

1.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Πρόταση : Για δύο αριθμούς α και β ισχύει μία από τις σχέσεις
 $\alpha = \beta$ ή $\alpha < \beta$ ή $\alpha > \beta$

2.

Ιδιότητα στην ισότητα : Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$

3.

Ιδιότητα στην ισότητα : Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ με $\gamma \neq 0$

4.

Εξίσωση με άγνωστο το x : Είναι κάθε ισότητα που εκτός από συγκεκριμένους αριθμούς περιέχει και τον άγνωστο αριθμό x

5.

Μέλη εξίσωσης : Το αριστερά του '=' μέρος της ισότητας λέγεται πρώτο μέλος και το δεξιά δεύτερο μέλος

6.

Γνωστοί – άγνωστοι όροι : Όσοι όροι περιέχουν τον άγνωστο ονομάζονται άγνωστοι όροι.

Όσοι όροι δεν περιέχουν τον άγνωστο ονομάζονται γνωστοί όροι.

Σημείωση : κάθε γινόμενο της μορφής λx , όπου λ οποιοσδήποτε αριθμός και x ο άγνωστος , θεωρείται ως ένας άγνωστος όρος

7.

Μεταφορά όρου : Μεταφέροντας έναν όρο από το ένα μέλος μιας εξίσωσης στο άλλο υποχρεωτικά του αλλάζουμε πρόσημο

8.

Λύση εξίσωσης : Είναι ο αριθμός με τον οποίο πρέπει να αντικαταστήσουμε τον άγνωστο έτσι ώστε η εξίσωση να γίνει αληθινή αριθμητική ισότητα (επαληθεύεται)

9.

Επαλήθευση εξίσωσης : Είναι η διαδικασία με βάση την οποία ελέγχουμε την ορθότητα της λύσης μιας εξίσωσης

10 .

Αδύνατη εξίσωση : Είναι η εξίσωση που δεν έχει λύση .
Μία αδύνατη εξίσωση είναι της μορφής $0x = a$ όπου $a \neq 0$

11 .

Αόριστη εξίσωση ή ταυτότητα : Είναι η εξίσωση που αληθεύει για οποιαδήποτε τιμή του αγνώστου.
Μία αόριστη εξίσωση είναι της μορφής $0x = 0$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Πορεία επίλυσης εξίσωσης : Απαλοιφή παρονομαστών (εφ' όσον υπάρχουν)
Εκτέλεση πολλαπλασιασμών (εφ' όσον υπάρχουν)
Χωρισμός γνωστών από τους αγνώστους
Αναγωγή ομοίων όρων
(πρόσθεση αγνώστων – πρόσθεση γνωστών)
Διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου
Απλοποίηση αποτελέσματος

2.

Ειδική περίπτωση : Αν μία εξίσωση περιέχει κλάσματα τα οποία πολλαπλασιάζονται με παρενθέσεις που επίσης περιέχουν κλάσματα τότε για να μην κάνουμε την ίδια δουλειά πολλές φορές πρώτα κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς αυτούς και μετά όλα τα υπόλοιπα

3.

Για την επαλήθευση της εξίσωσης : Αντικαθιστάμε τον άγνωστο με τη λύση που βρήκαμε και ελέγχουμε αν προκύπτει ισότητα

4.

Συντελεστής του αγνώστου το 0 : Αν φθάσουμε σε εξίσωση της μορφής $0 \cdot x = \alpha$, να θυμόμαστε ότι η εξίσωση είναι ή αδύνατη ή αόριστη (ταυτότητα)

5.

