

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 5)

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-3)^{-7}}{(-6)^{-6}} + \frac{(-6)^{-8}}{12^{-7}} + 20^0 \right) \cdot \left(\frac{(-10)^{-35}}{5^{-35}} + \frac{(-22)^{-35}}{(-11)^{-35}} + 2021 \right).$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-3)^{-7}}{(-6)^{-6}} + \frac{(-6)^{-8}}{12^{-7}} + 20^0 \right) \cdot \left(\frac{(-10)^{-35}}{5^{-35}} + \frac{(-22)^{-35}}{(-11)^{-35}} + 2021 \right) \\ &= \left(\frac{(-6)^6}{(-3)^7} + \frac{(+12)^7}{(-6)^8} + 1 \right) \cdot \left(\frac{(+5)^{35}}{(-10)^{35}} + \frac{(-11)^{35}}{(-22)^{35}} + 2021 \right) \\ &= \left(\frac{(-6)^6}{(-3)^6(-3)} + \frac{12^7}{(-6)^7 \cdot (-6)} + 1 \right) \cdot \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^{35} + \left(+\frac{1}{2} \right)^{35} + 2021 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-6}{-3} \right)^6 - \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{12}{6} \right)^7 + 1 \right) \cdot \left(-\left(+\frac{1}{2} \right)^{35} + \left(+\frac{1}{2} \right)^{35} + 2021 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{3} \cdot 2^6 - \frac{1}{6} \cdot (-2)^7 + 1 \right) \cdot (0 + 2021) = \left(-\frac{1}{3} \cdot 2^6 - \frac{(-2)}{6} \cdot (-2)^6 + 1 \right) \cdot 2021 \\ &= \left(-\frac{1}{3} \cdot 2^6 + \frac{1}{3} \cdot (-2)^6 + 1 \right) \cdot 2021 = (0 + 1) \cdot 2021 = 1 \cdot 2021 = 2021. \end{aligned}$$

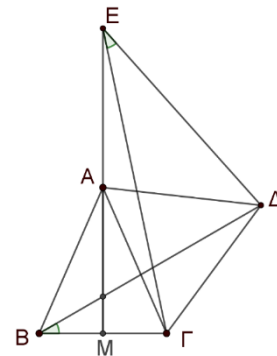
Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma > B\Gamma$. Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM του τριγώνου $AB\Gamma$ προς το μέρος του A κατά τμήμα $AE = AB$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\widehat{DB\Gamma} = \widehat{GE\Delta} = 30^\circ.$$

(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)



Λύση

1^{ος} τρόπος

Έστω $\hat{A} = \hat{x}$ και $\widehat{AB\Delta} = \hat{B}_2 = \hat{y}$. Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$ ($AB = A\Delta$) έχουμε $\widehat{ADB} = \hat{A}_1 = \hat{y}$ και

$$2\hat{y} + \hat{x} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{y} + \hat{x} = 120^\circ \quad (1).$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) έχουμε:

$$\begin{aligned} 2(\hat{y} + \hat{B}_1) + \hat{x} &= 180^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\hat{y} + 2\hat{B}_1 + \hat{x} &= 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2\hat{B}_1 = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 30^\circ. \end{aligned}$$

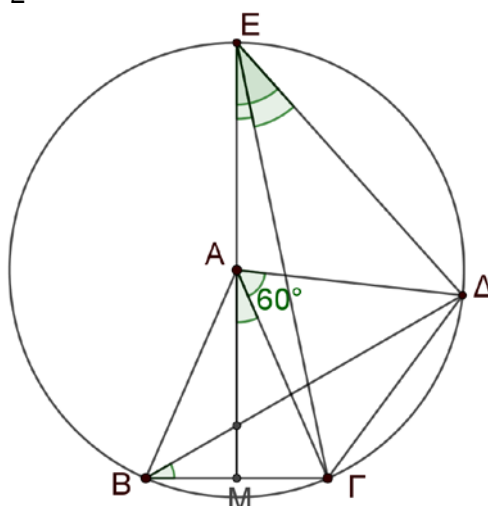
Για τη γωνία $\widehat{ΓΕΔ}$ παρατηρούμε ότι:

$$\widehat{ΓΕΔ} = \widehat{ΑΕΔ} - \widehat{ΑΕΓ} \quad (2)$$

Έχουμε ότι $\widehat{ΜΑΓ} = \frac{\widehat{Α}}{2} = \frac{x}{2}$ και $\widehat{ΓΑΔ} = 60^\circ$. Επιπλέον τα τρίγωνα $ΕΑΔ$ και $ΕΑΓ$ είναι ισοσκελή, αφού $ΕΑ = ΑΒ = ΑΓ = ΑΔ$. Για τις εξωτερικές γωνίες τους $\widehat{ΜΑΔ}$ και $\widehat{ΜΑΓ}$ έχουμε:

$$\widehat{ΜΑΔ} = \frac{\widehat{x}}{2} + \widehat{ΓΑΔ} = \frac{\widehat{x}}{2} + 60^\circ, \text{ αφού } ΑΓΔ \text{ ισόπλευρο τρίγωνο}$$

$$\text{και } \widehat{ΜΑΓ} = \frac{\widehat{Α}}{2} = \frac{x}{2}, \text{ αφού η διάμεσος } ΑΜ \text{ είναι και διχοτόμος.}$$



