

1.5 Β. ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Όμοια τρίγωνα : Για τα όμοια τρίγωνα ισχύουν όλα όσα αναφέραμε στα όμοια πολύγωνα .

2.

Αποκλειστικά για τα τρίγωνα : Δύο τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν δύο γωνίες ίσες

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Ομόλογες πλευρές : Στα όμοια τρίγωνα οι ομόλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες και αντίστροφα.

2.

Όμοια ορθογώνια τρίγωνα : Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν μία οξεία γωνία ίση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 8\text{ cm}$ και $A\Gamma = 12\text{ cm}$. Στις AB , $A\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $A\Delta = 2$ και $AE = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$

β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια

γ) Αν $\Delta E = 4$, να υπολογίσετε το μήκος της $B\Gamma$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{άρα} \quad AB = 4A\Delta$$

$$\frac{A\Gamma}{AE} = \frac{12}{3} = 4 \quad \text{άρα} \quad A\Gamma = 4AE$$

Συνεπώς το $B\Gamma$ είναι ομοιόθετο του ΔE στην ομοιοθεσία με κέντρο το A και λόγο $\lambda = 4$. Άρα το $\Delta E \parallel B\Gamma$

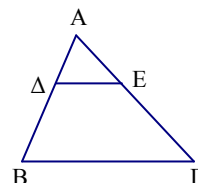
β)

Από το (α) προκύπτει ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ομοιόθετο του $A\Delta E$ στην ομοιοθεσία με κέντρο το A και λόγο $\lambda = 4$.

Άρα το $AB\Gamma$ όμοιο του $A\Delta E$

γ)

Από το (β) προκύπτει ότι $B\Gamma = 4\Delta E = 16$



2.

Από τυχαίο σημείο M της $B\Gamma$ οξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ φέρνουμε $MK \perp AB$ και $ML \perp AG$. Αν AD είναι ύψος του τριγώνου να αποδείξετε ότι

α) Τα τρίγωνα MBK και $AB\Delta$ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία των πλευρών τους

β) Τα τρίγωνα $ML\Gamma$ και $AD\Gamma$ είναι όμοια

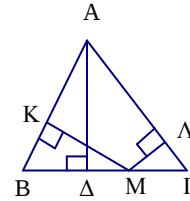
Προτεινόμενη λύση

α)

Τα ορθογώνια τρίγωνα MBK και $AB\Delta$ έχουν τη γωνία $\hat{B}$ κοινή, άρα είναι όμοια.

$$\text{Επομένως } \frac{MB}{AB} = \frac{MK}{AD} = \frac{KB}{BD}$$

Σχόλιο 1



β)

Ορθογώνια και η $\hat{\Gamma}$ κοινή

3.

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τα ύψη του AD , BE και ΓZ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $BZ\Gamma$ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία των πλευρών τους

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και $AZ\Gamma$ είναι όμοια

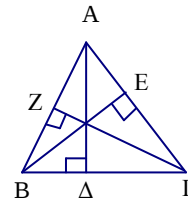
Προτεινόμενη λύση

α)

Έχουν $\hat{Z} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{B}$ κοινή

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AD}{\Gamma Z} = \frac{BD}{BZ}$$

Σχόλιο 1



β)

$\hat{Z} = \hat{E} = 90^\circ$ και $\hat{A}$ κοινή

4.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με κάθετες πλευρές $AB = 8\text{cm}$ και $A\Gamma = 6\text{cm}$.
Από το μέσο Δ της AB φέρνουμε τμήμα $\Delta E \perp B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta E$ είναι όμοια

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $B\Delta E$

Προτεινόμενη λύση

α)

$\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$ και $\hat{B}$ κοινή

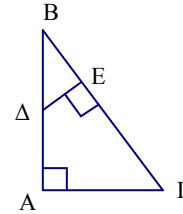
β)

Πυθαγόρειο στο $AB\Gamma$: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 =$
 $= 64 + 36 =$
 $= 100$ άρα $B\Gamma = 10$

Από το (α) έχουμε ότι $\frac{AB}{BE} = \frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{B\Delta}$ άρα Σχόλιο 1

$$\frac{8}{BE} = \frac{6}{\Delta E} = \frac{10}{4}$$

$BE = 3,2\text{ cm}$ και $\Delta E = 2,4\text{ cm}$



5.

