

1.1 ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

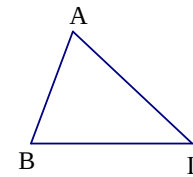
1.

Κύρια στοιχεία τριγώνου : Είναι οι πλευρές του και οι γωνίες του

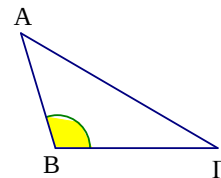
2.

Είδη τριγώνων από την άποψη των γωνιών :

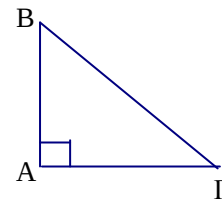
- Οξυγώνιο τρίγωνο , όλες οι γωνίες οξείες



- Αμβλυγώνιο τρίγωνο, μία γωνία αμβλεία



- Ορθογώνιο τρίγωνο, μία γωνία είναι ορθή .

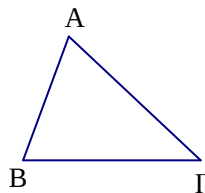


Οι πλευρές της ορθής γωνίας λέγονται κάθετες πλευρές και η τρίτη υποτείνουσα

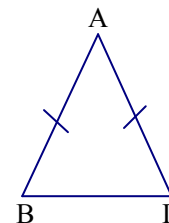
3.

Είδη τριγώνων από την άποψη των πλευρών :

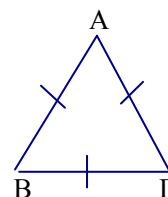
- Σκαληνό, πλευρές άνισες



- Ισοσκελές , δύο πλευρές ίσες (η τρίτη λέγεται βάση)



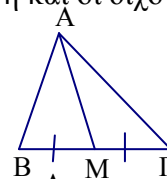
- Ισόπλευρο τρίγωνο, όλες οι πλευρές ίσες



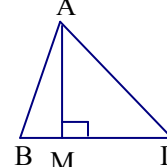
4.

Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου : Είναι οι διάμεσοι , τα ύψη και οι διχοτόμοι

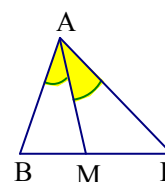
- Διάμεσος τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς .



- Ύψος τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή του τριγώνου κάθετα στην ευθεία της απέναντι πλευράς



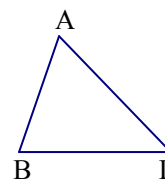
- Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή του τριγώνου, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά .



5.

Ονομασία γωνίας σε σχέση με πλευρές του τριγώνου :

- Η γωνία που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται περιεχόμενη γωνία των πλευρών αυτών
(Η $\hat{A}$ είναι περιεχόμενη των πλευρών AB, AG)
- Οι γωνίες που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς λέγονται γωνίες προσκείμενες στην πλευρά αυτή
(Οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι προσκείμενες στην πλευρά BG)



- Γωνία απέναντι από πλευρά. (Η $\hat{A}$ είναι απέναντι από την πλευρά BG)

Συμβολισμός πλευρών : $B\Gamma = \alpha$, $\Gamma A = \beta$, $AB = \gamma$

6.

Υπόμνηση

- Σε κάθε τρίγωνο ABΓ το άθροισμα των γωνιών του είναι 180°
δηλαδή $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες του έχουν άθροισμα 90°
- Στο ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση είναι ίσες
- Στο ισόπλευρο τρίγωνο όλες οι γωνίες του είναι ίσες με 60° η κάθε μία
- Σε κάθε τρίγωνο κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων (τριγωνική ανισότητα)

7.

Ίσα τρίγωνα : Δύο τρίγωνα λέμε ότι είναι ίσα όταν έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες .
 Ισχύει και το αντίστροφο . Δηλαδή
 Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους μία προς μία ίσες

8.

Κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων :

- Δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία ($\Pi - \Gamma - \Pi$)
- Μία πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες ($\Gamma - \Pi - \Gamma$)
- Τρεις πλευρές ίσες ($\Pi - \Pi - \Pi$)

9.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων :

- Δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες
- Μία αντίστοιχη πλευρά και μία αντίστοιχη οξεία γωνία

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Πρόταση : Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές είναι ίσες γωνίες και απέναντι από ίσες γωνίες είναι ίσες πλευρές

2.

Ιδιότητες στο ισοσκελές τρίγωνο :

- Οι γωνίες που πρόσκεινται στην βάση είναι ίσες
- Το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος

3.

Υπενθύμιση : Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες

4.

Υπενθύμιση : Σε παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη

- οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες
- οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες
- οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές

5.

Ιδιότητα μεσοκαθέτου : Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος και αντίστροφα :
Αν ισαπέχει από τα άκρα τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος

6.

Ιδιότητα διχοτόμου : Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας και αντίστροφα :
Αν σημείο ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας βρίσκεται στην διχοτόμο της γωνίας

7.

Μέθοδος : Αν θέλω να αποδείξω ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αποδεικνύω ότι έχει δύο πλευρές ίσες ή δύο γωνίες ίσες

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Στις πλευρές OX και OY γωνίας $X\hat{O}Y$ παίρνουμε σημεία A, B και Γ, Δ αντίστοιχα έτσι ώστε $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Αν M είναι τυχαίο σημείο της διχοτόμου OP της γωνίας $X\hat{O}Y$, δείξτε ότι

α) $\triangle OBM = \triangle OMD$

β) $AB = \Gamma\Delta$

γ) $\triangle MAB = \triangle M\Gamma\Delta$

Προτεινόμενη λύση

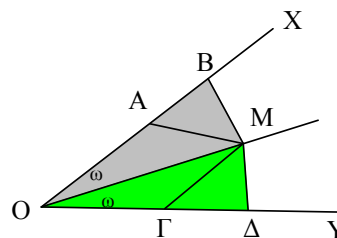
α)
(Π-Γ-Π)

β)
 $OB = O\Delta$ και $OA = O\Gamma$ αφαιρούμε κατά μέλη

γ)
Τα τρίγωνα έχουν $AB = \Gamma\Delta$ από το (β)

$MB = M\Delta$, $\hat{B} = \hat{\Delta}$ αντίστοιχα στοιχεία ίσων τριγώνων από το (α)

Με το κριτήριο (Π-Γ-Π) συμπεραίνουμε $\triangle MAB = \triangle M\Gamma\Delta$



2.

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις της βάσης του $B\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα $\triangle A\Delta B$ και $\triangle A\Gamma E$ είναι ίσα

β) Δείξτε ότι το τρίγωνο $\triangle A\Delta E$ είναι ισοσκελές

γ) Αν K, Λ, P είναι τα μέσα των $A\Delta$, AE και ΔE δείξτε ότι το τρίγωνο $\triangle K\Lambda P$ είναι ισοσκελές

Προτεινόμενη λύση

$$AB = A\Gamma \text{ άρα } \angle B = \angle \Gamma \quad (1)$$

α)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle A\Delta B$, $\triangle A\Gamma E$
Έχουν $AB = A\Gamma$, $B\Delta = \Gamma E$

$$\angle B = \angle \Gamma \text{ παραπληρωματικές ίσων από την (1)}$$

Με το κριτήριο (Π-Γ-Π) συμπεραίνουμε $\triangle A\Delta B = \triangle A\Gamma E$

β)

Από το (α) είναι $A\Delta = AE$, οπότε το $\triangle A\Delta E$ είναι ισοσκελές

γ)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle K\Lambda P$, $\triangle P\Delta E$

