότε $Ο\Delta = \frac{9}{2} = 4,5\text{cm}$ και $Ο\Gamma = 4,5\text{cm}$
- ii. Είναι $ΑΟ = Α\Gamma + \GammaΟ = 4 + 4,5 = 8,5\text{cm}$
και επειδή το Μ είναι μέσο του ΑΟ
τότε $ΑΜ = \frac{8,5}{2} = 4,25\text{cm}$.

14. Σε μία ευθεία Οχ παίρνουμε τα σημεία Κ και Λ έτσι ώστε $ΟΚ = 1,6\text{cm}$ και $ΟΛ = 3\text{cm}$. Αν Α είναι το μέσο του ΚΛ, να βρεθεί το μήκος του ΟΑ.

 Λύση

Είναι
 $ΚΛ = ΟΛ - ΟΚ = 3 - 1,6 = 1,4\text{cm}$
οπότε αφού το Α είναι μέσο του ΚΛ
τότε $ΚΑ = \frac{1,4}{2} = 0,7\text{cm}$.

Άρα
 $ΟΑ = ΟΚ + ΚΑ = 1,6 + 0,7 = 2,3\text{cm}$



ΕΞΑΣΚΗΣΗ

15. Μία τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕ αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα $AB = 3,2\text{cm}$, $B\Gamma = 2,1\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 0,2\text{dm}$ και $\Delta E = 22\text{mm}$. Να βρείτε το μήκος της.
(Απ.: $9,5\text{cm}$)
16. Δίνεται τρίγωνο ΚΛΜ με όλες τις πλευρές του ίσες με $3,2\text{cm}$. Να βρείτε στην ημιευθεία ΚΛ ένα σημείο Α τέτοιο ώστε το μήκος του ΚΑ να ισούται με την περίμετρο του τριγώνου ΚΛΜ.
17. Να πάρετε σε μία ευθεία με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, έτσι ώστε: $AB = 8\text{cm}$, $A\Gamma = 10\text{cm}$ και $A\Delta = 15\text{cm}$. Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΒΓ, ΓΔ και ΒΔ.
(Απ.: $B\Gamma = 2\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 5\text{cm}$, $B\Delta = 7\text{cm}$)
18. Στην ημιευθεία Αχ παίρνουμε στη σειρά τα σημεία Β, Γ και Δ έτσι ώστε να είναι $AB = 3,5\text{cm}$, $B\Delta = 6,2\text{cm}$ και $A\Gamma = 5\text{cm}$. Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων:
i. ΑΔ ii. ΒΓ
iii. ΑΓ + ΓΔ iv. ΑΔ – ΒΔ
(Απ.: i. $9,7\text{cm}$ ii. $1,5\text{cm}$ iii. $9,7\text{cm}$ iv. $3,5\text{cm}$)
19. Πάνω σε μία ευθεία παίρνουμε στη σειρά τα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν έτσι, ώστε $KN = 8\text{cm}$, $KL = \frac{KN}{4}$ και $ML = \frac{KN}{2}$. Να βρείτε το μήκος του ΜΝ.
(Απ.: 2cm)
20. Να πάρετε σε μία ευθεία με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι, ώστε το ΒΓ να είναι κατά 5cm μεγαλύτερο από το ΑΒ και κατά 3cm μικρότερο του ΓΔ. Αν είναι $A\Delta = 16\text{cm}$, να βρείτε τα μήκη των ΒΓ και ΓΔ.
(Απ.: $B\Gamma = 6\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 9\text{cm}$)
21. Πάνω σε μία ευθεία ε παίρνουμε στη σειρά τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε $AB = 3\text{cm}$ και $A\Gamma = 5\text{cm}$. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να βρείτε το μήκος του ΜΝ και να τα συγκρίνετε με το μήκος του ΒΓ.
(Απ.: είναι $MN = \frac{B\Gamma}{2}$)



22. Σε ημιευθεία Αχ δίνονται τα σημεία Β, Ο, Γ ώστε το Ο να είναι μέσο του ΒΓ. Αν $AB = 8\text{cm}$ και $AG = 18\text{cm}$ να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΒΓ, ΒΟ και ΑΟ.

(Απ.: $B\Gamma = 10\text{cm}$, $BO = 5\text{cm}$, $AO = 13\text{cm}$)

23. Αν Ο είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και τα Α, Ο, Β, Γ, Δ βρίσκονται επί της ημιευθείας ΑΒ, να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΟΓ, ΟΔ και ΓΔ αν γνωρίζετε ότι $AO = 4\text{cm}$, $AG = 17\text{cm}$ και $BD = 14\text{cm}$.

(Απ.: $AB = 8\text{cm}$, $B\Gamma = 9\text{cm}$, $ΟΓ = 13\text{cm}$
 $ΟΔ = 18\text{cm}$, $ΓΔ = 5\text{cm}$)

24. Σε μία ευθεία παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι, ώστε να είναι $AB = 6\text{cm}$, $B\Gamma = \frac{1}{3}AB$ και $AD = \frac{3}{2} \cdot AB$. Να βρείτε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΒΔ και ΑΓ.

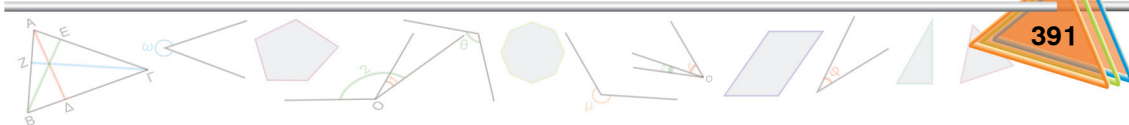
(Απ.: $B\Delta = 3\text{cm}$, $A\Gamma = 8\text{cm}$)

25. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6,5\text{cm}$. Πάνω στην ευθεία ΑΒ να πάρετε ένα σημείο Γ τέτοιο ώστε $AG = 2,5\text{cm}$ και ένα άλλο σημείο Δ τέτοιο ώστε $BD = 3\text{cm}$.

i. Να βρείτε το μήκος του ΓΔ.

ii. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το μήκος ΓΔ;

(Απ.: ii. 12cm)



B.1.5

ΠΡΟΣΘΕΣΗ, ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΑΙ ΙΣΟΤΗΤΑ ΓΩΝΙΩΝ
ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΓΩΝΙΑΣ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ένας πατέρας και γιος γυμνάζονται και κάνουν τις ίδιες ασκήσεις.

