

1.6 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Παραγοντοποίηση : Είναι η διαδικασία με την οποία μία παράσταση που είναι άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων

2.

Χρησιμότητα :

- Απλοποιήσεις
- Εύρεση Ε.Κ.Π και Μ.Κ.Δ
- Λύση εξίσωσης

3.

Μέθοδος 1.

Κοινός παράγοντας : $ax + ay = a(x + y)$

4.

Μέθοδος 2.

Κατά ομάδες : $ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by) =$
 $= a(x + y) + b(x + y) =$
 $= (x + y)(a + b)$

5.

Μέθοδος 3.

Διαφορά τετραγώνων : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

6.

Μέθοδος 4.

Άθροισμα κύβων : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Διαφορά κύβων : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

7.

Μέθοδος 5.

Ανάπτυγμα τετραγώνου : $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$
 $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

Ανάπτυγμα κύβου : $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$
 $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$

8.**Μέθοδος 6.**

$$\begin{aligned}\text{Τριώνυμο : } x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta &= (x + \alpha)(x + \beta) \\ x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta &= (x - \alpha)(x - \beta)\end{aligned}$$

9.**Μέθοδος 7.****Διάσπαση – προσθαφαίρεση όρου****10.****Μέθοδος 8.****Συνδυασμός περιπτώσεων**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.Να γίνει γινόμενο η παράσταση **i)** $2\alpha + 3\alpha\beta$

ii) $2\alpha + 3\alpha\beta - 5\alpha\beta\gamma$

iii) $2x^2y^3z + 4xy^2 + 6xy$

iv) $2xy(\kappa + \lambda) - 3x^2(\kappa + \lambda)^2$

Προτεινόμενη λύση**i)**

$$2\alpha + 3\alpha\beta = \alpha(2 + 3\beta)$$

Κοινός παράγοντας

ii)

$$2\alpha + 3\alpha\beta - 5\alpha\beta\gamma = \alpha(2 + 3\beta - 5\beta\gamma)$$

iii)

$$2x^2y^3z + 4xy^2 + 6xy = 2xy(xy^2z + 2y + 3)$$

iv)

$$\begin{aligned}2xy(\kappa + \lambda) - 3x^2(\kappa + \lambda)^2 &= x(\kappa + \lambda)[2y - 3x(\kappa + \lambda)] = \\ &= x(\kappa + \lambda)[2y - 3x\kappa - 3x\lambda]\end{aligned}$$

2.

Να γίνει γινόμενο η παράσταση **i)** $xy + 5x - 4y - 20$
ii) $kx - 2ky + \lambda x - 2\lambda y + k + \lambda$
iii) $5x + (k + 5)y + kx$

Προτεινόμενη λύση**i)**

$$\begin{aligned} xy + 5x - 4y - 20 &= (xy + 5x) - (4y + 20) = \\ &= x(y + 5) - 4(y + 5) = \\ &= (y + 5)(x - 4) \end{aligned}$$

Κατά ομάδες

ii)

$$\begin{aligned} kx - 2ky + \lambda x - 2\lambda y + k + \lambda &= (kx + \lambda x) - (2ky + 2\lambda y) + (k + \lambda) = \\ &= x(k + \lambda) - 2y(k + \lambda) + (k + \lambda) = \\ &= (k + \lambda)(x - 2y + 1) \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} 5x + (k + 5)y + kx &= (5x + kx) + (k + 5)y = \\ &= x(5 + k) + (k + 5)y = \\ &= (5 + k)(x + y) \end{aligned}$$

3.

Να γίνει γινόμενο η παράσταση **i)** $x^2 - 16$
ii) $9 - (3x + 2)^2$
iii) $4y^2 - 5z^2$

Προτεινόμενη λύση**i)**

$$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4)$$

Διαφορά τετραγώνων

ii)

$$\begin{aligned} 9 - (3x + 2)^2 &= 3^2 - (3x + 2)^2 = [3 + (3x + 2)][3 - (3x + 2)] = \\ &= (3 + 3x + 2)(3 - 3x - 2) = \\ &= (3x + 5)(1 - 3x) \end{aligned}$$

iii)

$$4y^2 - 5z^2 = (2y)^2 - (\sqrt{5}z)^2 = (2y + \sqrt{5}z)(2y - \sqrt{5}z)$$

4.

