1)

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{b}\right)^{-2}}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}}\right]^{-3} = \left[\frac{a^2+b^2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right]^{-3} = \left(\frac{a^2+b^2}{1+\frac{b^2}{a^2}}\right)^{-3} =$$

$$= \left(\frac{a^2+b^2}{\frac{a^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}}\right)^{-3} = \left(\frac{a^2+b^2}{\frac{a^2+b^2}{a^2}}\right)^{-3} = \left[\frac{a^2\cancel{(a^2+b^2)}}{\cancel{(a^2+b^2)}}\right]^{-3} = (a^2)^{-3} = a^{-6}$$

Επομένως

$$a^6 \cdot \left[\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{b}\right)^{-2}}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}}\right]^{-3} = a^6 \cdot a^{-6} = a^0 = 1$$

συνεπώς, είναι αντίστροφοι.

2) α, β αντίθετοι σημαίνει ότι $\alpha+\beta=0$ (!)

x, y αντίστροφοι σημαίνει $x \cdot y = 1$

$$2-3(\alpha-x)-\frac{\beta-2}{xy}-3x-2\beta=$$

$$= 2-3\alpha+3x-\frac{\beta-2}{1}-3x-2\beta=$$

$$= 2-3\alpha+\cancel{3x}-(\beta-2)-\cancel{3x}-2\beta=$$

$$= 2-3\alpha-\beta+2-2\beta=$$

$$= 4-3\alpha-3\beta = 4-3\cdot(\alpha+\beta) = 4-3\cdot 0 = \boxed{4}$$

(3)

$$A=\frac{3^{\nu}-3^{\nu-1}}{3^{\nu+1}-6\cdot 3^{\nu-2}}=\frac{3^{\nu}-3^{\nu}\cdot 3^{-1}}{3^{\nu}\cdot 3-6\cdot 3^{\nu}\cdot 3^{-2}}=\frac{3^{\nu}\left(1-3^{-1}\right)}{3^{\nu}\cdot 3-6\cdot 3^{\nu}\cdot \frac{1}{9}}=$$

$$=\frac{3^{\nu}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)}{3^{\nu}\cdot 3-\frac{2}{3}\cdot 3^{\nu}}=\frac{3^{\nu}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)}{3^{\nu}\cdot\left(3-\frac{2}{3}\right)}=\frac{\cancel{3^{\nu}}\cdot\frac{2}{3}}{\cancel{3^{\nu}}\cdot\frac{7}{3}}=\frac{2}{7}$$

---

(4)

$$A=\sqrt{22+\sqrt{5+\sqrt{16}}}-\sqrt{8\sqrt{2\sqrt{4}}}+\sqrt{81}$$

$$A=\sqrt{22+\sqrt{5+4}}-\sqrt{8\sqrt{2\cdot 2}}+9$$

$$A=\sqrt{22+\sqrt{9}}-\sqrt{8\sqrt{4}}+9$$

$$A=\sqrt{22+3}-\sqrt{8\cdot 2}+9$$

$$A=\sqrt{25}-\sqrt{16}+9$$

$$A=5-4+9$$

$$A=10$$

$$B=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}$$

$$B=|1-\sqrt{3}|-|1+\sqrt{3}|$$

$$B=-(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})$$

$$B=-1\cancel{+\sqrt{3}}-1\cancel{-\sqrt{3}}$$

$$B=-2$$

5

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}=44$$

$$\frac{(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}+\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}+\dots+\frac{(\sqrt{2024}-\sqrt{2025})}{(\sqrt{2024}+\sqrt{2025})(\sqrt{2024}-\sqrt{2025})}=44$$

$$\frac{(1-\sqrt{2})}{-1}+\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-1}+\dots\frac{(\sqrt{2024}-\sqrt{2025})}{-1}=44$$

$$\frac{(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\dots(\sqrt{2024}-\sqrt{2025})}{-1}=44$$

$$\frac{1-\sqrt{2025}}{-1}=44$$

$$\frac{1-45}{-1}=44$$

$44=44$, άρα ισχύει η ισότητα

...ώνυμα – Πολυώνυμα

$$\left(3a-\frac{1}{2}\right)x^{k-1}y^{\lambda+2} \quad \text{και} \quad \left(\frac{3}{2}+a\right)x^{1-k}y^{2\lambda-4}$$