Μπορείς να βρεις εάν οι γωνίες που σχηματίζουν τα πόδια τους στην ίδια ακριβώς στάση που έχουν στο διπλανό σχήμα είναι ίσες;

Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου σχετικά με τη σύγκριση του ανοίγματος των ποδιών τους.



✍️ Απάντηση

Οι γωνίες που σχηματίζουν τα πόδια τους δεν είναι ίσες.

Ο πατέρας και ο γιος έχουν το ίδιο άνοιγμα ποδιών, αν μετρήσουμε με το υποδεκάμετρο την απόσταση που απέχουν τα δύο πόδια του καθενός.

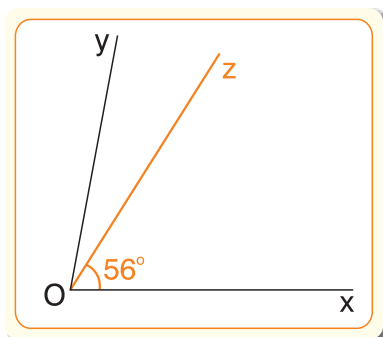
Επειδή όμως ο γιος είναι πιο κοντός από τον πατέρα έχει μεγαλύτερο άνοιγμα ποδιών.

Επομένως η γωνία που σχηματίζουν τα πόδια του γιου είναι μεγαλύτερη από τη γωνία που σχηματίζουν τα πόδια του πατέρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

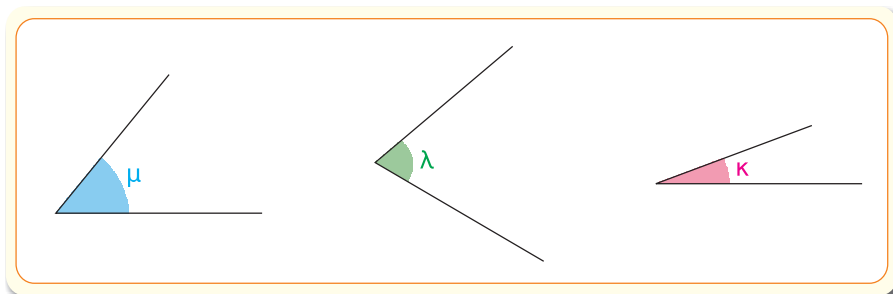
- Από τι εξαρτάται το μέγεθος μιας γωνίας;
(τοποθέτησε ένα «x» στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση)
☒ Από το «άνοιγμα» των πλευρών της.
☐ Από το μήκος των πλευρών της.
☐ Και από τα δύο παραπάνω.
- Σχεδίασε μία γωνία $\widehat{xOy} = 76^\circ$. Να γράψεις μία ημιευθεία Oz που να χωρίζει τη γωνία $\widehat{xOy}$ σε δύο γωνίες, από τις οποίες η μία να είναι 56° .

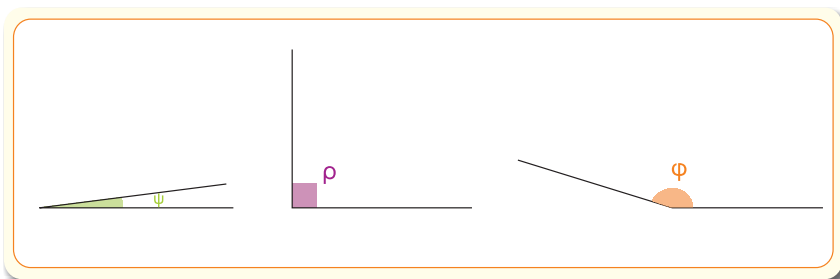
 Λύση



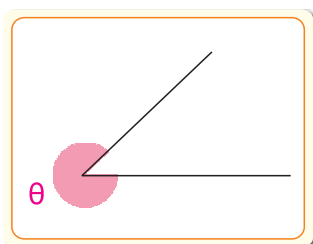
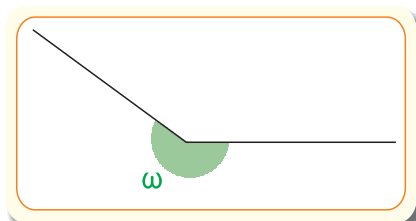
- Σχεδίασε τις γωνίες
 $\hat{\mu} = 48^\circ$, $\hat{\lambda} = 72^\circ$, $\hat{\kappa} = 17^\circ$, $\hat{\psi} = 6^\circ$, $\hat{\rho} = 90^\circ$,
 $\hat{\phi} = 170^\circ$, $\hat{\omega} = 215^\circ$ και $\hat{\theta} = 318^\circ$.

 Λύση



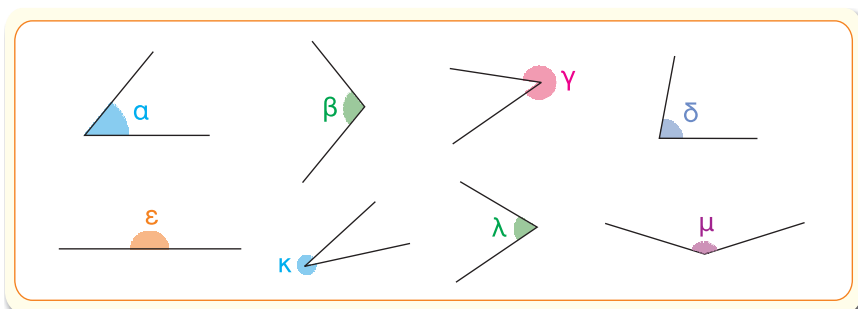


Επειδή $360^\circ - 215^\circ = 145^\circ$ τότε σχεδιάζουμε την γωνία 145° και η γωνία ω είναι η μη κυρτή της.



Όμοια $360^\circ - 318^\circ = 42^\circ$ οπότε

4. Να βρεις τα μέτρα των παρακάτω γωνιών:

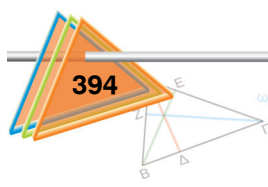


Λύση

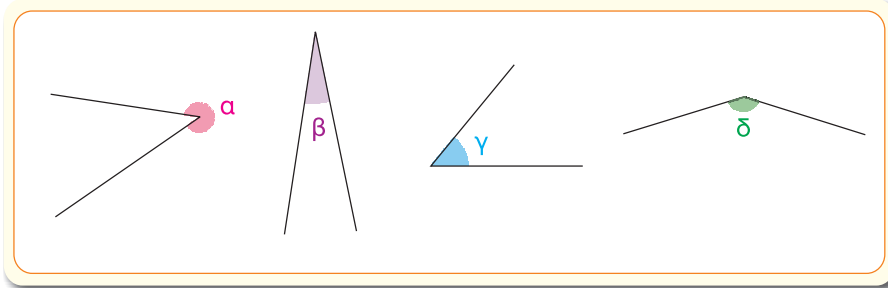
Μετρώντας με το μοιρογνώνιο είναι:

$\hat{\alpha} = 45^\circ$, $\hat{\beta} = 93^\circ$, $\hat{\gamma} = 323^\circ$ (επειδή η κυρτή γωνία είναι 37°)

$\hat{\delta} = 82^\circ$, $\hat{\varepsilon} = 180^\circ$, $\hat{\zeta} = 324^\circ$, $\hat{\lambda} = 60^\circ$ και $\hat{\mu} = 140^\circ$.



