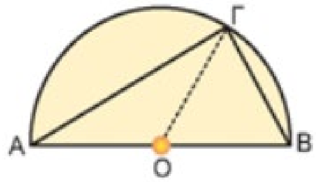
# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**1.**Σε ημικύκλιο διαμέτρου $6cm$ δίνεται σημείο του $\Gamma$, έτσι ώστε $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} = 2\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.




Δίνονται $\eta\mu 30^o = \frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**<u>Λύση</u>**

$\widehat{\Gamma} = 90^o$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma B}}$ είναι ημικύκλιο, άρα $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma B}} = 180^o$ (1) . Επίσης $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma B}} = \overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} + \overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}$ (2) και μας δίνεται ότι $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} = 2\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ (3).

Αντικαθιστώ τις σχέσεις (1), (3) στη σχέση (2), οπότε η (2) γίνεται:

$$\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma B}} = \overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} + \overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}$$
$$180^o = 2\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}} + \overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}$$
$$180^o = 3\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}$$
$$\frac{3\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}}{3} = \frac{180^o}{3}$$
$$\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}} = 60^o$$

Επειδή $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} = 2\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = 2 \cdot 60^o = 120^o$

$\widehat{\mathrm{B}} = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^o$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$.

$\widehat{\mathrm{A}} = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}$.

Εναλλακτικά η $\widehat{\mathrm{A}}$ μπορεί να υπολογιστεί από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$:

$$\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 180^o$$
$$\widehat{\mathrm{A}} + 60^o + 90^o = 180^o$$
$$\widehat{\mathrm{A}} = 180^o - 60^o - 90^o$$
$$\widehat{\mathrm{A}} = 180^o - 150^o$$
$$\widehat{\mathrm{A}} = 30^o$$

Δίνεται ότι $\mathrm{AB} = 6cm$. Όμως $\mathrm{AB}$ υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ $\left(\widehat{\Gamma} = 90^o\right)$. Άρα θέλουμε να υπολογίσουμε τις πλευρές $\mathrm{A\Gamma}, \mathrm{B\Gamma}$.

Ας ξεκινήσουμε με την $\mathrm{A\Gamma}$. Η $\mathrm{A\Gamma}$ είναι προσκείμενη κάθετη πλευρά στη γωνία $\widehat{\mathrm{A}}=30^{o}$, της οποίας το ημίτονο και το συνημίτονο μας δίνονται.

Ψάχνουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ , έχουμε την υποτείνουσα $\mathrm{AB}=6cm$ άρα θα χρησιμοποιήσουμε το συνημίτονο. Θυμίζουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\Pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\mathrm{K}\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\Pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} \text{ και } \omega \text{ μία οξεία γωνία}$$

Τελικά $\sigma\upsilon\nu 30^{o}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}}$ και αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή, τις σχέσεις $\sigma\upsilon\nu 30^{o}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\mathrm{AB}=6cm$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2}&=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{6}\\ 2\mathrm{A\Gamma}&=6\sqrt{3}\\ \frac{2\mathrm{A\Gamma}}{2}&=\frac{6\sqrt{3}}{2}\\ \mathrm{A\Gamma}&=3\sqrt{3}cm\end{aligned}$$

Η πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ είναι απέναντι κάθετη στη γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$. Ψάχνουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ , έχουμε την υποτείνουσα $\mathrm{AB}=6cm$ άρα θα χρησιμοποιήσουμε το ημίτονο. Θυμίζουμε ότι:

$$\eta\mu\omega=\frac{\mathrm{A}\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\mathrm{K}\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\Pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} \text{ και } \omega \text{ μία οξεία γωνία}$$

$\eta\mu 30^{o}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}}$ και αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή, τις σχέσεις $\eta\mu 30^{o}=\frac{1}{2}$ και $\mathrm{AB}=6cm$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{6}\\ 2\mathrm{B\Gamma}&=6\\ \frac{2\mathrm{B\Gamma}}{2}&=\frac{6}{2}\\ \mathrm{B\Gamma}&=3cm\end{aligned}$$