.) Θα πρέπει να έχουν το ίδιο κύριο μέρος

άρα $k-1=1-k$ <u>και</u> $\lambda+2=2\lambda-4$

$2k=2$ $\quad -\lambda=-6$

$k=1$ $\quad \lambda=6$

ii) Θα πρέπει να έχουν το ίδιο κύριο μέρος και ίδιο συντελεστή Δηλαδή $k=1$, $\lambda=6$ και

$$3a-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+a$$

$$6a-1=3+2a$$

$$4a=4$$

$$a=1$$

iii) Θα πρέπει να έχουν το ίδιο κύριο μέρος και αντίθετους συντελεστές. Δηλαδή $k=1$, $\lambda=6$ και

$$3a-\frac{1}{2}=-\left(\frac{3}{2}+a\right)$$

$$3a-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}-a$$

$$6a-1=-3-2a$$

$$8a=-2$$

$$a=-\frac{1}{4}$$

(2)

i) $x^2+2xy+y^2=$
$=(-2)^2+2\cdot(-2)\cdot 1+1^2=$
$=4-4+1=$
$=1$

ii) $x^2+y^2=$
$=(-2)^2+1^2=$
$=5$

iii) $(x+y)^2=$
$=(-2+1)^2=$
$=(-1)^2=$
$=1$

Οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων στις περιπτώσεις (i) και (iii) είναι ίσες, λόγω της ταυτότητας $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

(3)

i) $3xy-\frac{xy}{2}+4x^2y-3xy^2+\frac{x^2y}{2}-\frac{xy^2}{2}=$
$=\left(3-\frac{1}{2}\right)xy+\left(4+\frac{1}{2}\right)x^2y-\left(3+\frac{1}{2}\right)xy^2=$
$=\frac{5}{2}xy+\frac{9}{2}x^2y-\frac{7}{2}xy^2$

ii) $\alpha^2\beta-(\beta^2-\alpha^2\beta)+2\beta^2+(3\beta^2-4\alpha^2\beta)=$
$=\alpha^2\beta-\beta^2+\alpha^2\beta+2\beta^2+3\beta^2-4\alpha^2\beta=$
$=-2\alpha^2\beta+4\beta^2$

iii) $xy\cdot 2x^2y^2\cdot(-1)\cdot xy^2=$
$=2\cdot(-1)\cdot x\cdot x^2\cdot x\cdot y\cdot y^2\cdot y^2=$
$=-2x^4y^5$

iv) $3x(x^2-5)-4x^2(x+2)+4x(x^2-1)=$
$=3x^3-15x-4x^3-8x^2+4x^3-4x=$
$=3x^3-8x^2-19x$

v) $(3x-1)\cdot(x^2+1)(2x-1)=$
$=(3x^3+3x-x^2-1)\cdot(2x-1)=$
$=6x^4-3x^3+6x^2-3x-2x^3+x^2-2x+1=$
$=6x^4-5x^3+7x^2-5x+1$

$P(x)=(a-1)x^3+2x^2+3ax+4$

Θα πρέπει $a-1\neq 0$

$a\neq 1$

) Για $a=1$, $P(x)=2x^2+3x+4$

$P(2)+P(-2)=(2\cdot 2^2+3\cdot 2+4)+[2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)+4]=$

$=8+6+4+8-6+4=$

$=24$

5

α) $P(x)+Q(x)=(x^3-4x^2+3x-1)+(x^4-2x^2+3)=$

$=x^3-4x^2+3x-1+x^4-2x^2+3=$

$=x^4+x^3-6x^2+3x+2$

β) $P(x)-Q(x)=(x^3-4x^2+3x-1)-(x^4-2x^2+3)=$

$=x^3-4x^2+3x-1-x^4+2x^2-3=$

$=-x^4+x^3-2x^2+3x-4$

γ) $P(x)+P(-x)=x^3-4x^2+3x-1+(-x)^3-4(-x)^2+3(-x)-1=$

$=x^3-4x^2+3x-1-x^3-4x^2-3x-1=$

$=-8x^2-2$

δ) $Q(2x)=(2x)^4-2\cdot(2x)^2+3=$

$=16x^4-8x^2+3$

ε) $2\cdot P(x)+3\cdot Q(x)=2(x^3-4x^2+3x-1)+3\cdot(x^4-2x^2+3)=$

$=2x^3-8x^2+6x-2+3x^4-6x^2+9=$

$=3x^4+2x^3-14x^2+6x+7$

α) $P(x) \cdot Q(x) = (x^3 - 4x^2 + 3x - 1) \cdot (x^4 - 2x^2 + 3) =$

$= x^7 - 2x^5 + 3x^3 - 4x^6 + 8x^4 - 12x^2 + 3x^5 - 6x^3 + 9x$

$- x^4 + 2x^2 - 3 =$

$= x^7 - 4x^6 + x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 9x - 3$

δ) $P(-1) + Q(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 1 + (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 =$

$= -1 - 4 - \cancel{3} - \cancel{1} + \cancel{1} - 2 + \cancel{3} =$

$= -7$