Σχήμα 2

Επομένως, έχουμε

$$\widehat{ΜΑΔ} = \frac{\widehat{x}}{2} + 60^\circ = 2 \cdot \widehat{ΑΕΔ} \Rightarrow \widehat{ΑΕΔ} = \frac{\widehat{x}}{4} + 30^\circ$$

$$\text{και } \widehat{ΜΑΓ} = \frac{\widehat{Α}}{2} = \frac{\widehat{x}}{2} = 2 \cdot \widehat{ΑΕΓ} \Rightarrow \widehat{ΑΕΓ} = \frac{\widehat{x}}{4}.$$

$$\text{Επομένως, έχουμε } \widehat{ΓΕΔ} = \widehat{ΑΕΔ} - \widehat{ΑΕΓ} = \frac{\widehat{x}}{4} + 30^\circ - \frac{\widehat{x}}{4} = 30^\circ.$$

2^{ος} τρόπος

Επειδή $ΕΑ = ΑΒ = ΑΓ = ΑΔ$ ο κύκλος κέντρου $Α$ και ακτίνας $ΑΒ$ περνάει από τα σημεία $Γ$, $Δ$ και $Ε$. Οι γωνίες $\widehat{ΔΒΓ}$ και $\widehat{ΓΕΔ}$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο χορδής $ΓΔ$, οπότε θα είναι

$$\widehat{ΔΒΓ} = \widehat{ΓΕΔ} = \frac{\widehat{ΓΑΔ}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Πρόβλημα 3 (μονάδες 8)

Σε μία παρέα κάποια μέλη της αποτελούν την ομάδα $Μ$ που αγαπάει τα Μαθηματικά, ενώ τα υπόλοιπα μέλη αποτελούν την ομάδα $Φ$ που αγαπάει τη Φυσική. Ο μέσος όρος των ηλικιών των μελών που αγαπούν τα Μαθηματικά είναι 25 χρόνια, ενώ αυτών που αγαπούν τη Φυσική είναι 35 χρόνια. Όμως δύο μέλη της ομάδας $Φ$ δήλωσαν ότι πλέον άλλαξαν προτίμηση και ζήτησαν να ενταχθούν στην ομάδα $Μ$. Τότε ο μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας $Μ$ έγινε 27, ενώ ο μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας $Φ$ έγινε 37.

Να βρείτε πόσα μέλη είχε συνολικά η παρέα και να δώσετε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας παρέας.

Λύση

Έστω ότι η ομάδα Μ έχει μ μέλη και η ομάδα Φ έχει φ μέλη. Τότε το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Μ είναι 25μ , το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Φ είναι 35φ και το άθροισμα των ηλικιών όλων των μελών της παρέας είναι $25\mu + 35\varphi$.

Με την αλλαγή προτίμησης των 2 μελών της ομάδας Φ, το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Μ είναι $27(\mu + 2)$, το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Φ είναι $37(\varphi - 2)$ και το άθροισμα των ηλικιών όλων των μελών της παρέας είναι

$$27(\mu + 2) + 37(\varphi - 2).$$

Επομένως, έχουμε την εξίσωση

$$25\mu + 35\varphi = 27(\mu + 2) + 37(\varphi - 2)$$

$$\Leftrightarrow 25\mu + 35\varphi - 27\mu - 37\varphi = 54 - 74$$

$$\Leftrightarrow -2\mu - 2\varphi = -20 \Leftrightarrow \mu + \varphi = 10,$$

οπότε η παρέα είχε συνολικά 10 μέλη.

Ένα παράδειγμα τέτοιας παρέας είναι το εξής:

Ομάδα Μ: 4 μέλη με ηλικίες 25 έτη και μέσο όρο ηλικιών τα 25 έτη.

Ομάδα Φ: 6 μέλη από τα οποία 4 έχουν ηλικία 37 έτη και τα δύο έχουν ηλικία με

ηλικίες 31 έτη. Μέσος όρος ηλικιών: $\frac{2 \cdot 31 + 4 \cdot 37}{6} = \frac{62 + 148}{6} = \frac{210}{6} = 35$ έτη.

Αν αλλάξουν προτίμηση τα μέλη με την ηλικία των 31 ετών, τότε στην ομάδα Μ

έχουμε μέσο όρο ηλικιών $\frac{4 \cdot 25 + 2 \cdot 31}{6} = \frac{162}{6} = 27$ έτη, ενώ στην ομάδα Φ έχουμε

μέσο όρο ηλικιών $\frac{4 \cdot 37}{4} = 37$ έτη.