

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ – ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Μεταβλητή : Είναι ένα οποιοδήποτε γράμμα, το οποίο παριστάνει έναν οποιοδήποτε αριθμό.

2.

Αριθμητική παράσταση : Είναι οποιαδήποτε παράσταση που περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών

3.

Αλγεβρική παράσταση : Είναι οποιαδήποτε παράσταση που περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

4.

Επιμεριστική ιδιότητα : Είναι η ιδιότητα $a(b + \gamma) = ab + a\gamma$
επομένως είναι και $(a + \beta)(\gamma + \delta) = a\gamma + a\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

5.

Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης

Είναι ο αριθμός που θα βρούμε αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Για την αριθμητική τιμή : Φέρνουμε την αλγεβρική παράσταση στην απλούστερη δυνατή μορφή.

Εκτελούμε όλες τις πράξεις και τις αναγωγές.

Αντικαθιστάμε τις μεταβλητές με τις δοσμένες τιμές τους.

Εκτελούμε πράξεις.

2.

Υπενθύμιση : Οι πράξεις εκτελούνται με την εξής προτεραιότητα.

Υπολογίζουμε τις δυνάμεις

Εκτελούμε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις

Εκτελούμε προσθαφαιρέσεις

Αν στην παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις, πρώτα μας απασχολεί το εσωτερικό των παρενθέσεων.

3.

Ανάποδα η επιμεριστική : Πρέπει να χωνέψουμε ότι η παράσταση $αβ + αγ$ γράφεται $αβ + αγ = α(β + γ) = (β + γ)α$
(Από άθροισμα σε γινόμενο)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

i) $2α - 3α + 5α - α$

ii) $3β + 4β - 8β - 3β + 2β$

iii) $2x - 3 + 5x + 12 - 6x + 1$

iv) $2x - 3y + 5x - 4y + 2 - x$

Προτεινόμενη λύση

i) $2α - 3α + 5α - α = (2 - 3 + 5 - 1)α = 3α$

ii) $3β + 4β - 8β - 3β + 2β = (3 + 4 - 8 - 3 + 2)β = -2β$

iii) $2x - 3 + 5x + 12 - 6x + 1 = 2x + 5x - 6x - 3 + 12 + 1 = x + 10$

iv) $2x - 3y + 5x - 4y + 2 - x = 2x + 5x - x - 3y - 4y + 2$
 $= 6x - 7y + 2$

σχόλιο 3

ποιο σύντομα
η αναγωγή

2.

Να γράψετε με απλούστερη μορφή την παρακάτω παράσταση

$$\Pi = 2x - 3(x - 3y) + 4(y + x) - x(-1 + y) + y(x + 4)$$

και να βρείτε την τιμή αυτής όταν

i) $x = 2$ και $y = 3$

ii) $x = -5$ και $y = 1$

iii) $x = -1$ και $y = -2$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}\Pi &= 2x - 3(x - 3y) + 4(y + x) - x(-1 + y) + y(x + 4) = \\ &= 2x - 3x + 9y + 4y + 4x + x - xy + yx + 4y = \\ &= 4x + 17y\end{aligned}$$

σχόλιο 1

i)

$$\begin{aligned}\text{Για } x = 2 \text{ και } y = 3 \text{ η τιμή της παράστασης είναι } \Pi_1 &= 4 \cdot 2 + 17 \cdot 3 = \\ &= 8 + 51 = \\ &= 59\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\text{Για } x = -5 \text{ και } y = 1 \text{ η τιμή της παράστασης είναι } \Pi_2 &= 4 \cdot (-5) + 17 \cdot 1 = \\ &= -20 + 17 = \\ &= -3\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\text{Για } x = -1 \text{ και } y = -2 \text{ η τιμή της παράστασης είναι } \Pi_3 &= 4 \cdot (-1) + 17 \cdot (-2) = \\ &= -4 - 34 = \\ &= -38\end{aligned}$$

3.

Στην αρχή της σχολικής χρονιάς ένας μαθητής πήγε στο βιβλιοπωλείο και αγόρασε μία τσάντα αξίας 30 €, τετράδια αξίας 50 λεπτά το ένα και στυλό διαφόρων χρωμάτων αξίας 1,10 € τον έναν.

Χρησιμοποιώντας δύο μεταβλητές

i) Να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση η οποία θα μας δίνει το κόστος της αγοράς των παραπάνω προϊόντων

ii) Αν ο μαθητής αγόρασε 12 τετράδια και 4 στυλό, πόσα χρήματα πλήρωσε ;

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω x το κόστος του ενός τετραδίου και y το κόστος του κάθε στυλό.

