

Θετικοί και Αρνητικοί αριθμοί

ΜΕΡΟΣ Α'

7.1. Θετικοί και Αρνητικοί αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) - Η ευθεία των ρητών - Τετμημένη σημείου

- Κατανοώ την ανάγκη εισαγωγής των αρνητικών αριθμών
- Εκφράζω **μεγέθη** ή **μεταβλητές μεγεθών**, με **θετικούς** ή **αρνητικούς** αριθμούς
- Παριστάνω έναν ρητό με σημείο ενός άξονα

7.2. Απόλυτη τιμή ρητού - Αντίθετοι ρητοί - Σύγκριση ρητών

- Γνωρίζω την έννοια της **απόλυτης τιμής** ενός ρητού και με τη βοήθεια αυτής και του προσήμου του ρητού, αντιστοιχίζω τον **ρητό** με ένα **σημείο του άξονα**
- Βρίσκω με **ακρίβεια** ή με **προσέγγιση** τον ρητό που αντιστοιχεί σε ένα σημείο του άξονα
- Γνωρίζω ποιοι ρητοί είναι **αντίθετοι** και ποια είναι η σχετική τους θέση στον άξονα
- **Συγκρίνω** δύο ρητούς και γνωρίζω τη θέση τους πάνω στον άξονα
- **Διατάσσω** δύο ή περισσότερους ρητούς

7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών

- Βρίσκω το άθροισμα δύο ρητών αριθμών
- Βρίσκω το άθροισμα πολλών ρητών αριθμών
- Γνωρίζω τις ιδιότητες της πρόσθεσης και τη σημασία τους στον υπολογισμό αθροισμάτων πολλών προσθετέων

7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών

- Γνωρίζω ότι η διαφορά $\alpha - \beta$, ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $\beta + x = \alpha$
- Βρίσκω τη διαφορά δύο ρητών αριθμών
- Υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις με προσθέσεις και αφαιρέσεις
- Κάνω απαλοιφή παρενθέσεων

7.5. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

- Βρίσκω το **γινόμενο** δύο ρητών αριθμών
- Γνωρίζω και εφαρμόζω τις **ιδιότητες** του γινομένου ρητών αριθμών
- Υπολογίζω **αριθμητικές παραστάσεις**
- Εφαρμόζω την **επιμεριστική ιδιότητα**

7.6. Διάρθρωση ρητών αριθμών

- Γνωρίζω ότι το πηλίκο $\alpha : \beta$, ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $\beta \cdot x = \alpha$
- Βρίσκω το **πηλίκο** δύο ρητών αριθμών
- Γνωρίζω ότι το γινόμενο και το πηλίκο δύο ρητών αριθμών είναι **ομόσημοι** αριθμοί
- Κατανοώ το πηλίκο δύο ρητών και **ως λόγο**

7.7. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

- Διακρίνω τους ρητούς ως **δεκαδικούς** ή **περιοδικούς** δεκαδικούς
- Μετατρέπω ένα κλάσμα σε δεκαδικό ή περιοδικό δεκαδικό και αντιστρόφως

7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

- Γνωρίζω την έννοια της **δύναμης** a^n , με a ρητό και n φυσικό και υπολογίζω τέτοιες δυνάμεις
- Γνωρίζω τις **ιδιότητες** των δυνάμεων με **εκθέτη φυσικό** και τις εφαρμόζω στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων
- Γνωρίζω την έννοια της **δύναμης** a^{-n} , με τον **ρητό** $a \neq 0$ και n , φυσικό και υπολογίζω τέτοιες δυνάμεις
- **Εκτελώ τις πράξεις** με την προβλεπόμενη προτεραιότητα των πράξεων

7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

- Γνωρίζω τις **ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο** και υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις με δυνάμεις

- Γνωρίζω ότι: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-n}$ και με τη βοήθεια

της ισότητας αυτής, υπολογίζω **δυνάμεις με βάση κλασματικό αριθμό** και **εκθέτη αρνητικό ακέραιο**

7.10. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

- Γράφω πολύ "μεγάλους" και "μικρούς" αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή



ΥΠΑΤΙΑ (370 - 415 Μ.Χ.)

70

K
E
Φ

A

A

A

I

O

A.7.1. Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) - Η ευθεία των ρητών - Τετμημένη σημείου

Οι αριθμοί που γνωρίσαμε, μέχρι τώρα, οι φυσικοί, οι δεκαδικοί και οι κλασματικοί, μπορούν να εκφράσουν τα φυσικά μεγέθη, όχι όμως και όλες τις ανθρώπινες δραστηριότητες και καταστάσεις. Άλλωστε, όταν τοποθετήσαμε τους φυσικούς αριθμούς πάνω σε μια ευθεία, πήραμε αντιθέτως ένα σημείο ως αρχή και συνεχίσαμε "δεξιά", σε ίσες αποστάσεις, να γράφουμε τους γνωστούς μας αριθμούς. Κάθε "δεξιά" όμως μιας αρχής, προϋποθέτει και το "αριστερά". Όπως το δεξί χέρι προϋποθέτει το αριστερό του. Και ακόμα, δεν θα υπήρχε το "πάνω" χωρίς το "κάτω", το "προς" χωρίς το "εξέως" κ.λπ. Έτσι, αν το πρώτο το πούμε "θετικό" θα πρέπει να υπάρχει το αντίθετό του και να το πούμε "αρνητικό". Επίσης, σε κάθε στοιχείο του ενός χρειάζεται να αντιστοιχήσουμε ακριβώς ένα στοιχείο του άλλου και να βρούμε τρόπο να το συμβολίσουμε. Δε θα είναι δύσκολο, αφού είναι πράγματα που τα βιώνουμε καθημερινά. Όπως π.χ. η πρόβλεψη του καιρού στη δραστηριότητα που ακολουθεί.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η



Η μετεωρολογική υπηρεσία προέβλεψε ότι οι θερμοκρασίες στις διάφορες πόλεις θα είναι αυτές που αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

Αθήνα	7°	πάνω από το μηδέν
Θεσσαλονίκη	3°	κάτω από το μηδέν
Ιωάννινα	5°	κάτω από το μηδέν
Πάτρα	2°	πάνω από το μηδέν
Αλεξανδρούπολη	8°	κάτω από το μηδέν
Φλώρινα	10°	κάτω από το μηδέν
Τρίπολη	6°	κάτω από το μηδέν
Χανιά	11°	πάνω από το μηδέν

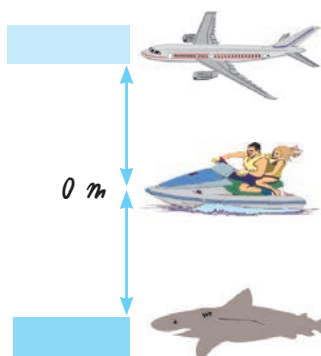
- Προσπάθησε να σημειώσεις στον χάρτη αριθμούς που να εκφράζουν τις συγκεκριμένες θερμοκρασίες.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στον ανεγκυστήρα ενός γκαράζ υπάρχουν τα κουμπιά που βλέπεις δίπλα.

- Τι εκφράζουν οι αριθμοί που είναι γραμμένοι στα κουμπιά;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η



Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι το αεροπλάνο πετάει στα 200 m και ο καρχαρίας βρίσκεται σε βάθος 200 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας;

- Προσπάθησε να εκφράσεις με κατάλληλους αριθμούς τις θέσεις του αεροπλάνου και του καρχαρία σε σχέση με την επιφάνεια της θάλασσας;

Σκεφτόμαστε

Αν ο αριθμός 0 εκφράζει τη θέση της επιφάνειας της θάλασσας, τότε το αεροπλάνο πετάει στα **+200 m** και ο καρχαρίας βρίσκεται στα **-200 m**.



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Μετά από τα παραπάνω συμφωνούμε ότι:



- Τα σύμβολα «+» και «-» λέγονται **πρόσημα**. Γράφονται πριν από τους αριθμούς και τους χαρακτηρίζουν, αντίστοιχα, ως **θετικούς** ή **αρνητικούς**.

$+3, +\frac{3}{4}, +15,7$ και $+0,352$
θετικοί αριθμοί

$-2, -10, -28,95$ και $-0,098$
αρνητικοί αριθμοί

- ◆ Οι αριθμοί που συναντήσαμε μέχρι τώρα ήταν μόνο θετικοί και επομένως δεν υπήρχε ανάγκη να χρησιμοποιούμε πρόσημο. Η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών δημιουργεί την ανάγκη της τοποθέτησης πρόσημου μπροστά από όλους τους αριθμούς. Έτσι γίνεται φανερό ποιοι αριθμοί είναι οι **θετικοί** και ποιοι οι **αρνητικοί**.

Σε περιπτώσεις που αναφερόμαστε μόνο σε θετικούς αριθμούς, μπορούμε να παραλείψουμε το πρόσημο + π.χ. αντί να γράψουμε +7 παραλείψουμε το + και γράφουμε 7.

- ◆ Το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

- Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.

π.χ. οι αριθμοί $-7, -0,58$ και $-\frac{3}{4}$ είναι **ομόσημοι** και οι αριθμοί $+1,25, +\frac{10}{7}$ και $+5$ είναι **ομόσημοι**.

- Ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

Οι αριθμοί -7 και $+0,58$ είναι **ετερόσημοι** αλλά και οι αριθμοί $-1,25$ και $+\frac{10}{7}$ είναι **ετερόσημοι**.

- Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

..., $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

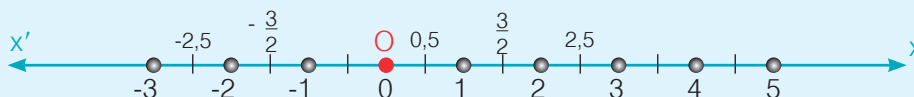
- Ρητοί αριθμοί είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: φυσικοί, κλάσματα και δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονται για πρώτη φορά σε ένα Κινέζικο μαθηματικό βιβλίο, με τίτλο "Μαθηματικά σε εννέα Βιβλία" ("Τσιου-τσανγκ-σουάν σου"), που τοποθετείται χρονικά στην περίοδο της δυναστείας των Χαν (206 π.Χ. - 220 μ.Χ.).