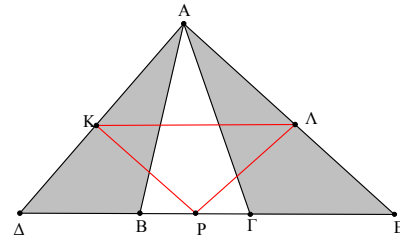
Έχουν $K\Delta = \Lambda E$ ως μισά των ίσων $A\Delta$ και AE

$$\angle K\Delta P = \angle P\Delta E \text{ ως αθροίσματα ίσων (} \angle B = \angle \Gamma \text{ και } \angle \Delta B = \angle \Gamma E)$$

$$\text{και } \angle K\Lambda P = \angle P\Delta E \text{ από το ισοσκελές } \triangle A\Delta E$$

Με το κριτήριο (Π-Γ-Π) συμπεραίνουμε $\triangle K\Lambda P = \triangle P\Delta E$

Οπότε $KP = P\Lambda$, άρα $\triangle K\Lambda P$ ισοσκελές



3.

Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB , AG ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ , E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Δείξτε ότι

α) $\hat{\Delta B \Gamma} = \hat{E \Gamma B}$ ($\hat{\omega} = \hat{\phi}$)

β) Τα τρίγωνα $\triangle B\Gamma\Delta$ και $\triangle \Gamma E B$ είναι ίσα

γ) $\Delta\Gamma = BE$

δ) Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$ δείξτε ότι $M\Delta = ME$

Προτεινόμενη λύση

α)

Στο ισοσκελές $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$,

άρα $\hat{\omega} = \hat{\phi}$ (παραπληρώματα ίσων)

β)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle B\Gamma\Delta$, $\triangle \Gamma E B$

Έχουν $B\Gamma = \Gamma B$,

$B\Delta = \Gamma E$ υπόθεση

$\hat{\Delta B \Gamma} = \hat{E \Gamma B}$ από το (α)

Με το κριτήριο (Π-Γ-Π) συμπεραίνουμε $\triangle B\Gamma\Delta = \triangle \Gamma E B$

γ)

$\Delta\Gamma = BE$ από (β)

δ)

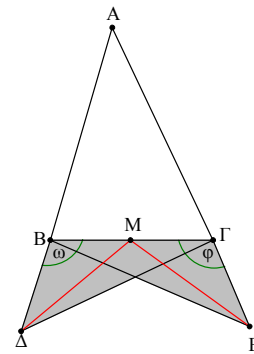
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle B\Delta M$, $\triangle M\Gamma E$

Έχουν $B\Delta = \Gamma E$

$MB = M\Gamma$

$\hat{\Delta B M} = \hat{E \Gamma M}$ από τα (α)

Με το κριτήριο (Π-Γ-Π) συμπεραίνουμε $\triangle B\Delta M = \triangle M\Gamma E$, οπότε $M\Delta = ME$

**4.**

Δείξτε ότι στις ίσες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι.

Προτεινόμενη λύση

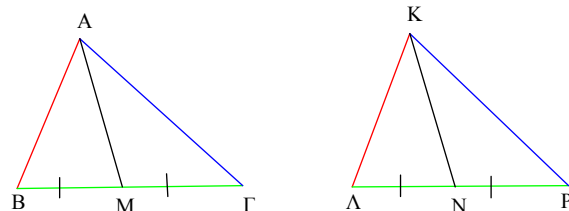
Έστω ότι $\triangle AB\Gamma = \triangle K\Lambda P$ με

$AB = K\Lambda$, $AG = KP$, $B\Gamma = \Lambda P$

και αντίστοιχες γωνίες ίσες.

Με το κριτήριο (Π-Γ-Π)

συμπεραίνουμε ότι $\triangle ABM = \triangle K\Lambda N$,
οπότε $AM = KN$



5.

