



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2024
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων

$$A = (5^2 - 4^2) \cdot (2^3 - 2^2 + 1) + (10^2 - 8^2) \cdot 2024^0,$$

$$B = (1 + 3 + 3^2 + 3^3 - 31) \cdot (1 + 5 + 5^2 + 5^3 - 3 \cdot 5^2)$$

και να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{A^{1012}}{B^{1012}}$ ως δύναμη με βάση το 3.

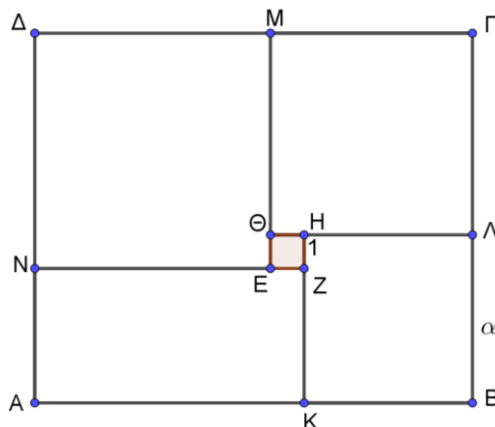
Πρόβλημα 2. Η Μαρία πριν να ανοίξουν τα Σχολεία πήγε για ψώνια στην αγορά. Εκεί από τα χρήματα που είχε μαζί της ξόδεψε το $\frac{1}{8}$ των χρημάτων της για να αγοράσει τετράδια και το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων της για να αγοράσει βιβλία. Στη συνέχεια αγόρασε ένα φόρεμα με έκπτωση 20% ξοδεύοντας τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων που της είχαν απομείνει. Μετά από αυτές τις αγορές η Μαρία διαπίστωσε ότι της είχαν απομείνει 50 ευρώ. Να βρείτε: (α) Πόσα χρήματα είχε μαζί της η Μαρία πηγαίνοντας στην αγορά. (β) Ποια ήταν η αρχική τιμή του φορέματος που αγόρασε πριν την έκπτωση.

Πρόβλημα 3. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει υποδιαιρεθεί στα τετράγωνα ΚΒΛΗ, ΕΖΗΘ, ΘΛΓΜ, ΝΕΜΔ και στο ορθογώνιο ΑΚΖΝ.

Δίνεται ότι το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρά ίση με 1, το τετράγωνο ΚΒΛΗ έχει πλευρά ίση με α και για το ορθογώνιο ΑΚΖΝ ισχύει η σχέση

$$AK = 2 \cdot KZ.$$

Να βρείτε την τιμή του α και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.



Πρόβλημα 4. (α) Να γράψετε τον ακέραιο 2024 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

(β) Να γράψετε την κλασματική μονάδα $\frac{1}{2024}$ ως διαφορά δύο κλασματικών μονάδων με παρονομαστές μικρότερους του 2024, δηλαδή να βρείτε θετικούς ακέραιους μ, ν μικρότερους του 2024 έτσι ώστε:

$$\frac{1}{2024} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}.$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2024
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους θετικούς ακέραιους της μορφής

$$\alpha\alpha\beta\beta = 1000\alpha + 100\alpha + 10\beta + \beta, \text{ με } \alpha \neq 0, \beta \text{ ψηφία.}$$

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε ακέραιος που γράφεται στην παραπάνω μορφή είναι πολλαπλάσιο του 11.

(β) Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους της παραπάνω μορφής που είναι πολλαπλάσια του 4 και του 9 και να γράψετε καθέναν από αυτούς ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$A = \frac{9n^2 + 15n + 10}{3n + 2}$$

είναι ακέραιος.

Πρόβλημα 3. Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου της χώρας μας συμμετέχουν 14 ομάδες που η καθεμία παίζει με όλες τις άλλες δύο παιχνίδια. Μετά το τέλος όλων των παιχνιδιών οι 6 πρώτες ομάδες δημιουργούν έναν όμιλο στον οποίο οι ομάδες παίζουν μεταξύ τους ανά δύο από 2 παιχνίδια. Οι 8 υπόλοιπες ομάδες δημιουργούν δεύτερο όμιλο στον οποίο κάθε ομάδα παίζει με όλες τις άλλες μία μόνο φορά. Κάθε ομάδα παίρνει 3 βαθμούς για κάθε νίκη της, 1 βαθμό για κάθε ισοπαλία της και 0 βαθμούς για κάθε ήττα της.

(α) Να βρείτε πόσα παιχνίδια παίζονται συνολικά μέσα σε μία χρονιά.

(β) Αν σε μία χρονιά το σύνολο των βαθμών όλων των ομάδων ήταν 677, να βρείτε πόσα παιχνίδια έληξαν με ισοπαλία.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 54^\circ$. Η κάθετη στο μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει τη διχοτόμο $\Gamma\Delta$ της γωνίας $\hat{\Gamma}$ στο σημείο O και την ευθεία AB στο σημείο E . Έστω $A\Gamma = \beta$, $AB = \gamma$, $B\Gamma = \alpha$.

(α) Να αποδείξετε ότι: (i) $OB = OG = OE$,

(ii) $\Gamma\Delta = \Gamma E$.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE συναρτήσει των μηκών α, β, γ των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.

Σημείωση. Να κάνετε στο φύλλο απαντήσεων το δικό σας σχήμα.

