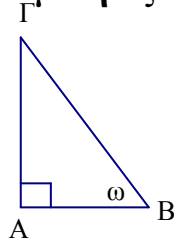


2.1 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

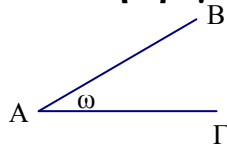
Εφαπτομένη οξείας γωνίας : Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και ω μία από τις οξείες γωνίες του. Ονομάζουμε εφαπτομένη της γωνίας ω και συμβολίζουμε με $\epsilon\omega$ το λόγο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά.



$$\text{Δηλαδή } \epsilon\omega = \frac{A\Gamma}{A\beta}$$

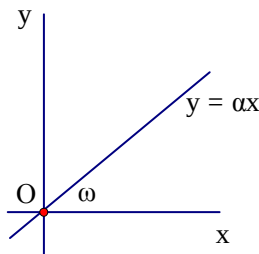
2.

Κλίση δρόμου : Αν AB είναι ένας δρόμος και $A\Gamma$ το οριζόντιο επίπεδο τότε την εφαπτομένη της γωνίας ω την ονομάζουμε κλίση του δρόμου



3.

Κλίση της ευθείας $y = ax$: Θυμίζουμε ότι ο λόγος $a = \frac{y}{x}$ ονομάζεται κλίση



της ευθείας $y = ax$ και είναι $a = \frac{y}{x} = \epsilon\omega$

Δηλαδή η κλίση της ευθείας $y = ax$ είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Προσδιορισμός της εφω : Για να βρούμε την εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας, ή χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικούς πίνακες, ή κομπιουτεράκι.

2.

Κατασκευή με τον χάρακα και τον διαβήτη γωνίας ω με δεδομένη εφαπτομένη

Έστω ότι $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{\gamma}$.

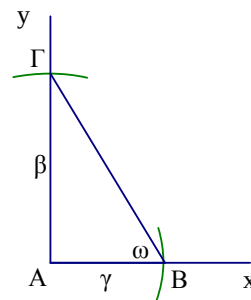
Κατασκευάζουμε ορθή γωνία xAy .

Με κέντρο το A και ακτίνα γ γράφουμε κύκλο, που τέμνει την Ax στο B .

Με κέντρο το A και ακτίνα β γράφουμε κύκλο, που τέμνει την Ay στο Γ .

Φέρουμε τη $B\Gamma$. Τότε η ζητούμενη γωνία ω είναι η $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$

αφού $\varepsilon\varphi \widehat{A\hat{B}\Gamma} = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{\beta}{\gamma}$



3.

Κλίση δρόμου σε ποσοστό % : Η έκφραση ο δρόμος έχει κλίση $\alpha \%$, σημαίνει ότι για κάθε 100m οριζόντιας απόστασης ο δρόμος ανεβαίνει ή κατεβαίνει α m.

$$\text{Οπότε κλίση} = \varepsilon\varphi\omega = \frac{\alpha}{100} = 0,0\alpha$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Αν θ οξεία τότε $\varepsilon\varphi\theta = 0$

β) $\varepsilon\varphi 45^\circ = 2$

γ) Κλίση ενός δρόμου ονομάζεται η γωνία που σχηματίζει ο δρόμος με το οριζόντιο επίπεδο

δ) Η ευθεία $y = 2x$ έχει κλίση 2

ε) Αν θ οξεία τότε πάντα η $\varepsilon\varphi\theta$ είναι δεκαδικός αριθμός

Προτεινόμενη λύση

α) Λάθος αφού για κάθε οξεία γωνία θ είναι $\varepsilon\varphi\theta > 0$

β) Λάθος αφού $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$

γ) Λάθος αφού κλίση είναι η $\varepsilon\varphi\omega$

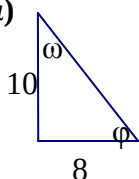
δ) Σωστό, όπως προκύπτει από την θεωρία

ε) Λάθος, μπορεί η $\varepsilon\varphi\theta$ να είναι και θετικός ακέραιος

2.