Ειδική έρευνα : Αν θέλω να εξετάσω, με ποιες προϋποθέσεις μία εξίσωση είναι αδύνατη φέρνω την εξίσωση στη μορφή $ax = \beta$ και υποχρεώνω να ισχύει $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$

Αν θέλω να εξετάσω, με ποιες προϋποθέσεις μία εξίσωση είναι ταυτότητα, φέρνω την εξίσωση στη μορφή $ax = \beta$ και υποχρεώνω να ισχύει $\alpha = 0$ και $\beta = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

- i) Η εξίσωση $2x = 12$ έχει λύση το 6 (Σ)
- ii) Η εξίσωση $3x - x = x$ έχει λύση το 0 (Σ)
- iii) Η εξίσωση $3x + 2 = 2$ είναι ταυτότητα (Λ)
- iv) Η εξίσωση $0x = 0$ είναι ταυτότητα (Σ)
- v) Η εξίσωση $0x = 3$ είναι αδύνατη (Σ)
- vi) Οι εξισώσεις $x = 4$ και $2x - 8 = 0$ έχουν λύση τον ίδιο αριθμό (Σ)

Προτεινόμενη λύση

- i) Για $x = 6$ η εξίσωση γίνεται $12 = 12$ που είναι αληθές άρα πρόταση (Σ)
- ii) Για $x = 0$ η εξίσωση γίνεται $0 = 0$ που είναι αληθές άρα πρόταση (Σ)
- iii) Η εξίσωση γράφεται $3x + 2 - 2 = 0$ ή $3x = 0$ ή $x = 0$ άρα πρόταση (Λ)
- iv) Ναι από θεωρία
- v) Ναι από θεωρία
- vi) Η πρώτη έχει λύση το 4 η δεύτερη αν $x = 4$ γίνεται $8 - 8 = 0$ αληθές.
Άρα πρόταση (Σ)

2.

Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τη λύση της στην στήλη Β

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $3x = 6$	α. 5
2. $-x + 5 = 0$	β. 9
3. $\frac{x}{3} + 1 = 4$	γ. 2
4. $3x = -10 + x$	δ. -5

Προτεινόμενη λύση

1. $3x = 6$ άρα $x = 2$ οπότε $1 \rightarrow \gamma$
2. $-x + 5 = 0$ άρα $5 = x$ οπότε $2 \rightarrow \alpha$
3. $\frac{x}{3} + 1 = 4$ άρα $3 \cdot \frac{x}{3} + 3 = 12$ άρα $x + 3 = 12$ άρα $x = 9$ οπότε $3 \rightarrow \beta$
4. $3x = -10 + x$ άρα $3x - x = -10$ άρα $2x = -10$ άρα $x = -5$ οπότε $4 \rightarrow \delta$

3.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $\frac{3x-5}{5} - \frac{2x+15}{3} = 6 - \frac{3x+10}{15}$

ii) $\frac{x-8}{2} - \frac{2-2x}{3} = \frac{x+6}{2} + \frac{2x}{3}$

iii) $2x - \frac{5x-12}{4} = 3 + \frac{3x}{4}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Ε Κ Π $(5, 3, 15) = 15$

$$\frac{3x-5}{5} - \frac{2x+15}{3} = 6 - \frac{3x+10}{15} \quad \text{άρα} \quad 15 \cdot \frac{3x-5}{5} - 15 \cdot \frac{2x+15}{3} = 15 \cdot 6 - 15 \cdot \frac{3x+10}{15}$$

$$3(3x-5) - 5(2x+15) = 90 - (3x+10)$$

$$9x - 15 - 10x - 75 = 90 - 3x - 10$$

$$9x - 10x + 3x = 90 + 15 + 75 - 10$$

$$2x = 170$$

$$x = \frac{170}{2} = 85$$

Σχόλιο 1

ii)