Εναλλακτικά η πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ μπορεί να υπολογιστεί και με Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$:

$$\mathrm{B\Gamma}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{A\Gamma}^2=6^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2=36-3^2\sqrt{3}^2=36-9\cdot\sqrt{3}^2=36-9\cdot 3=36-27=9$$

$$\mathrm{B\Gamma}=\sqrt{9}$$

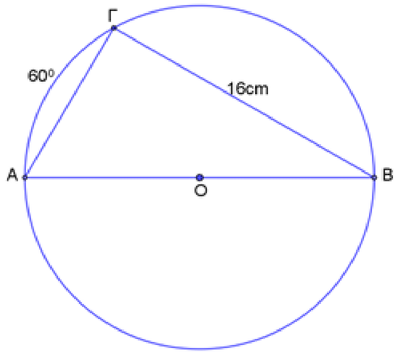
$$\mathrm{B\Gamma}=3cm$$

**2.** Στο διπλανό σχήμα είναι η $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}=60^o$, η χορδή $\mathrm{B\Gamma}=16cm$ και η διάμετρος $\mathrm{AB}=20cm$

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

β) Να υπολογίσετε την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.




## <u>Λύση</u>

α) Το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο γιατί $\hat{\Gamma}=90^o$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

$\hat{\mathrm{B}}=\dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}}{2}=\dfrac{60^o}{2}=30^o$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$. Το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma B}}$ είναι ημικύκλιο, άρα $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma B}}=180^o$ (1) . Επίσης $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma B}}=\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}+\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}$ (2) και $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}=60^o$ (3). Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (1) και (3), στη (2) και έχουμε:

$$\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma B}}=\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}+\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}$$
$$180^o=60^o+\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}$$
$$-\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}=-180^o+60^o$$
$$-\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}=-120^o$$
$$\frac{-\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}}{-1}=\frac{-120^o}{-1}$$
$$\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}}=120^o$$

Επίσης η $\hat{\mathrm{A}}$ μπορεί να υπολογιστεί και από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$:

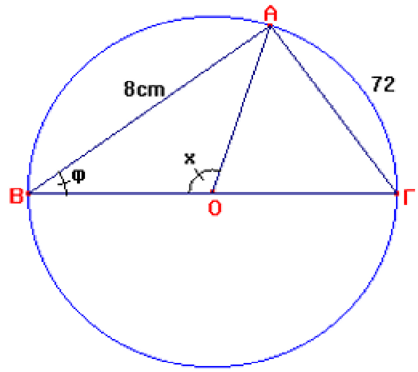
$$\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180^o$$
$$\hat{\mathrm{A}}+30^o+90^o=180^o$$
$$\hat{\mathrm{A}}=180^o-30^o-90^o$$
$$\hat{\mathrm{A}}=180^o-120^o$$
$$\hat{\mathrm{A}}=60^o$$

β) Η πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ μπορεί να υπολογιστεί με Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$:

$$\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{B\Gamma}^2=20^2-16^2=400-256=144$$
$$\mathrm{A\Gamma}=\sqrt{144}$$
$$\mathrm{A\Gamma}=12cm$$

γ) $\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)=\dfrac{\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\Pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\cdot\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\Pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{2}=\dfrac{\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Gamma}}{2}=\dfrac{12\cdot 16}{2}=96cm^2$

**3.** Στο διπλανό σχήμα είναι $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}=72^o$, η χορδή $\mathrm{AB}=8cm$ και η διάμετρος $\mathrm{B\Gamma}=10cm$. Να υπολογίσετε:




α) Τις γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{x}$ του σχήματος.

β) Τη χορδή $\mathrm{A\Gamma}$.

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

**<u>Λύση</u>**

α) $\hat{\varphi}=\hat{\mathrm{B}}=\dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}}{2}=\dfrac{72^o}{2}=36^o$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$.

Το $\overset{\frown}{\mathrm{BA\Gamma}}$ είναι ημικύκλιο, άρα $\overset{\frown}{\mathrm{BA\Gamma}}=180^o$ (1) . Επίσης $\overset{\frown}{\mathrm{BA\Gamma}}=\overset{\frown}{\mathrm{BA}}+\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ (1) και μας δίνεται ότι $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}=72^o$ (2) .

Αντικαθιστώ τη σχέση (2) στη σχέση (1), οπότε η (1) γίνεται:

$$\overset{\frown}{\mathrm{BA\Gamma}}=\overset{\frown}{\mathrm{BA}}+\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$$
$$180^o=\overset{\frown}{\mathrm{BA}}+72^o$$
$$180^o-72^o=\overset{\frown}{\mathrm{BA}}$$
$$\overset{\frown}{\mathrm{BA}}=180^o-72^o$$
$$\overset{\frown}{\mathrm{BA}}=108^o$$

$\hat{x}=\overset{\frown}{\mathrm{BA}}=108^o$ ως επίκεντρη γωνία που βαίνει στο $\overset{\frown}{\mathrm{BA}}$.

