

Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

4

— Η Ευγενία έχει 8 ευρώ περισσότερα από τη Μάρω. Οι δύο κοπέλες μαζί, έχουν 60 ευρώ. Πόσα χρήματα έχει καθεμία;

Δεδομένα

- Τα χρήματα της Ευγενίας είναι κατά 8 ευρώ περισσότερα από της Μάρως.
- Η Ευγενία και η Μάρω έχουν μαζί 60 ευρώ.

Ζητούμενα

- Πόσα χρήματα έχει η Μάρω;
- Πόσα χρήματα έχει η Ευγενία;

— Έστω x τα χρήματα της Μάρως.
Τότε τα χρήματα της Ευγενίας είναι:

$$x + 8$$

Έχουμε λοιπόν την εξίσωση:

$$x + (x + 8) = 60$$

την οποία λύνουμε και βρίσκουμε:

$$x = 26$$

Άρα η Μάρω έχει 26 ευρώ και η Ευγενία $26 + 8 = 34$ ευρώ.

Πράγματι:

$$26 + 34 = 60 \quad \text{και} \quad 34 - 26 = 8$$

Η διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος

Σε πολλές περιπτώσεις προβλήματα της καθημερινής ζωής που η λύση τους είναι επίπονη και πολύπλοκη, εκφράζονται με τη βοήθεια μεταβλητών και εξισώσεων και έτσι λύνονται πιο εύκολα.

Για να γίνει αυτό ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- Διαβάζουμε με πολύ προσοχή και όχι μόνο μια φορά το πρόβλημα, για να καταλάβουμε ποια είναι τα δεδομένα και ποια τα ζητούμενα του προβλήματος.
- Συμβολίζουμε με μια μεταβλητή (συνήθως x) ένα από τα ζητούμενα μεγέθη.
- Με τη βοήθεια της μεταβλητής αυτής συμβολίζουμε και τα άλλα μεγέθη του προβλήματος.
- Σχηματίζουμε εξίσωση γράφοντας την ισότητα μεταξύ των μεγεθών που αναφέρονται στο πρόβλημα.
- Λύνουμε την εξίσωση.
- Ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε ανταποκρίνεται στο πρόβλημα.

Να προσέξουμε:

- ★ Κάποια από τα προβλήματα που θα συναντήσουμε στην παράγραφο αυτή λύνονται και με πρακτική αριθμητική. Εμείς όμως εδώ τα λύνουμε όλα με τη χρήση εξισώσεων για να εμπεδώσουμε πόσο χρήσιμο εργαλείο είναι οι εξισώσεις στην καθημερινή μας ζωή.
- ★ Η μεταβλητή την οποία επιλέγουμε για να συμβολίσουμε ένα από τα ζητούμενα μεγέθη του προβλήματος παίρνει τιμές από ένα συγκεκριμένο σύνολο. Αν η λύση της εξίσωσης δεν βρίσκεται στο συγκεκριμένο σύνολο, τότε παρότι το πρόβλημα «φαίνεται» ότι λύθηκε, τη λύση που βρήκαμε την απορρίπτουμε και λέμε ότι το πρόβλημα είναι αδύνατο (παράδειγμα 4.8).
Αδύνατο επίσης είναι ένα πρόβλημα το οποίο εκφράζεται με μια εξίσωση που είναι αδύνατη.
Τέλος ένα πρόβλημα μπορεί να έχει δύο ή περισσότερες λύσεις:
 - Αν χρειάζεται να διακρίνουμε περιπτώσεις (παράδειγμα 4.9).
 - Αν η εξίσωση που το περιγράφει είναι ταυτότητα (παράδειγμα 4.10).

Παραδείγματα – Εφαρμογές:

4.1 Να βρεθεί ένας αριθμός που το διπλάσιό του αυξημένο κατά 10, είναι ίσο με το πενταπλάσιό του ελαττωμένο κατά 11.

Απάντηση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε το διπλάσιό του αυξημένο κατά 10 είναι $2x + 10$, ενώ το πενταπλάσιό του ελαττωμένο κατά 11 είναι $5x - 11$. Άρα η εξίσωση του προβλήματος είναι:

$$2x + 10 = 5x - 11$$

$$2x - 5x = -11 - 10$$

$$-3x = -21$$

$$x = 7$$

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι το 7.

4.2 Τρεις διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί έχουν άθροισμα 66. Να βρεθούν οι αριθμοί.

Απάντηση

Αν x είναι ο μικρότερος, τότε ο επόμενος θα είναι $x + 2$ και ο τρίτος $(x + 2) + 2 = x + 4$.
Άρα η εξίσωση του προβλήματος είναι:

$$x + x + 2 + x + 4 = 66$$

$$3x + 2 + 4 = 66$$

$$3x + 6 = 66$$

$$3x = 66 - 6$$

$$3x = 60$$

$$x = 20$$

Επομένως οι τρεις αριθμοί είναι οι 20, 22, 24.