Το κόστος όλων των τετραδίων είναι $0,50 x$ € και το κόστος όλων των στυλό $1,10y$ €

Οπότε το κόστος όλων των πραγμάτων σε ευρώ δίνεται από την παράσταση

$$\Pi = 0,50 x + 1,10y + 30$$

ii)

$$\begin{aligned}\text{Για } x = 12 \text{ και } y = 4 \text{ η τιμή της παράστασης είναι } \Pi_1 &= 0,50 \cdot 12 + 1,10 \cdot 4 + 30 = \\ &= 6 + 4,40 + 30 = \\ &= 40,40\end{aligned}$$

Ο μαθητής πλήρωσε 40,40 €

4.

Η κάθε τηλεφωνική μονάδα κοστίζει 0,20 € και το μηνιαίο πάγιο του λογαριασμού είναι 10 €.

- i) Χρησιμοποιώντας μία μεταβλητή, να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση η οποία θα μας δίνει το κόστος του μηνιαίου λογαριασμού του τηλεφώνου.
- ii) Αν το ποσό του λογαριασμού επιβαρύνεται επιπλέον και με ΦΠΑ 23% , να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση η οποία θα μας δίνει το κόστος του λογαριασμού μετά την επιβάρυνση με τον ΦΠΑ.
- iii) Αν σε έναν μήνα κάνουμε 50 τηλεφωνήματα , πόσα χρήματα θα πληρώσουμε
 - α) Χωρίς τον ΦΠΑ , β) Μετά την επιβολή του ΦΠΑ .

Προτεινόμενη λύση**i)**

Έστω x το πλήθος των μονάδων που έγιναν σε ένα μήνα.

Τότε το κόστος αυτών είναι $0,20x$ €.

Επειδή όμως ο λογαριασμός επιβαρύνεται και με το μηνιαίο πάγιο των 20 €, το σύνολο του λογαριασμού σε ευρώ δίνεται από την παράσταση

$$K = 0,20x + 20 \quad (1)$$

ii)

Η επιβάρυνση του λογαριασμού λόγω ΦΠΑ είναι $\frac{23}{100}K = 0,23(0,20x + 20) = 0,046x + 4,6$

Επομένως το σύνολο του λογαριασμού μαζί με τον ΦΠΑ είναι

$$K' = K + \frac{23}{100}K = 0,20x + 20 + 0,046x + 4,6 = 0,246x + 24,6 \quad (2)$$

iii)

α) Για $x = 50$ ο τύπος (1) δίνει $K = 0,20 \cdot 50 + 20 = 10 + 20 = 30$ €

β) Για $x = 50$ ο τύπος (2) δίνει $K' = 0,246 \cdot 50 + 24,6 = 12,3 + 24,6 = 36,9$ €

5.

Να γράψετε με απλούστερη μορφή κάθε μία από τις παραστάσεις
 $A = -12 + 4(x + 6) - 4(7 - y)$, $B = -8(x + y) - 5 + 6(x + 3) - 6(5 - y)$
 και να βρείτε την τιμή κάθε μιας όταν

i) $x + y = -5$, ii) $x + y = \frac{1}{4}$, iii) $x + y = 0,6$

Προτεινόμενη λύση

$$A = -12 + 4(x + 6) - 4(7 - y) = -12 + 4x + 24 - 28 + 4y =$$

$$= 4x + 4y - 16$$

$$B = -8(x + y) - 5 + 6(x + 3) - 6(5 - y) = -8x - 8y - 5 + 6x + 18 - 30 + 6y =$$

$$= -2x - 2y - 17$$

i)

Αν $x + y = -5$ έχουμε ότι

$$A_1 = 4x + 4y - 16 =$$

$$= 4(x + y) - 16 =$$

$$= 4(-5) - 16 =$$

$$= -20 - 16 = -36$$

$$B_1 = -2x - 2y - 17 =$$

$$= -2(x + y) - 17 =$$

$$= -2(-5) - 17 =$$

$$= 10 - 17 = -7$$

σχόλιο 3

ii)

Αν $x + y = \frac{1}{4}$ έχουμε ότι $A_2 = 4 \cdot \frac{1}{4} - 16 = 1 - 16 = -15$

$$B_2 = -2 \cdot \frac{1}{4} - 17 = -\frac{35}{2}$$

iii)

Αν $x + y = 0,6$ έχουμε ότι $A_3 = 4 \cdot 0,6 - 16 = 2,4 - 16 = -13,6$

$$B_3 = -2 \cdot 0,6 - 17 = -1,2 - 17 = -18,2$$

6.

Οι ανθρωπολόγοι εκτιμούν ότι το ύψος του ανθρώπου δίνεται από τις παραστάσεις :

$$A = 2,89x + 70,64 \quad (\text{για τους άνδρες}) \quad \text{και}$$

$$B = 2,75x + 71,48 \quad (\text{για τις γυναίκες})$$

όπου x σε cm το μήκος του βραχίονα. Σε μία ανασκαφή βρέθηκε ένα οστό από βραχίονα μήκους 0,45 m.