β) $\hat{\mathrm{A}}=90^o$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα $\mathrm{AB\Gamma}$ ορθογώνιο τρίγωνο οπότε εφαρμόζουμε Π.Θ. στο τρίγωνο αυτό:

$$\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{B\Gamma}^2-\mathrm{AB}^2$$
$$\mathrm{A\Gamma}^2=10^2-8^2$$
$$\mathrm{A\Gamma}^2=100-64$$
$$\mathrm{A\Gamma}^2=36$$
$$\mathrm{A\Gamma}=\sqrt{36}$$
$$\mathrm{A\Gamma}=6cm$$

γ) $(\mathrm{AB\Gamma}) = \dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}{2} = \dfrac{8\cdot 6}{2} = \dfrac{48}{2} = 24cm^2$

**4.** Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
26 &= x+1+x+2+2(x+1)+2x-3 \\
26 &= 2x+\cancel{3}+2x+2+2x-\cancel{3} \\
26 &= 6x+2 \\
-6x &= -26+2 \\
-6x &= -24 \\
\frac{-6x}{-6} &= \frac{-24}{-6} \\
x &= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3(2y+4)-14 &= 2y-2(1-2y) \\
6y+12-14 &= 2y-2+4y \\
6y-2y-4y &= -2-12+14 \\
0y &= -14+14 \\
0y &= 0 \\
&\textit{ταυτότητα}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x+7-3(5-x) &= 2x-3-2(3-x)-4 \\
x+7-15+3x &= 2x-3-6+2x-4 \\
x+3x-2x-2x &= -3-6-4-7+15 \\
0x &= -20+15 \\
0x &= -5 \\
&\textit{αδύνατη}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x+4}{3}-\frac{2}{3} &= 7+\frac{5-x}{3} \\
\cancel{3}\cdot\frac{x+4}{\cancel{3}}-\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}} &= 3\cdot 7+\cancel{3}\cdot\frac{5-x}{\cancel{3}} \\
x+4-2 &= 21+5-x \\
x+x &= 21+5-4+2 \\
2x &= 26-4+2 \\
2x &= 24 \\
\frac{2x}{2} &= \frac{24}{2} \\
x &= 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1-\frac{2x-1}{5} &= 3-\frac{6-4x}{5} \\
5\cdot 1-\cancel{5}\cdot\frac{2x-1}{\cancel{5}} &= 5\cdot 3-\cancel{5}\,\frac{6-4x}{\cancel{5}} \\
5-(2x-1) &= 15-(6-4x) \\
5-2x+1 &= 15-6+4x \\
-2x-4x &= 15-6-5-1 \\
-6x &= 3 \\
\frac{-6x}{-6} &= \frac{3}{-6} \\
x &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\frac{3(x+1)}{5}=\frac{2x+3}{4}$$
$$4\cdot 3(x+1)=5\cdot(2x+3)$$
$$12(x+1)=10x+15$$
$$12x+12=10x+15$$
$$12x-10x=15-12$$
$$2x=3$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{3}{2}$$
$$x=\frac{3}{2}$$

$$\frac{2(3x+4)}{7}=\frac{5+x}{3}$$
$$3\cdot 2(3x+4)=7\cdot(5+x)$$
$$6(3x+4)=7\cdot(5+x)$$
$$18x+24=35+7x$$
$$18x-7x=35-24$$
$$11x=11$$
$$\frac{11x}{11}=\frac{11}{11}$$
$$x=1$$

**5.** Η ευθεία $y=\alpha x+\beta$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x$ και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(2,6)$. Να βρείτε:

α) Τους αριθμούς $\alpha,\beta$.

β)Τα σημεία τομής της παραπάνω ευθείας με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η παραπάνω ευθεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

δ) Αν $\mathrm{B}$ και $\Gamma$ τα σημεία τομής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα να υπολογίσετε την απόσταση $\mathrm{B}\Gamma$.

**<u>Λύση</u>**

α) Επειδή η ευθεία $y=\alpha x+\beta$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x$, θα ισχύει $\alpha=-3$, άρα η εξίσωση $y=\alpha x+\beta$ γίνεται $y=-3x+\beta$.

