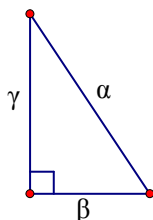


1.4 ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Πυθαγόρειο θεώρημα : Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών.



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

2.

Αντίστροφο Πυθαγορείου : Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μιας πλευράς του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πρώτη πλευρά.

ΣΧΟΛΙΟ

Άμεση συνέπεια : Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο κάθετης πλευράς είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας μείον το τετράγωνο της άλλης κάθετης πλευράς.

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \quad \text{και} \quad \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να εξετάσετε αν είναι ορθογώνιο ένα τρίγωνο με πλευρές :

i) $\alpha = 2,5\text{cm}$, $\beta = 2\text{cm}$, $\gamma = 1,5\text{cm}$

ii) $\alpha = 3,5\text{ cm}$, $\beta = 3\text{ cm}$, $\gamma = 4,5\text{cm}$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 2

i)

Μεγαλύτερη πλευρά είναι η α με $\alpha^2 = 2,5^2 = 6,25\text{ cm}^2$ (1)

$\beta^2 + \gamma^2 = 2^2 + 1,5^2 = 4 + 2,25 = 6,25\text{ cm}^2$ (2)

Από τις (1) , (2) έχουμε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την α

ii)

Ομοίως $\gamma^2 = 4,5^2 = 20,25\text{ cm}^2$ (3)

$\alpha^2 + \beta^2 = 3,5^2 + 3^2 = 12,25 + 9 = 21,25\text{ cm}^2$ (4)

Από τις (3) , (4) έχουμε ότι $\gamma^2 \neq \alpha^2 + \beta^2$

Άρα το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο

2.

Αν α , β , γ είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, συμπληρώστε τον πίνακα:

α	5	10	13
β	4	8	5
γ	3	6	12

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο

Αφού $\hat{A} = 90^\circ$ υποτείνουσα η α .

1^η στήλη : $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$ άρα $\beta = \sqrt{16} = 4$

2^η στήλη : $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$ άρα $\gamma = \sqrt{36} = 6$

3^η στήλη : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ άρα $\alpha = \sqrt{169} = 13$

συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παραπάνω . Τα στοιχεία που συμπληρώθηκαν είναι τα κόκκινα .

3.

Ποια από τις παρακάτω τριάδες αποτελεί μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου;

A. 1 , 2 , 3

B . 1, 4 , 5

Γ . 2 , 4 , 6

Δ . 5 , 3 , 4

E. 6 , 4 , 3

Προτεινόμενη λύση

A . $3^2 = 9$ και $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$ με $9 \neq 5$ δεν αποτελεί

B . $5^2 = 25$ και $1^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17$ με $25 \neq 17$ δεν αποτελεί

Γ . $6^2 = 36$ και $2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$ με $36 \neq 20$ δεν αποτελεί

Δ . $5^2 = 25$ και $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ με $5^2 = 3^2 + 4^2$ αποτελεί

E . $6^2 = 36$ και $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ με $36 \neq 25$ δεν αποτελεί

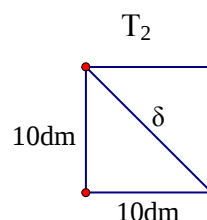
4.

Να βρείτε το εμβαδό ενός τετραγώνου T_1 το οποίο έχει πλευρά τη διαγώνιο ενός άλλου τετραγώνου T_2 που η πλευρά του είναι 10dm.

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Είναι } \delta^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200 \text{ dm}^2$$

Το εμβαδόν του ζητούμενου τετραγώνου πλευράς δ είναι $E = \delta^2 = 200 \text{ dm}^2$



5.

- α) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι ορθή. Ποιός από τους τύπους που ακολουθούν είναι σωστός; i) $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2$ ii) $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$ iii) $\gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2$
 β) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 - \gamma^2$, ποια γωνία είναι ορθή;

Προτεινόμενη λύση

α)

Αφού $\hat{\Gamma}$ ορθή, υποτείνουσα είναι η γ . Άρα $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ οπότε $\gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2$
 Σωστό το (iii)

β)

$$\alpha^2 = \beta^2 - \gamma^2 \quad \text{άρα} \quad \alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2 \quad \text{επομένως ορθή η γωνία } \hat{B}$$

6.

