

1.9 ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ρητή παράσταση : Ονομάζεται κάθε κλάσμα που οι όροι του είναι πολυώνυμα

2.

Περιορισμός : Σε κάθε ρητή παράσταση, ο παρονομαστής πρέπει να είναι διάφορος από το 0

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Απλοποίηση : Κάθε ρητή παράσταση την φέρνουμε στην πλέον απλούστερη μορφή απλοποιώντας τους όρους της.
Απλοποίηση γίνεται αφού αναλύσουμε τους όρους της σε γινόμενο και διαγράψουμε τους κοινούς παράγοντες.

2.

Απλοποίηση και περιορισμοί : Οι περιορισμοί τίθενται πριν την απλοποίηση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να αντιστοιχίσετε σε κάθε παράσταση της στήλης Α τις τιμές της μεταβλητής της στήλης Β για τις οποίες η παράσταση ορίζεται.

A Ρητή παράσταση	B Τιμές της μεταβλητής
α. $\frac{1}{x^2 - 25}$	1. $x \neq 0$
β. $\frac{3}{x(x + 4)}$	2. $x \neq -2$
γ. $\frac{3}{x + 2}$	3. $x \neq -5$ και $x \neq 5$
δ. $\frac{x^2 + 5}{x^2 + 7}$	4. $x \neq 0$ και $x \neq -4$
ε. $\frac{x + 4}{5x}$	5. Οποιοσδήποτε αριθμός
	6. $x \neq -7$

Προτεινόμενη λύση

α.

Πρέπει $x^2 - 25 \neq 0$ δηλαδή $(x - 5)(x + 5) \neq 0$
 $x - 5 \neq 0$ και $x + 5 \neq 0$
 $x \neq 5$ και $x \neq -5$

Συνεπώς $\alpha \rightarrow 3$

β.

Πρέπει $x(x + 4) \neq 0$ δηλαδή $x \neq 0$ και $x + 4 \neq 0$
 $x \neq 0$ και $x \neq -4$

Συνεπώς $\beta \rightarrow 4$

γ.

Πρέπει $x + 2 \neq 0$ δηλαδή $x \neq -2$

Συνεπώς $\gamma \rightarrow 2$

δ.

Πρέπει $x^2 + 7 \neq 0$ πράγμα το οποίο ισχύει για οποιοδήποτε αριθμό

Συνεπώς $\delta \rightarrow 5$

ε.

Πρέπει $5x \neq 0$ δηλαδή $x \neq 0$

Συνεπώς $\epsilon \rightarrow 1$

2.

Να αντιστοιχίσετε κάθε κλάσμα της πρώτης σειράς στην απλοποιημένη του μορφή στη δεύτερη σειρά

$$\alpha. \frac{x^2 + x}{x} \quad \beta. \frac{x^2 - x}{x-1} \quad \gamma. \frac{x^2 - x}{x} \quad \delta. \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \quad \varepsilon. \frac{x^2 + 2x}{3(x+2)}$$

$$1. \frac{x}{x+1} \quad 2. \frac{1}{x-1} \quad 3. \frac{x}{3} \quad 4. x-1 \quad 5. x+1 \quad 6. x$$

Προτεινόμενη λύση

$$\alpha. \frac{x^2 + x}{x} = \frac{x(x+1)}{x} = x+1 \quad \text{συνεπώς} \quad \alpha \rightarrow 5$$

$$\beta. \frac{x^2 - x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x \quad \text{συνεπώς} \quad \beta \rightarrow 6$$

$$\gamma. \frac{x^2 - x}{x} = \frac{x(x-1)}{x} = x-1 \quad \text{συνεπώς} \quad \gamma \rightarrow 4$$

$$\delta. \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1} \quad \text{συνεπώς} \quad \delta \rightarrow 1$$

$$\varepsilon. \frac{x^2 + 2x}{3(x+2)} = \frac{x(x+2)}{3(x+2)} = \frac{x}{3} \quad \text{συνεπώς} \quad \varepsilon \rightarrow 3$$

3.