Επιπλέον η $y=-3x+\beta$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(2,6)$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Για $x=2$ και $y=6$, η εξίσωση $y=-3x+\beta$ γίνεται:

$$y=-3x+\beta$$
$$6=-3\cdot 2+\beta$$
$$6=-6+\beta$$
$$-\beta=-6-6$$
$$-\beta=-12$$
$$\frac{-\beta}{-1}=\frac{-12}{-1}$$
$$\beta=12$$

β) Η ευθεία μας έχει εξίσωση: $y=-3x+12$

- Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $x΄x$ θέτουμε $y=0$ στην εξίσωση $y=-3x+12$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} y&=-3x+12\\ 0&=-3x+12\\ 3x&=12\\ \frac{3x}{3}&=\frac{12}{3}\\ x&=4 \end{aligned}$$

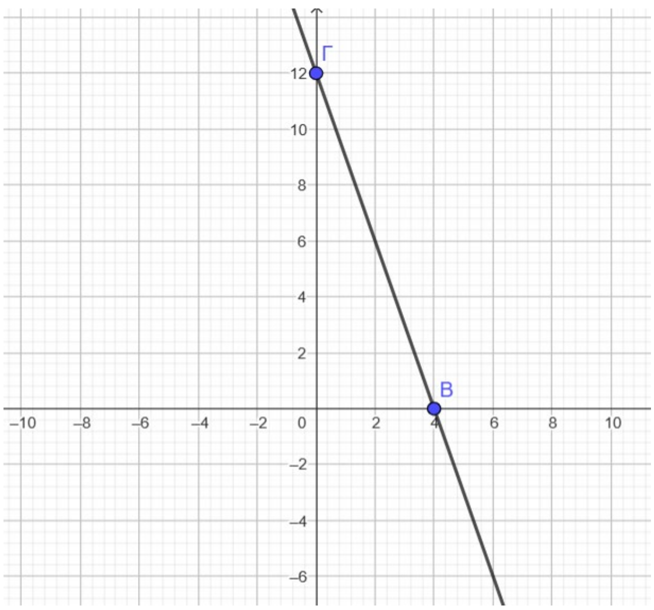
Άρα η ευθεία τέμνει τον άξονα $x΄x$ στο σημείο $\mathrm{B}(4,0)$.

- Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $y΄y$ θέτουμε $x=0$ στην εξίσωση $y=-3x+12$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} y&=-3\cdot 0+12\\ y&=0+12\\ y&=12 \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία τέμνει τον άξονα $y΄y$ στο σημείο $\Gamma(0,12)$.

γ) Η ευθεία $y=-3x+12$ διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{B}(4,0)$ και $\Gamma(0,12)$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα:




$$(\mathrm{O B \Gamma})=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{O\Gamma}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 12=24cm^2$$

δ) Π.Θ. στο τρίγωνο $\mathrm{OB\Gamma}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{B\Gamma}^2&=\mathrm{OB}^2+\mathrm{O\Gamma}^2=4^2+12^2=16+144=160\\ \mathrm{B\Gamma}&=\sqrt{160}\\ \mathrm{B\Gamma}&=\sqrt{16}\cdot\sqrt{10}=4\sqrt{10}cm \end{aligned}$$

**6.** Μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $\mathrm{A}(2,4)$.

α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας $(\varepsilon)$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon)$ και να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα.

| x | -3 | 5 | | |
|---|---|---|---|---|
| y | | | -8 | 6 |

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $(\zeta)$ που είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\varepsilon)$ του ερωτήματος β) και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(0,3)$ του άξονα $y'y$.

**Λύση**

α) Επειδή η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y=\alpha x$. Επιπλέον η $y=\alpha x$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(2,4)$, άρα οι συντεταγμένες του, θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Για $x=2$ και $y=4$, η εξίσωση $y=\alpha x$ γίνεται:

$$\begin{aligned} y&=\alpha x\\ 4&=\alpha\cdot 2\\ 4&=2\alpha\\ -2\alpha&=-4\\ \frac{-2\alpha}{-2}&=\frac{-4}{-2}\\ \alpha&=2 \end{aligned}$$

β) Από το α) ερώτημα προέκυψε ότι $\alpha=2$, άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $y=2x$.