5. Να συγκρίνεις τις γωνίες και να τις γράψεις κατά σειρά από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη.

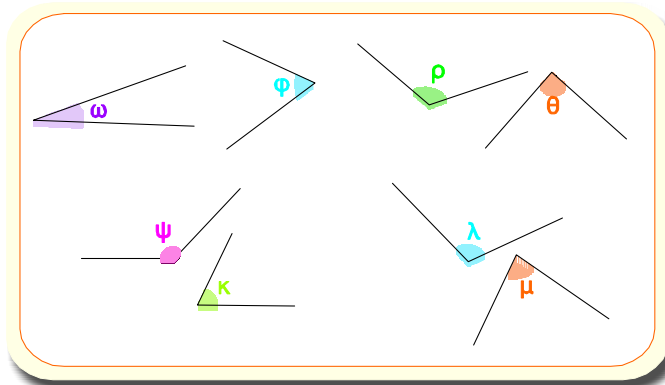


Λύση

Είναι $\hat{\alpha} > \hat{\delta} > \hat{\gamma} > \hat{\beta}$

6. Με το διαφανές χαρτί να συγκρίνεις τις γωνίες:

- α. $\hat{\omega}$ και $\hat{\phi}$,
 β. $\hat{\phi}$ και $\hat{\rho}$,
 γ. $\hat{\omega}$ και $\hat{\rho}$,
 δ. $\hat{\psi}$ και $\hat{\kappa}$,
 ε. $\hat{\psi}$ και $\hat{\lambda}$,
 στ. $\hat{\psi}$ και $\hat{\mu}$,
 ζ. $\hat{\rho}$ και $\hat{\theta}$.



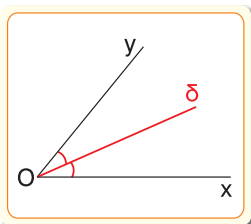
Λύση

- α. $\hat{\omega} < \hat{\phi}$, β. $\hat{\phi} < \hat{\rho}$, γ. $\hat{\omega} < \hat{\rho}$, δ. $\hat{\psi} < \hat{\kappa}$
 ε. $\hat{\psi} < \hat{\lambda}$, στ. $\hat{\psi} > \hat{\mu}$, ζ. $\hat{\rho} > \hat{\theta}$

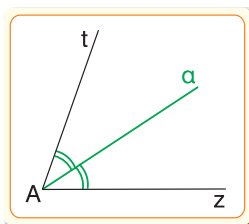
7. Σχημάτισε τις γωνίες α. 48° , β. 72° και γ. 144° και σχεδίασε τις διχοτόμους αυτών.

Λύση

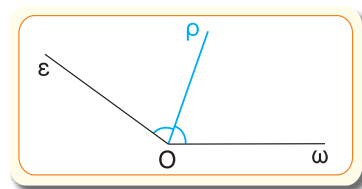
α.



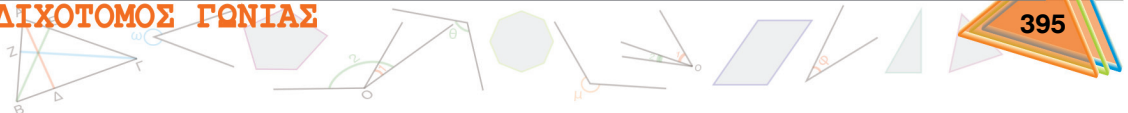
β.



γ.



ΠΡΟΣΘΕΣΗ, ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΑΙ ΙΣΟΤΗΤΑ ΓΩΝΙΩΝ
 ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΓΩΝΙΑΣ



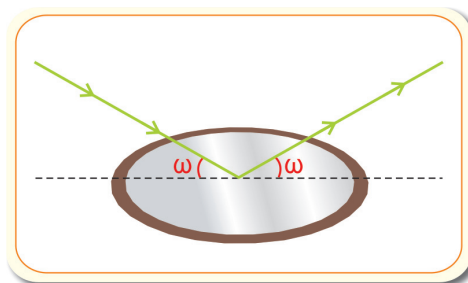
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ



1. Σχεδιάσε την πορεία μιας ακτίνας φωτός, η οποία προσπίπτει σε καθρέπτη και αντανακλάται.

✎ Απάντηση

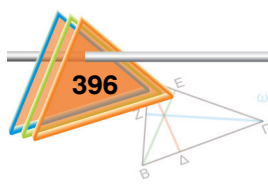
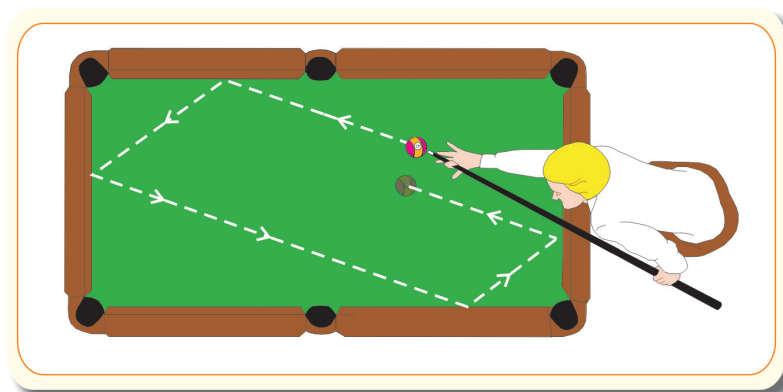
Σύμφωνα με τη φυσική, η γωνία με την οποία προσπίπτει η ακτίνα του φωτός στο καθρέπτη είναι ίδια με την γωνία με την οποία ανακλάται.



2. Σχεδιάσε την κίνηση μιας μπάλας μπιλιάρδου που κάνει μέχρι και τέσσερις ανακλάσεις στις πλευρές του μπιλιάρδου.

✎ Απάντηση

Οι γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης πρέπει να είναι ίσες.