Να γίνει γινόμενο η παράσταση

- i) $x^3 + 1$
- ii) $y^3 - 8$
- iii) $27 + 8z^3$
- iv) $(x + 2)^3 - 64y^3$

Προτεινόμενη λύση

Άθροισμα – διαφορά κύβων

i)

$$x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x + 1)(x^2 - 1 \cdot x + 1^2) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

ii)

$$y^3 - 8 = y^3 - 2^3 = (y - 2)(y^2 + 2 \cdot y + 2^2) = (y - 2)(y^2 + 2y + 4)$$

iii)

$$27 + 8z^3 = 3^3 + (2z)^3 = (3 + 2z)(3^2 - 3 \cdot 2z + (2z)^2) = (3 + 2z)(9 - 6z + 4z^2)$$

iv)

$$\begin{aligned} (x + 2)^3 - 64y^3 &= (x + 2)^3 - (4y)^3 = \\ &= [(x + 2) - 4y][(x + 2)^2 + (x + 2)4y + (4y)^2] = \\ &= (x + 2 - 4y)(x^2 + 4x + 4 + 4xy + 8y + 16y^2) \end{aligned}$$

5.

Να γίνει γινόμενο η παράσταση

- i) $x^2 + 10x + 25$
- ii) $-16y^4 + 24y^2 - 9$

Προτεινόμενη λύση

Ανάπτυγμα τετραγώνου

i)

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = (x + 5)^2$$

ii)

$$\begin{aligned} -16y^4 + 24y^2 - 9 &= -(16y^4 - 24y^2 + 9) = \\ &= -[(4y^2)^2 - 2 \cdot 4y^2 \cdot 3 + 3^2] = \\ &= -(4y^2 - 3)^2 \end{aligned}$$

6.

Να γίνει γινόμενο η παράσταση

- i) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- ii) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
- iii) $(\alpha - \beta)^3 - 3(\alpha - \beta)^2(2\alpha + \beta) + 3(\alpha - \beta)(2\alpha + \beta)^2 - (2\alpha + \beta)^3$

Προτεινόμενη λύση

Ανάπτυγμα κύβου

i)

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 + 1^3 = (x + 1)^3$$

ii)

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 - 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 - 1^3 = (x - 1)^3$$

iii)

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^3 - 3(\alpha - \beta)^2(2\alpha + \beta) + 3(\alpha - \beta)(2\alpha + \beta)^2 - (2\alpha + \beta)^3 &= [(\alpha - \beta) - (2\alpha + \beta)]^3 = \\ &= (\alpha - \beta - 2\alpha - \beta)^3 = \\ &= (-\alpha - 2\beta)^3 \end{aligned}$$

7.

- Να γίνει γινόμενο η παράσταση
- i) $x^2 - 5x + 6$
 - ii) $x^2 + x - 6$
 - iii) $x^2 + (2 + \sqrt{2})x + 2\sqrt{2}$

Προτεινόμενη λύση

Τριώνυμο

i)

$$x^2 - (3 + 2)x + 3 \cdot 2 = (x - 3)(x - 2)$$

ii)

$$x^2 + x - 6 = x^2 + (3 - 2)x + 3 \cdot (-2) = (x + 3)(x - 2)$$

iii)

$$x^2 + (2 + \sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = (x + 2)(x + \sqrt{2})$$

8.