Για $x=-3$ η εξίσωση $y=2x$ γίνεται : $y=2\cdot(-3)=-6$

Για $x=5$ η εξίσωση $y=2x$ γίνεται : $y=2\cdot 5=10$

Για $y=-8$ η εξίσωση $y=2x$ γίνεται :

$$\begin{aligned} -8&=2\cdot x\\ -2x&=8\\ \frac{-2x}{-2}&=\frac{8}{-2}\\ x&=-4 \end{aligned}$$

Για $y=6$ η εξίσωση $y=2x$ γίνεται :

$$6=2\cdot x$$
$$-2x=-6$$
$$\frac{-2x}{-2}=\frac{-6}{-2}$$
$$x=3$$

| x | -3 | 5 | -4 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| y | -6 | 10 | -8 | 6 |

γ) Αφού η ευθεία $(\zeta)$ είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=2x$ θα είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$, με $\alpha=2$. Δλδ. $y=2x+\beta$

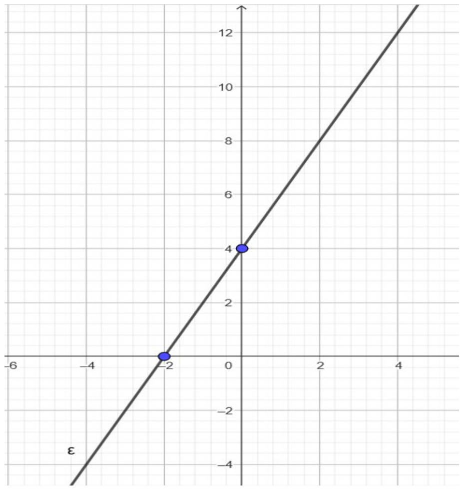
Επίσης η ευθεία $(\zeta)$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(0,3)$ του άξονα $y'y$, άρα οι συντεταγμένες του, θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Για $x=0$ και $y=3$, η εξίσωση $y=2x+\beta$ γίνεται:

$$y=2x+\beta$$
$$3=2\cdot 0+\beta$$
$$3=0+\beta$$
$$-\beta=-3$$
$$\frac{-\beta}{-1}=\frac{-3}{-1}$$
$$\beta=3$$

Άρα η ευθεία $(\zeta)$ έχει εξίσωση: $y=2x+3$

**7.** Η ευθεία $(\varepsilon)$ του διπλανού σχήματος έχει κλίση $\alpha = 2$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,4)$.




α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon)$.

β) Να εξεταστεί αν τα σημεία $\mathrm{A}(3,5)$ και $\mathrm{B}(7,18)$ ανήκουν στην ευθεία $(\varepsilon)$.

γ) Να γραφτεί η εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon')$ που είναι παράλληλη στην $(\varepsilon)$ και περνάει από την αρχή των αξόνων.

**<u>Λύση</u>**

α) Η ευθεία $(\varepsilon)$ του σχήματος έχει κλίση $\alpha = 2$, και δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα είναι της μορφής $y = 2x + \beta$. Επίσης τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,4)$, άρα οι συντεταγμένες του, θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon)$:

Για $x = 0$ και $y = 4$, η εξίσωση $y = 2x + \beta$ γίνεται:

$$\begin{aligned} y &= 2x + \beta \\ 4 &= 2 \cdot 0 + \beta \\ 4 &= 0 + \beta \\ -\beta &= -4 \\ \frac{-\beta}{-1} &= \frac{-4}{-1} \\ \beta &= 4 \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon)$, έχει εξίσωση: $y = 2x + 4$.

β) Για να ανήκουν τα σημεία $\mathrm{A}(3,5)$ και $\mathrm{B}(7,18)$ στην ευθεία $(\varepsilon)$ ,θα πρέπει οι συντεταγμένες τους, να επαληθεύουν την εξίσωση της.

Ξεκινάμε με το σημείο $\mathrm{A}(3,5)$.Για $x = 3$ και $y = 5$, η εξίσωση $y = 2x + 4$ γίνεται:

$$\begin{aligned} &5 = 2 \cdot 3 + 4 \\ &5 = 6 + 4 \\ &5 = 10 \\ &\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau o \end{aligned}$$

Άρα το σημείο $\mathrm{A}(3,5)$ δεν ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon)$.