Χαρακτηρίστε με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις.

$$\alpha) \frac{\cancel{3x}(x+2)}{\cancel{3x}} = x+2 \quad \Sigma$$

$$\beta) \frac{\cancel{x}+5}{5\cancel{x}} = \frac{5}{5} \quad \Lambda$$

$$\gamma) \frac{x^2 - y^2}{x+y} = x-y \quad \Sigma$$

$$\delta) \frac{(\cancel{x-3})(x+2)}{\cancel{x-3}} = x+2 \quad \Sigma$$

$$\epsilon) \frac{(\cancel{2x+1})(x+2) + 4x}{\cancel{2x+1}} = (x+2) + 4x \quad \Lambda$$

$$\sigma\tau) \frac{\cancel{y-x}}{(x-y)^2} = \frac{1}{y-x} \quad \Sigma$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

Προφανώς σωστό

β)

Λάθος διότι ο αριθμητής δεν είναι γινόμενο

γ)

$$\frac{x^2 - y^2}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = x-y \quad \text{Επομένως σωστό}$$

δ)

Προφανώς σωστό

ε)

Λάθος διότι ο αριθμητής δεν είναι γινόμενο

στ)

$$\frac{y-x}{(x-y)^2} = \frac{y-x}{(y-x)^2} = \frac{1}{y-x} \quad \text{Άρα σωστό}$$

4.

Να βρεθούν οι τιμές του x έτσι ώστε να ορίζεται κάθε μία από τις παρακάτω παραστάσεις

$$\alpha) \frac{2x-3}{x-1}, \quad \beta) \frac{5x^2+7}{x}, \quad \gamma) \frac{x+2}{(x+3)(x-4)}, \quad \delta) \frac{3x}{x+1} + \frac{x-4}{(x-8)(x+9)}$$

Προτεινόμενη Λύση**α)**Πρέπει $x-1 \neq 0$ δηλαδή $x \neq 1$ **β)**Πρέπει $x \neq 0$ **γ)**

Πρέπει $(x+3)(x-4) \neq 0$ δηλαδή $x+3 \neq 0$ και $x-4 \neq 0$
 $x \neq -3$ και $x \neq 4$

δ)

Πρέπει $x+1 \neq 0$ και $(x-8)(x+9) \neq 0$ δηλαδή
 $x \neq -1$ και $x \neq 8$ και $x \neq -9$

5.

Να βρεθούν οι τιμές του x έτσι ώστε να **μην** ορίζεται κάθε μία από τις παρακάτω παραστάσεις

$$\alpha) \frac{2-x}{(x-2)(x+2)} \quad \beta) \frac{3}{x(x+1)} \quad \gamma) \frac{5x}{(3-x)(7+x)} + \frac{x-6}{x-1}$$

Προτεινόμενη Λύση

α)

$$\text{Πρέπει } (x-2)(x+2) = 0 \text{ δηλαδή } (x-2=0 \text{ ή } x+2=0) \\ x=2 \text{ ή } x=-2$$

β)

$$\text{Πρέπει } x(x+1) = 0 \text{ δηλαδή } (x=0 \text{ ή } x+1=0) \\ x=0 \text{ ή } x=-1$$

γ)

$$\text{Πρέπει } (3-x)(7+x) = 0 \text{ ή } x-1=0 \text{ δηλαδή } 3-x=0 \text{ ή } 7+x=0 \text{ ή } x-1=0 \\ x=3 \text{ ή } x=-7 \text{ ή } x=1$$

6.

Να απλοποιηθούν τα κλάσματα

$$\alpha) \frac{3+6+9+\dots+300}{2+4+6+\dots+200} \quad \beta) \frac{3x+6x+9x+\dots+300x}{2x+4x+6x+\dots+200x}$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\frac{3+6+9+\dots+300}{2+4+6+\dots+200} = \frac{3(1+2+3+\dots+100)}{2(1+2+3+\dots+100)} = \frac{3}{2}$$

β)

$$\frac{3x+6x+9x+\dots+300x}{2x+4x+6x+\dots+200x} = \frac{3x(1+2+3+\dots+100)}{2x(1+2+3+\dots+100)} = \frac{3}{2}$$

7.

Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν $E = x^2 + 5x + 6$ και πλάτος $x + 3$. Να βρεθεί το μήκος

Προτεινόμενη λύση

Αν a είναι το μήκος τότε από τον τύπο $E = (\text{μήκος}) (\text{πλάτος})$ έχουμε

$$x^2 + 5x + 6 = a(x+3) \text{ άρα } a = \frac{x^2+5x+6}{x+3} = \frac{x^2+(3+2)x+3 \cdot 2}{x+3} \\ = \frac{(x+3)(x+2)}{x+3} = x+2$$

8.