Ενός τριγώνου $AB\Gamma$ η πλευρά AB είναι 7cm μεγαλύτερη από την $ΑΓ$ και η $ΑΓ$ είναι 8 cm μικρότερη από την $B\Gamma$. Η περίμετρος του τριγώνου είναι 30cm.

α) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β) Να βρείτε το εμβαδό του τετραγώνου που διαγωνιός του είναι η AB .

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Έστω ότι } B\Gamma = x, \text{ τότε } A\Gamma = x - 8 \text{ και } AB = 7 + x - 8 = x - 1$$

$$\text{Όμως } AB + B\Gamma + A\Gamma = 30 \text{ οπότε } x - 1 + x + x - 8 = 30$$

$$3x = 39$$

$$x = 13$$

$$\text{Οπότε } B\Gamma = 13 \text{ cm, } A\Gamma = 5 \text{ cm και } AB = 12 \text{ cm}$$

α)

$$B\Gamma^2 = 13^2 = 169$$

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

Άρα $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ συνεπώς το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη $B\Gamma$

β)

Αν y είναι η πλευρά του τετραγώνου που έχει διαγώνιο την AB , τότε

$$AB^2 = y^2 + y^2 \quad \text{άρα} \quad 12^2 = 2y^2$$

$$144 = 2y^2$$

$$y^2 = 72$$

Συνεπώς το εμβαδόν του ζητούμενου τετραγώνου είναι $E = y^2 = 72 \text{ cm}^2$

7.

Σε ισοσκελές τρίγωνο, η περίμετρος είναι 32 cm και η βάση 12 cm. Να υπολογίσετε το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση και στη συνέχεια το εμβαδόν του τριγώνου

Προτεινόμενη λύση

Έστω x το μήκος μιας των ίσων πλευρών.

Με βάση τα δεδομένα έχουμε $x + x + 12 = 32$

$$2x = 20$$

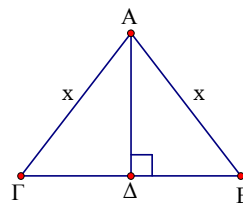
$$x = 10$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί

στη βάση είναι και διάμεσος, συνεπώς $\Gamma\Delta = 6$.

Πυθαγόρειο στο ορθ. τρίγωνο $A\Gamma\Delta$: $AA^2 = A\Gamma^2 - \Gamma\Delta^2 =$
 $= 10^2 - 6^2 =$
 $= 100 - 36 =$
 $= 64$ άρα $A\Delta = \sqrt{64} = 8$

$$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48 \text{ cm}^2$$



8.

Στο διπλανό τραπέζιο να υπολογίσετε το ύψος και το εμβαδόν του.

Προτεινόμενη λύση

Φέρνοντας τα ύψη AK και BE του τραpezίου

έχουμε $\Delta\Gamma = \Delta K + KE + E\Gamma$

$$27 = \Delta K + 10 + 8$$

$$\Delta K = 9$$

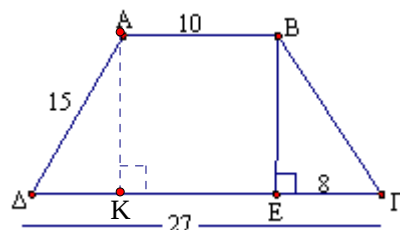
Πυθαγόρειο στο ορθογώνιο τρίγωνο $AK\Delta$: $AK^2 = A\Delta^2 - K\Delta^2 =$

$$= 15^2 - 9^2 =$$

$$= 225 - 81 =$$

$$= 144 \quad \text{άρα } AK = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$E = \frac{(B + \beta) \cdot \upsilon}{2} = \frac{(27 + 10) \cdot 12}{2} = 222 \text{ cm}^2$$



9.

