Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

Τι είναι παραγοντοποίηση;

Παραγοντοποίηση ονομάζουμε τη διαδικασία με την οποία μια αλγεβρική παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων.

Ποιοι είναι οι τρόποι παραγοντοποίησης;

1ος τρόπος: Κοινός παράγοντας

Ο τρόπος αυτός βασίζεται στην επιμεριστική ιδιότητα, την οποία την εφαρμόζουμε από την αντίθετη κατεύθυνση:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$$

Πιο αναλυτικά, όταν σε όλους τους όρους μιας παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας τότε τον βγάζουμε απ' έξω από μία παρένθεση και μέσα στην παρένθεση γράφουμε το πηλίκο της διαίρεσης κάθε όρου του πολυωνύμου με τον κοινό παράγοντα.

Παρατηρήσεις:

- Ο κοινός παράγοντας μπορεί να είναι αριθμός, μεταβλητή, αριθμός & μεταβλητή μαζί, ή ολόκληρη παρένθεση.
  Π.χ.
  $3x + 3y = 3(x + y)$ (κοινός αριθμός)
  $2x + 6 = 2(x + 3)$ (κοινός αριθμός που καμιά φορά μπορεί να είναι «κρυμμένος»)
  $x^2 + 4x = x(x + 4)$ (κοινή μεταβλητή)
  $2x^2 + 2x = 2x(x + 1)$ (κοινός αριθμός & μεταβλητή)
  $x(y + 2) - 5(y + 2) = (y + 2)(x - 5)$ (κοινή παρένθεση)
- Όσοι είναι οι όροι της παράστασης πριν την παραγοντοποίηση, τόσοι θα πρέπει να είναι και μέσα στην παρένθεση μετά που θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο του κοινού παράγοντα.

  $$\underbrace{2x + 2y}_{\text{δύο όροι}} = 2\underbrace{(x + y)}_{\text{δύο όροι}}$$

- Κοινό παράγοντα βγάζουμε το «περισσότερο» που περιέχεται σε κάθε όρο.
  Π.χ.
  $4x^3 - 8x^2 = 4x^2(x - 2)$
- Μπορούμε να ελέγξουμε αν κάναμε σωστά την παραγοντοποίηση κάνοντας επιμεριστική στο αποτέλεσμα, όπου πρέπει να βγει ίδιο με την αρχική, μη παραγοντοποιημένη παράσταση.

2ος τρόπος: Ομαδοποίηση

Όταν όλοι οι όροι ενός πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τότε εξετάζουμε μήπως μπορούμε να χωρίσουμε κατάλληλα τους όρους σε ομάδες (ζευγάρια) που έχουν κοινό παράγοντα.`

Π.χ. $\underbrace{x^2 + 2x}_{1^\eta \text{ ομάδα}} + \underbrace{4x + 8}_{2^\eta \text{ ομάδα}} = \underbrace{x(x + 2) + 4(x + 2)}_{\text{κοινή παρένθεση}} = (x + 2)(x + 4)$

Παρατηρήσεις:

- Για να γίνει ομαδοποίηση πρέπει η παράσταση να έχει ζυγό αριθμό όρων. (δηλαδή 4, 6, 8 … όρους). Συνήθως είναι «τετράδα».
- Η μέθοδος της ομαδοποίησης περιλαμβάνει δύο στάδια. Στο πρώτο βγάζουμε κοινό παράγοντα σε κάθε ομάδα ξεχωριστά και στο δεύτερο εμφανίζεται κοινή παρένθεση, την οποία βγάζουμε κοινό παράγοντα.
- Αν μετά το πρώτο στάδιο δεν εμφανιστεί κοινή παρένθεση, τότε ίσως επιλέξαμε λάθος ζευγάρια.
- Αν μετά το πρώτο στάδιο εμφανιστούν αντίθετες παρενθέσεις, τότε τις φτιάχνουμε ίδιες χρησιμοποιώντας ότι $(\alpha-\beta)=-(\beta-\alpha)$

  Π.χ.

  $2x^2-6x+3y-xy=2x(x-3)+y(3-x)=2x(x-3)-y(x-3)=$
  $=(x-3)(2x-y)$
- Υπάρχει περίπτωση σε ένα από τα δύο ζευγάρια να χρειαστεί να βγάλουμε κοινό παράγοντα τη μονάδα.

  Π.χ.

  $$3x^3-3x^2+x-1=3x^2(x-1)+1(x-1)=(x-2)(3x^2+1).$$

<u>3^{ος} τρόπος: Ταυτότητες</u>

Όταν δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τους δύο προηγούμενους τρόπους, τότε ελέγχουμε μήπως η παράσταση είναι το ανάπτυγμα κάποιας ταυτότητας κι αν είναι τη γράφουμε στην παραγοντοποιημένη της μορφή, με την παρένθεση. Χρησιμοποιούμε τις παρακάτω ταυτότητες:

(1) $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$

(2) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$

(3) $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

Παρατηρήσεις:

- Το πλήθος των όρων της παράστασης μας καθορίζει ποια ταυτότητα μπορεί να είναι. Πιο συγκεκριμένα αν έχουμε τρεις όρους τότε ελέγχουμε αν πρόκειται για κάποια από τις δύο πρώτες, αν έχουμε δύο όρους τότε ελέγχουμε αν πρόκειται για την τρίτη.

  Π.χ.