- Να γίνει γινόμενο η παράσταση
- i) $x^4 + y^4$
 - ii) $\alpha^4 + \beta^4 - 3\alpha^2\beta^2$
 - iii) $9\alpha^4 + 25\beta^4 + 26\alpha^2\beta^2$
 - iv) $2x^2 + 5xy + 3y^2$

Προτεινόμενη λύση

Διάσπαση – προσθαφαίρεση όρου

i)

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = \\ &= (x^2 + y^2)^2 - (\sqrt{2}xy)^2 = \\ &= (x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \alpha^4 + \beta^4 - 3\alpha^2\beta^2 &= \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2 = \\ &= (\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta) \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} 9\alpha^4 + 25\beta^4 + 26\alpha^2\beta^2 &= (3\alpha^2)^2 + (5\beta^2)^2 + 26\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 = \\ &= (3\alpha^2)^2 + (5\beta^2)^2 + 30\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 = \\ &= (3\alpha^2 + 5\beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = \\ &= (3\alpha^2 + 5\beta^2 - 2\alpha\beta)(3\alpha^2 + 5\beta^2 + 2\alpha\beta) \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5xy + 3y^2 &= 2x^2 + 2xy + 3xy + 3y^2 = \\ &= (2x^2 + 2xy) + (3xy + 3y^2) = \\ &= 2x(x + y) + 3y(x + y) = \\ &= (x + y)(2x + 3y) \end{aligned}$$

9.

- Να γίνει γινόμενο η παράσταση
- i) $x^6 - y^6$
 - ii) $x^2y^2 - 25x^2 - 4y^2 + 100$
 - iii) $x^2 + 2xy + 5(x + y) + y^2$
 - iv) $(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \gamma^2) - (\alpha^2 - \beta^2)(\gamma - \alpha)$
 - v) $x^2 - 9 + 10xy + 25y^2$

Προτεινόμενη λύση

Συνδυασμός περιπτώσεων

i)

$$x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) = (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

ii)

$$\begin{aligned} x^2y^2 - 25x^2 - 4y^2 + 100 &= x^2(y^2 - 25) - 4(y^2 - 25) = \\ &= (y^2 - 25)(x^2 - 4) = \\ &= (y - 5)(y + 5)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + 5(x + y) + y^2 &= x^2 + 2xy + y^2 + 5(x + y) = \\ &= (x + y)^2 + 5(x + y) = \\ &= (x + y)(x + y + 5) \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)(\alpha^2 - \gamma^2) - (\alpha^2 - \beta^2)(\gamma - \alpha) &= (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma) - (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\gamma - \alpha) = \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma) + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(-\gamma + \alpha) = \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma + \alpha + \beta) = \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(2\alpha + \gamma + \beta) \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} x^2 - 9 + 10xy + 25y^2 &= (x^2 + 10xy + 25y^2) - 9 = \\ &= (x + 5y)^2 - 3^2 = \\ &= (x + 5y + 3)(x + 5y - 3) \end{aligned}$$

10.

Στις παρακάτω ισότητες να συμπληρώσετε τα κενά

- α) $5x^2 + 15xy - 10x\omega - 25x = 5x(\dots) = 5x(\mathbf{x + 3y - 2\omega - 5})$
- β) $\alpha(x^3 + 2) - \beta(x^3 + 2) + (x^3 + 2) = (\dots)(\dots) = (\mathbf{x^3 + 2})(\mathbf{\alpha - \beta + 1})$
- γ) $25x^2 - 9 = (\dots - 3)(\dots + 3) = (\mathbf{5x - 3})(\mathbf{5x + 3})$
- δ) $16x^2 - 24x + 9 = (\dots)^2 = (\mathbf{4x - 3})^2$
- ε) $x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = (\dots)(\dots) = (\mathbf{x + 2})(\mathbf{x + 3})$

Προτεινόμενη λύση

- α) $5x^2 + 15xy - 10x\omega - 25x = 5x(x + 3y - 2\omega - 5)$
- β) $\alpha(x^3 + 2) - \beta(x^3 + 2) + (x^3 + 2) = (x^3 + 2)(\alpha - \beta + 1)$
- γ) $25x^2 - 9 = (5x - 3)(5x + 3)$
- δ) $16x^2 - 24x + 9 = (4x - 3)^2$
- ε) $x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = (x + 2)(x + 3)$

