

3.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Συνάρτηση: Έστω δύο μεταβλητές x και y , οι οποίες συνδέονται με μία σχέση τέτοια ώστε, για κάθε τιμή της μεταβλητής x να προκύπτει, μέσω της σχέσης, μία μόνο τιμή για την μεταβλητή y . Κάθε τέτοιου είδους σχέση την ονομάζουμε συνάρτηση.

Σε αυτή την περίπτωση συνηθίζεται να λέμε ότι η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x .

2.

Μορφή της συνάρτησης : Η συνάρτηση είναι ένας μαθηματικός τύπος, που περιέχει δύο μεταβλητές τις οποίες συνήθως συμβολίζουμε με τα γράμματα x και y , αλλά όχι μόνο, και ο οποίος τύπος είναι λυμένος ως προς y . Τον μαθηματικό τύπο που συνδέει τις μεταβλητές x και y τον ονομάζουμε τύπο της συνάρτησης.

3.

Πίνακας τιμών : Τα ζεύγη των τιμών (x, y) που επαληθεύουν τον τύπο μιας συνάρτησης, αν τα τοποθετήσουμε σε έναν πίνακα, αυτόν τον πίνακα θα τον λέμε πίνακα τιμών της συνάρτησης.

ΣΧΟΛΙΟ

Προσδιορισμός του τύπου μιας συνάρτησης

Ο τύπος μιας συνάρτησης, τις ποιό πολλές φορές δίνεται έτοιμος .

Άλλες όμως φορές, μας δίνονται διάφορα στοιχεία με μορφή προβλήματος, τα οποία εμείς θα πρέπει να επεξεργαστούμε κατάλληλα και χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές x και y για κάποια εκ των στοιχείων του προβλήματος, να δημιουργήσουμε τελικά τον τύπο της συνάρτησης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Ο μισθός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης μειώθηκε κατά 28 € τον μήνα.

Η σχέση που δίνει τον νέο μισθό y ως συνάρτηση του παλαιού μισθού x είναι

A. $y = x + 28$ B. $y = 28x$ Γ. $y = 28 - x$ Δ. $y = 28x + 28$ Ε. $y = x - 28$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι ο μισθός, μετά τη μείωση κατά 28 €, θα γίνει $x - 28$.

Επομένως ο νέος μισθός y είναι $y = x - 28$.

Συνεπώς σωστό το **E**

2.

Το άθροισμα της βάσης και του αντίστοιχου σε αυτήν ύψους ενός τριγώνου είναι 25 cm. Ο τύπος που δίνει το εμβαδόν E του τριγώνου ως συνάρτηση της βάσης β είναι

A. $E = \frac{25 + \beta}{2}$ B. $E = \frac{(25 + \beta)\beta}{2}$ Γ. $E = \frac{25 - \beta}{2}$

Δ. $E = \frac{(25 - \beta)\beta}{2}$ Ε. τίποτα απ' αυτά

Επιλέξτε την σωστή απάντηση

Προτεινόμενη λύση

Από υπόθεση είναι $\beta + v = 25$. Επομένως $v = 25 - \beta$

Ο τύπος $E = \frac{\beta \cdot v}{2}$ που μας δίνει το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται

$$E = \frac{\beta \cdot (25 - \beta)}{2} \quad \text{Σωστό το } \Delta$$

3.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες.

α) Αν το μέγεθος y είναι συνάρτηση του x , τότε σε διπλάσια τιμή του x αντιστοιχεί διπλάσια τιμή του y . **Λ**

β) Αν το μέγεθος y είναι συνάρτηση του x , τότε όταν ελαττώνεται το x ελαττώνεται και το y . **Λ**

γ) Αν το μέγεθος y είναι συνάρτηση του x , τότε όταν ελαττώνεται το x αυξάνεται το y . **Λ**

δ) Αν το μέγεθος y είναι συνάρτηση του x , τότε σε κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχούν δύο τιμές της μεταβλητής y . **Λ**

ε) Αν το μέγεθος y είναι συνάρτηση του x , τότε σε κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί μία μόνο τιμή της μεταβλητής y . **Σ**

Προτεινόμενη λύση

α) Από τον ορισμό της συνάρτησης, η πρόταση είναι λάθος

β) Από τον ορισμό της συνάρτησης, η πρόταση είναι λάθος

γ) Από τον ορισμό της συνάρτησης, η πρόταση είναι λάθος

δ) Από τον ορισμό της συνάρτησης, η πρόταση είναι λάθος

ε) Από τον ορισμό της συνάρτησης, η πρόταση είναι σωστή

4.

Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων

$y = x^2 - 5x + 6$	x	-2	-1	0	1	3
	y	20	12	6	2	0
$y = \frac{4x}{x+5}$	x	-1	0	1	2	7
	y	-1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{7}{3}$

Προτεινόμενη λύση

Ο πρώτος τύπος. Για $x = -2$ δίνει $y = (-2)^2 - 5(-2) + 6 = 4 + 10 + 6 = 20$

Για $x = -1$ δίνει $y = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$

Για $x = 0$ δίνει $y = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$

Για $x = 1$ δίνει $y = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$

Για $x = 3$ δίνει $y = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

Ο δεύτερος τύπος. Για $x = -1$ δίνει $y = \frac{4(-1)}{-1+5} = \frac{-4}{4} = -1$

Για $x = 0$ δίνει $y = \frac{4 \cdot 0}{0+5} = 0$

Για $x = 1$ δίνει $y = \frac{4 \cdot 1}{1+5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Για $x = 2$ δίνει $y = \frac{4 \cdot 2}{2+5} = \frac{8}{7}$

Για $x = 7$ δίνει $y = \frac{4 \cdot 7}{7+5} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$

5.

Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα

$y = 2x - 6$	x	-2	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	3	5
	y	-10	-1	-6	1	0	4

Προτεινόμενη λύση

Για $x = -2$ ο τύπος δίνει $y = 2(-2) - 6 = -10$

$x = 0$ ο τύπος δίνει $y = 2 \cdot 0 - 6 = -6$

$x = 3$ ο τύπος δίνει $y = 2 \cdot 3 - 6 = 0$

Για $y = -1$ ο τύπος δίνει $-1 = 2x - 6$ άρα $2x = 5$ οπότε $x = \frac{5}{2}$

$y = 1$ ο τύπος δίνει $1 = 2x - 6$ άρα $2x = 7$ οπότε $x = \frac{7}{2}$

$y = 4$ ο τύπος δίνει $4 = 2x - 6$ άρα $2x = 10$ οπότε $x = 5$

Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παραπάνω

6.

Η μίσθωση ενός ταξί κοστίζει 0,95 € ανά χιλιόμετρο διαδρομής και 2,60 € η πτώση της σημαίας

α) Να βρείτε πόσα χρήματα θα πληρώσουμε για μία διαδρομή 10 χιλιομέτρων

β) Να βρείτε έναν τύπο ο οποίος να μας δίνει τα χρήματα y που θα πληρώσουμε αν η διαδρομή είναι x χιλιόμετρα.

γ) Αν η αξία μιας διαδρομής ήταν 33 €, πόσα χιλιόμετρα ήταν η διαδρομή ;

Προτεινόμενη λύση

α)

Το κόστος μόνο της διαδρομής των 10 χιλιομέτρων είναι $10 \cdot 0,95 = 9,5$ €

Λαμβάνοντας υπόψη και την πτώση της σημαίας βρίσκουμε ότι το συνολικό κόστος είναι $2,60 + 9,5 = 12,10$ €

β)

Τα x χιλιόμετρα κοστίζουν $0,95x$ €.

Το κόστος της κούρσας είναι $y = 2,60 + 0,95x$

γ)

Για $y = 33$, έχουμε $33 = 2,60 + 0,95x$ άρα $0,95x = 30,4$

$x = 30,4 : 0,95 = 32$ χιλιόμετρα

7.

Στη συνάρτηση $y = \frac{(5\lambda + 3)x - 2}{3\lambda x + 4}$ να βρείτε την τιμή του λ ώστε για $x = 3$

να είναι $y = 1$

Προτεινόμενη λύση

Για $x = 3$ και $y = 1$ ο τύπος γίνεται $1 = \frac{(5\lambda + 3) \cdot 3 - 2}{3\lambda \cdot 3 + 4}$ οπότε

$$1 = \frac{15\lambda + 9 - 2}{9\lambda + 4}$$

$$9\lambda + 4 = 15\lambda + 7$$

$$6\lambda = -3$$

$$\lambda = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

8.

Ένα λεωφορείο πηγαίνει από την Αθήνα στην Θεσσαλονίκη με ταχύτητα 80 km / h .
Η απόσταση Αθήνας Θεσσαλονίκης είναι 580 km .

- α) Να βρείτε έναν τύπο που να δίνει την απόσταση που απομένει να φτάσει το λεωφορείο στη Θεσσαλονίκη μετά από t ώρες ταξιδιού.
- β) Για ποια τιμή του t θα έχει διανύσει το μισό της απόστασης;
- γ) Σε πόσες ώρες θα φτάσει στην Θεσσαλονίκη ;

Προτεινόμενη λύση**α)**

Από τη φυσική ξέρουμε ότι μετά από t ώρες ταξιδιού το διάστημα που θα έχει διανύσει το λεωφορείο κινούμενο με ταχύτητα 80 km / h είναι ίσο με $80t$.

