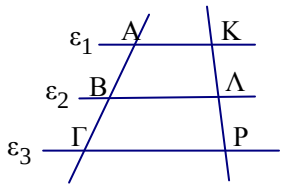
1.2 ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Παραλληλία και ισότητα

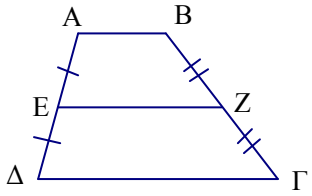
Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα σε μία ευθεία τότε θα ορίζουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.
Δηλαδή στο διπλανό σχήμα, αν είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ και ΑΒ = ΒΓ, τότε θα είναι και ΚΛ = ΛΡ



2.

Εφαρμογή στο τραπέζιο

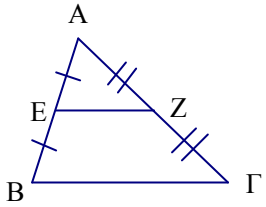
Αν σε ένα τραπέζιο από το μέσο μιας των μη παραλλήλων πλευρών φέρουμε παράλληλη προς τις βάσεις, τότε η παράλληλος αυτή θα περάσει από το μέσο και της άλλης των μη παραλλήλων πλευρών.
Δηλαδή .Στο διπλανό τραπέζιο, αν είναι το Ε μέσο του ΑΔ και Ε Ζ // ΑΒ // ΔΓ τότε Ζ μέσο του ΒΓ



3.

Εφαρμογή στο τρίγωνο

Αν σε ένα τρίγωνο από το μέσο μιας του πλευράς φέρουμε παράλληλη προς μια άλλη πλευρά, τότε η παράλληλος αυτή θα περάσει από το μέσο της τρίτης πλευράς .
Δηλαδή στο διπλανό τρίγωνο, αν είναι το Ε μέσο του ΑΒ και ΕΖ // ΒΓ, τότε Ζ μέσο του ΑΓ



4.

Λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων

Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ

Ονομάζουμε λόγο του τμήματος ΑΒ προς το τμήμα ΓΔ και συμβολίζουμε με $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}$

τον αριθμό λ για τον οποίο ισχύει ΑΒ = λ ΓΔ

5.

Πρόταση : Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με τον λόγο των μηκών τους εφ' όσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης

6.

Ανάλογα τμήματα και αναλογία

Τα ευθύγραμμα τμήματα α και γ θα λέμε ότι είναι ανάλογα των β και δ, αν ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \textbf{(1)}$$

Την ισότητα (1) την λέμε αναλογία.

Τα α και δ λέγονται άκροι όροι της αναλογίας, ενώ τα β και γ μέσοι όροι

7.

Ιδιότητες αναλογιών

- Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha\delta = \beta\gamma$. Δηλαδή μπορώ να πολλαπλασιάσω χιαστί
- Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ Δηλαδή μπορώ να εναλλάξω μέσους όρους
- Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ Δηλαδή μπορώ να εναλλάξω άκρους όρους
- Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

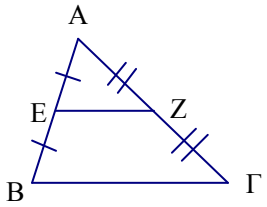
ΣΧΟΛΙΑ

1.

Πρόταση : Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Δηλαδή στο διπλανό σχήμα, αν είναι Ε και Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ τότε

ΕΖ // ΒΓ και $ΕΖ = \frac{ΒΓ}{2}$



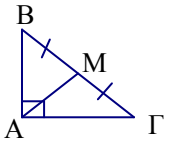
2.

Πρόταση

Σε ορθογώνιο τρίγωνο :

Η διάμεσος στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας

Δηλαδή $ΑΜ = ΒΜ = ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}$



3.

Κάτι χρήσιμο : Αν $ΓΔ = λ\,ΑΒ$, τότε $\frac{ΓΔ}{ΑΒ} = λ$ αλλά και $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{1}{λ}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να υπολογίσετε τους λόγους

α) Τις ακτίνας ενός κύκλου προς την διάμετρο του

β) Μιας ορθής γωνίας προς την γωνία ενός ισοπλεύρου τριγώνου

Προτεινόμενη λύση

α)

Αν ρ είναι η ακτίνα ενός κύκλου τότε η διάμετρος δ αυτού είναι δ = 2ρ.

Οπότε $\frac{\rho}{\delta} = \frac{1}{2}$

Σχόλιο 3

β)

Αν $\hat{\omega}$ είναι η ορθή και $\hat{\varphi}$ η γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου τότε $\frac{\hat{\omega}}{\hat{\varphi}} = \frac{90^o}{60^o} = \frac{3}{2}$

2.

Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = 10α και ΑΓ= 2α , να υπολογιστούν οι λόγοι

α) Του ΑΒ προς το ΑΓ

β) Του ΑΓ προς το ΑΒ

γ) Του ΒΓ προς το ΑΒ

δ) Του ΑΓ προς το ΒΓ

Προτεινόμενη λύση

α) $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{10α}{2α} = 5$

β) $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{2α}{10α} = \frac{1}{5}$

γ) $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{8α}{10α} = \frac{4}{5}$

δ) $\frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{2α}{8α} = \frac{1}{4}$

3.

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 10 cm και σημείο Γ αυτού έτσι ώστε $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{1}{2}$.

Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$

Προτεινόμενη λύση

$\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{1}{2}$ άρα $\frac{ΑΒ - ΒΓ}{ΓΒ} = \frac{1}{2}$

$\frac{10 - ΒΓ}{ΓΒ} = \frac{1}{2}$

$2(10 - ΒΓ) = ΒΓ$

$20 - 2ΒΓ = ΒΓ$

$3ΒΓ = 20$ οπότε $ΒΓ = \frac{20}{3}$

Επομένως $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{\frac{20}{3}}{10} = \frac{2}{3}$

4.

Ο λόγος μία γωνίας $\hat{\omega}$ προς την παραπληρωματική της είναι $\frac{1}{3}$.

Να βρεθεί η γωνία $\hat{\omega}$

Προτεινόμενη λύση

Η παραπληρωματική της $\hat{\omega}$ είναι η $180^o - \hat{\omega}$.

Επομένως $\frac{\hat{\omega}}{180^o - \hat{\omega}} = \frac{1}{3}$ άρα $3\hat{\omega} = 180^o - \hat{\omega}$

$$4\hat{\omega} = 180^o$$
$$\hat{\omega} = 45^o$$

5.

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα ΒΓ είναι τριπλάσια από την ΑΒ.

Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$, $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$, $\frac{ΒΓ}{ΑΓ}$

Προτεινόμενη λύση

Έχουμε ότι ΒΓ = 3ΑΒ άρα $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = 3$

Πυθαγόρειο θεώρημα : $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$

$$(3ΑΒ)^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$$
$$9ΑΒ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$$
$$8ΑΒ^2 = ΑΓ^2$$
$$ΑΓ = \sqrt{8ΑΒ^2} = \sqrt{8}\cdot\sqrt{ΑΒ^2} = ΑΒ\sqrt{8}.$$

Αποδείχθηκε ότι $ΑΓ = ΑΒ\sqrt{8}$ άρα $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \sqrt{8}$

$$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{3ΑΒ}{\sqrt{8}ΑΒ} = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{8}}{8}$$

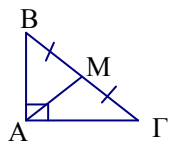
6.

Να εξηγήσετε γιατί ο κύκλος που έχει διάμετρο την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου διέρχεται από την κορυφή της ορθής γωνίας

Προτεινόμενη λύση

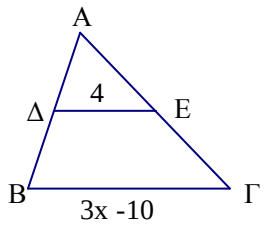
Σχόλιο 2

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.
Αν φέρουμε την διάμεσο ΑΜ στην υποτείνουσα ΒΓ,
τότε γνωρίζουμε ότι ΑΜ = ΒΜ = ΜΓ
Επομένως ό κύκλος που έχει κέντρο το μέσο Μ της ΒΓ
θα διέλθει και από το Α.



7.

Στο διπλανό σχήμα τα Δ , Ε είναι μέσα των ΑΒ , ΑΓ.
Να υπολογίσετε το x.



Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 1

$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$ άρα $4 = \frac{3x-10}{2}$

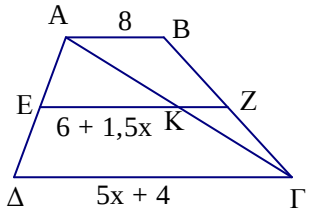
$8 = 3x - 10$

$3x = 18$

$x = 6$

8.

Στο διπλανό τραπέζιο, το Ε είναι μέσο του ΑΔ και η ΕΖ είναι παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου.
Να υπολογιστούν τα τμήματα ΕΚ, ΕΖ και ΔΓ.



Προτεινόμενη λύση

$EK = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ άρα $6 + 1{,}5\,x = \frac{5x+4}{2}$

$12 + 3x = 5x + 4$

$2x = 8$

$x = 4$

Θεωρία 2
Σχόλιο 1

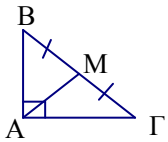
Επομένως $EK = 6 + 1{,}5 \cdot 4 = 12$

$\Delta\Gamma = 5 \cdot 4 + 4 = 24$

$KZ = \frac{AB}{2} = 4$ οπότε $EZ = EK + KZ = 16$

9.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΒΓ είναι διπλάσια από την ΑΒ. Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του τριγώνου



Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 2

Φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ.

Τότε $AM = BM = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ **(1)**

Όμως $B\Gamma = 2AB$ άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ **(2)**

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΑΜ = ΜΒ = ΑΒ, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισόπλευρο, συνεπώς κάθε γωνία του είναι 60°, άρα $\hat{B} = 60^o$

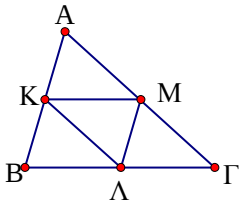
Επομένως $\hat{\Gamma} = 90^o - 60^o = 30^o$

10.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα Κ , Λ , Μ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ , ΒΓ και ΓΑ. Να υπολογίσετε τον λόγο της περιμέτρου του τριγώνου ΑΒΓ προς τη περίμετρο του τριγώνου ΚΛΜ .

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 1



$ΚΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ άρα ΒΓ = 2ΚΜ

και ομοίως ΑΒ = 2ΜΛ και ΑΓ = 2ΚΛ

Επομένως ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = 2ΚΛ + 2 ΚΜ + 2 ΜΛ =

= 2(ΚΛ + ΚΜ + ΜΛ)

Συνεπώς $\frac{ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ}{ΚΛ + ΛΜ + ΚΜ} = 2$