

2.1 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Τετραγωνική ρίζα : Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού a , λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον a .
 Η τετραγωνική ρίζα του a συμβολίζεται με $\sqrt{a}$
 Ακόμα ορίζουμε ότι $\sqrt{0} = 0$

2.

Αποτέλεσμα του ορισμού : Αν $\sqrt{a} = x$, όπου $a \geq 0$, τότε $x \geq 0$ και $x^2 = a$,
 ή αλλιώς αν $a \geq 0$ τότε $(\sqrt{a})^2 = a$

3.

Προσοχή : Είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{a^2} = a$. Το σωστό είναι $\sqrt{a^2} = |a|$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Τετραγωνική ρίζα αρνητικού : Τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού δεν ορίζεται.
 Όπου αναφέρεται το σύμβολο $\sqrt{a}$ θεωρούμε ότι $a \geq 0$.

2.

Η εξίσωση $x^2 = a$, $a \geq 0$: Έχει λύσεις τις $x = \sqrt{a}$, $x = -\sqrt{a}$, αφού
 $(\sqrt{a})^2 = a$ αλλά και $(-\sqrt{a})^2 = a$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

- α) $\sqrt{36} = 18$ Λ β) $\sqrt{9} = -3$ Λ γ) $\sqrt{4} = 16$ Λ
 δ) $\sqrt{9+16} = 5$ Σ ε) $\sqrt{-9} = -3$ Λ στ) $\sqrt{100} = 10$ Σ
 ζ) $\sqrt{81 \cdot 16} = 9 \cdot 4 = 36$ Σ η) $\sqrt{x-5}$, $x \geq 5$ Σ θ) $\sqrt{25-16} = 5-4$ Λ

Προτεινόμενη λύση

- α) $\sqrt{36} = 6$ άρα η πρόταση είναι λάθος
 β) $\sqrt{9} = 3$ άρα η πρόταση είναι λάθος
 γ) $\sqrt{4} = 2$ άρα η πρόταση είναι λάθος
 δ) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ άρα η πρόταση είναι σωστή
 ε) $\sqrt{-9}$ δεν ορίζεται άρα η πρόταση είναι λάθος
 στ) $\sqrt{100} = 10$ άρα η πρόταση είναι σωστή
 ζ) $\sqrt{81 \cdot 16} = \sqrt{1296} = 36$ άρα η πρόταση είναι σωστή
 η) πρέπει $x-5 \geq 0$ δηλαδή $x \geq 5$ άρα η πρόταση είναι σωστή
 θ) $\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$ άρα η πρόταση είναι λάθος

2.

Στις παρακάτω ερωτήσεις επιλέξτε την σωστή απάντηση

α) Η εξίσωση $x^2 = 36$ έχει λύσεις

Α. μόνο το 6 Β. μόνο το -6 Γ. το 6 και το -6 Δ. τίποτα από τα προηγούμενα

β) Η παράσταση $\sqrt{2+\sqrt{4}}$ είναι ίση με

Α. $\sqrt{6}$ Β. 4 Γ. 2 Δ. $\sqrt{2}$

γ) Αν $\sqrt{x} = 25$ τότε

Α. $x = 5$ Β. $x = -5$ Γ. $x = 625$ Δ. $x = \pm 5$

Προτεινόμενη λύση

- α) $x^2 = 36$ άρα $x = \sqrt{36} = 6$ ή $x = -\sqrt{36} = -6$ σωστό το Γ
 β) $\sqrt{2+\sqrt{4}} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$ σωστό το Γ
 γ) Αν $\sqrt{x} = 25$ τότε $(\sqrt{x})^2 = 25^2$ δηλαδή $x = 625$ σωστό το Γ

3.

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά

α) αν $x = \sqrt{a}$ τότε $a \dots$ και $x^2 = \dots$

β) αν $a \dots$ τότε $(\sqrt{a})^2 = \dots$

γ) $\sqrt{a^2} = \dots$

Προτεινόμενη λύση

α) αν $x = \sqrt{a}$ τότε $a \geq 0$ και $x^2 = a$

β) αν $a \geq 0$ τότε $(\sqrt{a})^2 = a$

γ) $\sqrt{a^2} = |a|$

4.

Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες

α) $\sqrt{64}$, $\sqrt{0,64}$, $\sqrt{6400}$

β) $\sqrt{1156}$, $\sqrt{11,56}$, $\sqrt{0,1156}$, $\sqrt{115600}$

γ) $\sqrt{\frac{1}{25}}$, $\sqrt{\frac{16}{81}}$, $\sqrt{\frac{2,25}{0,36}}$, $\sqrt{\frac{2,68}{1,69}}$

Προτεινόμενη λύση

α) $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{0,64} = 0,8$, $\sqrt{6400} = 80$

β) $\sqrt{1156} = 34$, $\sqrt{11,56} = 3,4$, $\sqrt{0,1156} = 0,34$, $\sqrt{115600} = 340$

γ) $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$, $\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$, $\sqrt{\frac{2,25}{0,36}} = \sqrt{\frac{225}{36}} = \frac{15}{6}$, $\sqrt{\frac{2,68}{1,69}} = \sqrt{\frac{289}{169}} = \frac{17}{13}$

5.

Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων

α) $3\sqrt{4} - 2\sqrt{16} + 5\sqrt{81} - 6\sqrt{100}$

β) $\sqrt{5^2} + \sqrt{(-5)^2} + (\sqrt{5})^2$

γ) $\sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$

δ) $5\sqrt{2\sqrt{64}} - 2\sqrt{34 + \sqrt{4}} + 7\sqrt{86 - \sqrt{25}}$

Θεωρία 1-2-3

Προτεινόμενη λύση

α)

$$3\sqrt{4} - 2\sqrt{16} + 5\sqrt{81} - 6\sqrt{100} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 5 \cdot 9 - 6 \cdot 10 = 6 - 8 + 45 - 60 = -17$$

β)

$$\sqrt{5^2} + \sqrt{(-5)^2} + (\sqrt{5})^2 = 5 + |-5| + 5 = 5 + 5 + 5 = 15$$

γ)

$$\begin{aligned} \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}} &= \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{7 + 2}}} = \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}} = \\ &= \sqrt{14 + \sqrt{1 + 3}} = \sqrt{14 + \sqrt{4}} = \sqrt{14 + 2} = \\ &= \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

δ)

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2\sqrt{64}} - 2\sqrt{34 + \sqrt{4}} + 7\sqrt{86 - \sqrt{25}} &= 5\sqrt{2 \cdot 8} - 2\sqrt{34 + 2} + 7\sqrt{86 - 5} \\ &= 5\sqrt{16} - 2\sqrt{36} + 7\sqrt{81} = \\ &= 5 \cdot 4 - 2 \cdot 6 + 7 \cdot 9 = 20 - 12 + 63 = 71 \end{aligned}$$

6.

Να υπολογίσετε την πλευρά ενός τετραγώνου σε m αν το εμβαδόν είναι ίσο με

α) 729cm^2 β) $0,0144\text{mm}^2$ γ) 625dm^2

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι η πλευρά του τετραγώνου τότε

α)

$$x^2 = 729 \quad \text{άρα} \quad x = \sqrt{729} = 27 \text{ cm} = 27 : 100 \text{ m} = 0,27 \text{ m}$$

β)

$$x^2 = 0,0144 \quad \text{άρα} \quad x = \sqrt{0,0144} = 0,12 \text{ mm} = 0,12 : 1000 \text{ m} = 0,00012 \text{ m}$$

γ)

$$x^2 = 625 \quad \text{άρα} \quad x = \sqrt{625} = 25 = 25 : 10 \text{ m} = 2,5 \text{ m}$$

7.

Να υπολογίσετε τι παραστάσεις

$$\alpha) \sqrt{16 \cdot 9} \quad \text{και} \quad \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} \qquad \beta) \sqrt{25 \cdot 81} \quad \text{και} \quad \sqrt{25} \cdot \sqrt{81}$$

$$\gamma) \sqrt{\frac{9}{49}} \quad \text{και} \quad \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}} \qquad \delta) \sqrt{\frac{36}{289}} \quad \text{και} \quad \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{289}}$$

Τι παρατηρείτε;

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{144} = 12 \quad \text{και} \quad \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$$

β)

$$\sqrt{25 \cdot 81} = \sqrt{2025} = 45 \quad \text{και} \quad \sqrt{25} \cdot \sqrt{81} = 5 \cdot 9 = 45$$

γ)

$$\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7} \quad \text{και} \quad \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}$$

δ)

$$\sqrt{\frac{36}{289}} = \frac{6}{17} \quad \text{και} \quad \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{289}} = \frac{6}{17}$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } \sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \quad \text{και} \quad \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$$

8.

Ισοσκελές τρίγωνο έχει βάση $B\Gamma = 6 \text{ m}$ και περίμετρο 16 m . Να υπολογίσετε το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση και το εμβαδόν του τριγώνου.

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι κάθε μία από τις ίσες πλευρές του τριγώνου τότε

$$2x + 6 = 16 \quad \text{άρα} \quad x = 5$$

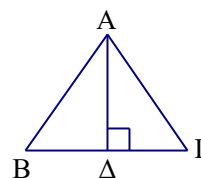
Στο ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση είναι και διάμεσος, οπότε $B\Delta = 3$

$$\begin{aligned} \text{Πυθαγόρειο στο } A\Delta B: \quad A\Delta^2 &= AB^2 - B\Delta^2 = \\ &= 5^2 - 3^2 = \\ &= 25 - 9 = 16 \end{aligned}$$

$$\text{άρα } A\Delta = \sqrt{16} = 4$$

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$E = \frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ m}^2$$



9.

Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα η παράσταση

$$A = \sqrt{\frac{2x-3}{4}} + \sqrt{15-x}$$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 1

$$\text{Πρέπει } \frac{2x-3}{4} \geq 0 \quad \text{και} \quad 15-x \geq 0$$

$$2x-3 \geq 0 \quad \text{και} \quad 15-x \geq 0$$

$$2x \geq 3 \quad \text{και} \quad 15 \geq x$$

$$x \geq \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad 15 \geq x$$

Η συναλήθευση των δύο ανισώσεων δίνει $\frac{3}{2} \leq x \leq 15$

10.

Αν $x = 4$ και $y = -2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{5x-11} + \sqrt{-3y+10} + \sqrt{(1-3x)^2} + \sqrt{(5y)^2}$$

Προτεινόμενη λύση

Για $x = 4$ και $y = -2$ η παράσταση γίνεται

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{5 \cdot 4 - 11} + \sqrt{-3(-2) + 10} + \sqrt{(1 - 3 \cdot 4)^2} + \sqrt{(5 \cdot (-2))^2} = \\ &= \sqrt{20 - 11} + \sqrt{6 + 10} + \sqrt{(-11)^2} + \sqrt{(-10)^2} = \\ &= \sqrt{9} + \sqrt{16} + |-11| + |-10| = \\ &= 3 + 4 + 11 + 10 = 28 \end{aligned}$$

11.

Να βρείτε τις θετικές λύσεις των εξισώσεων

$$\alpha) x^2 = 36 \quad \beta) x^2 = \frac{49}{25} \quad \gamma) x^2 = 169$$

Προτεινόμενη λύση

$$\alpha) x^2 = 36 \quad \text{άρα} \quad x = \sqrt{36} = 6$$

$$\beta) x^2 = \frac{49}{25} \quad \text{άρα} \quad x = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$$

$$\gamma) x^2 = 169 \quad \text{άρα} \quad x = \sqrt{169} = 13$$

12.

Ένας ρόμβος έχει διαγώνιες ίσες με 30 cm και 16 cm. Να υπολογίσετε την περίμετρό του.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $AB\Gamma\Delta$ ο ρόμβος με $A\Gamma = 30$ cm και $B\Delta = 16$ cm

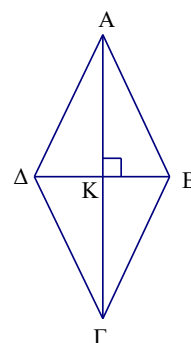
Στο ρόμβο οι διαγώνιες είναι κάθετες και διχοτομούνται,

άρα $AK = 15$ και $KB = 8$

$$\begin{aligned}\text{Πυθαγόρειο στο } ABK : AB^2 &= AK^2 + BK^2 = 15^2 + 8^2 = \\ &= 225 + 64 = \\ &= 289\end{aligned}$$

$$\text{άρα } AB = \sqrt{289} = 17$$

Η περίμετρος του ρόμβου είναι $\Pi = 4 \cdot 17 = 68$ cm

**13.**

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα τμήματα $B\Delta$ και $A\Gamma$

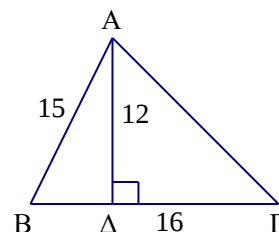
Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}\text{Πυθαγόρειο στο } AB\Delta : B\Delta^2 &= AB^2 - A\Delta^2 = \\ &= 15^2 - 12^2 = \\ &= 225 - 144 = \\ &= 81\end{aligned}$$

$$\text{άρα } B\Delta = \sqrt{81} = 9$$

$$\begin{aligned}\text{Πυθαγόρειο στο } A\Gamma\Delta : A\Gamma^2 &= \Delta\Gamma^2 + A\Delta^2 = 16^2 + 12^2 \\ &= 256 + 144 \\ &= 400\end{aligned}$$

$$\text{άρα } A\Gamma = \sqrt{400} = 20$$

**14.**

Στο διπλανό τραπέζιο να υπολογίσετε το εμβαδόν του

Προτεινόμενη λύση

Το $ABZ\Delta$ είναι ορθογώνιο, άρα $\Delta Z = AB = 4$

Επομένως $Z\Gamma = 12$

$$\begin{aligned}\text{Πυθαγόρειο στο } BZ\Gamma : BZ^2 &= \Gamma B^2 - Z\Gamma^2 = \\ &= 15^2 - 12^2 = \\ &= 225 - 144 = \\ &= 81\end{aligned}$$

$$\text{άρα } BZ = \sqrt{81} = 9$$

$$\text{Το εμβαδόν του τραπέζιου είναι } E = \frac{(AB + \Gamma\Delta)BZ}{2} = \frac{(16 + 4)9}{2} = 90 \text{ τ. μονάδες}$$