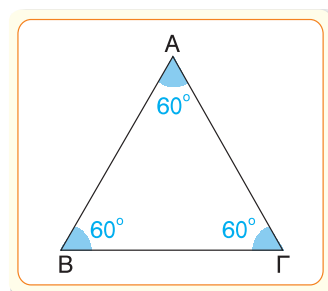


ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

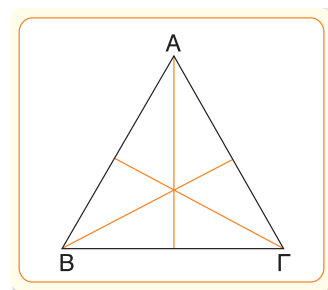
8. i. Να σχεδιαστεί ένα ισόπλευρο τρίγωνο και να μετρηθούν με το μοιρογνωμόνιο οι γωνίες του.
 ii. Να σχεδιαστούν οι διχοτόμοι των γωνιών του.
 Τι παρατηρείτε;

 Λύση

- i. Η κάθε γωνία του ισόπλευρου τριγώνου είναι 60° .



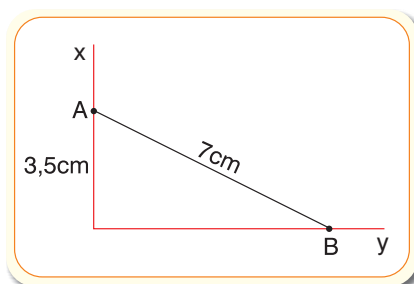
- ii. Παρατηρούμε ότι και οι τρεις διχοτόμοι διέρχονται από το ίδιο σημείο.



9. Να σχεδιάσεις μία γωνία $\widehat{xOy} = 90^\circ$ και να πάρουμε ένα σημείο A στην πλευρά Ox, ώστε να είναι $OA = 3,5\text{cm}$. Στη συνέχεια να βρεθεί σημείο B της Oy, ώστε να είναι $AB = 7\text{cm}$. Να μετρηθούν οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ του τριγώνου OAB.

 Λύση

Μετρώντας με το μοιρογνωμόνιο βλέπουμε ότι $\widehat{A} = 60^\circ$ και $\widehat{B} = 30^\circ$



Γ
Ε
Μ
Ν
Ο
Ι
Κ
Ρ
Ι
Ε
Σ
Β
Α
Σ
Τ
Ο
Ι
Κ
Ε
Σ

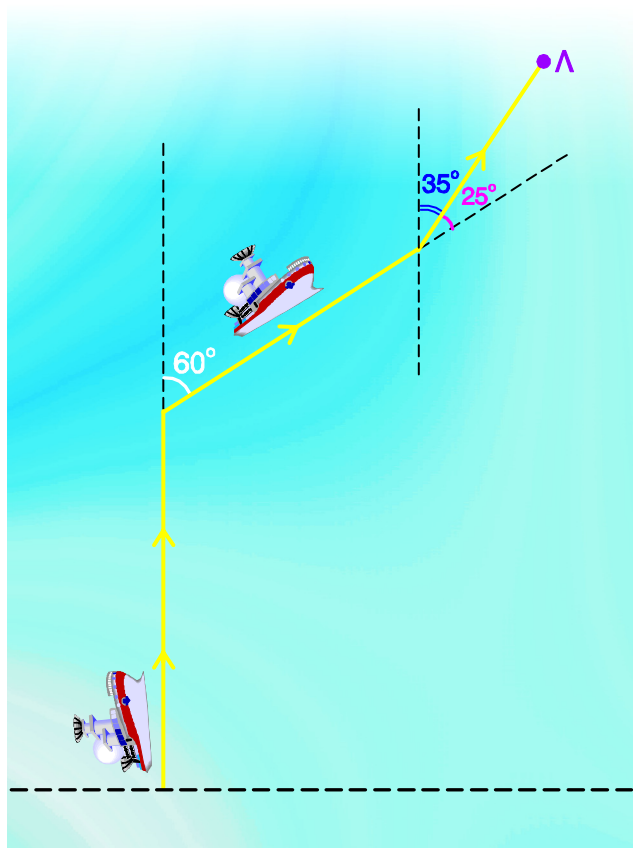


10. Ένα πλοίο μετά την αναχώρησή του διανύει 100Km προς Βορρά και μετά στρίβει 60° προς τα δεξιά. Μετά από άλλα 80Km πορεία, στρίβει 25° προς τα αριστερά και μετά τα επόμενα 60Km φθάνει στον προορισμό του.

- α. Να χαραχτεί η πορεία του πλοίου, σχεδιάζοντας τα 20Km με 1cm.
β. Να μετρηθεί η γωνία που σχηματίζει η τελευταία πορεία του πλοίου, με τη διεύθυνση Βορράς – Νότος.

 Λύση

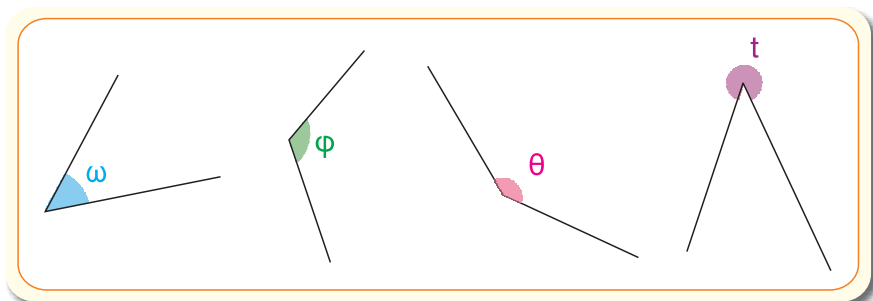
α.



- β. Η τελευταία πορεία του πλοίου με τη διεύθυνση Βορράς – Νότος σχηματίζει γωνία 35° .

