

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επίλυση εξισώσεων

Τα βήματα που ακολουθούμε για την επίλυση μιας εξίσωσης 1^{ου} βαθμού είναι τα εξής:

- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (αν υπάρχουν) πολλαπλασιάζοντας ΟΛΟΥΣ τους όρους με το ΕΚΠ των παρονομαστών.
- Κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων.
- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.
ΠΡΟΣΟΧΗ! : Όταν μεταφέρουμε όρους από το ένα μέλος στο άλλα ΑΛΛΑΖΟΥΝ τα πρόσημα.

- Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και τα δύο μέλη.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

$$\bullet 0x = 0$$

Η εξίσωση είναι ταυτότητα ή αόριστη, έχει δηλαδή άπειρες λύσεις.

$$\bullet 0x = \alpha, \quad \alpha \neq 0$$

Η εξίσωση είναι αδύνατη. Δεν έχει δηλαδή καμία λύση.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α , λέγεται ο θετικός αριθμός x που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό α .

Συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Δηλαδή ισχύει:

$$x = \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow x^2 = \alpha, \quad \alpha > 0, \quad x > 0$$

Ισχύει ότι:

$$\bullet \sqrt{0} = 0$$

$$\bullet \sqrt{\alpha} \geq 0 \text{ για κάθε } \alpha \geq 0$$

$$\bullet \text{Αν } \alpha \geq 0 \text{ τότε } (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΡΙΖ Α ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ

$$\bullet \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$$

$$\bullet \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \beta \neq 0$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!!

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}$$

ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Άρρητοι είναι οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, δηλαδή οι αριθμοί που ΔΕΝ μπορούν να γραφούν σαν

κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$, με κ, λ ακέραιους αριθμούς.

ΓΕΩΡΓΙΑ Δ. ΑΝΑΣΤΟΠΟΥΛΟΥ
-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ-

Βγβ

Σελίδα 133 από 210

❖ Όλες οι τετραγωνικές ρίζες αριθμών που δεν είναι τέλεια τετράγωνα είναι άρρητοι αριθμοί.

Πραγματικοί αριθμοί ($\mathbb{R}$) είναι το σύνολο των ρητών και άρρητων αριθμών

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

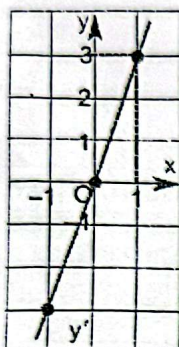
Συνάρτηση λέγεται μια σχέση μεταξύ δυο μεταβλητών x και y , που κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y .

Η συνάρτηση $y=ax$

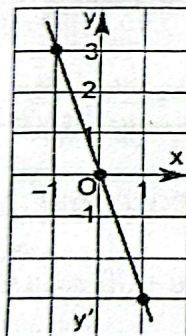
❖ Συνδέει τιμές ανάλογων ποσών

❖ Η γραφική της παράσταση είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Ο αριθμός a λέγεται κλίση της ευθείας.

• Αν $a > 0$ τότε η γραφική παράσταση βρίσκεται στο 1^ο και 3^ο τεταρτημόριο



• Αν $a < 0$ τότε η γραφική παράσταση βρίσκεται στο 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο



Η συνάρτηση $y=ax+\beta$

❖ Η γραφική της παράσταση είναι μία ευθεία παράλληλη στη $y=ax$ και διέρχεται από το σημείο $(0, \beta)$. Ο αριθμός a λέγεται κλίση της ευθείας.

