

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$9x - 9y \geq \frac{3}{4} \cdot (9x) \Leftrightarrow x \geq 4y.$$

Θα αποδείξουμε ότι η τελευταία ισχύει. Πράγματι, οι καραμέλες που είχε ο Δημήτρης συν τις καραμέλες της σακούλας την πρώτη μέρα, είναι σίγουρα περισσότερες από τις αντίστοιχες τη δεύτερα μέρα.

1^η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $x + x = 2x$

2^η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $7y + y = 8y$

Επομένως $2x \geq 8y$ και το ζητούμενο έπεται.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5} \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3 \right)$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5} \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left(\left(\left(\frac{-22}{2} \right)^5 + \left(\frac{-44}{-4} \right)^5 \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\left(\frac{-10}{2} \right)^{10} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left(\left((-11)^5 + (+11)^5 \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left((-5)^{10} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left((-11^5 + 11^5) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : (0 + 10^3) \\ &= (0 \cdot (-2022)^2 + 10^6) : (+10) = 10^6 : 10^3 = 10^3. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

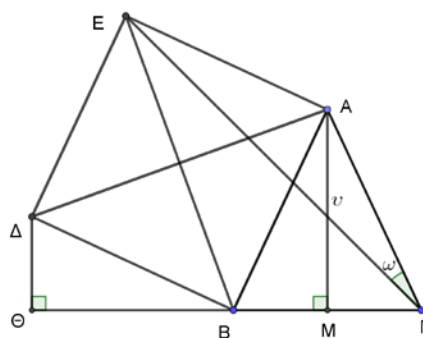
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$ και το τετράπλευρο ABΔΕ είναι τετράγωνο.

Αν είναι $\widehat{A\Gamma E} = \omega$, $\widehat{\Delta\Theta B} = 90^\circ = \widehat{A\hat{M}B}$

και $B\Gamma = \alpha$, $AM = \nu$, τότε να βρείτε:

(1) Το μέτρο της γωνίας $E\hat{\Gamma}B$.

(2) Το εμβαδόν του τραπέζιου ΑΜΘΔ συναρτήσει των α και ν .



Λύση

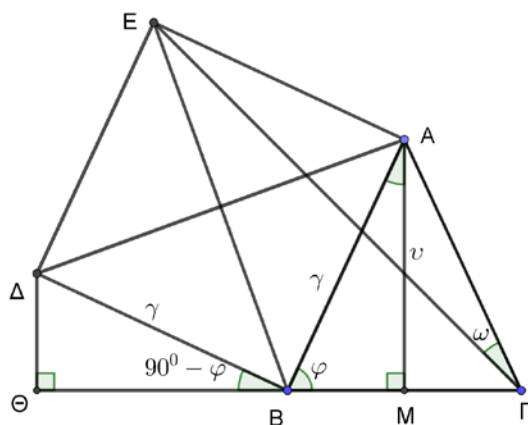
(α) Επειδή $AE = AB = AG$, το τρίγωνο $AΓΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}\hat{E}\Gamma = \omega$.
Επειδή $\hat{\Gamma}\hat{A}E = \hat{A} + 90^\circ$, έπεται ότι:

$$\hat{A} + 90^\circ + 2\omega = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - 2\omega.$$

Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2\omega)}{2} = 45^\circ + \omega.$$

Άρα έχουμε: $\hat{E}\hat{\Gamma}B = \hat{A}\hat{\Gamma}B - \omega = (45^\circ + \omega) - \omega = 45^\circ$.



Σχήμα 2

(β) (1ος τρόπος)

Επειδή $\hat{A}\hat{B}\Delta = 90^\circ$, οι γωνίες $\hat{A}\hat{B}M$ και $\hat{\Delta}\hat{B}\Theta$ έχουν άθροισμα 90° , δηλαδή είναι συμπληρωματικές. Έτσι, αν $\hat{A}\hat{B}M = \varphi$, τότε $\hat{\Delta}\hat{B}\Theta = 90^\circ - \varphi$.

Έστω $AB = B\Delta = \gamma$. Τότε, αφού $\hat{B}\hat{\Delta}\Theta = 90^\circ - \hat{\Delta}\hat{B}\Theta = \varphi$, έχουμε:

$$\Delta\Theta = \gamma \cdot \eta\mu(90^\circ - \varphi) = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B}\hat{\Delta}\Theta = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = BM = \frac{\alpha}{2}.$$

$$B\Theta = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \varphi) = \gamma \cdot \eta\mu\hat{B}\hat{\Delta}\Theta = \gamma \cdot \eta\mu\varphi = AM = \nu.$$

Άρα έχουμε:

$$(\Delta M \Theta \Delta) = \frac{1}{2} \cdot (\Delta M + \Theta \Delta) \cdot M\Theta = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

(β) 2ος τρόπος

Τα τρίγωνα AMB και $B\Theta\Delta$ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{M} = \hat{\Theta} = 90^\circ$ και επιπλέον έχουν:

1. $AB = B\Delta$, αφού το τετράπλευρο $AB\Delta E$ είναι τετράγωνο και
2. $\hat{M}\hat{A}B = \hat{\Theta}\hat{B}\Delta$, αφού

$$\widehat{MAB} = \frac{\widehat{A}}{2} = 45^\circ - \omega, \quad \widehat{B\Delta} = 180^\circ - \widehat{AB\Delta} - \widehat{B} = 180^\circ - 90^\circ - (45^\circ + \omega) = 45^\circ - \omega$$

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα AMB και BΘΔ είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$B\Theta = AM = \nu \quad \text{και} \quad \Delta\Theta = BM = \frac{\alpha}{2}.$$

Άρα έχουμε:

$$(AM\Theta\Delta) = \frac{1}{2} \cdot (AM + \Theta\Delta) \cdot M\Theta = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Πρόβλημα 3

Ο πληθυσμός μιας πόλης στην τελευταία απογραφή ήταν A κάτοικοι, όπου $35000 < A < 40000$. Δίνεται ότι ο αριθμός A , όταν διαιρεθεί με το 7 δίνει υπόλοιπο 1, όταν διαιρεθεί με το 9 δίνει υπόλοιπο 1 και όταν διαιρεθεί με το 64 δίνει υπόλοιπο 3. Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό της πόλης.

Λύση

Σύμφωνα με τις υποθέσεις, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ, λ, μ , τέτοιοι ώστε:

$$\begin{cases} A = 7\kappa + 1 \\ A = 9\lambda + 1 \\ A = 64\mu + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - 1 = 7\kappa \\ A - 1 = 9\lambda \\ A - 1 = 64\mu + 2 \end{cases} \Rightarrow A - 1 = 7\kappa = 9\lambda = 64\mu + 2$$

$$\Rightarrow \frac{A-1}{63} = \frac{\kappa}{9} = \frac{\lambda}{7} = \frac{64\mu+2}{63} = \omega \in \mathbb{Z} \Rightarrow \kappa = 9\omega, \quad \lambda = 7\omega \quad \text{και} \quad \frac{64\mu+2}{63} = \omega \in \mathbb{Z}.$$

Άρα ο αριθμός 63 πρέπει να διαιρεί τον αριθμό $64\mu + 2$. Έχουμε:

$$\frac{64\mu+2}{63} = \frac{63\mu+\mu+2}{63} = \mu + \frac{\mu+2}{63} \Rightarrow \mu + 2 = 63\nu, \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu = 63\nu - 2.$$

Επομένως, έχουμε:

$$A = 64\mu + 3 = 64 \cdot 63\nu - 128 + 3 = 4032\nu - 125.$$

Επειδή $35000 < A < 40000$, έχουμε:

$$35000 < 4032\nu - 125 < 40000 \Leftrightarrow 35125 < 4032\nu < 40125$$

$$\Leftrightarrow \frac{35125}{4032} < \nu < \frac{40125}{4032} \Leftrightarrow 8,71 < \nu < 9,95 \Leftrightarrow \nu = 9,$$

αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, ο πληθυσμός της πόλης είναι

$$A = 4032 \cdot 9 - 125 = 36163.$$

2ος τρόπος

Αφού $35000 = 7 \cdot 5000$, ο πρώτος ακέραιος, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 7 είναι ο $35000 = 7 \cdot 5000 + 1 = 35001$.

Έτσι, έχουμε τους αριθμούς

$$35001, 35008, 35015, 35022, 35029, \dots$$

Αφού το άθροισμα των ψηφίων του 35001 είναι 9, ο 35001 είναι πολλαπλάσιο του. Πράγματι, $35001 = 9 \cdot 3889$, οπότε ο πρώτος ακέραιος ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 9 είναι ο $35002 (= 9 \cdot 3889 + 1)$. Έτσι, έχουμε τους αριθμούς

$$35002, 35011, 35020, 35029, 35038, \dots$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος κοινός αριθμός από τις παραπάνω λίστες είναι ο 35029, και ότι κάθε επόμενος προκύπτει με πρόσθεση του $EKP(7, 9) = 63$, οπότε έχουμε τους αριθμούς της μορφής

$$35029 + 63k,$$

με k μη αρνητικό ακέραιο.

Αφού $35000 = 546 \cdot 64 + 56$, ο πρώτος ακέραιος, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 3 όταν διαιρείται με το 64 είναι ο $547 \cdot 64 + 3 = 35011$. Κάθε επόμενος τέτοιος αριθμός προκύπτει με πρόσθεση του 64, οπότε έχουμε τους αριθμούς

$$35011 + 64\lambda,$$

με λ μη αρνητικό ακέραιο.

Θέλουμε να καλύψουμε τη διαφορά $35029 - 35011 = 18$ προσθέτοντας τη διαφορά $64 - 63 = 1$, κατάλληλο αριθμό φορές, δηλαδή 18.

Πιο αναλυτικά, θέλουμε

$$35029 + 63k = 35011 + 64\lambda,$$

δηλαδή

$$64\lambda - 63k = 18 \quad (1)$$

για κατάλληλους ακέραιους.

Αφού $64 - 63 = 1$, μια προφανής λύση είναι η $k = \lambda = 18$, και άρα

$$A = 35011 + 64 \cdot 18 = 36163.$$