Δύο τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle K\Lambda P$ έχουν $A\Gamma = KP$, $\hat{A} = \hat{K}$ και διχοτόμο $A\Delta$ ίση με τη διχοτόμο KN . Δείξτε ότι

α) Τα τρίγωνα $\triangle A\Delta\Gamma$ και $\triangle KNP$ είναι ίσα

β) Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle K\Lambda P$ είναι ίσα

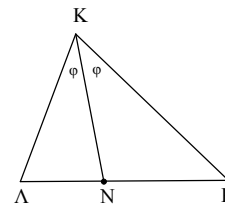
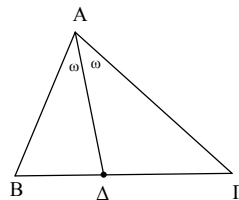
Προτεινόμενη λύση

α)

$\triangle A\Delta\Gamma = \triangle KNP$ μισά ίσων

Με το κριτήριο (Π-Γ-Π)

συμπεραίνουμε ότι $\triangle A\Delta\Gamma = \triangle KNP$



β)

Από το (α) συμπεραίνουμε ότι $\hat{\Gamma} = \hat{P}$

Με το κριτήριο (Γ-Π-Γ) συμπεραίνουμε ότι $\triangle AB\Gamma = \triangle K\Lambda P$

6.

Δύο τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle K\Lambda P$ έχουν $A\Gamma = KP$, $AB = K\Lambda$ και διάμεσο $B\Delta$ ίση με τη διάμεσο ΛN . Δείξτε ότι

α) Τα τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle K\Lambda N$ είναι ίσα

β) Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle K\Lambda P$ είναι ίσα

Προτεινόμενη λύση

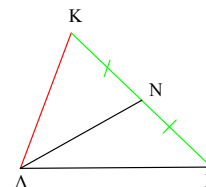
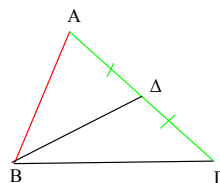
α)

Κριτήριο (Π-Π-Π)

β)

Από το (α) έχουμε $\hat{A} = \hat{K}$

Με (Π-Γ-Π) συμπεραίνουμε ότι $\triangle AB\Gamma = \triangle K\Lambda P$



7.

Έστω γωνία $\widehat{XO\Psi}$, δύο σημεία A και B στην OX και δύο σημεία Γ και Δ στην OΨ έτσι ώστε $OA = OG$ και $OB = OD$. Οι BG και AD τέμνονται στο K.
Δείξτε ότι

α) $\triangle OBG = \triangle OAD$

β) $\triangle AKB = \triangle KGD$

γ) Η OK είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{XO\Psi}$.

Προτεινόμενη λύση

α)

Κριτήριο (Π-Γ-Π)

β)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle AKB$, $\triangle KGD$

Έχουν $AB = GD$ διαφορές των ίσων

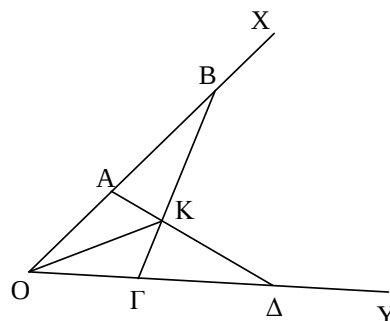
$$\widehat{B} = \widehat{D} \text{ από (α)}$$

$$\widehat{BAK} = \widehat{GDK} \text{ παραπληρώματα ίσων από (α)}$$

Με (Γ-Π-Γ) συμπεραίνουμε ότι $\triangle AKB = \triangle KGD$

γ)

Κριτήριο (Π-Π-Π) στα $\triangle OAK$, $\triangle OKG$ οπότε $\widehat{AOK} = \widehat{KOG}$ άρα OK διχοτόμος της $\widehat{XO\Psi}$



8.

Σε τρίγωνο ABΓ προεκτείνουμε τις BA και ΓA κατά $AB' = BA$ και $AG' = AG$ αντίστοιχα. Η προέκταση της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ τέμνει το B'Γ' στο M'. Δείξτε ότι

α) Τα τρίγωνα $\triangle ABΓ$ και $\triangle AB'Γ'$ είναι ίσα

β) Τα τρίγωνα $\triangle ABM$ και $\triangle AB'M'$ είναι ίσα

γ) Το M' είναι το μέσο του B'Γ'

Προτεινόμενη λύση

α)

Κριτήριο (Π-Γ-Π)

β)