Στο διπλανό σχήμα να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Προτεινόμενη λύση

Πυθαγόρειο στο $A\Delta B$: $AA^2 = AB^2 - B\Delta^2 =$
 $= 15^2 - 12^2 =$
 $= 225 - 144 = 81$ άρα $A\Delta = \sqrt{81} = 9$ δηλαδή $x = 9$

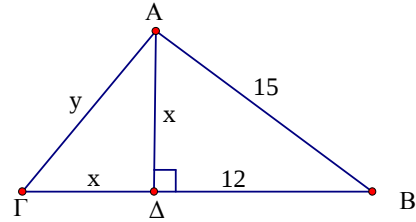
Οπότε $B\Gamma = 9 + 12 = 21$

Πυθαγόρειο στο $A\Delta\Gamma$: $A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = 9^2 + 9^2 = 81 + 81 = 162$
 άρα $A\Gamma = \sqrt{162}$

Είναι $B\Gamma^2 = 21^2 = 441$

και $A\Gamma^2 + AB^2 = (\sqrt{162})^2 + 15^2 = 162 + 225 = 387$

Επομένως $B\Gamma^2 \neq A\Gamma^2 + AB^2$ άρα το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο

**10.**

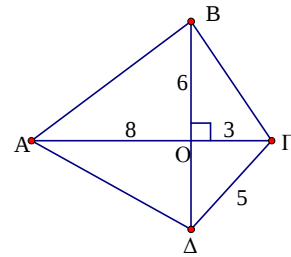
Στο διπλανό τετράπλευρο οι διαγώνιες είναι κάθετες. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του.

Προτεινόμενη λύση

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο $O\Gamma\Delta$: $O\Delta^2 = \Gamma\Delta^2 - O\Gamma^2 =$
 $= 5^2 - 3^2 =$
 $= 25 - 9 = 16$

Άρα $O\Delta = \sqrt{16} = 4$

$(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma) = \frac{A\Gamma \cdot OB}{2} + \frac{A\Gamma \cdot O\Delta}{2} =$
 $= \frac{11 \cdot 6}{2} + \frac{11 \cdot 4}{2} = 33 + 22 = 55$ τετραγωνικές μονάδες

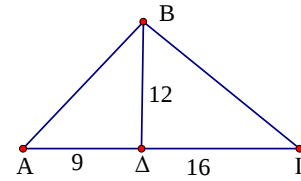


11.

Στο διπλανό σχήμα

α) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών AB και BΓ

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο

**Προτεινόμενη λύση**

α)

$$\begin{aligned}\text{Πυθαγόρειο στο } \triangle ADB: \quad AB^2 &= BD^2 + AD^2 = \\ &= 12^2 + 9^2 = \\ &= 144 + 81 = 225\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } AB = \sqrt{225} = 15$$

$$\begin{aligned}\text{Πυθαγόρειο στο } \triangle B\Delta\Gamma: \quad B\Gamma^2 &= BD^2 + \Gamma\Delta^2 = \\ &= 12^2 + 16^2 = \\ &= 144 + 256 = 400\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } B\Gamma = \sqrt{400} = 20$$

β)

$$\text{Είναι } A\Gamma^2 = 25^2 = 625$$

$$\text{και } AB^2 + B\Gamma^2 = 225 + 400 = 625$$

Άρα $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ συνεπώς το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την AΓ

12.

Σε τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ ισχύει $\alpha = 2\gamma$. Να δείξετε ότι $\beta^2 = 3\gamma^2$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}\text{Είναι } \alpha^2 &= \gamma^2 + \beta^2 \quad \text{και λόγω της υπόθεσης} \\ (2\gamma)^2 &= \gamma^2 + \beta^2 \\ 4\gamma^2 &= \gamma^2 + \beta^2 \\ \beta^2 &= 3\gamma^2\end{aligned}$$

13.

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το εμβαδόν τετραγώνου που έχει πλευρά τη ΔΕ.