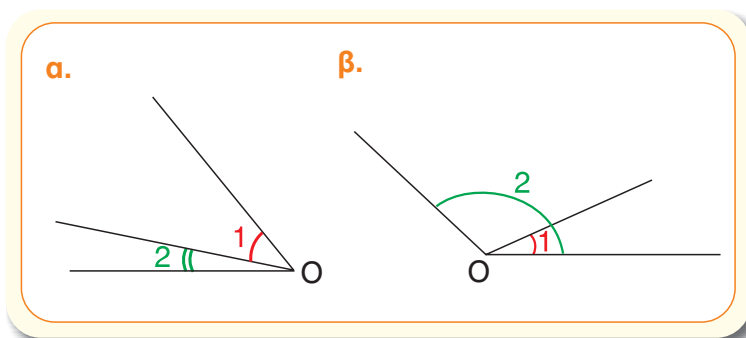
ΕΞΑΣΚΗΣΗ

11. Να σχεδιάσετε γωνία $\chi\hat{O}\gamma = 68^\circ$ και στη συνέχεια να φέρεται ημιευθεία $O\delta$ η οποία να τη χωρίζει σε δύο γωνίες από τις οποίες η μία να είναι 28° .
12. Να σχεδιάσετε τις γωνίες
 $\hat{\alpha} = 32^\circ$, $\hat{\beta} = 75^\circ$, $\hat{\gamma} = 30^\circ$, $\hat{\delta} = 100^\circ$,
 $\hat{\varepsilon} = 160^\circ$, $\hat{\eta} = 220^\circ$, $\hat{\theta} = 270^\circ$, $\hat{\kappa} = 330^\circ$.
13. Να βρείτε το μέτρο των παρακάτω γωνιών.



(Απ.: $\hat{\omega} = 50^\circ$, $\hat{\phi} = 112^\circ$, $\hat{\theta} = 134^\circ$, $\hat{\tau} = 315^\circ$)

14. Να μετρήσετε με το μοιρογνώμονιο τις γωνίες $\hat{O}_1$ και $\hat{O}_2$

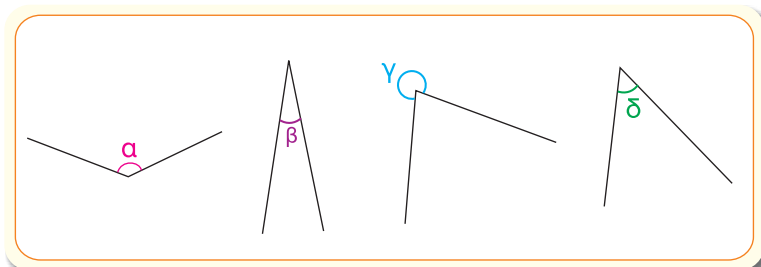


(Απ.: α. $\hat{O}_1 = 40^\circ$, $\hat{O}_2 = 10^\circ$, β. $\hat{O}_1 = 20^\circ$, $\hat{O}_2 = 130^\circ$)

Γ
Ε
Μ
Α
Σ
Ι
Κ
Ε
Σ
Τ
Ο
Ρ
Ι
Ε
Σ



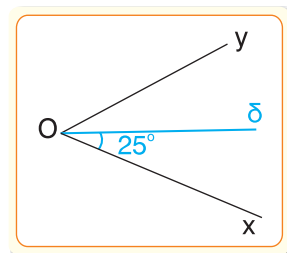
15. Να συγκρίνετε τις γωνίες και να τις γράψετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη.



(Απ.: $\hat{\beta} < \hat{\delta} < \hat{\alpha} < \hat{\gamma}$)

16. Να σχηματίσετε γωνίες ίσες με 80° και 130° και να φέρετε τις διχοτόμους τους.

17. Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{xOy}$.
Να βρείτε τις γωνίες $\gamma\hat{O}\delta$ και $\hat{xOy}$.



(Απ.: $\gamma\hat{O}\delta = 25^\circ$, $\hat{xOy} = 50^\circ$)

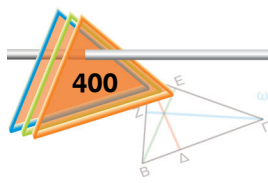
18. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να φέρεται τις διχοτόμους των γωνιών του.

19. Να σχεδιάσετε γωνία $\hat{xOy} = 90^\circ$ και να πάρετε στην πλευρά Ογ ένα σημείο Κ τέτοιο, ώστε $OK = 2\text{cm}$. Στη συνέχεια να βρείτε στην πλευρά Οχ ένα σημείο Λ, ώστε να είναι $KL = 4\text{cm}$. Να μετρήσετε τις γωνίες $\hat{K}$ και $\hat{\Lambda}$ του τριγώνου $\hat{OK\Lambda}$.

(Απ.: $\hat{K} = 60^\circ$, $\hat{\Lambda} = 30^\circ$)

20. Να σχηματίσετε μία γωνία $\hat{xOy}$. Στις ημιευθείες Οχ και Ογ να πάρετε τα σημεία Α και Β έτσι, ώστε $OA = OB = 4\text{cm}$. Να φέρετε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και να συγκρίνετε τις γωνίες $\hat{OBA}$ και $\hat{OAB}$.

(Απ.: είναι ίσες)



B.1.6 ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ – ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

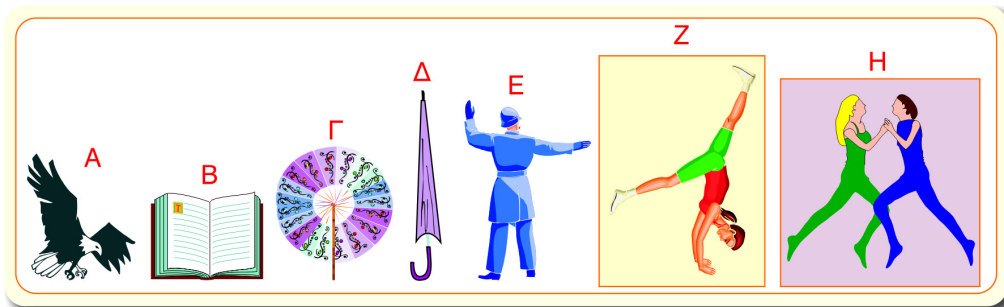
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σε όλα τα παρακάτω αντικείμενα σχηματίζονται διάφορες γωνίες ανάλογα με τη σχετική θέση, κάθε φορά, δύο ημιευθειών που έχουν ένα κοινό σημείο, όπως π.χ. είναι οι δείκτες του ρολογιού, τα πόδια των ανθρώπων, τα φτερά του αετού κ.λπ.

Η σειρά που τοποθετήθηκαν τα διάφορα σκίτσα είναι τυχαία.

Μπορείς να βρεις τη σωστή αντιστοιχία;

Γ
Ε
Ν
Ο
Ι
Κ
Ε
Σ
Α
Μ
Β
Σ
Ι
Κ
Ε
Σ



✍️ Απάντηση

Οι γωνίες που σχηματίζονται είναι:

- A.** αμβλεία **B.** ευθεία **Γ.** πλήρης
Δ. οξεία **E.** ορθή
Z. αμβλεία **H.** οξεία.