Να απλοποιηθούν τα κλάσματα

$$\begin{array}{llll}
 \alpha) \frac{2x^3\alpha\beta^2}{4x^4\alpha^2\beta^5} & \beta) \frac{x^2-25}{x^2+5x} & \gamma) \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} & \delta) \frac{(2x-4y)(9y^2-x^2)}{(3y+x)(4x^2-16y^2)}, \\
 \epsilon) \frac{5x^2(x^3-8)}{15x^3-30x^2} & \sigma\tau) \frac{(x-3)^2(2x+6)}{2x^3-18x} & &
 \end{array}$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$\frac{2x^3\alpha\beta^2}{4x^4\alpha^2\beta^5} = \frac{1}{2x\alpha\beta^3}$$

β)

$$\frac{x^2-25}{x^2+5x} = \frac{(x-5)\cancel{(x+5)}}{x\cancel{(x+5)}} = \frac{x-5}{x}$$

γ)

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}$$

δ)

$$\begin{aligned}
 \frac{(2x-4y)(9y^2-x^2)}{(3y+x)(4x^2-16y^2)} &= \frac{2(x-2y)(3y-x)(3y+x)}{(3y+x)(2x-4y)(2x+4y)} = \\
 &= \frac{\cancel{2}\cancel{(x-2y)}(3y-x)\cancel{(3y+x)}}{\cancel{(3y+x)}\cancel{2}\cancel{(x-2y)}2(x+2y)} = \frac{3y-x}{2(x+2y)}
 \end{aligned}$$

ε)

$$\frac{5x^2(x^3-8)}{15x^3-30x^2} = \frac{\cancel{5}\cancel{x^2}\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{3\cancel{5}\cancel{x^2}\cancel{(x-2)}} = \frac{x^2+2x+4}{3}$$

στ)

$$\frac{(x-3)^2(2x+6)}{2x^3-18x} = \frac{(x-3)^2 2(x+3)}{2x(x^2-9)} = \frac{(x-3)^2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{(x+3)}}{\cancel{2}x\cancel{(x-3)}\cancel{(x+3)}} = \frac{x-3}{x}$$

9.

Να απλοποιηθούν τα κλάσματα.

$$\alpha) \frac{12x^3ay^2}{14xa^2y^2} \quad \beta) \frac{27a^3\beta^2\omega y}{18a^4\beta\omega^2y^2} \quad \gamma) \frac{3x^2y\omega}{9x^4y^5} \quad \delta) \frac{-12a^4x^2y}{-15a^4y^2}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\alpha) \frac{12x^3ay^2}{14xa^2y^2} = \frac{6x^2}{7a} \quad \beta) \frac{27a^3\beta^2\omega y}{18a^4\beta\omega^2y^2} = \frac{3\beta}{2a\omega y}$$

$$\gamma) \frac{3x^2y\omega}{9x^4y^5} = \frac{\omega}{3x^2y^4} \quad \delta) \frac{-12a^4x^2y}{-15a^4y^2} = \frac{4x^2}{5y}$$

10.

Ομοίως τα κλάσματα

$$\alpha) \frac{4x^2 - xy}{12xy - 3y^2} \quad \beta) \frac{x^3 - x}{x^2 + x} \quad \gamma) \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\delta) \frac{(3x - 2y)^2}{4y^2 - 9x^2} \quad \epsilon) \frac{3\alpha\beta^3 + 3\alpha^3\beta - 6\alpha^2\beta^2}{6\alpha\beta^3 - 6\alpha\beta^3} \quad \sigma\tau) \frac{x^3 + 2x^2 - 2 - x}{x^2 + 3x + 2}$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$\frac{4x^2 - xy}{12xy - 3y^2} = \frac{x(4x - y)}{3y(4x - y)} = \frac{x}{3y}$$

β)

$$\frac{x^3 - x}{x^2 + x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x(x + 1)} = \frac{x(x - 1)(x + 1)}{x(x + 1)} = x - 1$$

γ)

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x^2 - (3 + 1)x + 3 \cdot 1} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x - 1)} = \frac{x + 3}{x - 1}$$

δ)

$$\frac{(3x - 2y)^2}{4y^2 - 9x^2} = \frac{(3x - 2y)^2}{(2y - 3x)(2y + 3x)} = \frac{(2y - 3x)^2}{(2y - 3x)(2y + 3x)} = \frac{2y - 3x}{2y + 3x}$$

ε)

$$\frac{3\alpha\beta^3 + 3\alpha^3\beta - 6\alpha^2\beta^2}{6\alpha\beta^3 - 6\alpha\beta^3} = \frac{3\alpha\beta(\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta)}{6\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)} = \frac{3\alpha\beta(\beta - \alpha)^2}{6\alpha\beta(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)} = \frac{\beta - \alpha}{2(\beta + \alpha)}$$

στ)

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 2 - x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1)}{x^2 + (2 + 1)x + 2 \cdot 1} = \frac{(x^2 - 1)(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} = x - 1$$

11.