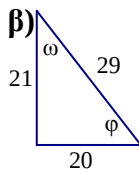
Στα παρακάτω σχήματα επιλέξτε την σωστή απάντηση

α)



- Α. $\epsilon\phi\omega > \epsilon\phi\phi$
 Β. $\epsilon\phi\omega = \epsilon\phi\phi$
 Γ. $\epsilon\phi\omega < \epsilon\phi\phi$
 Δ. $\epsilon\phi\omega = 6$

β)



- Α. $\epsilon\phi\omega = \frac{29}{21}$
 Β. $\epsilon\phi\phi = \frac{21}{20}$
 Γ. $\epsilon\phi\omega = \frac{29}{20}$
 Δ. $\epsilon\phi\phi = \frac{20}{21}$

Προτεινόμενη λύση

α) Είναι $\epsilon\phi\phi = \frac{10}{8}$ και $\epsilon\phi\omega = \frac{8}{10}$ και επειδή $\frac{10}{8} > \frac{8}{10}$, είναι $\epsilon\phi\phi > \epsilon\phi\omega$

β) Ομοίως $\epsilon\phi\phi = \frac{21}{20}$ άρα σωστό το Β

3.

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την απόσταση ΒΓ

Προτεινόμενη λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι

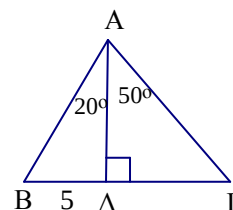
Σχόλιο 1

$$\epsilon\phi 20^\circ = \frac{ΒΔ}{ΑΔ} \quad \text{άρα} \quad 0,364 = \frac{5}{ΑΔ} \quad \text{οπότε} \quad ΑΔ \cong 13,7$$

Στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι

$$\epsilon\phi 50^\circ = \frac{ΓΔ}{ΑΔ} \quad \text{άρα} \quad 1,1918 = \frac{ΓΔ}{13,7} \quad \text{οπότε} \quad ΓΔ \cong 16,3$$

Επομένως $ΒΓ = 5 + 16,3 = 21,3$ περίπου



4.

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το ύψος της κεραίας ΓΔ

Προτεινόμενη λύση

Στο τρίγωνο ΑΓΒ είναι $\epsilon\phi 23^\circ = \frac{ΑΓ}{30}$ άρα

$$0,4245 = \frac{ΑΓ}{30} \quad \text{οπότε}$$

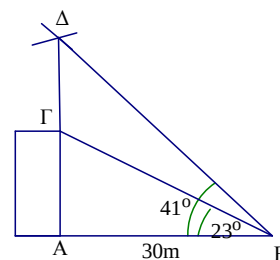
$$ΑΓ = 12,7 \text{ m περίπου}$$

Στο τρίγωνο ΑΔΒ είναι $\epsilon\phi 41^\circ = \frac{ΑΔ}{30}$ άρα

$$0,8693 = \frac{ΑΔ}{30} \quad \text{οπότε}$$

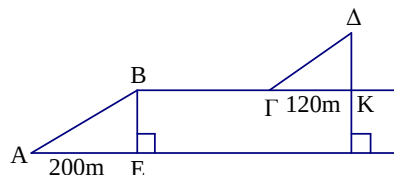
$$ΑΔ = 26 \text{ m περίπου}$$

Το ύψος της κεραίας είναι $ΔΓ = ΑΔ - ΑΓ = 26 - 12,7 = 13,3 \text{ m}$



5.

Στο διπλανό σχήμα η κλίση της μπάρας AB είναι 10 % και το σημείο Δ βρίσκεται 45 m ψηλότερα από το A. Να βρείτε την κλίση της μπάρας ΓΔ.



Προτεινόμενη λύση

$$\varepsilon\phi \widehat{BAE} = \frac{BE}{200} \quad \text{άρα} \quad 0,1 = \frac{BE}{200} \quad \text{οπότε} \quad BE = 20 \text{ m}$$

Αφού το Δ βρίσκεται 45 m ψηλότερα από το A, είναι $\Delta K = 45 - 20 = 25 \text{ m}$

$$\text{Κλίση} = \varepsilon\phi \widehat{GK} = \frac{\Delta K}{\Gamma K} = \frac{25}{120} = 0,2 \text{ περίπου}$$

Σχόλιο 3

6.

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος της υποτείνουσας BΓ.