Επομένως το διάστημα που απομένει είναι $S = 580 - 80t$

β)

Πρέπει να ισχύει $290 = 80t$ άρα $t = 290 : 80 = 3,625 \text{ h}$

γ)

Πρέπει να ισχύει $580 = 80t$ άρα $t = 580 : 80 = 7,25 \text{ h}$

9.

Από 100 κιλά πορτοκάλια φτιάχνουμε 40 lt χυμό.

- α) Να βρείτε πόσο χυμό θα φτιάξουμε από 530 κιλά πορτοκάλια.
- β) Να εκφράσετε την ποσότητα του χυμού y που φτιάχνουμε ως συνάρτηση της ποσότητας x των πορτοκαλιών που χρησιμοποιούμε.
- γ) Αν θέλουμε να φτιάξουμε 1200 λίτρα χυμό, πόσα πορτοκάλια χρειαζόμαστε;

Προτεινόμενη λύση**α)**

Αφού από 100 κιλά φτιάχνουμε 40 lt χυμό,

από 1 κιλό φτιάχνουμε $\frac{40}{100} = 0,4 \text{ lt}$ χυμό

Επομένως , από 530 κιλά πορτοκάλια φτιάχνουμε $530 \cdot 0,4 = 212 \text{ lt}$ χυμό

β)

Από x κιλά πορτοκάλια φτιάχνουμε $0,4 x \text{ lt}$ χυμό, οπότε $y = 0,4 x$

γ)

Θα πρέπει να ισχύει $1200 = 0,4 x$ άρα $x = 1200 : 0,4 = 3000$ κιλά πορτοκάλια

10.

Μία δεξαμενή νερού όγκου 500 m^3 αδειάζει με ρυθμό 25 m^3 την ημέρα.

α) Να βρείτε πόσο θα είναι το νερό στη δεξαμενή μετά από 15 ημέρες.

β) Να βρείτε έναν τύπο που να μας δίνει τον όγκο του νερού στη δεξαμενή μετά από t ημέρες

γ) Μετά από πόσες ημέρες θα αδειάσει η δεξαμενή;

Προτεινόμενη λύση

α)

Σε 15 ημέρες το νερό που θα έχει αδειάσει είναι $25 \cdot 15 = 375 \text{ m}^3$

Επομένως θα έχει μείνει στην δεξαμενή $500 - 375 = 125 \text{ m}^3$ νερό.

β)

Σε t ημέρες το νερό που θα έχει αδειάσει είναι $25 \cdot t = 25t \text{ m}^3$

Επομένως θα έχει μείνει στην δεξαμενή $500 - 25t \text{ m}^3$ νερό.

Αν λοιπόν V είναι η ποσότητα του νερού στη δεξαμενή μετά από t ημέρες, τότε

$$V = 500 - 25t$$

γ)

Θα πρέπει $V = 0$ δηλαδή $500 - 25t = 0$

$$500 = 25t$$

$$t = 20 \text{ ημέρες}$$

11.

Σε έναν υπάλληλο έγινε αύξηση των αποδοχών του κατά 8%. Ταυτόχρονα όμως του έγινε κράτηση 20 € το μήνα για την υγειονομική του περίθαλψη.

α) Να εκφράσετε το νέο μηνιαίο μισθό y ως συνάρτηση του παλαιού μισθού x

β) Αν ένας υπάλληλος είχε μηνιαίες αποδοχές 1100€ πόσες θα είναι οι νέες αποδοχές του;

γ) Αν οι νέες αποδοχές ενός υπαλλήλου είναι 980 €, πόσες ήταν οι παλιές ;

Προτεινόμενη λύση

α)

Αν x είναι ο μισθός του υπαλλήλου τότε η αύξηση που του έγινε είναι

$$\frac{8}{100}x = 0,08x$$

Συνεπώς ο μισθός μετά την αύξηση είναι $x + 0,08x = 1,08x$

και λόγω της κράτησης των 20 €. τελικά ο νέος μισθός y είναι $y = 1,08x - 20$

β)

Για $x = 1100$ έχουμε $y = 1,08 \cdot 1100 - 20 = 1168 \text{ €}$

γ)

Για $y = 980$ έχουμε $980 = 1,08x - 20$ άρα

$$1,08x = 1000$$

$$x = 1000 : 1,08 = 925,93 \text{ € περίπου}$$