4.3 Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο καθεμία από τις δύο ίσες γωνίες του είναι 30 μοίρες μεγαλύτερη από την τρίτη γωνία. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου.

Απάντηση

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° . Αν x μοίρες είναι καθεμία από τις ίσες γωνίες, τότε η τρίτη γωνία είναι $x - 30^\circ$ μοίρες. Η εξίσωση του προβλήματος είναι:

$$x + x + x - 30 = 180$$

$$3x - 30 = 180$$

$$3x = 180 + 30$$

$$3x = 210$$

$$x = 70$$

Επομένως καθεμία από τις ίσες γωνίες είναι 70° , ενώ η τρίτη είναι 40° .

4.4 Η μητέρα του Κώστα έχει τριπλάσια ηλικία από το γιο της. Ο Κώστας υπολογίζει ότι μετά από 12 χρόνια η μητέρα του θα έχει διπλάσια ηλικία απ' αυτόν. Πόσο χρονών είναι σήμερα ο Κώστας;

Απάντηση

Αν x χρονών είναι η σημερινή ηλικία του Κώστα, η ηλικία της μητέρας του είναι $3x$. Μετά από 12 χρόνια ο Κώστας θα είναι $x + 12$ χρονών και η μητέρα του $3x + 12$. Όμως τότε η ηλικία της μητέρας του θα είναι διπλάσια από τη δική του. Άρα η εξίσωση του προβλήματος είναι:

$$3x + 12 = 2(x + 12)$$

$$3x + 12 = 2x + 24$$

$$3x - 2x = 24 - 12$$

$$x = 12$$

Επομένως ο Κώστας είναι σήμερα 12 χρονών.

4.5 Για να πλακοστρωθούν δύο βεράντες συνολικής έκτασης 58 m^2 χρειάστηκαν 500 πλακάκια. Στην πρώτη βεράντα τοποθετήθηκαν 10 πλακάκια ανά m^2 και στη δεύτερη 8 πλακάκια ανά m^2 . Να βρεθεί το εμβαδόν της κάθε βεράντας.

Απάντηση

Αν $x \text{ m}^2$ είναι το εμβαδόν της πρώτης βεράντας, τότε της δεύτερης είναι $(58 - x) \text{ m}^2$.

Στην πρώτη βεράντα τοποθετήθηκαν 10 πλακάκια ανά m^2 , άρα για την πλακόστρωση όλης της βεράντας χρειάστηκαν $10x$ πλακάκια. Ανάλογα για τη δεύτερη βεράντα χρειάστηκαν $8(58 - x)$ πλακάκια.

Οπότε για την πλακόστρωση χρειάστηκαν συνολικά $10x + 8(58 - x)$ πλακάκια.

Άρα η εξίσωση του προβλήματος είναι:

$$10x + 8(58 - x) = 500$$

$$10x + 464 - 8x = 500$$

$$10x - 8x = 500 - 464$$

$$2x = 36$$

$$x = 18$$

Επομένως η πρώτη βεράντα έχει εμβαδόν 18 m^2 και η δεύτερη $58 - 18 = 40 \text{ m}^2$.

4.6 Σε ένα αγρόκτημα υπάρχουν κότες και κουνέλια. Αν τα ζώα έχουν όλα μαζί 40 κεφάλια και 114 πόδια, να βρεθούν πόσες είναι οι κότες και πόσα τα κουνέλια.

Απάντηση

Αν x είναι ο αριθμός των κουνελιών, τότε οι κότες είναι $40 - x$. Τα x κουνέλια έχουν $4x$ πόδια και οι $40 - x$ κότες $2(40 - x)$ πόδια. Άρα η εξίσωση του προβλήματος είναι:

$$2(40 - x) + 4x = 114$$

$$80 - 2x + 4x = 114$$

$$-2x + 4x = 114 - 80$$

$$2x = 34$$

$$x = 17$$

Επομένως τα κουνέλια είναι 17 και οι κότες 23.

4.7 Ο Γιάννης ψάχνοντας ένα παλιό μπαούλο της γιαγιάς του, βρήκε δίσκους γραμμοφώνου. Οι μισοί από αυτούς και μισός δίσκος έχουν παραδοσιακή μουσική. Οι μισοί από τους υπόλοιπους και μισός δίσκος έχουν ρεμπέτικα και οι υπόλοιποι τρεις έχουν ελαφρά λαϊκά. Πόσους δίσκους βρήκε ο Γιάννης;

Απάντηση

Έστω ότι ο Γιάννης βρήκε x δίσκους.