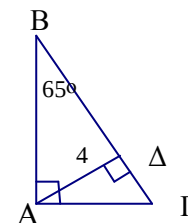
Προτεινόμενη λύση

$$\varepsilon\phi 65^\circ = \frac{A\Delta}{B\Delta} \quad \text{άρα} \quad 2,1445 = \frac{4}{B\Delta} \quad \text{οπότε} \quad B\Delta = 1,86 \text{ περίπου}$$

$$\widehat{\Gamma} = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ \quad \text{και}$$

$$\varepsilon\phi 25^\circ = \frac{A\Delta}{\Gamma\Delta} \quad \text{άρα} \quad 0,4663 = \frac{4}{\Gamma\Delta} \quad \text{οπότε} \quad \Gamma\Delta = 8,57 \text{ περίπου}$$

$$\text{συνεπώς} \quad B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = 1,86 + 8,57 = 10,43$$



7.

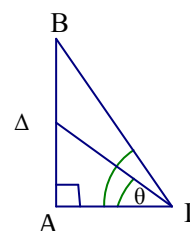
Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon\phi \Gamma = 2\varepsilon\phi \theta$. δείξτε ότι το Δ είναι μέσο του AB.

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Είναι} \quad \varepsilon\phi \Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \varepsilon\phi \theta = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$$

$$\begin{aligned} \text{Η υπόθεση} \quad \varepsilon\phi \Gamma = 2\varepsilon\phi \theta \quad \text{γίνεται} \quad \frac{AB}{A\Gamma} &= 2 \frac{A\Delta}{A\Gamma} \quad \text{άρα} \\ AB &= 2A\Delta \\ A\Delta &= \frac{AB}{2} \end{aligned}$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το Δ είναι μέσο του AB



8.

Στο διπλανό ορθογώνιο να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

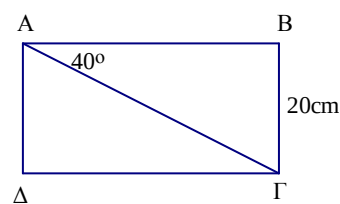
Προτεινόμενη λύση

$$\varepsilon\varphi 40^\circ = \frac{B\Gamma}{AB} \quad \text{άρα} \quad 0,8391 = \frac{20}{AB}$$

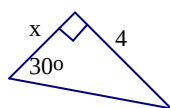
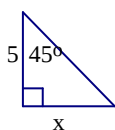
$$AB = 23,8 \text{ cm περίπου}$$

Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 23,8 = 40 + 47,6 = 87,6 \text{ cm}$

Το εμβαδόν Ε είναι $E = 20 \cdot 23,8 = 476 \text{ cm}^2$

**9.**

Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε το μήκος x και τις υποτείνουσες των τριγώνων



Προτεινόμενη λύση

Στο πρώτο τρίγωνο, επειδή μία οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου είναι 45° , αυτό είναι ισοσκελές. Άρα $x = 5$

Αν y είναι η υποτείνουσα, από το Πυθαγόρειο έχουμε ότι $y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 = 50$
 $y = \sqrt{50} = 7,07 \text{ περίπου}$

Στο δεύτερο τρίγωνο, είναι $\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{4}{x}$ άρα $0,5774 = \frac{4}{x}$
 $x = 6,9 \text{ περίπου}$

και για την υποτείνουσα z, $z^2 = x^2 + 4^2 = 6,9^2 + 4^2 = 63,61$
 $z = \sqrt{63,61} = 7,97 \text{ περίπου}$

10.

Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon\varphi \Gamma = \frac{4}{3}$ και $AB = 18 \text{ m}$.

Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου.

Προτεινόμενη λύση

$$\varepsilon\varphi \Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} \quad \text{άρα} \quad \frac{4}{3} = \frac{18}{A\Gamma} \quad \text{οπότε} \quad A\Gamma = 13,5 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{Από Πυθαγόρειο έχουμε} \quad B\Gamma^2 &= AB^2 + A\Gamma^2 = \\ &= 18^2 + 13,5^2 = \\ &= 324 + 182,25 = \\ &= 506,25 \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε} \quad B\Gamma = \sqrt{506,25} = 22,5 \text{ m}$$

$$\text{Περίμετρος} = AB + B\Gamma + A\Gamma = 18 + 22,5 + 13,5 = 54 \text{ m}$$

$$\text{Το εμβαδόν Ε είναι} \quad E = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \frac{18 \cdot 13,5}{2} = 121,5 \text{ m}^2$$