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διχοτόμος του $\hat{A}$ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο E .

α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια και γράψτε την αναλογία των πλευρών τους

β) Δείξτε ότι $AB \cdot \Delta\Gamma = A\Delta \cdot \Gamma E$

Προτεινόμενη λύση

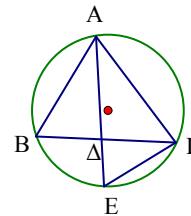
α)

$\hat{A} \hat{\Delta} B = \hat{E} \hat{\Delta} \Gamma$ ως κατακορυφήν και
 $\hat{B} = \hat{E}$ ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο $\widehat{A\Gamma}$
 Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια.

Οπότε $\frac{AB}{\Gamma E} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta E}$

β)

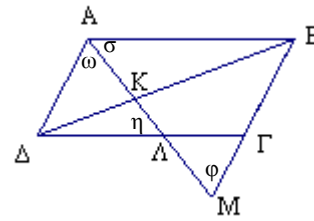
Από το (α) είναι $\frac{AB}{\Gamma E} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$ άρα $AB \cdot \Delta\Gamma = A\Delta \cdot \Gamma E$



6.

Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Τυχαιά ευθεία από το A τέμνει τη $B\Delta$ στο K , τη $\Delta\Gamma$ στο Λ και τη $B\Gamma$ στο M . Δείξτε ότι

- α) $\Delta K\Lambda$ όμοιο με το KBM και γράψετε την αναλογία των πλευρών τους
 β) $\Delta K\Lambda$ όμοιο με το AKB και γράψετε την αναλογία των πλευρών τους
 γ) $AK^2 = KM \cdot K\Lambda$

**Προτεινόμενη λύση****α)**

Έχουν $\widehat{A\hat{K}\Delta} = \widehat{B\hat{K}M}$ ως κατακορυφήν και $\widehat{\omega} = \widehat{\phi}$ ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι όμοια, οπότε $\frac{AK}{KM} = \frac{\Delta K}{KB} = \frac{A\Delta}{BM}$ **(1)**

β)

Έχουν $\widehat{A\hat{K}B} = \widehat{\Delta\hat{K}\Lambda}$ ως κατακορυφήν και $\widehat{\sigma} = \widehat{\eta}$ ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι όμοια, οπότε $\frac{K\Lambda}{AK} = \frac{\Delta\Lambda}{AB} = \frac{\Delta K}{KB}$ **(2)**

γ)

Από τις (1) (2) (έχουν μέλη ίσα) συμπεραίνουμε ότι $\frac{AK}{KM} = \frac{K\Lambda}{AK}$ άρα $AK^2 = KM \cdot K\Lambda$

7.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια
 β) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας

Προτεινόμενη λύση**α)**

Στο τρίγωνο ΔEZ είναι $\widehat{\Delta} + \widehat{E} + \widehat{Z} = 180^\circ$

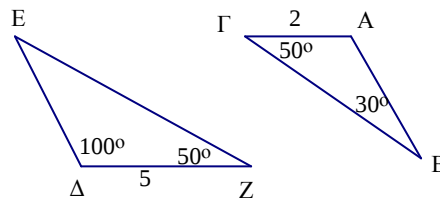
$$100^\circ + \widehat{E} + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{E} = 30^\circ$$

Αφού $\widehat{E} = \widehat{B} = 30^\circ$ και $\widehat{Z} = \widehat{\Gamma} = 50^\circ$ τα τρίγωνα είναι όμοια

β)

$$\lambda = \frac{\Delta Z}{A\Gamma} = \frac{5}{2}$$

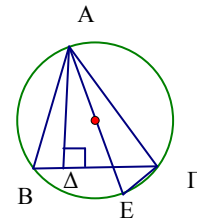


8.