Ομοίως τα κλάσματα

$$\begin{array}{lll}
 \alpha) \frac{(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta}{\alpha^3\beta - \beta^4} & \beta) \frac{\alpha^4x - \beta^4x}{2\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + 2\beta^3} & \gamma) \frac{x^2 - 1}{(1+\alpha x)^2 - (x+\alpha)^2} \\
 \delta) \frac{1-\alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^5}{1+\alpha - \alpha^2 - \alpha^3} & \varepsilon) \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha\gamma} & \sigma\tau) \frac{(x^2-9)^2 - (x+5)^2(x-3)^2}{(x^2+x-12)^2}
 \end{array}$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$\frac{(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta}{\alpha^3\beta - \beta^4} = \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha\beta}{\beta(\alpha^3 - \beta^3)} = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\beta(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)} = \frac{1}{\beta(\alpha - \beta)}$$

β)

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha^4x - \beta^4x}{2\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + 2\beta^3} &= \frac{x(\alpha^4 - \beta^4)}{2\alpha^2(\alpha + \beta) + 2\beta^2(\alpha + \beta)} = \frac{x(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)}{2(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)} = \\
 &= \frac{x(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)}{2(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{x(\alpha - \beta)}{2}
 \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - 1}{(1+\alpha x)^2 - (x+\alpha)^2} &= \frac{(x-1)(x+1)}{(1+\alpha x - x - \alpha)(1+\alpha x + x + \alpha)} = \\
 &= \frac{(x-1)(x+1)}{[(1-\alpha) - x(1-\alpha)][(1+\alpha) + x(1+\alpha)]} = \\
 &= \frac{(x-1)(x+1)}{(1-\alpha)(1-x)(1+\alpha)(1+x)} = \\
 &= \frac{(x-1)(x+1)}{(\alpha-1)(x-1)(1+\alpha)(1+x)} = \frac{1}{(\alpha-1)(1+\alpha)}
 \end{aligned}$$

δ)

$$\begin{aligned}
 \frac{1-\alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^5}{1+\alpha - \alpha^2 - \alpha^3} &= \frac{(1-\alpha^2) + \alpha^3(1-\alpha^2)}{(1+\alpha) - \alpha^2(1+\alpha)} = \\
 &= \frac{(1-\alpha^2)(1+\alpha^3)}{(1+\alpha)(1-\alpha^2)} = \frac{(1-\alpha^2)(1+\alpha)(1-\alpha+\alpha^2)}{(1+\alpha)(1-\alpha^2)} = \\
 &= 1 - \alpha + \alpha^2
 \end{aligned}$$

ε)

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha\gamma} &= \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) - \gamma^2}{(\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma) - \beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - \gamma^2}{(\alpha+\gamma)^2 - \beta^2} = \\
 &= \frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\gamma+\beta)} = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha+\gamma-\beta}
 \end{aligned}$$

στ)

$$\begin{aligned}
 \frac{(x^2-9)^2 - (x+5)^2(x-3)^2}{(x^2+x-12)^2} &= \frac{[(x-3)(x+3)]^2 - (x+5)^2(x-3)^2}{[x^2 + (4-3)x + 4(-3)]^2} = \\
 &= \frac{(x-3)^2(x+3)^2 - (x+5)^2(x-3)^2}{[(x+4)(x-3)]^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x-3)^2[(x+3)^2 - (x+5)^2]}{(x+4)^2(x-3)^2} = \\
&= \frac{(x+3)^2 - (x+5)^2}{(x+4)^2} = \\
&= \frac{(x+3-x-5)(x+3+x+5)}{(x+4)^2} = \\
&= \frac{-2(2x+8)}{(x+4)^2} = \frac{-4(x+4)}{(x+4)^2} = \frac{-4}{x+4}
\end{aligned}$$