Έχουν $AB = AB'$,

$$\widehat{BAM} = \widehat{B'AM'} \text{ ως κατακορυφήν}$$

$$\widehat{B} = \widehat{B'} \text{ από το (α)}$$

Κριτήριο (Γ-Π-Γ)

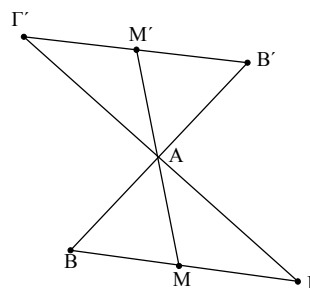
γ)

Από το (β) έχουμε ότι $BM = B'M'$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $MΓ = M'Γ'$

Και επειδή είναι $BM = MΓ$, θα είναι και $B'M' = M'Γ'$,

άρα το M' είναι μέσο του B'Γ'



9.

Έστω γωνία $\widehat{XO\Psi}$ και δύο σημεία A και B στις OX και OΨ αντίστοιχα έτσι ώστε $OA = OB$. Αν M είναι τυχαίο σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{XO\Psi}$ και οι AM, BM τέμνουν τις OΨ και OX στα Γ και Δ αντίστοιχα, δείξτε ότι

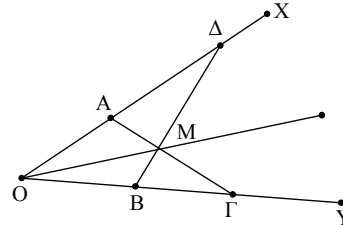
α) $\triangle OAM = \triangle OBM$

β) $AG = BD$

Προτεινόμενη λύση

α)

Έχουν $OA = OB$
 OM κοινή και
 $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$
 Κριτήριο (Π-Γ-Π)



β)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle OBD$, $\triangle OAG$
 Έχουν $OB = OA$,
 $\widehat{XO\Psi}$ κοινή
 $\widehat{OAM} = \widehat{OBM}$ από το (α)

Με (Γ-Π-Γ) συμπεραίνουμε ότι $\triangle OBD = \triangle OAG$, συνεπώς $AG = BD$

10.

Δύο τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ έχουν $AG = A'\Gamma'$, $AB = A'B'$ και ύψος $AD = \text{ύψος } A'\Delta'$. Δείξτε ότι

α) $\triangle ABD = \triangle A'B'\Delta'$

β) $\triangle AG\Delta = \triangle A'\Gamma'\Delta'$

γ) $\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$

Προτεινόμενη λύση

α)

Ορθογώνια με δύο αντίστοιχα στοιχεία ίσα

β)

Ομοίως

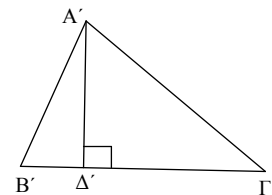
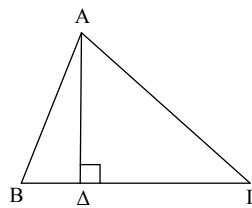
γ)

Έχουν $BD = B'\Delta'$ από το (α)

$\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$ από το (β)

Επομένως $B\Gamma = B'\Gamma'$

Με (Π-Π-Π) συμπεραίνουμε ότι $\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$



11.

Δύο τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$, ύψος $B\Delta = \text{ύψος } B'\Delta'$ και ύψος $\Gamma Z = \text{ύψος } \Gamma'Z'$. Δείξτε ότι

α) $\triangle AB\Delta = \triangle A'B'\Delta'$

β) $\triangle A\Gamma Z = \triangle A'\Gamma'Z'$

γ) $\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$

Προτεινόμενη λύση

α)
Ορθογώνια με δύο αντίστοιχα στοιχεία ίσα

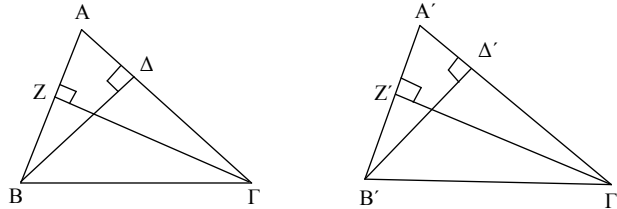
β)
Ομοίως

γ)
Έχουν $AB = A'B'$ από το (α)