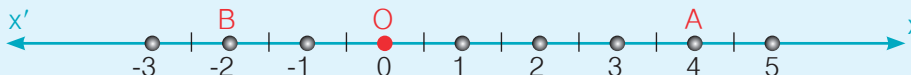
Στην Ευρωπαϊκή παράδοση ο μεγάλος Έλληνας μαθηματικός **Διόφαντος**, που άκμασε στην Αλεξάνδρεια γύρω στα 250 μ.Χ. και έγραψε το ογκώδες έργο του (13 βιβλία) τα "Αριθμητικά", χρησιμοποιεί πρώτος τους αρνητικούς αριθμούς στους ενδιάμεσους υπολογισμούς του, ενώ ως λύση ενός προβλήματος αναζητεί πάντα θετικό ρητό αριθμό.

Παράσταση των ρητών αριθμών με σημεία μιας ευθείας

- Αν θεωρήσουμε αριστερά της αρχής O του ημιάξονα Ox των αριθμών, τον αντικείμενο αυτού ημιάξονα Ox' , μπορούμε να παραστήσουμε τους αρνητικούς αριθμούς σε συμμετρικά σημεία, ως προς O , των αντιστοίχων σημείων που παριστάνουν τους θετικούς αριθμούς. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε σημεία που να παριστάνουν κλασματικούς ή δεκαδικούς αριθμούς.



- Ο άξονας $x'Ox$ περιλαμβάνει όλους τους ρητούς αριθμούς (αρνητικούς, θετικούς και το μηδέν).
- Η θέση ενός σημείου A επάνω στην ευθεία ορίζεται με έναν αριθμό που ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου.



Το σημείο A έχει τετμημένη 4 και το σημείο B έχει τετμημένη -2 .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να εκφραστούν με τη βοήθεια των θετικών και αρνητικών ρητών αριθμών:

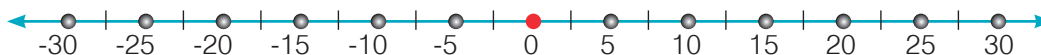
(α) 13,75 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας, (β) 20° Κελσίου πάνω από το μηδέν, (γ) κέρδος 3.368,97 €, (δ) αύξηση κατά 2.527,15 €, (ε) μείωση κατά 50 μονάδες και (στ) έκπτωση 15% επί της τιμής.

Λύση

(α) **-13,75 m**, (β) **+20°**, (γ) **+3368,97 €**, (δ) **+2527,15 €**, (ε) **-50**, (στ) **-15%**.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Ας υποθέσουμε, ότι η στιγμή της γέννησής σου είναι το μηδέν, δηλαδή η αρχή της μέτρησης του χρόνου. Βρες μέχρι δέκα χρονολογίες, που αφορούν τα πιο σημαντικά, για σένα, προσωπικά και οικογενειακά γεγονότα και τοποθέτησέ τα στην παρακάτω ευθεία.



Η γέννησή σου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:



- (α) Οι ρητοί που έχουν πρόσημο "+" λέγονται ενώ αυτοί που έχουν πρόσημο "-" λέγονται
- (β) Οι αριθμοί με το ίδιο πρόσημο λέγονται ενώ αυτοί με διαφορετικό πρόσημο λέγονται
- (γ) Στην ευθεία των αριθμών, δεξιά του μηδενός βρίσκονται οι ρητοί και αριστερά του μηδενός οι ρητοί.

2. Να κατατάξεις τους παρακάτω αριθμούς σε δύο ομάδες, τους θετικούς και τους αρνητικούς: $-3, 1, +5, +8, -20, 7, -3, 18$.

3. Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

(α) Οι ακόλουθοι αριθμοί είναι όλοι θετικοί: $+1, +5, +216, +3701$

☐	☐
--------------------------	--------------------------

(β) Οι αριθμοί που ακολουθούν είναι όλοι αρνητικοί: $-3, -8, 7, -22$

☐	☐
--------------------------	--------------------------

Οι επόμενες τρεις ερωτήσεις αναφέρονται στο σχήμα που ακολουθεί.



(γ) Η τετμημένη του σημείου Κ είναι $+2$

☐	☐
--------------------------	--------------------------

(δ) Η τετμημένη του σημείου Λ είναι -4

☐	☐
--------------------------	--------------------------

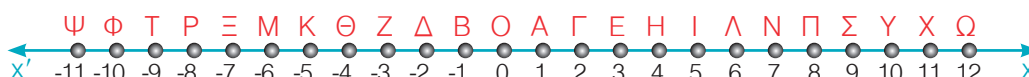
(ε) Τα σημεία Κ και Μ έχουν την ίδια τετμημένη

☐	☐
--------------------------	--------------------------

4. Στα ζεύγη αριθμών που ακολουθούν να βρεις ποιοι αριθμοί είναι ομόσημοι και ποιοι είναι ετερόσημοι: (α) 3 και $+3$, (β) 2 και 5, (γ) -2 και -4 , (δ) 7 και $+9$, (ε) -2 και 1, (στ) 17 και -20 , (ζ) -9 και $-3,2$, (η) $-10,5$ και 11, (θ) -3 και -100 , (ι) $+6,7$ και $+12,3$.

5. Να εκφράσεις με ρητούς αριθμούς τις παρακάτω προτάσεις: (α) Κατάθεση 50.000 €, (β) Ανάληψη 78.000 €, (γ) Αύξηση μισθού κατά 500 €, (δ) Μείωση επιτοκίου κατά 1 μονάδα, (ε) 30 μέτρα αριστερά.

6. Βρες τη λέξη που σχηματίζεται από τα γράμματα με τετμημένες $-6, 10, 9, -9, 5, -5, 0$ στο παρακάτω σχήμα. Στη συνέχεια γράψε μ' αυτό τον τρόπο ένα όνομα που σου αρέσει.



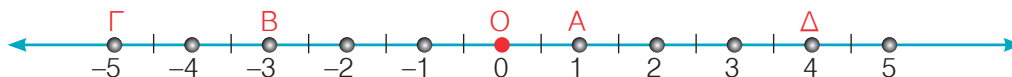
7. Τα σημεία Α και Β έχουν τετμημένες α και β, αντίστοιχα. Να βρεθεί η τετμημένη του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ όταν: (α) $\alpha = +5$ και $\beta = +8$, (β) $\alpha = -4$ και $\beta = -13$.

A.7.2. Απόλυτη τιμή ρητού - Αντίθετοι ρητοί - Σύγκριση ρητών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

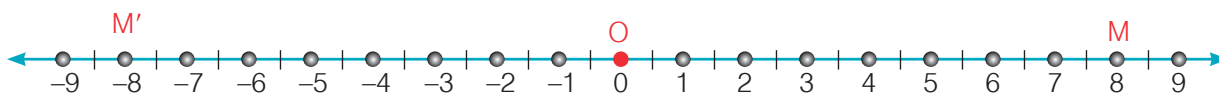


Βρες πόσες μονάδες απέχουν από την αρχή O του άξονα τα σημεία A , B , Γ και Δ .



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στην παρακάτω ευθεία βρες τις τετμημένες των σημείων M' και M .

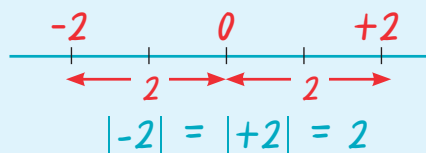


- Τι παρατηρείς για τις τετμημένες των σημείων M' και M ;
- Προσπάθησε να τοποθετήσεις στην παραπάνω ευθεία των ρητών τα σημεία A' και A που απέχουν από την αρχή O του άξονα 3,5 μονάδες.
- Κάνε το ίδιο για τα σημεία B' και B που απέχουν από την αρχή O του άξονα 6 μονάδες.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού a εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη a από την αρχή O του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$.

- Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.



- ◆ Ο αντίθετος του x είναι ο $-x$.

ο αντίθετος των $+5,1$ είναι ο $-5,1$
ο αντίθετος των $-2,7$ είναι ο $-(-2,7)=+2,7$



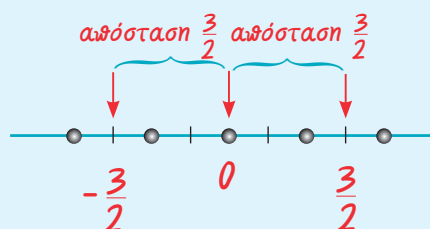
- ▶ Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.
- ▶ Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.
- ▶ Η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι το μηδέν.

$$\text{π.χ. } |+9,63| = 9,63$$

$$\text{π.χ. } |-8,4| = 8,4 = -(-8,4)$$

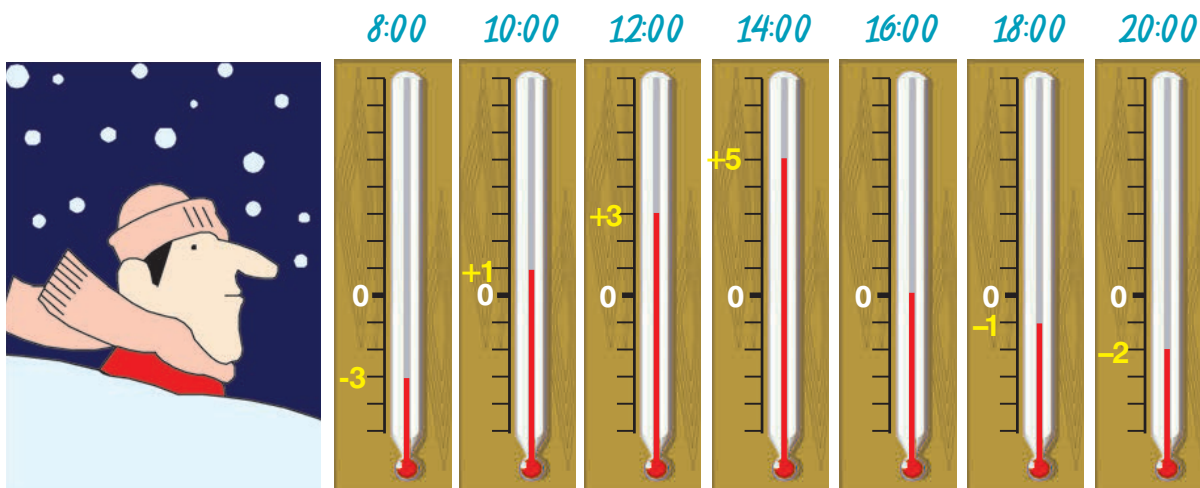
$$\text{π.χ. } |0| = 0$$

- ◆ Δύο σημεία που βρίσκονται σε ίση απόσταση, δεξιά και αριστερά από την αρχή των αξόνων, έχουν τετμημένες, αντίθετους αριθμούς.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

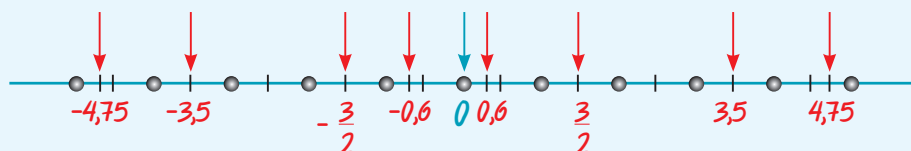
Μια κρύα μέρα του χειμώνα ο Κώστας κοιτούσε τη θερμοκρασία κάθε δύο ώρες. Οι ενδείξεις του θερμομέτρου, που έβλεπε, φαίνονται παρακάτω:



- Μπορείς να καταγράψεις όλες τις ενδείξεις του θερμομέτρου με αύξουσα ή φθίνουσα σειρά;

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Ο μεγαλύτερος από δύο ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.