Ε Κ Π $(2, 3) = 6$

$$\frac{x-8}{2} - \frac{2-2x}{3} = \frac{x+6}{2} + \frac{2x}{3} \quad \text{άρα} \quad 6 \cdot \frac{x-8}{2} - 6 \cdot \frac{2-2x}{3} = 6 \cdot \frac{x+6}{2} + 6 \cdot \frac{2x}{3}$$

$$3(x-8) - 2(2-2x) = 3(x+6) + 2 \cdot 2x$$

$$3x - 24 - 4 + 4x = 3x + 18 + 4x$$

$$3x + 4x - 3x - 4x = 18 + 24 + 4$$

$$0x = 46 \text{ εξίσωση αδύνατη}$$

Σχόλιο 1

Θεωρία 10

iii)

$$ΕΚΠ = 4$$

Σχόλιο 1

$$2x - \frac{5x-12}{4} = 3 + \frac{3x}{4} \quad \text{άρα} \quad 4 \cdot 2x - 4 \cdot \frac{5x-12}{4} = 4 \cdot 3 + 4 \cdot \frac{3x}{4}$$

$$8x - 1(5x - 12) = 12 + 3x$$

$$8x - 5x + 12 = 12 + 3x$$

$$8x - 5x - 3x = 12 - 12$$

$$0x = 0 \quad \text{εξίσωση αόριστη ή ταυτότητα}$$

Θεωρία 11

4.

Η εξίσωση $(2\lambda - 6)x = \lambda - 3$ είναι ταυτότητα όταν :

A. $\lambda = 1$, B. $\lambda = 2$, Γ. $\lambda = 0$, Δ. $\lambda = 3$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $2\lambda - 6 = 0$ και $\lambda - 3 = 0$

$$2\lambda = 6 \quad \text{και} \quad \lambda = 3$$

$$\lambda = 3 \quad \text{και} \quad \lambda = 3 \quad \text{άρα} \quad \lambda = 3 \quad \text{επομένως σωστό το Δ}$$

Σχόλιο 5

5.

Η εξίσωση $(\lambda - 6)x = 8$ είναι αδύνατη όταν $\lambda = , , ,$

Συμπληρώστε την παραπάνω πρόταση

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $\lambda - 6 = 0$ άρα $\lambda = 6$

Η πρόταση συμπληρωμένη : όταν $\lambda = 6$

Σχόλιο 5

6.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $\frac{x-4}{5} - \frac{x-3}{2} = \frac{4x-1}{3}$

ii) $x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3} + 1$

iii) $x + \frac{x+4}{2} = \frac{3x}{2} + 2$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$ΕΚΠ(5, 2, 3) = 30$$

$$\frac{x-4}{5} - \frac{x-3}{2} = \frac{4x-1}{3} \quad \text{άρα}$$

$$30 \cdot \frac{x-4}{5} - 30 \cdot \frac{x-3}{2} = 30 \cdot \frac{4x-1}{3}$$

$$6(x-4) - 15(x-3) = 10(4x-1)$$

$$6x - 24 - 15x + 45 = 40x - 10$$

$$6x - 15x - 40x = 24 - 45 - 10$$

$$-49x = -31$$

$$x = \frac{-31}{-49} = \frac{31}{49}$$

ii)

$$ΕΚΠ = 3$$

$$x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3} + 1 \quad \text{άρα} \quad 3x - 3 \cdot \frac{x}{3} = 3 \cdot \frac{2x}{3} + 1 \cdot 3$$

$$3x - x = 2x + 3$$

$$3x - x - 2x = 3$$

$$0x = 3 \quad \text{αδύνατη η εξίσωση}$$

iii)

$$ΕΚΠ = 2$$

$$x + \frac{x+4}{2} = \frac{3x}{2} + 2 \quad \text{άρα} \quad 2x + 2 \cdot \frac{x+4}{2} = 2 \cdot \frac{3x}{2} + 2 \cdot 2$$

$$2x + 1(x+4) = 3x + 4$$

$$2x + x + 4 = 3x + 4$$

$$2x + x - 3x = 4 - 4$$

$$0x = 0 \quad \text{ταυτότητα}$$

7.