$A\Gamma = A'\Gamma'$ από το (β)

και $\hat{A} = \hat{A}'$ από υπόθεση

Με (Π-Γ-Π) συμπεραίνουμε $\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$

**12.**

Δύο τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$, ύψος $B\Delta = \text{ύψος } B'\Delta'$ και ύψος $AZ = \text{ύψος } A'Z'$. Δείξτε ότι

α) $\triangle AB\Delta = \triangle A'B'\Delta'$

β) $\triangle ABZ = \triangle A'B'Z'$

γ) $\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$

Προτεινόμενη λύση

α)
Ορθογώνια με δύο αντίστοιχα στοιχεία ίσα

β)
Έχουν $AB = A'B'$ από το (α)
 $AZ = A'Z'$ από υπόθεση
ορθογώνια

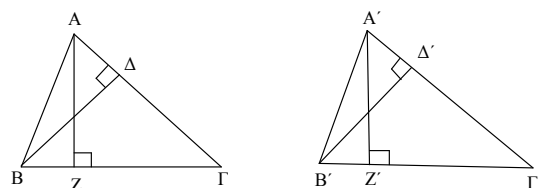
Άρα ίσα

γ)
Έχουν $AB = A'B'$ από το (α)

$\hat{A} = \hat{A}'$ από υπόθεση

$\hat{B} = \hat{B}'$ από το (β)

Με (Γ-Π-Γ) συμπεραίνουμε $\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$



13.

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις ίσες πλευρές AB και $A\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι

α) $\triangle B\Delta M = \triangle \Gamma E M$

β) Το τρίγωνο $\triangle M\Delta E$ είναι ισοσκελές

Προτεινόμενη λύση

α)

Αφού $AB = A\Gamma$, $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$,

θα είναι $A\Delta = AE$, άρα και $B\Delta = E\Gamma$.

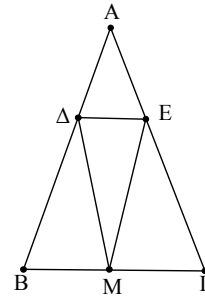
Τα τρίγωνα $\triangle B\Delta M$, $\triangle \Gamma E M$ έχουν $B\Delta = E\Gamma$

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \hat{\Gamma} \text{ (ισοσκελές)} \\ MB &= M\Gamma \end{aligned}$$

Άρα είναι ίσα

β)

Από το (α) προκύπτει ότι $\Delta M = EM$ άρα το $\triangle M\Delta E$ είναι ισοσκελές

**14.**

Στις προεκτάσεις μιας χορδής AB ενός κύκλου κέντρου O παίρνουμε τμήματα $A\Gamma = B\Delta$. Δείξτε ότι

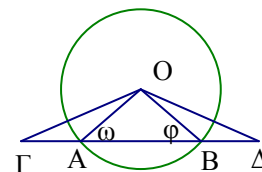
α) $\hat{O\Delta\Gamma} = \hat{O\Delta B}$

β) Τα τρίγωνα $\triangle O\Delta\Gamma$ και $\triangle O\Delta B$ είναι ίσα

Προτεινόμενη λύση

α)

Επειδή $OA = OB$ ως ακτίνες του κύκλου, το τρίγωνο $\triangle OAB$ είναι ισοσκελές και επομένως $\hat{\omega} = \hat{\phi}$.



Άρα θα είναι και $\hat{O\Delta\Gamma} = \hat{O\Delta B}$ ως παραπληρωματικές ίσων

β)

Είναι $OA = OB$, $A\Gamma = B\Delta$ και $\hat{O\Delta\Gamma} = \hat{O\Delta B}$

Οπότε από το (Π-Γ-Π) θα είναι $\triangle O\Delta\Gamma = \triangle O\Delta B$