- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(2,7,14)$, τότε $\alpha=144,\ \beta=504,\ \gamma=1008$ που δεν είναι δεκτή γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 504=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.

Επομένως, οι δυνατές τιμές είναι $\alpha=72, \beta=144,\ \gamma=504$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\text{Α}=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\text{Α}&=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200\\&=\left(\left(\frac{-20}{4}\right)^{11}+\left(\frac{-25}{-5}\right)^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^{20}-\left(\frac{4}{1}\right)^{20}\right)+200\\&=\left((-5)^{11}+(+5)^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left((-4)^{20}-4^{20}\right)+200\\&=\left(-5^{11}+5^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left(4^{20}-4^{20}\right)+200=0\cdot(-2018)^2+0+200=200.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: *Ο μέσος όρος ν αριθμών* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ *είναι ο αριθμός* $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}$.

Λύση

Ονομάζουμε Α το βάρος σε γραμμάρια του πρώτου μήλου, Β του δεύτερου, Γ του τρίτου και Δ του τέταρτου. Τότε είναι Α = 120 γραμμάρια και

$$\frac{\text{Α}+\text{Β}}{2}=115\Leftrightarrow \text{Α}+\text{Β}=230\Leftrightarrow 120+\text{Β}=230\Leftrightarrow \text{Β}=230-120=110.$$

Άρα το δεύτερο μήλο ήταν 110 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τρίτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma}{3}=115-10 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma}{3}=105 \Leftrightarrow \mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=315 \Leftrightarrow \Gamma=330-(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

$$\Leftrightarrow \Gamma=315-(120+110) \Leftrightarrow \Gamma=315-230=85.$$

Άρα το τρίτο μήλο ήταν 85 γραμμάρια.
Μετά τη ζύγιση του τέταρτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta}{4}=105-10 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta}{4}=95 \Leftrightarrow \mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta=380$$

$$\Leftrightarrow \Delta=380-(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma) \Leftrightarrow \Delta=380-(120+110+85) \Leftrightarrow \Delta=380-315=65.$$

Επομένως το τέταρτο μήλο ήταν 65 γραμμάρια.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου α, για τις οποίες η εξίσωση $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x-\alpha}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις.

Λύση

Πρέπει $x \neq 2$ *και* $x \neq 6$. Με απαλοιφή των παρονομαστών παίρνουμε ότι:

$$(x-1)(x-6)=(x-2)(x-\alpha) \Leftrightarrow x^2-7x+6=x^2-(2+\alpha)x+2\alpha \Leftrightarrow (\alpha-5)x=2\alpha-6$$

Επομένως για $\alpha \neq 5$ έχουμε

$$x=\frac{2\alpha-6}{\alpha-5}=\frac{2(\alpha-5)+4}{\alpha-5}=2+\frac{4}{\alpha-5}.$$

Για να είναι ακέραιος ο αριθμός αυτός, θα πρέπει ο παρονομαστής $(\alpha-5)$ να είναι διαιρέτης του 4, οπότε $\alpha-5 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Επομένως $\alpha \in \{1,3,4,6,7,9\}$.

Πρόβλημα 4

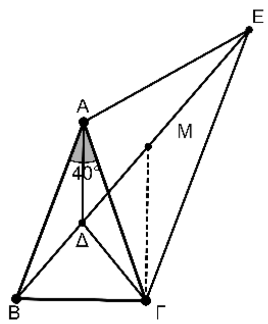
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) με $\widehat{\mathrm{A}}=40°$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: ΔΑ = ΔΒ = ΔΓ.
Αν η ΓΜ είναι παράλληλη στην ΑΔ και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΕ), να αποδείξετε ότι:

(α) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$.

(β) $\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=100°$.

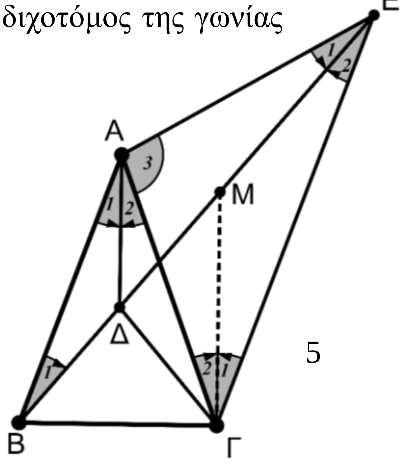
(γ) η ΑΜ είναι κάθετη στην ΓΕ.

Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*



Λύση

(**α**) Επειδή το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές (ΔΒ=ΔΓ), το σημείο Δ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Η κορυφή Α ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη της ΒΓ (διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές). Άρα η ΑΔ είναι η μεσοκάθετη της ΒΓ και κατά συνέπεια θα είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές (ΔΑ=ΔΒ) και $\widehat{A}_1 = 20°$, θα ισχύει $\widehat{B}_1 = 20°$. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20°$ και από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = 180° \Leftrightarrow 20° + 20° + \widehat{A}_3 + 20° + 20° = 180°.$$

Άρα είναι: $\widehat{A}_3 = 100°$.

(γ) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές (ΑΕ = ΑΓ) με $\Gamma\widehat{A}E = \widehat{A}_3 = 100°$, οπότε:

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2 = 40°.$$

Ισχύει όμως $\widehat{\Gamma}_2 + \widehat{A}_2 = 20°$ (διότι $\widehat{\Gamma}_2, \widehat{A}_2$ εντός εναλλάξ ΑΔ|| ΓΜ και ΑΓ τέμνουσα). Στο ερώτημα **(β)** είδαμε ότι $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20°$. Άρα $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{E}_2 = 20°$, οπότε το τρίγωνο ΓΜΕ είναι ισοσκελές με ΜΓ = ΜΕ. Επομένως, το Μ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης ΓΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ, όπως και το Α, οπότε θα είναι ΑΜ⊥ΓΕ.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1