Συμπληρωμένα τα κενά φαίνονται παραπάνω

11.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) $x^2(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) = x^2$ Λ

β) $9 - 6\alpha + \alpha^2 = (\alpha - 3)^2$ Σ

γ) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 1)$ Λ

δ) $x^2 - 2 = (x - 2)(x + 2)$ Λ

ε) $\alpha^2 - \beta^2 = -(\alpha + \beta)(\beta - \alpha)$ Σ

Προτεινόμενη λύση

α) $x^2(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(x^2 - 1) = (\alpha + \beta)(x - 1)(x + 1)$ πρόταση Λάθος

β) $9 - 6\alpha + \alpha^2 = (3 - \alpha)^2 = (\alpha - 3)^2$ πρόταση Σωστή

γ) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ πρόταση Λάθος

δ) $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ πρόταση Λάθος

ε) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = -(\alpha + \beta)(\beta - \alpha)$ πρόταση Σωστή

12.

Να γίνουν γινόμενοι οι παραστάσεις

α) $\alpha x + \beta y + \alpha y + \alpha + \beta x + \beta$ β) $36\alpha^2\beta^2 - 144\gamma^2$

δ) $x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4$ ε) $y^2 - 12y + 20$

γ) $\omega^3 - \kappa^3\rho^3$

ζ) $x^3 - y^3 + x^2 - y^2$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta y + \alpha y + \alpha + \beta x + \beta &= (\alpha x + \alpha y + \alpha) + (\beta x + \beta y + \beta) = \\ &= \alpha(x + y + 1) + \beta(x + y + 1) = \\ &= (\alpha + \beta)(x + y + 1)\end{aligned}$$

Κατά ομάδες

β)

$$36\alpha^2\beta^2 - 144\gamma^2 = 36[(\alpha\beta)^2 - 4\gamma^2] = 36(\alpha\beta + 2\gamma)(\alpha\beta - 2\gamma)$$

Διαφορά τετραγώνων

γ)

$$\omega^3 - \kappa^3\rho^3 = \omega^3 - (\kappa\rho)^3 = (\omega - \kappa\rho)(\omega^2 + \omega\kappa\rho + \kappa^2\rho^2)$$

Διαφορά κύβων

δ)

$$x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 3y^2 + (3y^2)^2 = (x^2 + 3y^2)^2$$

Ανάπτυγμα τετραγώνου

ε)

$$y^2 - 12y + 20 = y^2 - (10 + 2)y + 10 \cdot 2 = (y - 2)(y - 10)$$

Τριώνυμο

ζ)

$$\begin{aligned}x^3 - y^3 + x^2 - y^2 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) + (x - y)(x + y) = \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2 + x + y)\end{aligned}$$

Διαφορά κύβων και διαφορά τετραγώνων

13.

Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις

$$\alpha) x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

$$\beta) \alpha^2x^2 + 2\alpha^2xy + \alpha^2y^2 - (\alpha + \beta)^2$$

$$\gamma) 2x^2 + 10x + 12$$

$$\delta) 8x^3 - 27$$

$$\epsilon) x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\zeta) (\alpha^2 - 9)^2 - (\alpha + 3)^2$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = (x + y)^3$$

β)

$$\begin{aligned} \alpha^2x^2 + 2\alpha^2xy + \alpha^2y^2 - (\alpha + \beta)^2 &= \alpha^2(x^2 + 2xy + y^2) - (\alpha + \beta)^2 = \\ &= \alpha^2(x + y)^2 - (\alpha + \beta)^2 = \\ &= [\alpha(x + y)]^2 - (\alpha + \beta)^2 = \\ &= [\alpha(x + y) + (\alpha + \beta)][\alpha(x + y) - (\alpha + \beta)] = \\ &= (\alpha x + \alpha y + \alpha + \beta)(\alpha x + \alpha y - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} 2x^2 + 10x + 12 &= 2(x^2 + 5x + 6) = 2[x^2 + (2 + 3)x + 6] = \\ &= 2(x + 2)(x + 3) \end{aligned}$$

δ)

$$8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x - 3)[(2x)^2 + (2x)3 + 3^2] = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$$

ζ)

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - 9)^2 - (\alpha + 3)^2 &= [(\alpha + 3)(\alpha - 3)]^2 - (\alpha + 3)^2 = \\ &= (\alpha + 3)^2(\alpha - 3)^2 - (\alpha + 3)^2 = \\ &= (\alpha + 3)^2[(\alpha - 3)^2 - 1] = \\ &= (\alpha + 3)^2(\alpha - 3 - 1)(\alpha - 3 + 1) = \\ &= (\alpha + 3)^2(\alpha - 4)(\alpha - 2) \end{aligned}$$

14.

Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις

$$\alpha) 25\alpha^2 - 10\alpha\beta + \beta^2 \qquad \beta) (2x-3)^2 - (5x-6)^2$$

$$\gamma) 24\alpha^3x^3 + 81\alpha^6y^3 \qquad \delta) x^2 + 14x - 32$$

$$\epsilon) \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha + 2\beta \qquad \zeta) \alpha^2\gamma - \alpha^2\delta + \beta^2\delta - \beta^2\gamma$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$25\alpha^2 - 10\alpha\beta + \beta^2 = (5\alpha)^2 - 2 \cdot 5\alpha \cdot \beta + \beta^2 = (5\alpha - \beta)^2$$

$$\begin{aligned} \beta) (2x-3)^2 - (5x-6)^2 &= [(2x-3) + (5x-6)][(2x-3) - (5x-6)] = \\ &= (2x-3+5x-6)(2x-3-5x+6) = \\ &= (7x-9)(-3x+3) = 3(7x-9)(-x+1) \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} 24\alpha^3x^3 + 81\alpha^6y^3 &= 3\alpha^3(8x^3 + 27\alpha^3y^3) = \\ &= 3\alpha^3[(2x)^3 + (3\alpha y)^3] = \\ &= 3\alpha^3(2x + 3\alpha y)[(2x)^2 - 2x \cdot 3\alpha y + (3\alpha y)^2] = \\ &= 3\alpha^3(2x + 3\alpha y)(4x^2 - 6\alpha xy + 9\alpha^2 y^2) \end{aligned}$$

δ)

$$x^2 + 14x - 32 = x^2 + (16-2)x + 2(-16) = (x+16)(x-2)$$

ε)

$$\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha + 2\beta = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) - 2(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 2)$$

ζ)

$$\begin{aligned} \alpha^2\gamma - \alpha^2\delta + \beta^2\delta - \beta^2\gamma &= \alpha^2(\gamma - \delta) + \beta^2(\delta - \gamma) = \\ &= \alpha^2(\gamma - \delta) - \beta^2(\gamma - \delta) = \\ &= (\gamma - \delta)(\alpha^2 - \beta^2) = \\ &= (\gamma - \delta)(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

15.

Να γίνουν γινόμενοι οι παραστάσεις

$$\alpha) \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - x^2$$

$$\beta) (3x-6)(x^2-1) - (5x-10)(x-1)^2$$

$$\gamma) 5(4-x^2) - (x-2)^2$$

$$\delta) 4\alpha^2(\beta^2-1) + 4\beta^2(1-\beta^2)$$

$$\epsilon) \alpha\beta(x^2+y^2) + xy(\alpha^2+\beta^2)$$

$$\zeta) 3\alpha^3 - 5\alpha^2 - 3\alpha + 5$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - x^2 = (\alpha + \beta)^2 - x^2 = (\alpha + \beta + x)(\alpha + \beta - x)$$

β)

$$\begin{aligned} (3x-6)(x^2-1) - (5x-10)(x-1)^2 &= 3(x-2)(x+1)(x-1) - 5(x-2)(x-1)^2 = \\ &= (x-2)(x-1)[3(x+1) - 5(x-1)] = \\ &= (x-2)(x-1)(3x+3-5x+5) = \\ &= (x-2)(x-1)(-2x+8) = \\ &= (x-2)(x-1)2(-x+4) \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} 5(4-x^2) - (x-2)^2 &= 5(2-x)(2+x) - (2-x)^2 = \\ &= (2-x)[5(2+x) - (2-x)] = \\ &= (2-x)(10+5x-2+x) = \\ &= (2-x)(6x+8) = \\ &= 2(2-x)(3x+4) \end{aligned}$$

δ)

$$\begin{aligned} 4\alpha^2(\beta^2-1) + 4\beta^2(1-\beta^2) &= 4\alpha^2(\beta^2-1) - 4\beta^2(\beta^2-1) = \\ &= 4(\beta^2-1)(\alpha^2-\beta^2) = \\ &= 4(\beta+1)(\beta-1)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

ε)

$$\begin{aligned} \alpha\beta(x^2+y^2) + xy(\alpha^2+\beta^2) &= \alpha\beta x^2 + \alpha\beta y^2 + xy\alpha^2 + xy\beta^2 = \\ &= (\alpha\beta x^2 + xy\alpha^2) + (\alpha\beta y^2 + xy\beta^2) = \\ &= \alpha x(x\beta + \alpha y) + \beta y(\alpha y + x\beta) \\ &= (\alpha y + x\beta)(\alpha x + \beta y) \end{aligned}$$

ζ)

$$\begin{aligned} 3\alpha^3 - 5\alpha^2 - 3\alpha + 5 &= (3\alpha^3 - 3\alpha) - (5\alpha^2 - 5) = \\ &= 3\alpha(\alpha^2 - 1) - 5(\alpha^2 - 1) = \\ &= (\alpha^2 - 1)(3\alpha - 5) = \\ &= (\alpha - 1)(\alpha + 1)(3\alpha - 5) \end{aligned}$$

16.

Να γίνουν γινόμενοι οι παραστάσεις

$$\alpha) \alpha^4 - \alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 2$$

$$\beta) x^4 + 4y^4 - 5x^2y^2$$

$$\gamma) 1 - 2\alpha + 2\beta\gamma + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

$$\delta) \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha - \alpha\beta^2 - \beta\gamma^2 - \gamma\alpha^2$$

$$\epsilon) \alpha^4 + \alpha^2 + 1$$

$$\zeta) \alpha^4 + 2\alpha^3 + \alpha^2 - \beta^2$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} \alpha^4 - \alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 2 &= \alpha^4 - \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha + 2\alpha - 2 = \\ &= \alpha^3(\alpha - 1) - 3\alpha(\alpha - 1) + 2(\alpha - 1) = \\ &= (\alpha - 1)(\alpha^3 - 3\alpha + 2) = \\ &= (\alpha - 1)(\alpha^3 - \alpha - 2\alpha + 2) = \\ &= (\alpha - 1)[\alpha(\alpha^2 - 1) - 2(\alpha - 1)] = \\ &= (\alpha - 1)[\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1) - 2(\alpha - 1)] = \\ &= (\alpha - 1)(\alpha - 1)[\alpha(\alpha + 1) - 2] = \\ &= (\alpha - 1)^2(\alpha^2 + \alpha - 2) = \\ &= (\alpha - 1)^2[\alpha^2 + (2 - 1)\alpha + 2(-1)] = \\ &= (\alpha - 1)^2(\alpha + 2)(\alpha - 1) = (\alpha - 1)^3(\alpha + 2) \end{aligned}$$

Δημιουργούμε ίδιους συντελεστές

β)

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 - 5x^2y^2 &= \underline{x^4} + 4y^4 - \underline{4x^2y^2} - x^2y^2 = \\ &= x^2(x^2 - 4y^2) - y^2(x^2 - 4y^2) = \\ &= (x^2 - 4y^2)(x^2 - y^2) = \\ &= (x + 2y)(x - 2y)(x - y)(x + y) \end{aligned}$$

Δημιουργούμε ίδιους συντελεστές

γ)