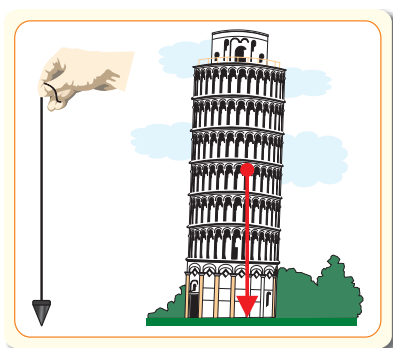
ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ-ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Το σπίτι της διπλανής εικόνας έχει δύο καμινάδες.

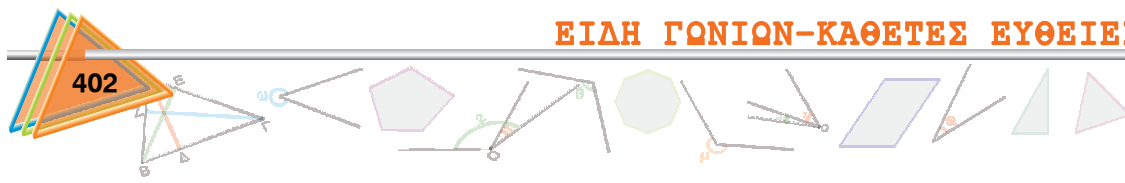
- α. Ποια είναι η μεταξύ τους διαφορά;
- β. Ποια από τις δύο είναι κάθετη στη στέγη και γιατί;
- γ. Γενικότερα είναι δυνατό να έχουμε κάθετες ευθείες, χωρίς απαραίτητα να είναι αυτές οριζόντιες και κατακόρυφες;



- δ. Ξέρετε γιατί δεν πέφτει ο πύργος της Πίζας;
- ε. Πώς βρίσκουμε την κατακόρυφο σε έναν τόπο;
- στ. Και πώς ελέγχουμε ότι ένα επίπεδο έχει οριζόντια θέση;

✍️ Απάντηση

- α. Η δεξιά καμινάδα είναι κάθετη στο επίπεδο του εδάφους, ενώ η αριστερή καμινάδα είναι κάθετη στο επίπεδο της στέγης.
- β. Η αριστερή καμινάδα.
- γ. Είναι δυνατόν να υπάρχουν κάθετες ευθείες χωρίς αυτές να είναι οριζόντιες ή κατακόρυφες.
- δ. Δεν πέφτει γιατί η κατακόρυφη που φέρνουμε από το κέντρο βάρους του πύργου πέφτει μέσα στη βάση στήριξής του.
- ε. Με το νήμα της στάθμης.
- στ. Με το αλφάδι ή το αλφαδολάστιχο.

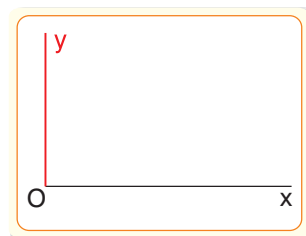


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τοποθέτησε ένα «x» στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:
 - α. Αν οι πλευρές μιας γωνίας είναι ημιευθείες κάθετες μεταξύ τους τότε η γωνίας τους λέγεται:
 - ☐ Οξεία.
 - ☒ Ορθή.
 - ☐ Αμβλεία.
 - β. Αν σε μία γωνία η τελική της πλευρά ταυτίζεται με την αρχική, αφού κάνεις μία πλήρη στροφή, τότε η γωνία λέγεται:
 - ☐ Μηδενική γωνία.
 - ☐ Ευθεία γωνία.
 - ☒ Πλήρης γωνία.
2. Σχεδίασε ημιευθεία Ox και χάραξε ευθεία που να διέρχεται από το O κάθετη στην Ox .

 Λύση

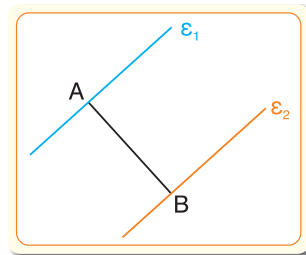
Η Oy είναι κάθετη στην Ox στο O .



3. Σχεδίασε δύο ευθείες που να διέρχονται από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος και να είναι κάθετες σ' αυτό.

 Λύση

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες στο ευθύγραμμο τμήμα AB στα άκρα του A και B αντίστοιχα.



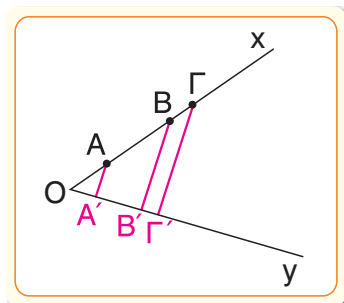
ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ-ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ



4. Σχεδιάσε δύο ημιευθείες Ox και Oy που να μην περιέχονται στην ίδια ευθεία. Σημείωσε στην Ox τρία σημεία A , B , και Γ . Από κάθε σημείο από αυτά σχεδιάσε ευθεία κάθετη προς την Oy .

Λύση

Τα ευθύγραμμα τμήματα AA' , BB' και $\Gamma\Gamma'$ είναι κάθετα στην Oy από τα σημεία A , B και Γ αντίστοιχα.

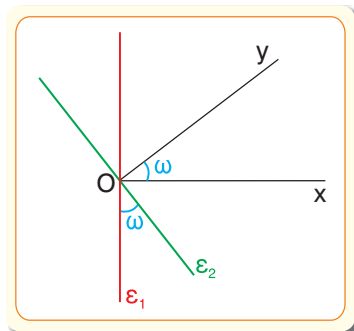


5. Σχεδιάσε δύο ημιευθείες Ox και Oy που να μην περιέχονται στην ίδια ευθεία. Στο σημείο O να φέρεις τις κάθετες ευθείες προς τις Ox και Oy . Τι παρατηρείς;

Λύση

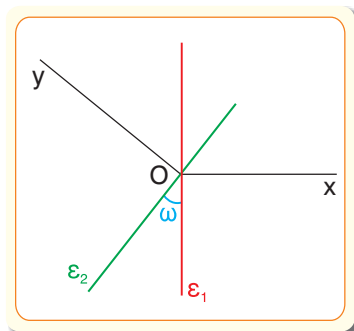
1^η περίπτωση:

Αν οι ημιευθείες Ox και Oy σχηματίζουν οξεία γωνία και φέρουμε την ε_1 κάθετη στην Ox και την ε_2 κάθετη στην Oy τότε η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι ίση με την γωνία $\widehat{xOy}$.



2^η περίπτωση:

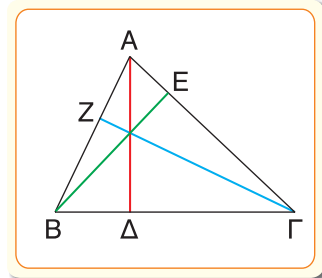
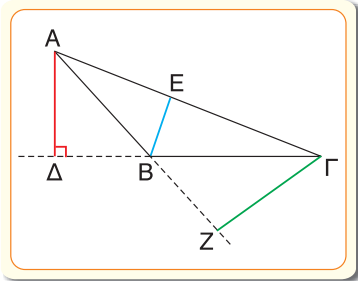
Αν οι ημιευθείες Ox και Oy σχηματίζουν αμβλεία τότε η γωνία $\widehat{\omega}$ που σχηματίζουν οι κάθετες ε_1 , ε_2 θα είναι οξεία και ίση με την οξεία γωνία που θα πρέπει να προσθέσουμε στην $\widehat{xOy}$ για να σχηματιστεί μία ευθεία γωνία.



6. Σχεδίασε ένα τρίγωνο και φέρε από κάθε κορυφή του την κάθετη προς την απέναντι πλευρά.

 **Λύση**

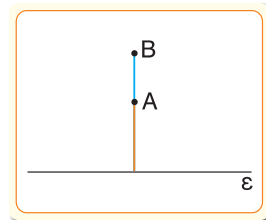
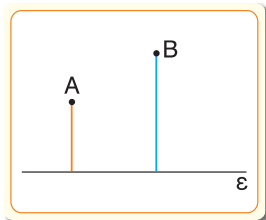
Είναι AD κάθετη στη $B\Gamma$, BE κάθετη στην AG και $ΓΖ$ κάθετη στην AB .



Αν η γωνία B είναι αμβλεία τότε η κάθετη AD στην $B\Gamma$ θα είναι κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$. Όπως και η $ΓΖ$ που είναι κάθετη προς την AB .

7. Σχεδίασε μία ευθεία ϵ και δύο σημεία A και B που δεν ανήκουν στην ευθεία αυτή. Φέρε από το A και B ευθείες κάθετες προς την ϵ και εξέτασε σε ποια περίπτωση οι δύο αυτές κάθετες συμπίπτουν.

 **Λύση**



Οι κάθετες ευθείες θα συμπίπτουν μόνο αν τα σημεία A και B βρίσκονται στην ίδια κάθετη ευθεία προς την ϵ .

8. Τοποθέτησε της παρακάτω ονομασίες γωνιών, με σειρά μεγέθους του μέτρου του:

Ορθή – Ευθεία – Πλήρης – Αμβλεία – Μηδενική – Μη κυρτή – Οξεία.

 **Λύση**

Μηδενική – Οξεία – Ορθή – Αμβλεία –
Ευθεία – Μη κυρτή – Πλήρης.

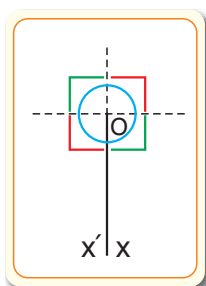
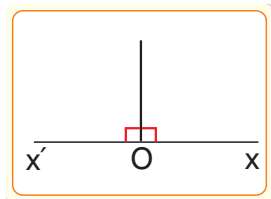
Γ
Ε
Ω
Ν
Ε
Ν
Ο
Ι
Κ
Ρ
Ι
Ε
Σ
Β
Α
Μ
Σ
Ι
Κ
Ε
Σ



9. Να συγκριθεί η πλήρης και η ευθεία γωνία με την ορθή.

 Λύση

Η ευθεία γωνία ισούται με 2 ορθές.

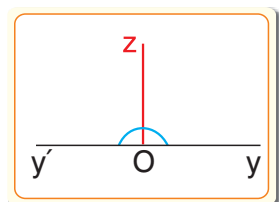
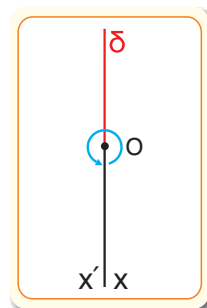


Η πλήρης γωνία ισούται με 4 ορθές.

10. Να σχεδιαστεί η διχοτόμος μιας πλήρους και μίας ευθείας γωνίας.

 Λύση

Η Οδ, δηλαδή η αντικείμενη ημιευθεία της Οχ είναι η διχοτόμος της πλήρους γωνίας $\widehat{xOx'}$.



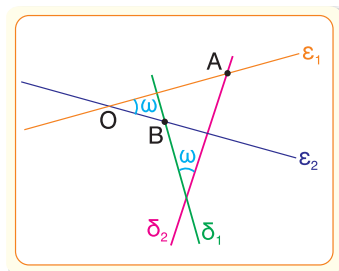
Η Oz, δηλαδή η κάθετη στην yy' στο σημείο O είναι η διχοτόμος της ευθείας γωνίας $\widehat{yOy'}$.

11. Να σχεδιαστούν δύο τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 και έστω O το σημείο τομής τους. Από ένα σημείο A της ε_1 φέρνουμε κάθετη στην ε_2 και από ένα σημείο B της ε_2 φέρνουμε κάθετη στην ε_1 . Να συγκριθεί η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι δύο κάθετες με την γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 .

 Λύση

Από το σημείο A της ε_1 φέρνουμε την δ_2 κάθετη στην ε_2 , ενώ από το σημείο B της ε_2 φέρνουμε την δ_1 κάθετη στην ε_1 .

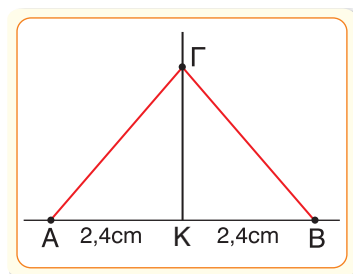
Παρατηρούμε ότι η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες δ_1 και δ_2 είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 .



12. Σε μία ευθεία ε παίρνουμε με τη σειρά τα σημεία A , K και B έτσι, ώστε να είναι $AK = 2,4\text{cm}$ και $KB = 2,4\text{cm}$. Από το K φέρνουμε τη κάθετη στην ε και πάνω σ' αυτή παίρνουμε ένα σημείο Γ . Να συγκριθούν τα μήκη των τμημάτων ΓA και ΓB .

 Λύση

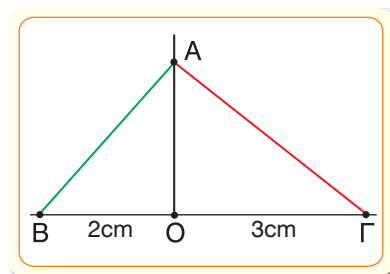
Παρατηρούμε ότι $\Gamma A = \Gamma B$.