  $\underbrace{x^2+4x+4}_{\text{3 όροι}}=x^2+2\cdot 2x+2^2=(x+2)^2$

  $\underbrace{x^2-6x+9}_{\text{3 όροι}}=x^2-2\cdot 3x+3^2=(x-3)^2$

  $\underbrace{x^2-9}_{\text{2 όροι}}=x^2-3^2=(x-3)(x+3)$

4^{ος} τρόπος: Διάσπαση όρου

Στην περίπτωση που η παράσταση έχει τρεις όρους και δεν υπάρχει κοινός παράγοντας, ούτε είναι ανάπτυγμα κάποιας ταυτότητας, τότε ελέγχουμε μήπως μπορούμε να διασπάσουμε κατάλληλα κάποιο όρο της έτσι ώστε να προκύψουν τέσσερις όροι και να γίνει ομαδοποίηση.

Π.χ.

$$\begin{aligned} 2x^2 + \underbrace{5xy}_{2xy+3xy} + 3y^2 = 2x^2 + 2xy + 3xy + 3y^2 &= 2x(x+y) + 3y(x+y) \\ &= (x+y)(2x+3y) \end{aligned}$$

Σημαντικές παρατηρήσεις:

1. Ελέγχουμε **με τη σειρά** ποιος τρόπος παραγοντοποίησης μπορεί να εφαρμοστεί. Μόνο όταν δεν εφαρμόζεται κάποιος τρόπος, τότε καταφεύγω στον επόμενο.
2. Υπάρχει περίπτωση να έχουμε **συνδυασμό** των παραπάνω μεθόδων. Πιο συνηθισμένος συνδυασμός είναι να υπάρχει κοινός παράγοντας και η παρένθεση που θα προκύψει να είναι κάποια ταυτότητα.
   Π.χ.
   $2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x+3)(x-3)$
3. Όταν λέμε παραγοντοποίηση θα εννοούμε ότι αναλύουμε σε γινόμενο **πρώτων** παραγόντων. Προχωράμε δηλαδή την παραγοντοποίηση μέχρι «τέρμα», έως ότου να μην παραγοντοποιείται άλλο.
   Π.χ.
   Η παράσταση $x(x^2 - 4)$ είναι γινόμενο παραγόντων, αλλά δεν έχει αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Πρέπει να γίνει $x(x-2)(x+2)$.

Πως λύνουμε εξισώσεις με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης;

Με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης μπορούμε να λύσουμε εξισώσεις 2^{ου} (ή και μεγαλύτερου) βαθμού, που μέχρι τώρα δεν γνωρίζαμε τον τρόπο επίλυσής τους. Τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο πρώτο μέλος και στο δεύτερο μέλος μένει το μηδέν.
- Παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος.
- Αφού ένα γινόμενο είναι ίσο με μηδέν, τότε κάποιος από τους παράγοντές του θα είναι μηδέν. Δηλαδή χρησιμοποιούμε την ιδιότητα:

$$\boldsymbol{\alpha \cdot \beta = 0, \textbf{τότε } \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0}$$

Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε σε εξισώσεις 1^{ου} βαθμού και λύνουμε καθεμία χωριστά.

Π.χ.
Να λυθεί η εξίσωση $4x^2 + x - 10 = x + 6$

Λύση:
$$\begin{aligned} 4x^2 + x - 10 &= x + 6 \\ 4x^2 + x - 10 - x - 6 &= 0 \\ 4x^2 - 16 &= 0 \\ 4(x^2 - 4) &= 0 \\ 4(x^2 - 2^2) &= 0 \\ 4 \cdot (x+2) \cdot (x-2) &= 0 \end{aligned}$$
$$x + 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 2 = 0$$
$$x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 2$$

Ασκήσεις για λύση

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2x^2 + x$ β) $x^3 + 3x^2$ γ) $2x + 6$ δ) $-12 - 3x$
ε) $4x - 2x^2$ στ) $x^2y - xy^2$ ζ) $2x^2 + 4x - 8$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2(x-1) - x(x-1)$ β) $\omega^3(\omega - 3) + 3(3 - \omega)$
γ) $(3x+2)(2-x) - (x+1)(3x+2)$ δ) $y^2(2x+1) + (2x+1)^2$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^3 + x^2 - 3x - 3$ β) $2x^2 + 10x - x - 5$
γ) $5x^3 - 2x - 5x^2 + 2$ δ) $x^2 + 4x + xy + 4y - 2\omega x - 8\omega$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 - 25$ β) $\omega^2 - 4x^2$ γ) $9x^2 - y^2$ δ) $x^2 - (2x-1)^2$
ε) $\omega^2 - \frac{1}{4}$ στ) $\frac{9}{16} - 36x^2$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + 12x + 36$ β) $\omega^2 - 4\omega + 4$ γ) $9x^2 + 6x + 1$
δ) $81x^2 - 36x + 4$ ε) $\frac{1}{49} + 2x + 49x^2$ στ) $\frac{1}{x^2} + 2 + x^2$

6. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2\omega^2 - 50$ β) $3x^2 + 12x + 12$ γ) $x^3 - 2x^2 + x$
δ) $2x^3 - 18x$ ε) $x(x+3) + x^2 - 9$ στ) $x^4 - 2x^3 - 2x + 4$
ζ) $3(x-1)^2 - 12$ η) $-1 + 2x - x^2$ θ) $(x+2)(x-1) + x^2 + 4x + 4$

7. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3x^2 - 5xy + 2y^2$ β) $x^2 + xy - 12y^2$ γ) $x^2 - 5x + 4$ δ) $5x^2 + 2xy - 3y^2$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x^2 = 10x$ β) $3x^2 + 6x - (x+2) = 0$ γ) $2x^3 - 4x^2 = -2x$
δ) $3x^2 - 3 = 0$ ε) $2x^2 - 8x = (x-4)(x+1)$