α) Αν προέρχεται από άνδρα, ποιο ήταν το ύψος του;

β) Αν προέρχεται από γυναίκα ποιο ήταν το ύψος της

Προτεινόμενη λύση

$$0,45 \text{ m} = 0,45 \cdot 100 \text{ cm} = 45 \text{ cm}$$

α)

$$\begin{aligned} \text{Για } x = 45 \text{ η παράσταση } A \text{ δίνει } A_1 &= 2,89 \cdot 45 + 70,64 = \\ &= 130,05 + 70,64 = \\ &= 200,69 \end{aligned}$$

$$\text{Συνεπώς ο άνδρας είχε ύψος } 200,69 \text{ cm} = 200,69 : 100 = 2,0069 \text{ m}$$

β)

$$\begin{aligned} \text{Για } x = 45 \text{ η παράσταση } B \text{ δίνει } B_1 &= 2,75 \cdot 45 + 71,48 = \\ &= 123,75 + 71,48 = \\ &= 195,23 \end{aligned}$$

$$\text{Συνεπώς η γυναίκα είχε ύψος } 195,23 \text{ cm} = 195,23 : 100 = 1,9523 \text{ m}$$

7.

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο κάθε μία από τις ίσες πλευρές του είναι κατά 2cm μεγαλύτερη από την βάση του τριγώνου. Χρησιμοποιώντας μία μεταβλητή να γράψετε μία αλγεβρική παράσταση που να μας δίνει πόσο είναι το μήκος της περιμέτρου του τριγώνου.

Αν η βάση του τριγώνου είναι 2 m πόση είναι η περίμετρός του;

Προτεινόμενη λύση

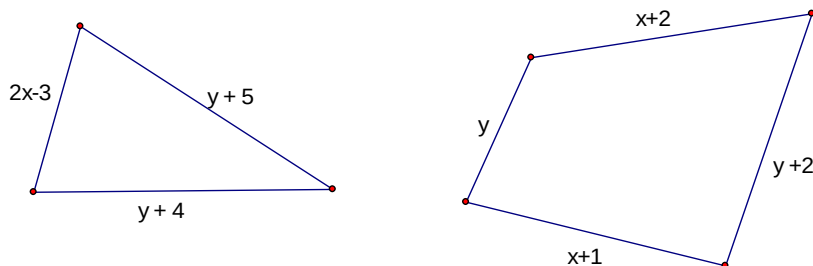
Αν x είναι το μήκος της βάσης, τότε κάθε μία από τις ίσες πλευρές είναι $x + 2$

Επομένως η περίμετρος σε cm είναι $\Pi = x + 2 + x + 2 + x = 3x + 4$

$$\text{Για } x = 2 \text{ η περίμετρος είναι } \Pi_1 = 3 \cdot 2 + 4 = 10 \text{ cm}$$

8.

Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε την περίμετρό τους όταν $x + y = 5$.

**Προτεινόμενη λύση**

Η περίμετρος του τριγώνου είναι $\Pi = 2x - 3 + y + 5 + y + 4 =$
 $= 2x + 2y + 6$

και του τετραπλεύρου είναι $\Pi' = x + 2 + y + 2 + x + 1 + y =$
 $= 2x + 2y + 5$

Όταν $x + y = 5$, έχουμε $\Pi_1 = 2x + 2y + 6 =$
 $= 2(x + y) + 6 =$
 $= 2 \cdot 5 + 6 = 16$

$$\Pi'_1 = 2x + 2y + 5 = 2(x + y) + 5 = 2 \cdot 5 + 5 = 15$$

9.

Να γίνουν οι πράξεις

$$(2 + x)(-x + 1), \quad (\alpha + \beta)(\kappa + \lambda) - \alpha\kappa - \beta\lambda, \quad 2(\omega + 5) - 3(1 - 2y) + 4(\omega + y)$$

Προτεινόμενη λύση

$$(2 + x)(-x + 1) = -2x + 2 - x^2 + x = -x^2 - x + 2$$

$$(\alpha + \beta)(\kappa + \lambda) - \alpha\kappa - \beta\lambda = \alpha\kappa + \alpha\lambda + \beta\kappa + \beta\lambda - \alpha\kappa - \beta\lambda = \alpha\lambda + \beta\kappa$$

$$2(\omega + 5) - 3(1 - 2y) + 4(\omega + y) = 2\omega + 10 - 3 + 6y + 4\omega + 4y = 6\omega + 10y + 7$$

θεωρία 4

10.

Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = 2(3 - x) + y(5 + x) + 2x - 4 - 5y \text{ όταν } xy = -2.$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} A &= 2(3 - x) + y(5 + x) + 2x - 4 - 5y = \\ &= 6 - 2x + 5y + xy + 2x - 4 - 5y = \\ &= 2 + xy \end{aligned}$$

$$\text{Όταν } xy = -2 \text{ η τιμή της παράστασης είναι } A_1 = 2 + (-2) = 2 - 2 = 0$$