Όμοια εργαζόμαστε και για το σημείο $\mathrm{B}(7,18)$.Για $x = 7$ και $y = 18$, η εξίσωση $y = 2x + 4$ γίνεται:

$$18 = 2 \cdot 7 + 4$$
$$18 = 14 + 4$$
$$18 = 18$$
$$\pi o \upsilon \mathrm{I} \sigma \chi \acute{\upsilon} \varepsilon \iota$$

Άρα το σημείο $\mathrm{B}(7,18)$ ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon)$.

γ) Η εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon')$ που είναι παράλληλη στην $(\varepsilon)$ και περνάει από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y = \alpha x$, με $\alpha = 2$. Άρα η εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon')$ είναι η $y = 2x$.

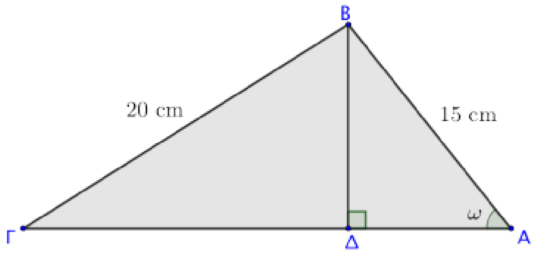
**8.**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΑ = 15 cm, ΒΓ = 20 cm και $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$. Να βρείτε:

(α΄) το μήκος του ύψους ΒΔ,

(β΄) την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ

(γ΄) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.




**<u>Λύση</u>**

α) Στο τρίγωνο $\mathrm{AB\Delta}$: $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ και θέλουμε να βρούμε το ύψος $\mathrm{B\Delta}$.

$$\eta\mu\omega = \frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\mathrm{K}\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\Pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\upsilon\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{AB}} \quad (1)$$

Δίνεται ότι $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ (2) και $\mathrm{AB} = 15cm$ (3). Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (2) και (3) στη σχέση (1) και έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{AB}}$$
$$\frac{4}{5} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{15}$$
$$5\mathrm{B\Delta} = 4 \cdot 15$$
$$\frac{5\mathrm{B\Delta}}{5} = \frac{60}{5}$$
$$\mathrm{B\Delta} = 12cm$$

β) $\Pi_{\mathrm{AB\Gamma}} = \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Gamma A}$. Άρα για να υπολογίσουμε την περίμετρο πρέπει να βρούμε την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$.

Στο τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma\Delta}$ με Π.Θ. θα υπολογίσουμε την πλευρά $\mathrm{\Gamma\Delta}$:

$\Gamma\Delta^2 = \mathrm{B}\Gamma^2 - \mathrm{B}\Delta^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$

$\Gamma\Delta = \sqrt{256} = 16cm$

Αντίστοιχα στο τρίγωνο $\mathrm{AB}\Delta$ με Π.Θ. θα υπολογίσουμε την πλευρά $\Delta\mathrm{A}$ :

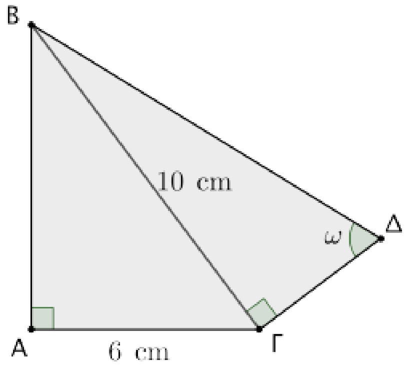
$\mathrm{A}\Delta^2 = \mathrm{BA}^2 - \mathrm{B}\Delta^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$

$\mathrm{A}\Delta = \sqrt{81} = 9cm$

$\Gamma\mathrm{A} = \Gamma\Delta + \Delta\mathrm{A} = 16 + 9 = 25cm$ οπότε $\Pi_{\mathrm{AB}\Gamma} = \mathrm{AB} + \mathrm{B}\Gamma + \Gamma\mathrm{A} = 15 + 20 + 25 = 60cm$

γ) $\left(\mathrm{AB}\Gamma\right) = \frac{1}{2}\mathrm{A}\Gamma \cdot \mathrm{B}\Delta = \frac{1}{2}25 \cdot 12 = 150cm^2$

**9.** Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AB}\Gamma$ και $\mathrm{B}\Delta\Gamma$, με $\mathrm{A}\Gamma = 6cm$, $\mathrm{B}\Gamma = 10cm$ και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{5}{2}$.