Κάθε θετικός ρητός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό ρητό αριθμό.

$$-4,75 < -3,5 < -\frac{3}{2} < -0,6 < 0 < 0,6 < +\frac{3}{2} < +3,5 < +4,75$$

- ◆ Το μηδέν είναι μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό και μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό αριθμό. π.χ. $0 < 2,9$ και $-3,8 < 0$
- ◆ Ο μεγαλύτερος από δύο θετικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, δηλαδή αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.
 $+2,67 < +5,89$
 διότι
 $|2,67| < |5,89|$
- ◆ Ο μεγαλύτερος από δύο αρνητικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή, δηλαδή αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.
 $-6,8 < -3,7$
 διότι
 $|-6,8| = 6,8 > 3,7 = |-3,7|$

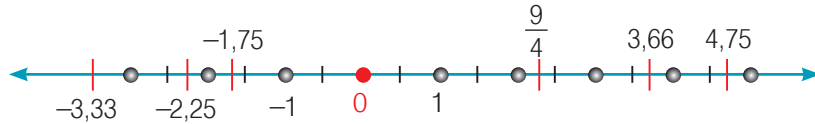
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1. Στον άξονα των αριθμών να τοποθετηθούν οι αριθμοί:

(α) $-2,25$, (β) $-3,33$, (γ) $-1,75$, (δ) $+\frac{9}{4}$, (ε) $+4,75$ και (στ) $+3,66$.

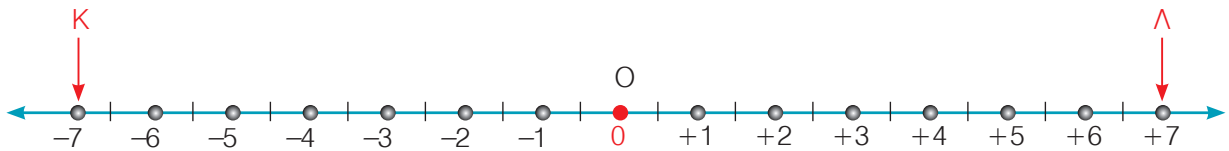
Λύση



$$-3,33 < -2,25 < -1,75 < +\frac{9}{4} < +3,66 < +4,75$$

2. Το σημείο Κ έχει τετμημένη -7 . Να βρεθεί το σημείο Λ με αντίθετη τετμημένη.

Λύση

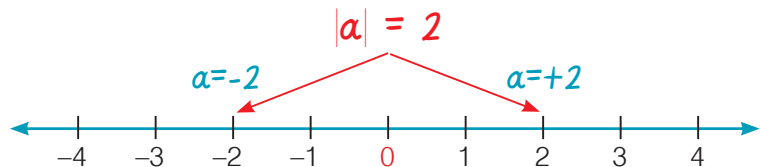


Πάνω σε άξονα χ'Οχ βρίσκουμε το σημείο Κ με τετμημένη -7 .
Τότε το Λ έχει τετμημένη τον αριθμό $+7$.

3. Εάν η απόλυτη τιμή του αριθμού α είναι 2, να βρεθεί ο αριθμός α.

Λύση

Εφόσον $|α|=2$ τότε ο αριθμός α θα είναι, είτε το $+2$ είτε το -2 , διότι $|+2|=2$ και $|-2|=2$.



Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί -2 και $+2$, έχουν την ίδια απόλυτη τιμή αλλά αντίθετο πρόσημο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

- (α) Η απόσταση του σημείου, με το οποίο αναπαριστάνεται ένας ρητός αριθμός, από την αρχή του άξονα λέγεται του αριθμού και είναι πάντα αριθμός.
(β) Δύο ρητοί αριθμοί που έχουν την ίδια απόλυτη τιμή και είναι ετερόσημοι λέγονται
(γ) Αν ένας αριθμός α είναι θετικός ο αντίθετός του είναι
Αν η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι ίση με 6 τότε ο αριθμός είναι ο ή ο
(δ) Από δύο θετικούς ρητούς μικρότερος είναι εκείνος που έχει την απόλυτη τιμή.
(ε) Από δύο αρνητικούς ρητούς μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει την απόλυτη τιμή.



2. Να συμπληρώσεις τον πίνακα που ακολουθεί:

Αριθμός	-2,73	+7,66	-1,05	0	+8,07	-8
Απόσταση του σημείου που αντιστοιχεί από την αρχή του άξονα						

3. Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

(α) Ισχύει η ανισότητα: $-5,7 < 5,7$.

☐ ☐

(β) Ισχύει η ανισότητα: $-7,6 > -6,7$.

☐ ☐

(γ) Στην ανισότητα $2,3 < x < 4,7$ ο x μπορεί να πάρει 2 ακέραιες τιμές.

☐ ☐

(δ) Υπάρχουν 5 ακριβώς ακέραιοι που αληθεύουν τη σχέση: $-2 \leq x \leq +2$.

☐ ☐

(ε) Δύο ακέραιοι με αντίθετο πρόσημο είναι αντίθετοι.

☐ ☐

4. Βρες την απόλυτη τιμή των ρητών: (α) $+7,25$, (β) $-2,5$, (γ) $+16$, (δ) $-20,05$, (ε) -58 .

5. Βρες τους αριθμούς που έχουν ως απόλυτη τιμή: (α) 100, (β) 21,7, (γ) 0, (δ) 7,03, (ε) 5,2.

6. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

Αριθμός	1			-19				
Αντίθετος					-8	12		
Απόλυτη τιμή		2					7	

7. Τοποθέτησε στον άξονα $x'Ox$ τα σημεία με τετμημένες:

$-9, -5,5, +8, -3, -7,25, +1, +12, +3, +9$. Ποια από αυτά είναι συμμετρικά ως προς την αρχή του άξονα;

8. Σχεδίασε τον άξονα $x'Ox$, με κατάλληλη μονάδα για να παραστήσεις τα σημεία με τετμημένες τους αριθμούς: $-20,5, +15, -39,75, -68,25, +70, +52,25, +43, -69$.

9. Να συγκρίνεις τους αριθμούς: (α) $+41$ και $+38$, (β) 9 και 11, (γ) -3 και -2 , (δ) -9 και -16 , (ε) 7 και -8 , (στ) 0 και -3 , (ζ) 0 και $+4$.

10. Να συγκρίνεις τους αριθμούς: (α) 11, -11 και $|11|$, (β) $-3, +3$ και $|3|$. Τι συμπεραίνεις;

11. Να γράψεις τους αριθμούς: $-2, +7, +15, -3, 0, -4, +5, -8$ και -10 σε αύξουσα σειρά.

12. Να συμπληρώσεις με το κατάλληλο σύμβολο: $<, >$ ή $=$ τα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις: (α) $-3 \dots -8$, (β) $-4 \dots 10$, (γ) $0 \dots -1$, (δ) $+3 \dots 0$, (ε) $-5 \dots -|-5|$, (στ) $-5 \dots -(+5)$, (ζ) $|+7| \dots |-7|$, (η) $-(-8) \dots -8$, (θ) $+3 \dots -(+4)$, (ι) $0 \dots -|-4|$.

13. Το x παριστάνει έναν ακέραιο αριθμό. Για ποιες τιμές του x θα ισχύουν οι σχέσεις: (α) $-13 < x < -8$, (β) $-4 > x > -5$, (γ) $-2 < x < 5$.

A.7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ



? Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις που περιγράφονται στον πρώτο πίνακα, να βρεις στον δεύτερο πίνακα την πρόσθεση που της αντιστοιχεί και τέλος το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον τρίτο πίνακα.

1

Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε συνεχόμενα δύο φορές: Η πρώτη αύξηση ήταν 8 € και η δεύτερη 6 €

α

$$(+8) + (-6)$$

-14

Μειώθηκε κατά 14 €

Ι

2

Η τιμή ενός προϊόντος μειώθηκε συνεχόμενα δύο φορές: Η πρώτη μείωση ήταν 8 € και η δεύτερη 6 €

β

$$(-8) + (+6)$$

+2

Αυξήθηκε κατά 2 €

II

3

Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε κατά 8 € και μετά μειώθηκε κατά 6 €

γ

$$(+8) + (+6)$$

-2

Μειώθηκε κατά 2 €

III

4

Η τιμή ενός προϊόντος μειώθηκε κατά 8 € και μετά αυξήθηκε κατά 6 €

δ

$$(-8) + (-6)$$

+14

Αυξήθηκε κατά 14 €

IV

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



- ♦ Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.
- ♦ Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

$$(+8,5) + (+6,2) = +14,7$$

$$(-8,5) + (-6,2) = -14,7$$

$$(+8,5) + (-6,2) = +2,3$$

$$(-8,5) + (+6,2) = -2,3$$

Ιδιότητες της πρόσθεσης

Παρατηρούμε ότι:

$$(+1,5) + (-2,3) = -0,8$$

$$(-2,3) + (+1,5) = -0,8$$

Γενικά ισχύει ότι:

- Αντιμεταθετική ιδιότητα
(Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος)

$$a + b = b + a$$

$$(-1,4) + [(+2,7) + (-3,1)] = (-1,4) + (-0,4) = -1,8$$

$$[(-1,4) + (+2,7)] + (-3,1) = (+1,3) + (-3,1) = -1,8$$

Προσεταιριστική ιδιότητα

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$(+1,5) + 0 = +1,5$$

$$0 + (-2,3) = -2,3$$

- Το άθροισμα ενός ρητού με το μηδέν ισούται με τον ίδιο τον ρητό.

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$(+\frac{9}{4}) + (-\frac{9}{4}) = 0 \quad \text{ή}$$

$$(-\frac{9}{4}) + (+\frac{9}{4}) = 0$$

- Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι μηδέν.

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Σε μια πόλη παρατηρήθηκαν οι παρακάτω αυξομειώσεις της θερμοκρασίας:

Αρχικές θερμοκρασίες

(α) Βράδυ $+1^{\circ}\text{C}$ (β) Μεσημέρι -1°C (γ) Βράδυ -2°C (δ) Μεσημέρι $+5^{\circ}\text{C}$ (ε) Μεσημέρι -3°C

Αυξομειώσεις θερμοκρασίας

την επόμενη μέρα αυξήθηκε κατά 4°C το βράδυ μειώθηκε κατά 2°C την επόμενη μέρα αυξήθηκε κατά 5°C το βράδυ μειώθηκε κατά 7°C το βράδυ μειώθηκε κατά 3°C

Ποια ήταν η τελική θερμοκρασία σε κάθε περίπτωση;

Λύση

- (α) Την επομένη ημέρα η θερμοκρασία έχει αυξηθεί κατά 4°C , δηλαδή έχει μεταβληθεί κατά $+4^{\circ}\text{C}$.

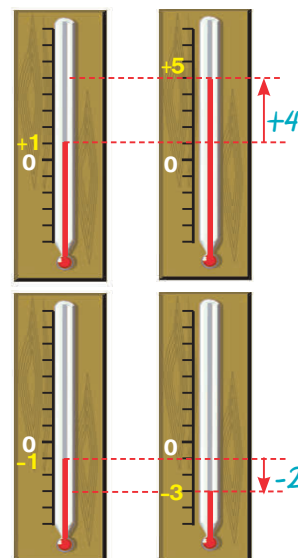
Η θερμοκρασία θα είναι 5°C πάνω από το μηδέν, διότι:

$$(+1) + (+4) = +5$$

- (β) Από -1°C η θερμοκρασία μειώθηκε κατά 2°C , άρα μεταβλήθηκε κατά -2°C .

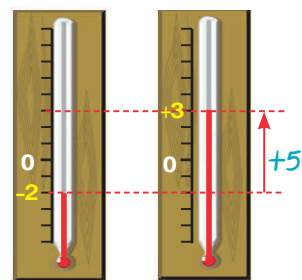
Η νέα θερμοκρασία είναι -3°C , διότι έχουμε:

$$(-1) + (-2) = -3$$



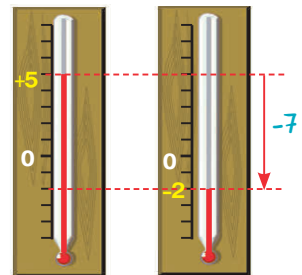
- (γ) Στην περίπτωση αυτή η θερμοκρασία από -2°C , αυξήθηκε κατά 5°C , δηλαδή έχουμε μια μεταβολή $+5^{\circ}\text{C}$.
Η θερμοκρασία έφτασε στους $+3^{\circ}\text{C}$, διότι:

$$(-2) + (+5) = +3$$



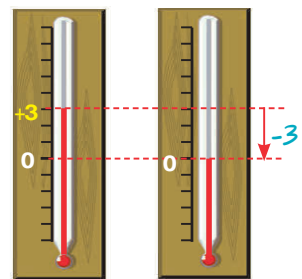
- (δ) Η αρχική θερμοκρασία ήταν $+5^{\circ}\text{C}$ και μειώθηκε κατά 7°C , δηλαδή έχουμε μια μεταβολή κατά -7°C .
Η θερμοκρασία έγινε, τελικά -2°C , διότι:

$$(+5) + (-7) = -2$$



- (ε) Από 3°C η θερμοκρασία μειώθηκε κατά 3°C , δηλαδή μεταβλήθηκε κατά -3°C .
Η θερμοκρασία έγινε τελικά 0°C , διότι:

$$(+3) + (-3) = 0$$



2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

- (α) $(+5,6) + (+8,7) + (-3,2) + (-6,9) + (+3,2) + (-7,4)$ και
(β) $(-1,8) + (+4,8) + (+9,7) + (-4,8) + (-3,4) + (+1,5)$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad & (+5,6) + (+8,7) + (-3,2) + (-6,9) + (+3,2) + (-7,4) = \\ & = (+5,6) + (+8,7) + (+3,2) + (-3,2) + (-6,9) + (-7,4) = \\ & \text{(χωρίζουμε τους αρνητικούς από τους θετικούς)} \end{aligned}$$

$$= (+17,5) + (-17,5) = 0$$

(προσθέτουμε χωριστά τους αρνητικούς και τους θετικούς)

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad & (-1,8) + (+4,8) + (+9,7) + (-4,8) + (-3,4) + (+1,5) = \\ & = (-1,8) + (-4,8) + (-3,4) + (+4,8) + (+9,7) + (+1,5) = \\ & = (-10) + (+16) = +6 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.
- | | ΣΩΣΤΟ | ΛΑΘΟΣ |
|--|--------------------------|--------------------------|
| (α) Στους ρητούς αριθμούς η πρόσθεση σημαίνει πάντα αύξηση. | ☐ | ☐ |
| (β) Αν το άθροισμα δύο ρητών είναι αρνητικός αριθμός, τότε και οι δύο ρητοί είναι αρνητικοί αριθμοί. | ☐ | ☐ |
| (γ) Αν $\alpha + \beta = 0$, ($\alpha, \beta \neq 0$) τότε οι α και β είναι αντίθετοι ρητοί αριθμοί. | ☐ | ☐ |
| (δ) Αν το άθροισμα δύο ρητών είναι θετικός αριθμός, τότε και οι δύο ρητοί είναι θετικοί αριθμοί. | ☐ | ☐ |
| (ε) Το άθροισμα ενός ρητού και του αντίθετου αυτού είναι πάντα μηδέν. | ☐ | ☐ |

2. Υπολόγισε τα αθροίσματα:
- (α) $(+4,05) + (+6,15)$, (β) $(+5,03) + (+4,07)$, (γ) $(+2,7) + (+97,3)$,
 (δ) $(+2,6) + (+11,4)$, (ε) $(+7,25) + (+8,75)$, (στ) $(-3,5) + (-2,5)$,
 (ζ) $(-1,3) + (-5,2)$, (η) $(-7,15) + (-4,85)$, (θ) $(-5,25) + (-9,75)$, (ι) $(-13,7) + (-6,3)$.

3. Υπολόγισε τα αθροίσματα:
- (α) $(+4,05) + (-6,15)$, (β) $(+5,03) + (-4,07)$, (γ) $(-2,7) + (+97,3)$,
 (δ) $(-2,6) + (+11,4)$, (ε) $(+7,25) + (-8,75)$, (στ) $(+3,5) + (-2,5)$,
 (ζ) $(-1,3) + (+5,2)$, (η) $(+7,15) + (-4,85)$, (θ) $(-5,25) + (+9,75)$, (ι) $(+13,7) + (-6,3)$.

4. Συμπλήρωσε τον πίνακα:
- | | + | +4 | -8 | -11 | +17 |
|-----|---|----|----|-----|-----|
| -5 | | | | | |
| +9 | | | | | |
| -4 | | | | | |
| -21 | | | | | |

5. Τοποθέτησε στα κενά τα κατάλληλα πρόσημα, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:
- (α) $(\dots 6) + (-8) = -2$, (β) $(+5) + (\dots 5) = 0$, (γ) $(+7) + (\dots 9) = +16$,
 (δ) $(\dots 9) + (\dots 8) = -17$, (ε) $(\dots 6) + (\dots 5) = +11$.

6. Εξέτασε αν είναι μαγικά τα τετράγωνα:
 (Μαγικά τετράγωνα είναι αυτά στα οποία η πρόσθεση των αριθμών κάθε στήλης ή γραμμής, καθώς και των διαγωνίων τους, δίνουν το ίδιο ακριβώς άθροισμα).

-1	+4	-3	+1,1	+2,4	-2,5
-2	0	+2	-0,1	+3,5	-2,4
+3	-4	+1	0	-4,9	+5,9

7. Υπολόγισε τα αθροίσματα:
- (α) $(-3,8) + (+2,8) + (-5,4) + (+8,2)$ και
 (β) $(-3,5) + (-9,99) + (+2,5) + (-15,75) + (+20,75) + (+9,99)$

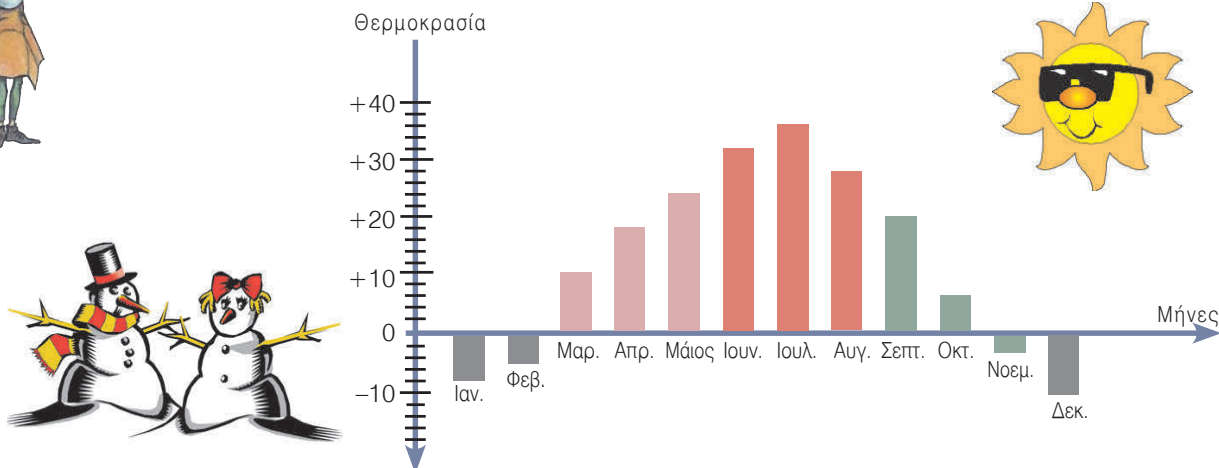
8. Υπολόγισε τα αθροίσματα:
- (α) $(+\frac{9}{4}) + (-\frac{5}{4}) + (+\frac{2}{3}) + (-\frac{5}{3}) + (+\frac{7}{13}) + (-\frac{20}{13})$ και
 (β) $(+\frac{1}{7}) + (-\frac{5}{7}) + (+\frac{3}{5}) + (-\frac{1}{35})$.

A.7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ



Στο σχήμα βλέπουμε τη μέση θερμοκρασία μιας περιοχής για τους 12 μήνες του χρόνου σε συγκεκριμένη ώρα της ημέρας.



- Ποιος είναι ο πιο ζεστός μήνας του έτους και ποιος ο πιο κρύος;
- Ποια είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ αυτών των μηνών;
- Ποια είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών μηνών;

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



- ◆ Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό α τον αριθμό β , προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β .

$$(+8,5) - (+6,2) = (+8,5) + (-6,2) = 8,5 - 6,2 = 2,3$$

$$(+8,5) - (-6,2) = (+8,5) + (+6,2) = 8,5 + 6,2 = 14,7$$

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

- ◆ Στους ρητούς αριθμούς η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση και επομένως είναι πάντα δυνατή (δηλαδή, δεν απαιτείται να είναι ο μειωτέος πάντα μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο, όπως ίσχυε μέχρι τώρα).

Απαλοιφή παρενθέσεων

Σε αρκετές περιπτώσεις αριθμητικών παραστάσεων εμφανίζονται περισσότεροι τον ενός αριθμού με τα πρόσημά τους μέσα σε παρενθέσεις, μωροστά από τις οποίες μπορεί να υπάρχουν τα πρόσημα $+$ ή $-$. Για να απαλείψουμε τις παρενθέσεις εργαζόμαστε ως εξής:

- ◆ Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το $+$ (ή δεν έχει πρόσημο), μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το $+$ (αν έχει) και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους.

$$(+5) + (-7) = +5 - 7 = -2$$

$$(9,1-6,2+3,4) + (-7,5+10-8,3) = 9,1-6,2+3,4-7,5+10-8,3$$
- ◆ Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το $-$, μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το $-$ και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με αντίθετα πρόσημα.

$$(-5) - (-7) = -5 + 7 = +2$$

$$-(9,1-6,2+3,4)-(-7,5+10-8,3) = -9,1+6,2-3,4+7,5-10+8,3$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ένα βράδυ το θερμόμετρο στο μπαλκόνι ενός σπιτιού έδειχνε -3°C και μέσα στο σπίτι 18°C . Πόση ήταν η διαφορά θερμοκρασίας;

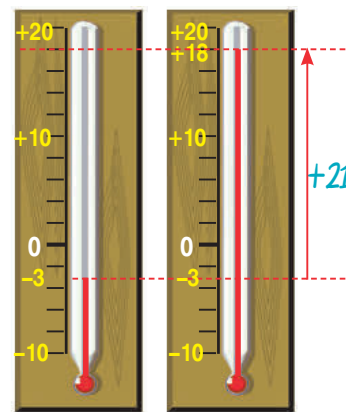
Λύση



Το πρόβλημα ζητάει να υπολογίσουμε τη διαφορά των θερμοκρασιών, δηλαδή τη διαφορά $(+18) - (-3)$.

Αν παρατηρήσουμε το σχήμα θα δούμε ότι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του εσωτερικού του σπιτιού και του εξωτερικού του ήταν $+21^{\circ}\text{C}$.

Σύμφωνα με τον ορισμό της αφαίρεσης ρητών θα έχουμε:
 $(+18) - (-3) = (+18) + (+3) = (+21)$.



2. Ένας έμπορος χρωστάει στον προμηθευτή του $897,56 \text{ €}$ και του οφείλει ένας πελάτης $527,42 \text{ €}$. Πόσα € πρέπει να έχει στο ταμείο για να ξεχρεώσει;

Λύση

Αν x είναι το ποσό των χρημάτων που χρειάζεται, θα είναι:

$$x + (+527,42) = +897,56. \text{ Γνωρίζουμε ότι: } x = (+897,56) - (+527,42).$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αφαίρεσης ρητών, έχουμε ότι:

$$x = (+897,56) + (-527,42). \text{ Άρα, } x = +(897,56 - 527,42) \text{ ή } x = +370,14 \text{ €}.$$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) $x + (+3) = (-9)$, (β) $(-8) - x = +7$.

Λύση

(α) Αν είναι: $x + (+3) = (-9)$ τότε $x = (-9) - (+3)$ ή $x = (-9) + (-3)$ ή $x = (-12)$.
 Δηλαδή, $x = -12$.

(β) Εφ' όσον $(-8) - x = +7$ θα ισχύει ότι: $(-8) = (+7) + x$ και επίσης:
 $x = (-8) - (+7)$ ή $x = (-8) + (-7)$ δηλαδή $x = -15$.

4. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $-13 - (0,38 - 11 - 13) + (0,38 - 11)$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } & -13 - (0,38 - 11 - 13) + (0,38 - 11) = \\ & = -13 - 0,38 + 11 + 13 + 0,38 - 11 = \\ & = -13 + 13 - 0,38 + 0,38 - 11 + 11 = \\ & = 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.
- | | ΣΩΣΤΟ | ΛΑΘΟΣ |
|--|--------------------------|--------------------------|
| (α) Στους ρητούς αριθμούς η αφαίρεση σημαίνει πάντα ελάττωση. | ☐ | ☐ |
| (β) Αν η διαφορά δύο ρητών είναι αρνητικός αριθμός, τότε και οι δύο ρητοί είναι αρνητικοί αριθμοί. | ☐ | ☐ |
| (γ) Ισχύει στην αφαίρεση η αντιμεταθετική ιδιότητα: $a - b = b - a$. | ☐ | ☐ |
| (δ) Ισχύει ότι: $6 - (+8) + (+5) + (-3) + (2) + (-1) = 0$. | ☐ | ☐ |
| (ε) Λύση της εξίσωσης $x + (-3) = -2$ είναι ο αριθμός $+1$. | ☐ | ☐ |
| (στ) Οι εξισώσεις $x + (-2) = +5$ και $x - (+7) = -10 + (+5)$ έχουν την ίδια λύση. | ☐ | ☐ |
| (ζ) Λύση της εξίσωσης $x - (-2) = -8 + (+7) - (-4)$ είναι ο αριθμός $+1$. | ☐ | ☐ |



2. Υπολόγισε τις διαφορές:
 (α) $5 - (-7)$, (β) $-8 - (+8)$, (γ) $-2 - (-15,2)$, (δ) $14,55 - 18,45$, (ε) $-\frac{2}{7} - (-\frac{2}{7})$.

3. Κάνε τις πράξεις:
 (α) $|+3| + |-2| + |-9|$, (β) $|-20| + |-10| - |+10|$, (γ) $|-3| - |-2| + |-5| - |+6|$.

4. Κάνε τις πράξεις:
 (α) $(+5) - (+3) + (+8)$, (β) $(-25) + (-4) - (-10)$, (γ) $(+12) + (+2) - (-8)$.

5. Συμπλήρωσε τον πίνακα με τους κατάλληλους αριθμούς:

α	β	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$
+3		-5	
	-8	+10	
-2	-5		
-9		+6	

6. Να λύσεις τις εξισώσεις: (α) $x + (-8) = -18$, (β) $x + 12 = -14$, (γ) $x + \frac{5}{4} = \frac{7}{8}$,
 (δ) $x - \frac{5}{4} = 2$.

7. Συμπλήρωσε τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα:
 Τι συμπεραίνεις για τους αριθμούς των δύο αυτών στηλών;

α	β	$\alpha - \beta$	$\beta - \alpha$
7	3		
$2\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$		
-5,55	-2,45		
3	-2,1		

8. Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων με δύο τρόπους: (α) $11 - (12 - 2) + (10 - 5) - (8 + 5)$,
 (β) $-(13,7 - 2,6) + 14,8 - (-8,7 + 5)$, (γ) $\frac{1}{6} - (\frac{3}{4} - \frac{5}{4}) - (\frac{7}{12} + \frac{5}{6})$.

9. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	3,5		1,89	$-\frac{1}{4}$
y	-1,5	4,3		$-\frac{1}{4}$
z		-2,3	3,11	
$x + y + z$	0		0,22	$\frac{1}{2}$
$x - y - z$		0		

Α.7.5. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ



Ένας έμπορος διαπίστωσε, ότι κάθε ημέρα του τελευταίου δεκαήμερου των εκπτώσεων έβγαζε κέρδος 524,5€.

Το επόμενο, όμως, δεκαήμερο είχε καθημερινή ζημιά 265,4€.

Είναι γνωστό, ότι στα λογιστικά βιβλία το κέρδος καταχωρείται ως θετική εγγραφή και η ζημιά ως αρνητική.



Δηλαδή, το συνολικό κέρδος για το δεκαήμερο των εκπτώσεων θα είναι $(+524,5€) \cdot (+10 \text{ ημέρες})$ και για το επόμενο δεκαήμερο η συνολική ζημιά θα είναι $(-265,4€) \cdot (+10 \text{ ημέρες})$

- Προσπάθησε να βρεις το αποτέλεσμα των παραπάνω πράξεων χωρίς να κάνεις τους πολλαπλασιασμούς.
- Τι παρατηρείς για το πρόσημο των αποτελεσμάτων;



Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι:

- ▶ Το γινόμενο δύο **θετικών** ρητών είναι **θετικός** ρητός.
- ▶ Το γινόμενο ενός **θετικού** και ενός **αρνητικού** ρητού είναι **αρνητικός** ρητός.

Ας δούμε τώρα πώς βρίσκουμε το γινόμενο δύο **αρνητικών** ακεραίων.

$$(-10) \cdot (+9) = -90$$

$$(-10) \cdot (+8) = -80$$

$$(-10) \cdot (+7) = -70$$

$$(-10) \cdot (+6) = -60$$

$$(-10) \cdot (+5) = -50$$

$$(-10) \cdot (+4) = -40$$

$$(-10) \cdot (+3) = -30$$

$$(-10) \cdot (+2) = -20$$

$$(-10) \cdot (+1) = -10$$

$$(-10) \cdot 0 = 0$$

$$(-10) \cdot (-1) = ;$$

$$(-10) \cdot (-2) = ;$$

$$(-10) \cdot (-3) = ;$$

$$(-10) \cdot (-4) = ;$$

Σημειώνουμε τους πολλαπλασιασμούς δύο παραγόντων, από τους οποίους ο ένας μένει σταθερός, το -10 , και ο άλλος μειώνεται διαδοχικά κατά 1 κάθε φορά.

Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα αυξάνονται διαδοχικά κατά 10.

Αν υποθέσουμε ότι και μετά το μηδενισμό του δεύτερου παράγοντα τα γινόμενα συνεχίζουν να αυξάνονται με τον ίδιο τρόπο, πρέπει να ορίσουμε ότι:

$$(-10) \cdot (-1) = +10 = +(10 \cdot 1)$$

$$(-10) \cdot (-2) = +20 = +(10 \cdot 2)$$

$$(-10) \cdot (-3) = +30 = +(10 \cdot 3)$$

$$(-10) \cdot (-4) = +40 = +(10 \cdot 4)$$

.....

.....



Διαπιστώνουμε επομένως ότι:

- ▶ Το γινόμενο δύο **αρνητικών** ακεραίων είναι **θετικός** ακεραίος.
- Γενικότερα:
- ▶ Το γινόμενο δύο **αρνητικών** ρητών είναι **θετικός** ρητός.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+». $(+1,5) \cdot (+2,2) = (+3,3)$
 $(-1,5) \cdot (-2,2) = (+3,3)$

Δηλαδή: $+\cdot+=+$ και $-\cdot-=+$

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «-». $(+1,5) \cdot (-2,2) = (-3,3)$
 $(-1,5) \cdot (+2,2) = (-3,3)$

Δηλαδή: $+\cdot-= -$ και $-\cdot+= -$

Ο Διόφαντος πρώτος εισάγει την έννοια «ΛΕΙΨΙΣ» (αρνητικός) διατυπώνοντας τους κανόνες της πράξης του πολλαπλασιασμού με την έκφραση:

«ΛΕΙΨΙΣ ΕΠΙ ΛΕΙΨΩΝ ΠΟΚΙ ΥΠΑΡΞΩΝ, ΛΕΙΨΙΣ ΕΠΙ ΥΠΑΡΞΩΝ ΠΟΚΙ ΛΕΙΨΩΝ»

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

Παρατηρούμε ότι:

$$(+1,5) \cdot (-2,2) = -3,3$$

$$(-2,2) \cdot (+1,5) = -3,3$$

Γενικά ισχύει ότι:

- ▶ Αντιμεταθετική ιδιότητα
(Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά δύο παραγόντων ενός γινομένου)

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$(-0,5) \cdot [(+2,2) \cdot (-3,5)] = (-0,5) \cdot (-7,7) = +3,85$$

$$[(-0,5) \cdot (+2,2)] \cdot (-3,5) = (-1,1) \cdot (-3,5) = +3,85$$

- ▶ Προσεταιριστική ιδιότητα

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$1 \cdot (+1,5) = (+1,5) \cdot 1 = +1,5$$

$$1 \cdot (-2,2) = (-2,2) \cdot 1 = -2,2$$

- ▶ Το γινόμενο ενός ρητού αριθμού με τη μονάδα ισούται με τον ίδιο τον αριθμό.

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

$$0,15 \cdot (-5) + 1,85 \cdot (-5) =$$

$$(-0,75) + (-9,25) = -10$$

$$\text{ή } (0,15+1,85) \cdot (-5) = 2 \cdot (-5) = -10$$

- ▶ Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ και } a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$(+3) \cdot (+\frac{1}{3}) = +(3 \cdot \frac{1}{3}) = 1$$

$$(-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{3}{2}) = +(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}) = 1$$

$$(-0,25) \cdot (-4) = +(0,25 \cdot 4) = 1$$

$$(-1,3) \cdot 0 = 0 \text{ ή } 0 \cdot (+\frac{2}{3}) = 0$$

- Οι ρητοί αριθμοί a και b λέγονται **αντίστροφοι**, όταν είναι διάφοροι του μηδενός και το γινόμενό τους είναι ίσο με τη μονάδα:

$$a \cdot b = 1$$

Ο καθένας από τους a και b είναι αντίστροφος του άλλου.

- ◆ Το γινόμενο ενός ρητού αριθμού επί το μηδέν ισούται με το μηδέν.

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

Γινόμενο πολλών παραγόντων

Πώς εργαζόμαστε όταν έχουμε να υπολογίσουμε ένα γινόμενο με περισσότερους από δύο παράγοντες;

Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο θετικών ρητών είναι πάντα θετικό. Αν υπάρχει ένας παράγοντας που είναι αρνητικός μετατρέπει το γινόμενο σε αρνητικό. Στην περίπτωση που υπάρχει και δεύτερος αρνητικός παράγοντας ξαναμετατρέπει το γινόμενο σε θετικό κ.ο.κ.

Άρα:

- ◆ Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο **πολλών παραγόντων** (που κανένας δεν είναι μηδέν), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:
 - Το πρόσημο +, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο** (ζυγό).
 - Το πρόσημο -, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό** (μονό).
- ◆ Αν τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι μηδέν, τότε και το γινόμενο είναι ίσο με μηδέν. Το σημείο του πολλαπλασιασμού «·» μεταξύ των γραμμάτων και των παρενθέσεων παραλείπεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστούν τα γινόμενα: (α) $(-1,4) \cdot 5$, (β) $(+\frac{2}{3}) \cdot (-2,1)$, (γ) $(-10) \cdot (-0,7)$.

Λύση

$$(α) \quad (-1,4) \cdot 5 = -(1,4 \cdot 5) = -7$$

$$(β) \quad (+\frac{2}{3}) \cdot (-2,1) = -(\frac{2}{3} \cdot 2,1) = -1,4$$

$$(γ) \quad (-10) \cdot (-0,7) = +(10 \cdot 0,7) = +7$$

2. Να υπολογιστεί το γινόμενο $(-1)a$, όταν το a παίρνει τις τιμές: $+3$, $-1,2$, $+\frac{2}{3}$, -2 .

Λύση

$$\text{Για } a = +3 \text{ είναι: } (-1)(+3) = -3$$

$$\text{Για } a = -1,2 \text{ είναι: } (-1)(-1,2) = +1,2$$

$$\text{Για } a = +\frac{2}{3} \text{ είναι: } (-1)(+\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Για } a = -2 \text{ είναι: } (-1)(-2) = +2$$

3. Ναδειχθεί ότι: $(a+b)(\gamma+\delta) = a\gamma + a\delta + b\gamma + b\delta$.

Λύση

Σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, έχουμε:

$$(a+b)(\gamma+\delta) = (a+b)\gamma + (a+b)\delta = a\gamma + b\gamma + a\delta + b\delta$$

4. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων: $(-1)(-20)(+\frac{2}{3})(-3)(-0,25)$.

Λύση

$$(-1)(-20)(+\frac{2}{3})(-3)(-0,25) =$$

(πλήθος αρνητικών παραγόντων 4)

$$= +(1 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 0,25) = +(20 \cdot 2 \cdot 0,25) = +(40 \cdot 0,25) = +10$$





ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να συμπληρωθούν τα παρακάτω κενά:
- (α) Το πρόσημο του γινομένου δύο ομόσημων ρητών είναι πάντα
 - (β) Το πρόσημο του γινομένου δύο ετερόσημων ρητών είναι πάντα
 - (γ) Ένας ρητός όταν πολλαπλασιάζεται με το 1 δεν
 - (δ) Το γινόμενο δύο αντίστροφων αριθμών είναι πάντα ίσο με
 - (ε) Το πρόσημο γινομένου πολλών παραγόντων εξαρτάται από το πλήθος των παραγόντων.

2. Υπολόγισε τα γινόμενα: (α) $(-1)(-1)$, (β) $-3(-10)$, (γ) $-1,2(-0,5)$, (δ) $0(-10589)$,
(ε) $1(-20015)$, (στ) $-0,725(+1000)$, (ζ) $\frac{12}{25}(-\frac{15}{24})$.

3. Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων με τις λιγότερες δυνατές πράξεις:
- (α) $-5 \cdot 27 + 2 \cdot 27$, (β) $10,35(-25) + 9,65(-25)$, (γ) $-\frac{6}{7}(-10) + (-\frac{6}{7})(+3)$.

4. Συμπλήρωσε τον διπλανό πίνακα:

•	-1	$-\frac{1}{2}$	0	+2	+3
-2					
-3,2					
$+\frac{3}{2}$					
+10					

5. Κάνε τις πράξεις: (α) $-7(-8+10-5)$, (β) $(0,25-0,05)(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8})$, (γ) $-10-6(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$.

6. Κάνε τις πράξεις: (α) $(5+a)(2+\beta)$, (β) $(a+7)(a-7)$, (γ) $(a-3)(\beta-3)$, (δ) $(\gamma+8)(\delta+5)$.

7. Υπολόγισε τα γινόμενα: (α) $(-1)(-1)$, (β) $(-1)(-1)(-1)$, (γ) $(-1)(-1)(-1)(-1)$.

8. Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

$$\begin{aligned} A &= (a-1)(a+1)(a-2)(a+2), & \text{όταν } a &= 3 \\ B &= \beta(\beta-3)(\beta+3)(\beta-5)(\beta+5), & \text{όταν } \beta &= 2 \\ \Gamma &= \gamma(2\gamma-1)(3\gamma+1)(4\gamma-2)(\gamma+2)(\gamma-2), & \text{όταν } \gamma &= 0,5 \end{aligned}$$

9. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	y	z	ω	A=xyz	B=yxω	Γ=xA-B	AB+Γ
-2	0,5	+1	-3				
$-\frac{1}{2}$	+6	-4	-0,3				
-2	$+\frac{3}{2}$	0,2	-7				

Α.7.6. Διαίρεση ρητών αριθμών

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



- Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:

► το πρόσημο +, αν είναι ομόσημοι. Δηλαδή:

$$+ : + = + \text{ και } - : - = +$$

► το πρόσημο -, αν είναι ετερόσημοι. Δηλαδή:

$$+ : - = - \text{ και } - : + = -$$

$$(+11,22) : (+2,2) = (+5,1)$$

$$(-11,22) : (-2,2) = (+5,1)$$

$$(+11,22) : (-2,2) = (-5,1)$$

$$(-11,22) : (+2,2) = (-5,1)$$

- Το πηλίκο της διαίρεσης $\alpha : \beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}$ λέγεται **λόγος του α προς το β** και ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $\beta \cdot x = \alpha$.