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\text{i)} \quad \frac{x+1}{4} + \frac{3x+1}{2} = \frac{27x+19}{20} + \frac{2x-1}{5}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{2x}{15} + \frac{x-6}{12} = \frac{3}{10} \left(\frac{x}{2} - 5 \right)$$

$$\text{iii)} \quad \frac{9x+7}{2} - \left(x - \frac{x-2}{7} \right) = 3$$

$$\text{iv)} \quad \frac{3x}{2} - 5 = \frac{x}{2} + \frac{2x+7}{2}$$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$ΕΚΠ(4, 2, 20, 5) = 20$$

$$\frac{x+1}{4} + \frac{3x+1}{2} = \frac{27x+19}{20} + \frac{2x-1}{5}$$

$$\text{άρα} \quad 20 \cdot \frac{x+1}{4} + 20 \cdot \frac{3x+1}{2} = 20 \cdot \frac{27x+19}{20} + 20 \cdot \frac{2x-1}{5}$$

$$5(x+1) + 10(3x+1) = 1(27x+19) + 4(2x-1)$$

$$5x + 5 + 30x + 10 = 27x + 19 + 8x - 4$$

$$5x + 30x - 27x - 8x = 19 - 4 - 5 - 10$$

$$0x = 0 \quad \text{ταυτότητα}$$

ii)

$$ΕΚΠ(15, 12, 20, 10) = 60$$

Σχόλιο 2

$$\frac{2x}{15} + \frac{x-6}{12} = \frac{3}{10} \left(\frac{x}{2} - 5 \right) \quad \text{άρα} \quad \frac{2x}{15} + \frac{x-6}{12} = \frac{3x}{20} - \frac{15}{10}$$

$$60 \cdot \frac{2x}{15} + 60 \cdot \frac{x-6}{12} = 60 \cdot \frac{3x}{20} - 60 \cdot \frac{15}{10}$$

$$4 \cdot 2x + 5(x-6) = 3 \cdot 3x - 6 \cdot 15$$

$$8x + 5x - 30 = 9x - 90$$

$$8x + 5x - 9x = 30 - 90$$

$$4x = -60$$

$$x = -\frac{60}{4} = -15$$

iii)

$$ΕΚΠ(2, 7) = 14$$

$$\frac{9x+7}{2} - \left(x - \frac{x-2}{7} \right) = 3 \quad \text{άρα} \quad 14 \cdot \frac{9x+7}{2} - 14 \cdot \left(x - \frac{x-2}{7} \right) = 14 \cdot 3$$

$$7(9x+7) - 14x + 14 \cdot \frac{x-2}{7} = 42$$

$$63x + 49 - 14x + 2(x-2) = 42$$

$$63x + 49 - 14x + 2x - 4 = 42$$

$$63x - 14x + 2x = 42 - 49 + 4$$

$$51x = -3$$

$$x = -\frac{3}{51} = -\frac{1}{17}$$

iv)

$$ΕΚΠ = 2$$

$$\frac{3x}{2} - 5 = \frac{x}{2} + \frac{2x+7}{2} \quad \text{άρα} \quad 2 \cdot \frac{3x}{2} - 2 \cdot 5 = 2 \cdot \frac{x}{2} + 2 \cdot \frac{2x+7}{2}$$

$$3x - 10 = x + (2x + 7)$$

$$3x - 10 = x + 2x + 7$$

$$3x - x - 2x = 7 + 10$$

$$0x = 17 \quad \text{εξίσωση αδύνατη}$$

8.