Στο διπλανό σχήμα το $A\Delta$ είναι ύψος και η AE διάμετρος.
Δείξτε ότι

α) $\widehat{A\Gamma E} = 90^\circ$

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Gamma$ είναι όμοια



Προτεινόμενη λύση

α)

Επειδή AE διάμετρος, η $A\Gamma E$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο οπότε $\widehat{A\Gamma E} = 90^\circ$

β)

Έχουν $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Gamma E} = 90^\circ$ και $\widehat{B} = \widehat{E}$ ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο $\widehat{AG}$

9.

Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι τα
ορθογώνια είναι όμοια

Προτεινόμενη λύση

Σε κάθε ορθογώνιο οι διαγώνιες είναι
ίσες και διχοτομούνται, επομένως τα τρίγωνα

$O\Delta\Delta$ και $Z\kappa\Lambda$ είναι ισοσκελή και επειδή έχουν ίσες τις γωνίες της κορυφής τους,
θα έχουν ίσες όλες τις γωνίες τους, επομένως είναι όμοια.

Οπότε $\frac{A\Delta}{\kappa\Lambda} = \frac{AO}{KZ}$ **(1)**

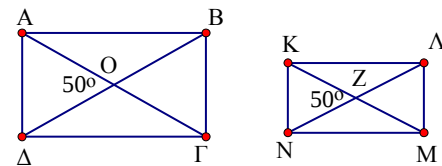
Το ίδιο ισχύει και για τα τρίγωνα OAB και $Z\kappa\Lambda$ αφού οι γωνίες της κορυφής τους
είναι 130° ως παραπληρωματικές των γωνιών των 50° .

Οπότε $\frac{AB}{\kappa\Lambda} = \frac{AO}{KZ}$ **(2)**

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\frac{A\Delta}{\kappa\Lambda} = \frac{AB}{\kappa\Lambda}$ και επομένως

$$\frac{A\Delta}{\kappa\Lambda} = \frac{AB}{\kappa\Lambda} = \frac{\Delta\Gamma}{NM} = \frac{B\Gamma}{\Lambda M}$$

Και επειδή οι γωνίες των ορθογώνιων είναι ίσες σαν ορθές, τα ορθογώνια είναι όμοια



10.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το ύψος AD στην υποτείνουσα
Δείξτε ότι

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι όμοια

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Delta}B} = 90^\circ \text{ και } \widehat{B} \text{ κοινή}$$

β)

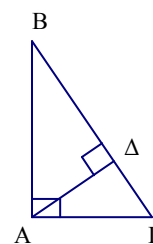
$$\widehat{A\hat{\Delta}B} = \widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 90^\circ$$

Όμως στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ και

στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε $\widehat{B} + \widehat{B\hat{A}\Delta} = 90^\circ$

Επομένως είναι $\widehat{\Gamma} = \widehat{B\hat{A}\Delta}$

Συνεπώς τα τρίγωνα είναι όμοια (δύο γωνίες ίσες)

**11.**

Στο πρώτο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $DE \parallel B\Gamma$

Στο δεύτερο είναι $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = \omega$

Σε κάθε περίπτωση να υπολογίσετε

τα x και y

Προτεινόμενη λύση

α)

Στο πρώτο τρίγωνο $AB\Gamma$

Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ έχουν την $\widehat{A}$ κοινή

και $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$ από την παραλληλία

Άρα είναι όμοια, οπότε $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AE} = \frac{B\Gamma}{\Delta E}$

$$\frac{13}{10} = \frac{y+4}{y} = \frac{20}{x}$$

$$\frac{13}{10} = \frac{y+4}{y} \quad \text{και} \quad \frac{13}{10} = \frac{20}{x}$$

$$13y = 10y + 40 \quad \text{και} \quad 13x = 200$$

$$10y = 40 \quad \text{και} \quad 13x = 200$$

$$y = \frac{40}{3} \quad \text{και} \quad x = \frac{200}{13}$$

β)

Στο δεύτερο τρίγωνο $AB\Gamma$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta E$ έχουν την $\widehat{B}$ κοινή και $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = \omega$ άρα είναι όμοια

Οπότε $\frac{AB}{BE} = \frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{B\Delta}$ άρα $\frac{8}{4} = \frac{10}{y} = \frac{8}{x}$ απ' όπου εύκολα $y = 5$ και $x = 4$