Οι δίσκοι με παραδοσιακή μουσική είναι $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$. Άρα μένουν:

$$x - \frac{x+1}{2} = \frac{2x - x - 1}{2} = \frac{x-1}{2} \text{ δίσκοι}$$

Οι δίσκοι με ρεμπέτικα τραγούδια είναι:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x-1+2}{4} = \frac{x+1}{4}$$

Άρα μένουν:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{2x-2-x-1}{4} = \frac{x-3}{4} \text{ δίσκοι}$$

Οι $\frac{x-3}{4}$ δίσκοι που μένουν, είναι οι δίσκοι με τα ελαφρά λαϊκά τραγούδια. Οπότε έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x-3}{4} = 3$$

$$x-3 = 12$$

$$x = 12 + 3$$

$$x = 15$$

Επομένως ο Γιάννης βρήκε 15 δίσκους.

4.8 Η Δέσποινα υποστηρίζει ότι δεν υπάρχει φυσικός αριθμός του οποίου το δεκαπλάσιο αυξημένο κατά 5 είναι ίσο με το πενταπλάσιό του ελαττωμένο κατά 5. Να εξεταστεί αν έχει δίκιο η Δέσποινα.

Απάντηση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε το δεκαπλάσιό του αυξημένο κατά 5 είναι $10x + 5$, ενώ το πενταπλάσιό του ελαττωμένο κατά 5 είναι $5x - 5$. Άρα η εξίσωση του προβλήματος είναι:

$$10x + 5 = 5x - 5$$

$$10x - 5x = -5 - 5$$

$$5x = -10$$

$$x = -2$$

Όμως επειδή ο x είναι φυσικός, η λύση απορρίπτεται. Άρα η Δέσποινα έχει δίκιο.

4.9 Δύο αριθμοί διαφέρουν κατά 10 και ο ένας είναι τριπλάσιος του άλλου. Ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί;

Απάντηση

Αν x είναι ο ένας αριθμός, τότε $x + 10$ θα είναι ο άλλος. Σχηματίζουμε δυο εξισώσεις:

$$x + 10 = 3x \quad \text{ή} \quad x = 3(x + 10)$$

Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει $x = 5$, οπότε $x + 10 = 15$, άρα ένα ζευγάρι αριθμών είναι οι 5 και 15.

Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει $x = -15$, οπότε $x + 10 = -5$. Άλλο ένα ζεύγος λύσεων λοιπόν είναι οι αριθμοί -15 και -5 .

Επομένως το πρόβλημα έχει δύο λύσεις.

4.10 Ο Θοδωρής έχει εντυπωσιάσει τον φίλο του Δημήτρη με το παρακάτω μαθηματικό παιχνίδι.

Λέει στον Δημήτρη:

- Σκέψου έναν αριθμό.
- Διπλασίασε τον αριθμό.
- Πρόσθεσε 15.
- Διπλασίασε το αποτέλεσμα.
- Αφαίρεσε 10.
- Διαίρεσε το αποτέλεσμα με 4.
- Αφαίρεσε τον αριθμό που σκέφτηκες.
- Βρήκες 5!

Μπορείτε να εξηγήσετε πώς ο Θοδωρής ξέρει το αποτέλεσμα;

Απάντηση

Αν x είναι ο αριθμός που σκέφτηκε ο Δημήτρης, τότε οι πράξεις που κάνει περιγράφονται με την εξίσωση:

$$\frac{(2x + 15) \cdot 2 - 10}{4} - x = 5$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{4x + 30 - 10}{4} - x = 5$$

$$\frac{4x + 20}{4} - x = 5$$

$$4x + 20 - 4x = 20$$

$$4x - 4x = 20 - 20$$

$$0x = 0$$

Η εξίσωση που καταλήξαμε είναι ταυτότητα, δηλαδή επαληθεύεται για οποιοδήποτε αριθμό.

4.11 Μια παρέα έχει παραγγείλει σουβλάκια. Αν καθένας πάρει από 3 σουβλάκια θα περισσέψουν 2, αλλά επειδή ένας από την παρέα νηστεύει, μοιράστηκαν οι υπόλοιποι από 4 σουβλάκια και δεν περίσσεψε κανένα. Να βρεθεί πόσα άτομα ήταν στην παρέα και πόσα σουβλάκια είχαν παραγγείλει.

Απάντηση

Έστω x ο αριθμός των ατόμων της παρέας. Η εξίσωση του προβλήματος είναι:

$$3x + 2 = 4(x - 1)$$

$$3x + 2 = 4x - 4$$

$$3x - 4x = -2 - 4$$

$$-x = -6$$

$$x = 6$$

Επομένως στην παρέα ήταν 6 άτομα και είχαν παραγγείλει $3 \cdot 6 + 2 = 20$ σουβλάκια.

Ερωτήσεις κατανόησης: