



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
83ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2022

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-21)^7}{7^7} + \frac{(-15)^7}{(-5)^7} + 4044 \right) : \left(\frac{(-14)^3}{7^3} + \frac{(-18)^3}{(-9)^3} + 2 \right)$$

Λύση
 Έχουμε

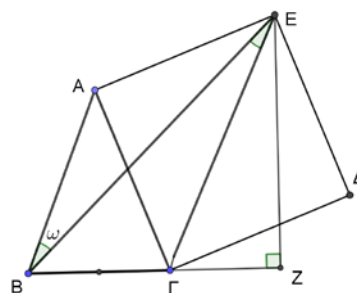
$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-21)^7}{7^7} + \frac{(-15)^7}{(-5)^7} + 4044 \right) : \left(\frac{(-14)^3}{7^3} + \frac{(-18)^3}{(-9)^3} + 2 \right) \\ &= \left(\left(\frac{-21}{7} \right)^7 + \left(\frac{-15}{-5} \right)^7 + 4044 \right) : \left(\left(\frac{-14}{7} \right)^3 + \left(\frac{-18}{-9} \right)^3 + 2 \right) \\ &= \left((-3)^7 + 3^7 + 4044 \right) : \left((-2)^3 + 2^3 + 2 \right) \\ &= \left(-3^7 + 3^7 + 4044 \right) : \left(-2^3 + 2^3 + 2 \right) = 4044 : 2 = 2022. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

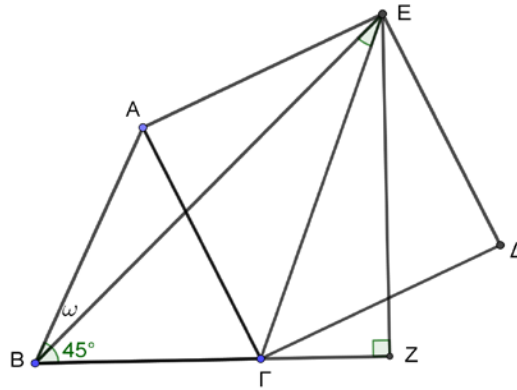
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με AB = ΑΓ και το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο. Αν $\widehat{ABE} = \omega$ και $\widehat{EZ\Gamma} = 90^\circ$, τότε:

(1) Να βρείτε συναρτήσει του ω τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ABΓ.

(2) Να αποδείξετε ότι: BZ = EZ



Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή $AE = AG = AB$, το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{AEB} = \omega$. Επειδή $\hat{BAE} = \hat{A} + 90^\circ$, έπεται ότι:

$$\hat{A} + 90^\circ + 2\omega = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - 2\omega.$$

Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2\omega)}{2} = 45^\circ + \omega.$$

(β) Έχουμε $\hat{EBZ} = \hat{B} - \omega = (45^\circ + \omega) - \omega = 45^\circ$. Επειδή το τρίγωνο EZB είναι ορθογώνιο με $\hat{EZB} = 90^\circ$, έπεται ότι $\hat{BEZ} = 90^\circ - \hat{EBZ} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο EZB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $BZ = EZ$.

Πρόβλημα 3

Ο κύριος Γιάννης αγοράζει μια σακούλα καραμέλες για τα δύο παιδιά του, Γιώργο και Δημήτρη, και τους δίνει κάποιες από αυτές τυχαία. Όταν πηγαίνουν στο σπίτι διαπιστώνουν ότι ο Γιώργος έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες από τον Δημήτρη και επτά φορές περισσότερες από αυτές που έμειναν στη σακούλα. Τα παιδιά τρώνε κάποιες από αυτές και την άλλη μέρα παίρνουν κάποιες ακόμη από τη σακούλα. Διαπιστώνουν ότι ο Δημήτρης έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες και από τον Γιώργο και από αυτές που απέμειναν στη σακούλα. Να αποδείξετε ότι τα παιδιά έφαγαν τουλάχιστον τα $\frac{3}{4}$ από τις συνολικές καραμέλες που αγόρασε ο κύριος Γιάννης.

Λύση

Έστω x οι καραμέλες που πήρε την πρώτη μέρα ο Δημήτρης. Τότε $7x$ είναι οι καραμέλες του Γιώργου και x είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως ο κύριος Γιάννης αγόρασε συνολικά $9x$ καραμέλες.

Έστω y οι καραμέλες του Γιώργου την δεύτερη μέρα. Τότε $7y$ είναι οι καραμέλες του Δημήτρη και y είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως την δεύτερη μέρα περίσσεψαν $9y$ καραμέλες. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά έφαγαν $9x - 9y$ καραμέλες.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$9x - 9y \geq \frac{3}{4} \cdot (9x) \Leftrightarrow x \geq 4y.$$

Θα αποδείξουμε ότι η τελευταία ισχύει. Πράγματι, οι καραμέλες που είχε ο Δημήτρης συν τις καραμέλες της σακούλας την πρώτη μέρα, είναι σίγουρα περισσότερες από τις αντίστοιχες τη δεύτερα μέρα.

1^η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $x + x = 2x$

2^η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $7y + y = 8y$

Επομένως $2x \geq 8y$ και το ζητούμενο έπεται.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5} \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3 \right)$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5} \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left(\left(\left(\frac{-22}{2} \right)^5 + \left(\frac{-44}{-4} \right)^5 \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\left(\frac{-10}{2} \right)^{10} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left(\left((-11)^5 + (+11)^5 \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left((-5)^{10} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left((-11^5 + 11^5) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : (0 + 10^3) \\ &= (0 \cdot (-2022)^2 + 10^6) : (+10) = 10^6 : 10^3 = 10^3. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$ και το τετράπλευρο ABΔΕ είναι τετράγωνο.

Αν είναι $\widehat{A\Gamma E} = \omega$, $\widehat{\Delta\Theta B} = 90^\circ = \widehat{A\hat{M}B}$

και $B\Gamma = \alpha$, $AM = \nu$, τότε να βρείτε:

- (1) Το μέτρο της γωνίας $E\hat{\Gamma}B$.
- (2) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΜΘΔ συναρτήσει των α και ν .