13. Σε μία ευθεία ε παίρνουμε τα σημεία B , O και Γ στη σειρά έτσι, ώστε $BO = 2\text{cm}$ και $OG = 3\text{cm}$. Από το O φέρνουμε κάθετη στην ε και πάνω σ' αυτή παίρνουμε ένα σημείο A . Να συγκριθούν τα τμήματα AB και $A\Gamma$.

 Λύση

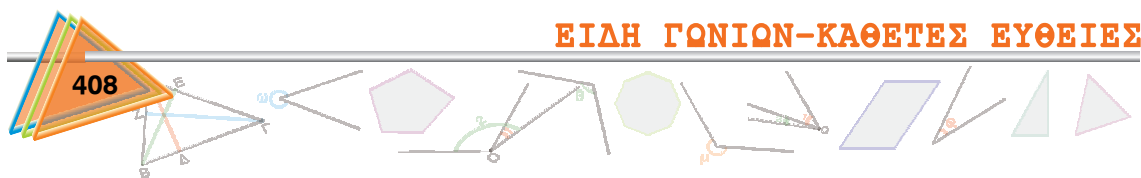
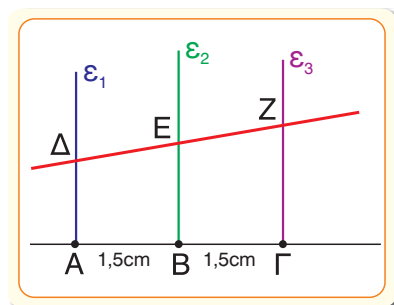
Παρατηρούμε ότι $AB < A\Gamma$.



14. Σε μία ευθεία ε παίρνουμε στη σειρά τα σημεία A, B και Γ έτσι, ώστε $AB = BG = 1,5\text{cm}$. Στα σημεία A, B και Γ φέρνουμε κάθετες στην ε . Χαράσσουμε άλλη ευθεία που τέμνει τις κάθετες στα σημεία Δ, Ε και Ζ. ΝΑ συγκριθούν τα τμήματα ΔΕ και ΕΖ.

 Λύση

Παρατηρούμε ότι $DE = EZ$.



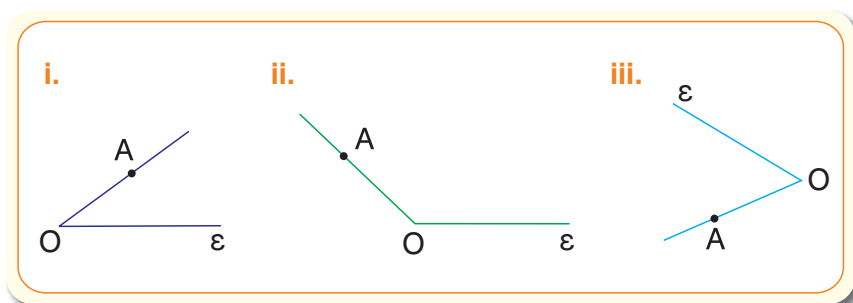
ΕΞΑΣΚΗΣΗ

15. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και να πάρετε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του. Να σχεδιάσετε τρεις ευθείες που η καθεμία να περνά από το μέσο μιας πλευράς του τριγώνου και να είναι κάθετη στην πλευρά αυτή. Τι παρατηρείτε;

(Απ.: Οι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο)

16. Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB και M το μέσο του. Μία ευθεία ϵ διέρχεται από το μέσο M του AB και δεν είναι κάθετη σ' αυτό. Να φέρετε ευθείες κάθετες από τα A και B προς την ϵ .

17. Να φέρετε ευθεία κάθετη πάνω στην ευθεία $O\epsilon$ από το σημείο A .



18. Να εκφράσετε σε μοίρες την πλήρη, την ευθεία και την ορθή γωνία.

19. Είναι δυνατόν τρεις ευθείες του επιπέδου να είναι κάθετες ανά δύο μεταξύ τους.

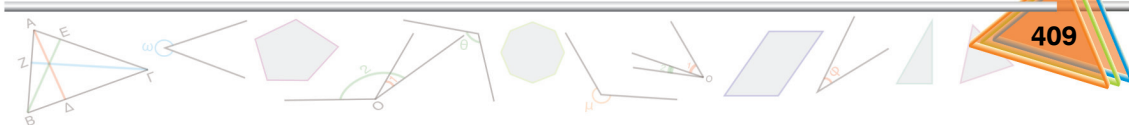
(Απ.: όχι)

20. Σε μία ευθεία ϵ παίρνουμε με τη σειρά τα σημεία A , O και B έτσι, ώστε να είναι $AO = 3\text{cm}$ και $OB = 3\text{cm}$. Από το O φέρνουμε κάθετη στην ϵ και πάνω σ' αυτή παίρνουμε ένα σημείο K . Να συγκρίνετε τα μήκη των τμημάτων KA και KB .

(Απ.: $KA = KB$)

21. Σε μία ευθεία ϵ παίρνουμε στη σειρά τα σημεία A , K και B έτσι, ώστε $AK = 3\text{cm}$ και $KB = 1,5\text{cm}$. Από το K φέρνουμε κάθετη στην ϵ και πάνω σ' αυτή παίρνουμε ένα σημείο Γ . Να συγκρίνετε τα τμήματα ΓA και ΓB .

(Απ.: $\Gamma A > \Gamma B$)



22. Σε μία ευθεία ε παίρνουμε στη σειρά τα σημεία A , B και Γ έτσι, ώστε $AB = B\Gamma = 2\text{cm}$. Στα σημεία A , B και Γ φέρνουμε κάθετες στην ε . Φέρνουμε άλλη μία ευθεία ε' που τέμνει τις κάθετες στα σημεία A' , B' και Γ' . Να συγκρίνετε τα τμήματα $A'B'$ και $B'\Gamma'$.

(Απ.: $A'B' = B'\Gamma'$)

23. Σε μία ευθεία ε παίρνουμε στη σειρά τα σημεία A , B και Γ έτσι, ώστε $AB = 2\text{cm}$ και $B\Gamma = 3\text{cm}$. Στα σημεία A , B και Γ φέρνουμε τις ε_1 , ε_2 και ε_3 αντίστοιχα κάθετες στην ε . Μία άλλη ευθεία ε' τέμνει τις ε_1 , ε_2 και ε_3 στα σημεία Δ , E και Z αντίστοιχα. Να συγκρίνετε τα τμήματα ΔE και ΔZ .

(Απ.: είναι $\Delta E < \Delta Z$)