Ο λόγος του -20 προς το 4 είναι:

$$(-20) : (+4) = \frac{-20}{+4} = -5 \text{ διότι } (+4) \cdot (-5) = (-20)$$

Ο λόγος του -7 προς το -2 είναι:

$$(-7) : (-2) = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} \text{ διότι } (-2) \cdot \frac{7}{2} = (-7)$$

- ◆ Η διαίρεση $\frac{\alpha}{\beta}$ μπορεί και να γραφεί $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, επομένως για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

$$(-3) : (-4) = \frac{-3}{-4} = -3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$6 : (-7) = \frac{6}{-7} = 6 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$(-5) : (+2) = \frac{-5}{2} = -5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

- ◆ Διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστούν τα πηλικά:

$$(\alpha) (+1,5) : (+5), (\beta) \left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{7}{5}\right), (\gamma) (-0,45) : (-0,15).$$

Λύση

$$(\alpha) (+1,5) : (+5) = +(1,5 : 5) = +0,3$$

$$(\beta) \left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{7}{5}\right) = -\left(\frac{2}{3} : \frac{7}{5}\right) = -\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right) = -\frac{10}{21}$$

$$(\gamma) (-0,45) : (-0,15) = +(0,45 : 0,15) = +3$$



2. Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) $-6x = -24$, (β) $-3x = +15$, (γ) $x : (-2) = -3$.

Λύση

$$\begin{array}{lll} \text{(α)} & -6x = -24 & \text{(β)} & -3x = +15 & \text{(γ)} & x : (-2) = -3 \\ & x = (-24) : (-6) & & x = (+15) : (-3) & & x = (-3) \cdot (-2) \\ & x = +(24 : 6) & & x = -(15 : 3) & & x = +(3 \cdot 2) \\ & x = +4 & & x = -5 & & x = +6 \end{array}$$

3. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $[\frac{2}{3}(-3) - (-2)(-9)] : [0,4(-10) - (-0,2)(-5)] + 7$.

Λύση

$$\begin{aligned} & [\frac{2}{3}(-3) - (-2)(-9)] : [0,4(-10) - (-0,2)(-5)] + 7 = \\ & = [-(\frac{2}{3} \cdot 3) - (2 \cdot 9)] : [-(0,4 \cdot 10) - (0,2 \cdot 5)] + 7 = \quad (\text{κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις}) \\ & = (-2 - 18) : (-4 - 1) + 7 = \\ & = (-20) : (-5) + 7 = \quad (\text{κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις}) \\ & = +(20 : 5) + 7 = \\ & = +4 + 7 = \quad (\text{κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις}) \\ & = +11 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:
- (α) Το πρόσημο του πηλίκου δύο ομόσημων ρητών είναι πάντα
 - (β) Το πρόσημο του πηλίκου δύο ετερόσημων ρητών είναι πάντα
 - (γ) Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το με τον αντίστροφο του
 - (δ) Ένα πηλίκο $a : \beta$ λέγεται και του a προς το β .

2. Κάνε τις διαιρέσεις:
- (α) $(+15, 15) : (+3)$, (β) $(-4, 5) : (-1, 5)$, (γ) $(-81) : (+0, 9)$, (δ) $49 : (-7)$.

3. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	y	x + y	x - y	xy	x : y
$-\frac{7}{3}$	$\frac{5}{-6}$				
1,7	2,3				
$-\frac{4}{5}$	-1				

4. Υπολόγισε τα πηλικά: (α) $\frac{10}{0,25}$, (β) $\frac{-0,75}{-0,5}$, (γ) $\frac{-120}{(-12) + (-8)}$, (δ) $(-3\frac{1}{5}) : (-2\frac{2}{3})$.
5. Λύσε τις εξισώσεις: (α) $-3x = 74$, (β) $-0,14x = -49$, (γ) $x(-2) = 12$, (δ) $\frac{2}{3}x = -\frac{4}{6}$.
6. Κάνε τις πράξεις: (α) $\frac{-1}{3} + \frac{2}{-6} - \frac{12}{-15}$, (β) $-\frac{(-2)(-5)(-1)}{-10}$, (γ) $(\frac{-7}{3} - \frac{5}{-3}) : (-\frac{3}{2})$.
7. Υπολόγισε την τιμή της παράστασης: $[(-8)(\frac{-7}{64}) - (-15) : (-8)](-8) + (-27) : (-\frac{9}{8})$.

Α.7.7. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η



Τέσσερις μαθητές, ο Κώστας, η Μαρία, η Ελένη και ο Γιώργος, πήγαν στο γήπεδο του σχολείου τους για να τρέξουν γύρω από αυτό. Ένας γύρος του γηπέδου είναι 400 μέτρα. Ο Κώστας έτρεξε το $\frac{1}{10}$ του γύρου, η Μαρία έτρεξε το $\frac{1}{4}$ του γύρου, η Ελένη έτρεξε μισό γύρο και ο Γιώργος έτρεξε το $\frac{1}{9}$ του γύρου.



➤ Ποιό είναι το ακριβές μήκος σε μέτρα που έτρεξε το καθένα από τα παιδιά;



Σκεφτόμαστε

Για να βρούμε πόσα μέτρα έτρεξε ο Κώστας διαιρούμε το 400 με το 10 και βρίσκουμε: $400 : 10 = 40$ μέτρα. Με τον ίδιο τρόπο, για τη Μαρία βρίσκουμε: $400 : 4 = 100$ μέτρα και για την Ελένη $400 : 2 = 200$ μέτρα.

Όταν φτάσουμε στον Γιώργο, κάνοντας τη διαίρεση του 400 με το 9 παρατηρούμε ότι η διαίρεση δεν είναι τέλεια, αλλά δίνει πηλίκο 44 και υπόλοιπο 4. Αν συνεχίσουμε τη διαίρεση, επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι πάντα το ίδιο, τα δεκαδικά ψηφία θα επαναλαμβάνονται και θα είναι όλα ίσα με 4. Έτσι, το πηλίκο θα είναι ο δεκαδικός αριθμός 44,44...

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Προσπάθησε να βρεις, με όση ακρίβεια μπορείς, το πηλίκο της διαίρεσης 101 διὰ 44.



Σκεφτόμαστε

Βλέπουμε ότι η διαίρεση $101 : 44$ δεν είναι τέλεια. Δίνει ακέραιο πηλίκο 2 και υπόλοιπο 13.

Αν συνεχίσουμε τη διαίρεση θα βρούμε τον δεκαδικό αριθμό 2,295454... με άπειρα δεκαδικά ψηφία, τέτοια ώστε, μετά το δεύτερο δεκαδικό (το 9) να επαναλαμβάνονται συνεχώς τα ίδια δύο ψηφία (5 και 4), δηλαδή 545454...

101,00000...	44
130	2,295454...
420	
240	
200	
240	
.....	

Μαθαίνουμε

- Τους αριθμούς που βρήκαμε παραπάνω τους ονομάζουμε **περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς**.
- Το τμήμα των επαναλαμβανομένων δεκαδικών ψηφίων κάθε περιοδικού αριθμού ονομάζεται **περίοδος**.



Γενικότερα, λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι:

- ▶ Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή **δεκαδικού** ή **περιοδικού δεκαδικού** αριθμού και συμβολίζεται όπως φαίνεται στα παραδείγματα.

π.χ. $\frac{5}{3} = 1,6\overline{}$ και $\frac{1.000.000}{7} = 142857,142857\overline{}$.

Προηγουμένως, είδαμε με ποιον τρόπο ένας ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί με τη μορφή περιόδου δεκαδικού αριθμού.

Γεννιέται, όμως, το ερώτημα αν μπορούμε να κάνουμε και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν μπορούμε έναν περιόδου δεκαδικό αριθμό να τον γράψουμε με μορφή ρητού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να γραφούν με κλασματική μορφή οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί: (α) $0,2\bar{2}$ και (β) $1,6\bar{4}$.

Λύση

(α) Θέτουμε $x = 0,2\bar{2}$ και έχουμε διαδοχικά: $x = 0,222\ldots$ $10x = 2,222\ldots$ $10x = 2 + 0,222\ldots$ $10x = 2 + x$ $9x + x = 2 + x$ $9x = 2$ $x = \frac{2}{9} \text{ Δηλαδή: } 0,2\bar{2} = \frac{2}{9}$	(β) Αν $x = 1,6\bar{4}$ έχουμε $x = 1,646464\ldots$ $100x = 164,646464\ldots$ $100x = 164 + 0,646464\ldots$ $100x = 164 + x - 1$ $99x + x = 163$ $99x = 163$ $x = \frac{163}{99} \text{ Δηλαδή: } 1,6\bar{4} = \frac{163}{99}$
--	--

Συμπεραίνουμε ότι:

► Κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλασματικού ρητού.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Βρες τη δεκαδική μορφή των ρητών: (α) $-\frac{15}{10}$, (β) $\frac{5}{8}$, (γ) $\frac{13}{14}$, (δ) $\frac{20}{11}$, (ε) $\frac{32}{31}$.
- Βρες την κλασματική μορφή των αριθμών:
(α) 57,92, (β) $2,8\bar{8}$, (γ) $3,8\bar{3}$, (δ) $7,45\bar{6}1$, (ε) $15,39\bar{9}$.
- Βρες μια άλλη δεκαδική μορφή των αριθμών: (α) $2,9\bar{9}$, (β) $7,6\bar{9}$, (γ) $7,325\bar{9}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ



Ο αρχαίος φιλόσοφος Ζήνωνας, που έζησε στη Μεγάλη Ελλάδα το 490 - 430 π.Χ. διατύπωσε, μεταξύ άλλων, και το παρακάτω παράδοξο του Αχιλλέα με τη χελώνα:

“Ο Αχιλλέας βαδίζει 10 φορές πιο γρήγορα από τη χελώνα. Δε θα μπορέσει ποτέ να τη φτάσει, αν η χελώνα προηγείται ένα στάδιο (192 μέτρα περίπου) απ’ αυτόν”.