• Αν $a > 0$ τότε η γραφική παράσταση βρίσκεται στο 1^ο και 3^ο τεταρτημόριο

• Αν $a < 0$ τότε η γραφική παράσταση βρίσκεται στο 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

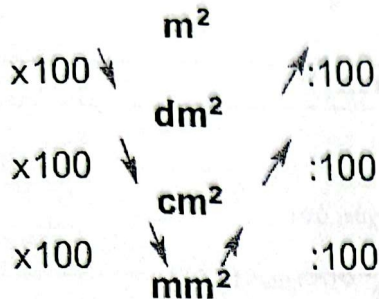
Η βασική μονάδα μέτρησης του εμβαδού είναι το τετραγωνικό μέτρο 1m^2

Υποδιαιρέσεις :

$$1\text{m}^2 = 100\text{dm}^2 = 10.000\text{cm}^2 = 1.000.000\text{mm}^2$$

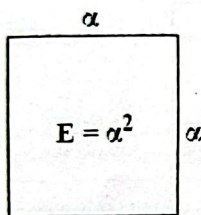
Πολλαπλάσια:

$$1\text{Km}^2 = 1.000.000\text{m}^2 \text{ στρέμμα} = 1.000\text{m}^2$$

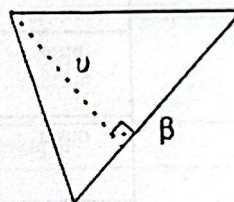


ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

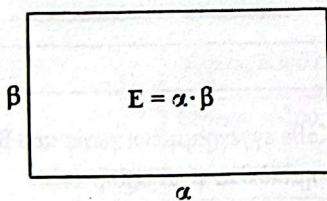
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ



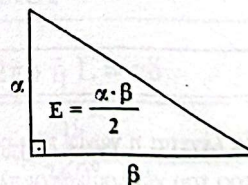
$$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$



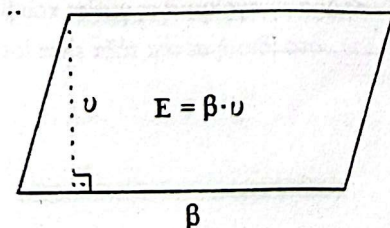
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ



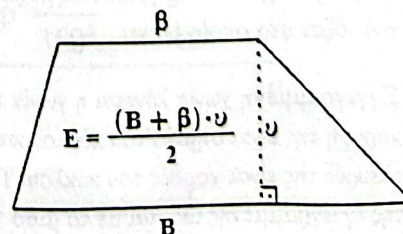
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ



ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ



ΤΡΑΠΕΖΙΟ



ΤΡΙΓΩΝΟ

ΓΕΩΡΓΙΑ Δ. ΑΝΑΣΤΟΠΟΥΛΟΥ
- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ -

Βγβ

Σελίδα 155 από 210

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά της } \omega}{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά της } \omega}$$

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά της } \omega}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά της } \omega}{\text{υποτείνουσα}}$$

Ισχύει ότι:

$$\diamond 0 < \eta\mu\omega < 1$$

$$\diamond 0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$$

$$\diamond \epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ 30°, 45°, 60°

	30°	45°	60°
$\eta\mu\omega$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\epsilon\phi\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ΚΥΚΛΟΣ

Επίκεντρο γωνία λέγεται η γωνία που η κορυφή της είναι το κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της ακτίνες του κύκλου.

Το μέτρο της επίκεντρης ισούται με το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει

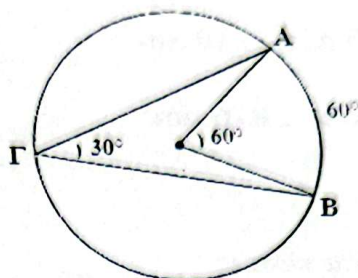
Εγγεγραμμένη γωνία λέγεται η γωνία που η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της είναι χορδές του κύκλου. Το μέτρο της εγγεγραμμένης ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει.

❖ Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

❖ Δυο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα είναι ίσες.

Σχέση επίκεντρης – εγγεγραμμένης

Το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνία ισούται με το μισό του μέτρου της επίκεντρης που βγαίνει στο ίδιο τόξο.



ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Κανονικό λέγεται ένα πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες.