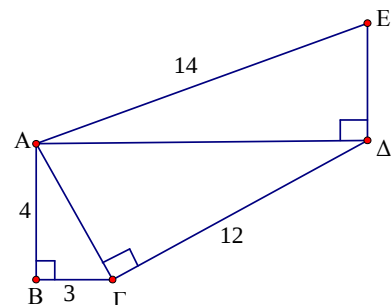
Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}\text{Πυθαγόρειο στο } \triangle AB\Gamma: \quad A\Gamma^2 &= AB^2 + B\Gamma^2 = \\ &= 4^2 + 3^2 = \\ &= 16 + 9 = 25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Πυθαγόρειο στο } \triangle A\Delta\Gamma: \quad A\Delta^2 &= A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = \\ &= 25 + 12^2 = \\ &= 25 + 144 = 169\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Πυθαγόρειο στο } \triangle A\Delta E: \quad \Delta E^2 &= AE^2 - A\Delta^2 = \\ &= 14^2 - 169 = \\ &= 196 - 169 = 25\end{aligned}$$

Το εμβαδόν E του ζητούμενου τετραγώνου είναι $E = \Delta E^2 = 25$ τετραγωνικές μονάδες



14.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού τραπεζίου.

Προτεινόμενη λύση

Φέρομε το ύψος ΓΚ.

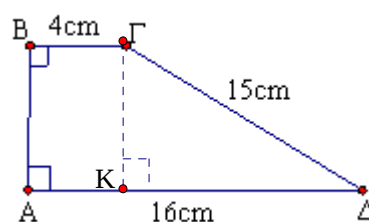
Τότε $AK = 4 \text{ cm}$, επομένως $KD = 16 - 4 = 12 \text{ cm}$

Πυθαγόρειο στο ΓΚΔ : $ΓΚ^2 = ΓΔ^2 - ΚΔ^2 =$

$$= 15^2 - 12^2 =$$

$$= 225 - 144 = 81 \quad \text{άρα} \quad ΓΚ = \sqrt{81} = 9$$

$$E = \frac{(B + \beta) \cdot \upsilon}{2} = \frac{(16 + 4) \cdot 9}{2} = 90 \text{ cm}^2$$

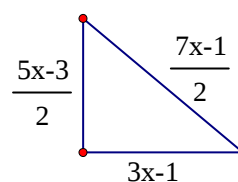
**15.**

Η περίμετρος του διπλανού τριγώνου είναι 24cm.

α) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του

β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του

**Προτεινόμενη λύση**

α)

$$\frac{5x-3}{2} + 3x - 1 + \frac{7x-1}{2} = 24 \quad \text{άρα} \quad 2 \cdot \frac{5x-3}{2} + 2 \cdot 3x - 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{7x-1}{2} = 2 \cdot 24$$

$$5x - 3 + 6x - 2 + 7x - 1 = 48$$

$$18x = 54$$

$$x = 3$$

Οι πλευρές του τριγώνου έχουν μήκη $\frac{5 \cdot 3 - 3}{2} = 6$, $3 \cdot 3 - 1 = 8$ και $\frac{7 \cdot 3 - 1}{2} = 10$

β)

$$10^2 = 100 \quad \text{και} \quad 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \quad \text{άρα} \quad 10^2 = 6^2 + 8^2$$

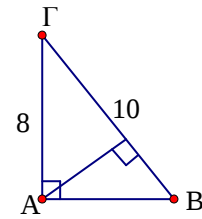
Επομένως το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά μήκους 10

γ)

$$E = \frac{\beta \cdot \gamma}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

16.

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο

α) Να υπολογίσετε την AB**β)** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου**γ)** Να υπολογίσετε το ύψος στην υποτείνουσα**Προτεινόμενη λύση****α)**

$$AB^2 = BG^2 - AG^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \quad \text{οπότε} \quad AB = \sqrt{36} = 6$$

β)

$$E = \frac{AB \cdot AG}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

γ)

Αν u είναι το ύψος στην υποτείνουσα, έχουμε ότι $E = \frac{BG \cdot u}{2}$ άρα

$$24 = \frac{10 \cdot u}{2} \quad \text{οπότε} \quad u = 4,8$$