Για ποια τιμή του λ οι παρακάτω εξισώσεις είναι αδύνατες

i) $\lambda x = 6$ **ii)** $(\lambda + 1)x = 2$ **iii)** $(\lambda - 3)x = 7$

iv) $\lambda x - 10 = 15 - 2x$ **v)** $\lambda x + x + 2 = 3x + 6$

Προτεινόμενη λύση**i)**

$$\lambda x = 6 \quad \text{Πρέπει } \lambda = 0$$

Σχόλιο 5

ii)

$$(\lambda + 1)x = 2 \quad \text{Πρέπει } \lambda + 1 = 0 \quad \text{άρα } \lambda = -1$$

iii)

$$(\lambda - 3)x = 7 \quad \text{Πρέπει } \lambda - 3 = 0 \quad \text{άρα } \lambda = 3$$

iv)

$$\lambda x - 10 = 15 - 2x \quad \text{άρα } \lambda x + 2x = 15 + 10$$

$$(\lambda + 2)x = 25 \quad \text{Πρέπει } \lambda + 2 = 0, \quad \text{άρα } \lambda = -2$$

v)

$$\lambda x + x + 2 = 3x + 6 \quad \text{άρα } \lambda x + x - 3x = 6 - 2$$

$$\lambda x - 2x = 4$$

$$(\lambda - 2)x = 4 \quad \text{Πρέπει } \lambda - 2 = 0 \quad \text{άρα } \lambda = 2$$

9.

Για ποια τιμή του λ οι παρακάτω εξισώσεις είναι αόριστες

i) $\lambda x + 5 = 10 + 2x - 5$ **ii)** $\lambda x + 10 = 3x + 10$ **iii)** $\lambda x - 5 = x - 10 + 5$

Προτεινόμενη λύση**i)**

$$\lambda x + 5 = 10 + 2x - 5 \quad \text{άρα } \lambda x - 2x = 10 - 5 - 5$$

$$(\lambda - 2)x = 0 \quad \text{Πρέπει } \lambda - 2 = 0 \quad \text{άρα } \lambda = 2$$

Σχόλιο 5

ii)

$$\lambda x + 10 = 3x + 10 \quad \text{άρα } \lambda x - 3x = 10 - 10$$

$$(\lambda - 3)x = 0 \quad \text{Πρέπει } \lambda - 3 = 0 \quad \text{άρα } \lambda = 3$$

iii)

$$\lambda x - 5 = x - 10 + 5 \quad \text{άρα } \lambda x - x = -10 + 5 + 5$$

$$(\lambda - 1)x = 0 \quad \text{Πρέπει } \lambda - 1 = 0 \quad \text{άρα } \lambda = 1$$

10.

Για ποιες τιμές των λ και μ οι παρακάτω εξισώσεις είναι αόριστες

i) $(\lambda - 1)x = \mu + 2$

ii) $(3\lambda + 1)x = \mu$

iii) $\lambda x - 1 = \mu - 3x$

iv) $\lambda x - \mu = 7x + 3\mu - 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$(\lambda - 1)x = \mu + 2 \quad \text{Πρέπει} \quad \lambda - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \mu + 2 = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \text{και} \quad \mu = -2$$

ii)

$$(3\lambda + 1)x = \mu \quad \text{Πρέπει} \quad 3\lambda + 1 = 0 \quad \text{και} \quad \mu = 0$$

$$3\lambda = -1 \quad \text{και} \quad \mu = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \mu = 0$$

iii)

$$\lambda x - 1 = \mu - 3x \quad \text{άρα} \quad \lambda x + 3x = \mu + 1$$

$$(\lambda + 3)x = \mu + 1 \quad \text{Πρέπει} \quad \lambda + 3 = 0 \quad \text{και} \quad \mu + 1 = 0$$

$$\lambda = -3 \quad \text{και} \quad \mu = -1$$

iv)

$$\lambda x - \mu = 7x + 3\mu - 1 \quad \text{άρα} \quad \lambda x - 7x = 3\mu - 1 + \mu$$

$$(\lambda - 7)x = 4\mu - 1 \quad \text{Πρέπει} \quad \lambda - 7 = 0 \quad \text{και} \quad 4\mu - 1 = 0$$

$$\lambda = 7 \quad \text{και} \quad 4\mu = 1$$

$$\lambda = 7 \quad \text{και} \quad \mu = \frac{1}{4}$$