Ερεύνησε και προσπάθησε να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις τον λόγο για τον οποίο ο Ζήνωνας ισχυρίζεται κάτι τέτοιο.

Α.7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ



Ένας υπολογιστής μολύνθηκε από κάποιο ιό, ο οποίος είχε την ιδιότητα να καταστρέφει τα ηλεκτρονικά αρχεία με τον εξής τρόπο:

Κάθε μολυσμένο αρχείο μόλυνε, πριν καταστραφεί, τρία άλλα αρχεία μέσα σε μία ώρα λειτουργίας του υπολογιστή.



➤ Προσπάθησε να βρεις, πόσα μολυσμένα αρχεία υπάρχουν στο τέλος της 5ης ώρας.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Συμβολισμοί



- Το γινόμενο $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ παράγοντες}}$ (είτε ο a είναι θετικός είτε αρνητικός ρητός), συμβολίζεται με το a^n και λέγεται δύναμη με βάση το a και εκθέτη το φυσικό $n > 1$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ παράγοντες}}$$

(η a είναι η βάση)

- Για $n = 1$, γράφουμε $a^1 = a$.
- Η δύναμη a^n διαβάζεται και νιοστή δύναμη του a .
- Η δύναμη a^2 λέγεται και τετράγωνο του a ή a στο τετράγωνο.
- Η δύναμη a^3 λέγεται κύβος του a ή a στον κύβο.

Πρόσημο δύναμης

Παρατηρούμε ότι:

$$(+2)^5 = (+2)(+2)(+2)(+2)(+2) = +32 > 0$$

$$(-2)^4 = \underbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)}_{\text{άρτιο πλῆθος}} = +16 > 0$$

$$(-2)^5 = \underbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)}_{\text{περιττό πλῆθος}} = -32 < 0$$

Γενικά ισχύει ότι:

- ▶ Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός.

$$\text{Αν } a > 0, \text{ τότε } a^n > 0$$

- ▶ Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός.

$$\text{Αν } a < 0 \text{ και } n \text{ άρτιος, τότε } a^n > 0$$

- ▶ Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.

$$\text{Αν } a < 0 \text{ και } n \text{ περιττός, τότε } a^n < 0$$

Ιδιότητες δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} (-3)^3(-3)^5 &= \\ &\quad \underbrace{3 \text{ παράγοντες}} \quad \underbrace{5 \text{ παράγοντες}} \\ &= \underbrace{(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)}_{8 \text{ παράγοντες}} = \\ &= (-3)^8 = (-3)^{3+5} \end{aligned}$$

Γενικά ισχύει ότι:

► Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\begin{aligned} 7^8 : 7^3 &= \frac{7^8}{7^3} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \\ &= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 7^{8-3} \end{aligned}$$

► Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\begin{aligned} (2 \cdot 7)^6 &= (2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7) \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = \\ &= 2^6 \cdot 7^6 \end{aligned}$$

► Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{9}\right)^5 &= \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} = \\ &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{2^5}{9^5} \end{aligned}$$

► Για να υψώσουμε ένα πηλίκιο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθένα από τους όρους του πηλίκιου στον εκθέτη αυτό.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\begin{aligned} (8^3)^7 &= 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 = \\ &= 8^{3+3+3+3+3+3+3} = \\ &= 8^{7 \cdot 3} = 8^{21} \end{aligned}$$

► Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων: (α) -3^3 , (β) $(-3)^3$, (γ) -3^4 , (δ) $(-3)^4$.

Λύση

- (α) Η παράσταση θα είναι: $-3^3 = -3 \cdot 3 \cdot 3 = -27$
 (β) Επειδή ο εκθέτης είναι περιττός, η δύναμη θα είναι αρνητικός αριθμός.
 Άρα, θα είναι: $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -3^3 = -27$.
 (γ) Η παράσταση θα είναι: $-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$
 (δ) Επειδή ο εκθέτης είναι άρτιος, η δύναμη θα είναι θετικός αριθμός.
 Άρα, θα είναι: $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +3^4 = +81$

2. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $\Pi = (-2)^3 \cdot 3 - 3^4 + (-2)^4 : 16 + [-1 - (-1)^7 \cdot 8]$.

Λύση

Η σειρά των πράξεων είναι η εξής: 1ο Δυνάμεις, 2ο Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, 3ο Προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, προηγούνται οι πράξεις μέσα σ' αυτές με την ίδια σειρά.

$$\begin{aligned}\text{Άρα: } \Pi &= (-2)^3 \cdot 3 - 3^4 + (-2)^4 : 16 + [-1 - (-1)^7 \cdot 8] = (-8) \cdot 3 - 81 + (+16) : 16 + [-1 + 8] = \\ &= -24 - 81 + 1 + 7 = -97\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

- (α) Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι αριθμός.
 (β) Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη είναι θετικός αριθμός.
 (γ) Δύναμη με βάση αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.
 (δ) Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το των εκθετών.
 (ε) Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη
 (στ) Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε του γινομένου στον εκθέτη αυτό.
 (ζ) Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.
 (η) Για να υψώσουμε μια δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο των εκθετών.

2. Βρες με ποιο στοιχείο της 2ης και της 3ης γραμμής αντίστοιχα είναι ίσο κάθε στοιχείο της 1ης γραμμής του παρακάτω πίνακα.

$3 + 5^2$	$(3 + 5)^2$	$3 \cdot 5^2$	$(3 \cdot 5)^2$	$3 - 5^2$	$(3 - 5)^2$	$\frac{3^2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$
Διαφορά των 3 και 5^2	Άθροισμα των 3 και 5^2	Γινόμενο των 3 και 5^2	Πηλίκο των 3^2 και 5	Τετράγωνο της διαφοράς 3 πλην 5	Τετράγωνο του πηλίκου 3 δια 5	Τετράγωνο του αθροίσματος 3 και 5	Τετράγωνο του γινομένου 3 επί 5
75	4	28	64	0,36	225	1,8	-22

3. Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων: $A = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5$,

$$B = 32 \cdot 5^4 - 25 \cdot 4^5 + 87,5 \cdot 4^3, \quad \Gamma = -\frac{(-6)^5}{3^5} - \frac{8^4}{(-4)^4} + \frac{10^3}{(-5)^3}.$$

A.7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Σύμφωνα με τον κανόνα της διαίρεσης των δυνάμεων με την ίδια βάση, που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι:

$$\frac{5^7}{5^7} = 5^{7-7} = 5^0, \text{ γνωρίζουμε ότι είναι και } \frac{5^7}{5^7} = 1 \text{ επομένως, } 5^0 = 1.$$

Με την έννοια αυτή ορίζουμε:

- Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός με εκθέτη το μηδέν είναι ίση με μονάδα.

$$a^0 = 1$$



Επίσης, θα είναι:

$$\frac{5^7}{5^8} = 5^{7-8} = 5^{-1}, \text{ γνωρίζουμε ότι είναι και } \frac{5^7}{5^8} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5}, \text{ άρα } 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{5^6}{5^8} = 5^{6-8} = 5^{-2}, \text{ γνωρίζουμε ότι είναι και } \frac{5^6}{5^8} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^2}, \text{ άρα } 5^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

Κ.Ο.Κ.

Με την έννοια αυτή ορίζουμε:

- Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός, με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη.

$$a^{-v} = \frac{1}{a^v} = \left(\frac{1}{a}\right)^v$$

Επειδή τα $\frac{a}{\beta}$ και $\frac{\beta}{a}$ είναι αντίστροφοι αριθμοί,

όπως και τα a και $\frac{1}{a}$ στην προηγούμενη σχέση, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ισχύει:

$$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^v$$

- ◆ Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό, που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις: (α) $(-2)^{-5}$, (β) -3^{-3} , (γ) $(-234567)^0$.

Λύση

$$(α) \quad (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}, \quad (β) \quad -3^{-3} = -\frac{1}{3^3} = -\frac{1}{27}, \quad (γ) \quad (-234567)^0 = 1$$

2. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$(α) \quad [(-3)^3]^2, \quad (β) \quad 3^3 : 3^{-2}, \quad (γ) \quad (-2)^4 \cdot (-2)^6, \quad (δ) \quad \frac{12^{-3}}{3^{-3}}.$$

Λύση

$$(α) \quad [(-3)^3]^2 = (-3)^{3 \cdot 2} = (-3)^6 = 729$$

$$(β) \quad 3^3 : 3^{-2} = 3^{3 - (-2)} = 3^{3+2} = 3^5 = 243$$

$$(γ) \quad (-2)^4 \cdot (-2)^6 = (-2)^{4+6} = (-2)^{10} = 1024$$

$$(δ) \quad \frac{12^{-3}}{3^{-3}} = \left(\frac{12}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{1}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

3. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις: 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} , 10^{-6} , 10^{-7} .

Λύση

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000} = 0,00001$$

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000} = 0,000001$$

$$10^{-7} = \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10000000} = 0,0000001$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

α	β	γ	$(\alpha+\beta)^2$	$(\alpha\beta)^2$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$	$(-\alpha)^{-2}$	$(\gamma\beta)^{-1}$
$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{5}$					
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$					
10	-10	0,01					



2. Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = (-1)^{-3} + (-1)^{-2} + (-1)^{-1} + (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2,$$

$$B = [(-2)^2]^5 [(-3)^2]^{-2} + [(-23,5)^2 (23,5)^{-2}]^5, \quad \Gamma = \frac{(-6)^{-5}}{12^{-5}} + \frac{16^{-4}}{(-32)^{-4}} - \frac{5^{-3}}{(-10)^{-3}}.$$

3. Βρες ποιος από τους αριθμούς: $\frac{1}{10}$, $10^3 \cdot 5 \cdot 2$, $\frac{1}{10^3}$, $10^3 + 10^2$, δεν είναι δύναμη του 10.

4. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	0,001	0,01	0,1	-10	-100	$2 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$
x^{-3}										
x^3										
x^{-1}										

5. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

•	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3
10^{-3}							
10^{-2}							
10^{-1}							
10^0							
10^1							
10^2							
10^3							