α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών $\mathrm{AB}$ και $\Gamma\Delta$.

β) Να υπολογίσετε $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$.

γ) Το εμβαδόν του τετράπλευρου $\mathrm{AB}\Gamma\Delta$.

**<u>Λύση</u>**

α) Π.Θ. στο τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$ :

$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{B}\Gamma^2 - \mathrm{A}\Gamma^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$

$\mathrm{AB} = \sqrt{64} = 8cm$

Στο τρίγωνο $\mathrm{B}\Gamma\Delta$ : $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\Gamma\Delta}$ (1). Δίνονται $\mathrm{B}\Gamma = 10cm$ (2) και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{5}{2}$ (3). Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2), (3) στη σχέση (1), έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\Gamma\Delta}$$
$$\frac{5}{2} = \frac{10}{\Gamma\Delta}$$
$$5\Gamma\Delta = 20$$
$$\frac{5\Gamma\Delta}{5} = \frac{20}{5}$$
$$\Gamma\Delta = 4cm$$

β) Για να βρούμε $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$ πρέπει να υπολογίσουμε την υποτείνουσα του τριγώνου $\mathrm{B}\Gamma\Delta$. Εφαρμόζουμε Π.Θ. στο τρίγωνο $\mathrm{B}\Gamma\Delta$ :

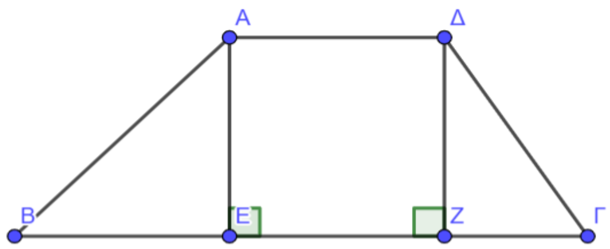
$$B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = 10^2 + 4^2 = 100 + 16 = 116$$
$$B\Delta = \sqrt{116}$$

Άρα $\eta\mu\omega = \frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{10}{\sqrt{116}}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\Gamma\Delta}{B\Delta} = \frac{4}{\sqrt{116}}$

γ)

$$(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (B\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}A\Gamma \cdot AB + \frac{1}{2}B\Gamma \cdot \Gamma\Delta = \frac{1}{2}6 \cdot 8 + \frac{1}{2}10 \cdot 4 = \frac{1}{2}48 + \frac{1}{2}40 = 24 + 20 = 44cm^2$$

**10**. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ για το οποίο ισχύουν: $AB = 10cm,\ A\Delta = 12cm$, $\eta\mu B = \frac{3}{5}$ και $\varepsilon\varphi\Gamma = 1$.




α) Να αποδείξετε ότι $AE = 6cm$ και $BE = 8cm$.

β) Να αποδείξετε ότι $\Gamma Z = 6cm$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

**<u>Λύση</u>**

α) Στο τρίγωνο $ABE$:

$\eta\mu B = \frac{AE}{AB}$ (1). Δίνονται $AB = 10cm$ (2) και $\eta\mu B = \frac{3}{5}$ (3). Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2), (3) στη σχέση (1), έχουμε:

$$\eta\mu B = \frac{AE}{AB}$$
$$\frac{3}{5} = \frac{AE}{10}$$
$$5AE = 30$$
$$\frac{5AE}{5} = \frac{30}{5}$$
$$AE = 6cm$$

Π.Θ. στο τρίγωνο $ABE$:

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$
$$BE = \sqrt{64} = 8cm$$

β) Το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ορθογώνιο άρα οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δλδ. $EZ = A\Delta = 12cm$ και $\Delta Z = AE = 6cm$.

Στο τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$ : $\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\Delta Z}{Z\Gamma}$ (1). Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi\Gamma = 1$ (2) και βρήκαμε ότι $\Delta Z = 6cm$ (3).

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2), (3) στη σχέση (1), έχουμε:

γ)

$$\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\Delta Z}{Z\Gamma}$$

$$1 = \frac{6}{Z\Gamma}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{6}{Z\Gamma}$$

$$Z\Gamma = 6cm$$

$$B\Gamma = BE + EZ + \Gamma Z = 8 + 12 + 6 = 26$$

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{(B\Gamma + A\Delta)\cdot AE}{2} = \frac{(26+12)\cdot 10}{2} = \frac{38\cdot 10}{2} = \frac{380}{2} = 190cm^2$$