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha + 2\beta\gamma + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 &= (1 - 2\alpha + \alpha^2) + (2\beta\gamma - \beta^2 - \gamma^2) = \\ &= (\alpha - 1)^2 - (\gamma^2 + \beta^2 - 2\beta\gamma) = \\ &= (\alpha - 1)^2 - (\gamma - \beta)^2 = \\ &= [(\alpha - 1) + (\gamma - \beta)][(\alpha - 1) - (\gamma - \beta)] = \\ &= (\alpha - 1 + \gamma - \beta)(\alpha - 1 - \gamma + \beta) \end{aligned}$$

δ)

$$\begin{aligned} \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha - \alpha\beta^2 - \beta\gamma^2 - \gamma\alpha^2 &= \alpha\beta(\alpha - \beta) - \gamma(\alpha^2 - \beta^2) + \gamma^2(\alpha - \beta) = \\ &= \alpha\beta(\alpha - \beta) - \gamma(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + \gamma^2(\alpha - \beta) = \\ &= (\alpha - \beta)[\alpha\beta - \gamma(\alpha + \beta) + \gamma^2] = \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha\beta - \gamma\alpha - \gamma\beta + \gamma^2) = \\ &= (\alpha - \beta)[\alpha(\beta - \gamma) - \gamma(\beta - \gamma)] = \\ &= (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma) \end{aligned}$$

ε)

$$\begin{aligned} \alpha^4 + \alpha^2 + 1 &= \alpha^4 + \alpha^2 + 1 + \alpha^2 - \alpha^2 = \\ &= \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 - \alpha^2 = \\ &= (\alpha^2 + 1)^2 - \alpha^2 = (\alpha^2 + 1 + \alpha)(\alpha^2 + 1 - \alpha) \end{aligned}$$

ζ)

$$\begin{aligned} \alpha^4 + 2\alpha^3 + \alpha^2 - \beta^2 &= \alpha^2(\alpha^2 + 2\alpha + 1) - \beta^2 = \\ &= \alpha^2(\alpha + 1)^2 - \beta^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [\alpha(\alpha + 1)]^2 - \beta^2 = \\
 &= [\alpha(\alpha + 1) + \beta][\alpha(\alpha + 1) - \beta] = \\
 &= (\alpha^2 + \alpha + \beta)(\alpha^2 + \alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

17.

Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $(5 - 3x)(x + 4) + (3x - 5)(2x - 3) + 9x^2 - 25 = 0$

β) $(\omega^2 - 4)^2 = (3\omega + 4)(\omega + 2)^2$

γ) $x(x - 6)(x + 4) + 9x + 36 = 0$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$(5 - 3x)(x + 4) + (3x - 5)(2x - 3) + 9x^2 - 25 = 0$$

$$(5 - 3x)(x + 4) + (3x - 5)(2x - 3) + (3x - 5)(3x + 5) = 0$$

$$(5 - 3x)(x + 4) - (5 - 3x)(2x - 3) - (5 - 3x)(3x + 5) = 0$$

$$(5 - 3x)[(x + 4) - (2x - 3) - (3x + 5)] = 0$$

$$(5 - 3x)(x + 4 - 2x + 3 - 3x - 5) = 0$$

$$(5 - 3x)(-4x + 2) = 0$$

$$5 - 3x = 0 \quad \text{ή} \quad -4x + 2 = 0 \quad \text{άρα} \quad x = \frac{5}{3} \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{2}$$

β)

$$\begin{aligned}
 (\omega^2 - 4)^2 &= (3\omega + 4)(\omega + 2)^2 \quad \text{άρα} \quad (\omega^2 - 4)^2 - (3\omega + 4)(\omega + 2)^2 = 0 \\
 (\omega - 2)^2(\omega + 2)^2 - (3\omega + 4)(\omega + 2)^2 &= 0 \\
 (\omega + 2)^2 [(\omega - 2)^2 - (3\omega + 4)] &= 0 \\
 (\omega + 2)^2 (\omega^2 - 4\omega + 4 - 3\omega - 4) &= 0 \\
 (\omega + 2)^2 (\omega^2 - 7\omega) &= 0 \\
 (\omega + 2)^2 \omega (\omega - 7) &= 0 \\
 (\omega + 2)^2 = 0 \quad \text{ή} \quad \omega = 0 \quad \text{ή} \quad \omega - 7 = 0 \\
 \omega = -2 \quad \text{ή} \quad \omega = 0 \quad \text{ή} \quad \omega = 7
 \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned}
 x(x - 6)(x + 4) + 9x + 36 &= 0 \quad \text{άρα} \quad x(x - 6)(x + 4) + 9(x + 4) = 0 \\
 (x + 4)[x(x - 6) + 9] &= 0 \\
 (x + 4)(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\
 (x + 4)(x - 3)^2 &= 0 \\
 x + 4 = 0 \quad \text{ή} \quad (x - 3)^2 &= 0 \\
 x = -4 \quad \text{ή} \quad x = 3
 \end{aligned}$$

18.

Έστω τα πολυώνυμα $A = -x^2 + 1$

$$B = (x + 2)(3x^2 - 6x) - (x^2 - 2x)$$

$$\Gamma = x^3 - 4x$$

α) Να τα αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων

β) Να λύσετε την εξίσωση $(x + 2)(3x^2 - 6x) - (x^2 - 2x) = x^3 - 4x$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$A = -x^2 + 1 = 1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$$

$$\begin{aligned} B &= (x + 2)(3x^2 - 6x) - (x^2 - 2x) = (x + 2) 3x (x - 2) - x(x - 2) = \\ &= x(x - 2)[3(x + 2) - 1] = \\ &= x(x - 2)(3x + 5) \end{aligned}$$

$$\Gamma = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$$

β)

$$\begin{aligned} (x + 2)(3x^2 - 6x) - (x^2 - 2x) &= x^3 - 4x \quad \text{από (α)} \quad x(x - 2)(3x + 5) = x(x + 2)(x - 2) \\ x(x - 2)(3x + 5) - x(x + 2)(x - 2) &= 0 \\ x(x - 2)[(3x + 5) - (x + 2)] &= 0 \\ x(x - 2)(3x + 5 - x - 2) &= 0 \\ x(x - 2)(2x + 3) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{ή} \quad x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad 2x + 3 = 0 \\ x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

19.

Χωρίς κομπιουτεράκι να βρείτε τα αποτελέσματα

α) $2013 \cdot 997 + 2013 \cdot 3$ **β)** $995 \cdot 1005 + 25$ **γ)** $10005 \cdot 10005 - 10 \cdot 10005 + 25$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$2013 \cdot 997 + 2013 \cdot 3 = 2013 \cdot (997 + 3) = 2013 \cdot 1000 = 2013000$$

β)

$$995 \cdot 1005 + 25 = (1000 - 5)(1000 + 5) + 25 = 1000^2 - 25 + 25 = 1000^2$$

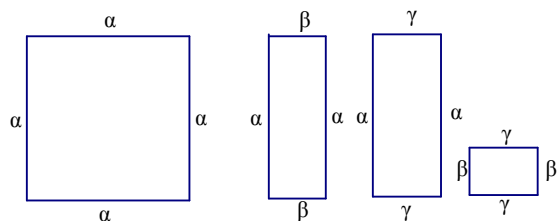
γ)

$$\begin{aligned} 10005 \cdot 10005 - 10 \cdot 10005 + 25 &= 10005^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10005 + 5^2 = \\ &= (10005 - 5)^2 = 10000^2 \end{aligned}$$

20.

Πως πρέπει να τοποθετήσουμε τα διπλανά σχήματα για να σχηματιστεί ορθογώνιο;

Ποιες είναι οι διαστάσεις του;



Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma &= \alpha(\alpha + \beta) + \gamma(\alpha + \beta) = \\ &= (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma) \end{aligned}$$

Επομένως τα σχήματα πρέπει να τα τοποθετήσουμε όπως φαίνεται δίπλα .

Προκύπτει ορθογώνιο διαστάσεων $\alpha + \beta$ και $\alpha + \gamma$