Κεντρική γωνία ω ενός κανονικού n – γώνου

$$\omega = \frac{360^\circ}{n}$$

Σχέση γωνίας ϕ κανονικού n – γώνου και κεντρικής γωνίας ω

$$\omega + \phi = 180^\circ$$

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

Μήκος Κύκλου	$L = 2\pi r$ ή $L = \pi d$
Μήκος τόξου μ°	$\ell = 2\pi r \frac{\mu}{360^\circ}$
Εμβαδό κυκλικού δίσκου	$E = \pi r^2$
Εμβαδό κυκλικού τομέα μ°	$E = \pi r^2 \frac{\mu}{360^\circ}$

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΕΜΒΑΔΟΥ

ΓΕΩΡΓΙΑ Α. ΑΝΑΣΤΟΠΟΥΛΟΥ
- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ -

... οποιαδήποτε οξεία γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου
γ) Πώς ορίζεται η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

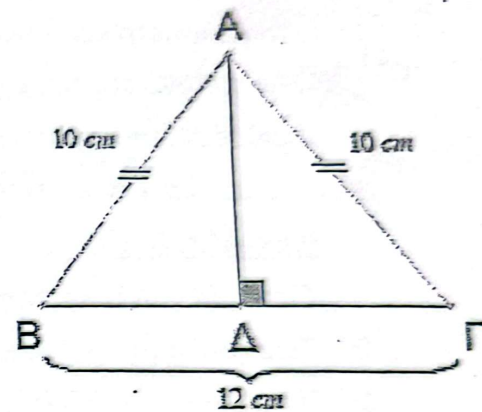
Να λύσετε την εξίσωση : $5(x - 2) - 2(3 - x) = 3x - 4$

ΘΕΜΑ 2^ο

Το ισοσκελές τρίγωνο του διπλανού σχήματος έχει τις ίσες πλευρές $AB = AG = 10 \text{ cm}$ και βάση $BG = 12 \text{ cm}$.

Να υπολογίσετε:

- α) το ύψος AD (που είναι και διάμεσος)
- β) το εμβαδόν του τριγώνου ABG .



2

γ) Να εξετάσετε αν η λύση της εξίσωσης (1) είναι:

Άσκηση 2^η: Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι

$AB = 3\text{cm}$, $AD = 10\text{cm}$, $\hat{A} = 30^\circ$.

Να υπολογίσετε:

α) το ευθύγραμμο τμήμα AH

β) το εμβαδόν του τραpezίου.

(Δίνεται $\sqrt{3} = 1,732$)

Άσκηση 3^η: Στο διπλανό σχήμα το $B\Gamma$ είναι
διάμετρος και $AB = 8\text{cm}$, $A\Gamma = 6\text{cm}$.

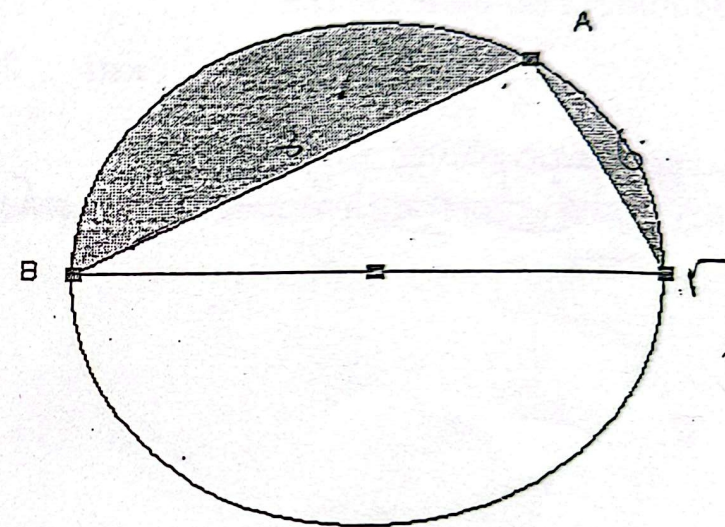
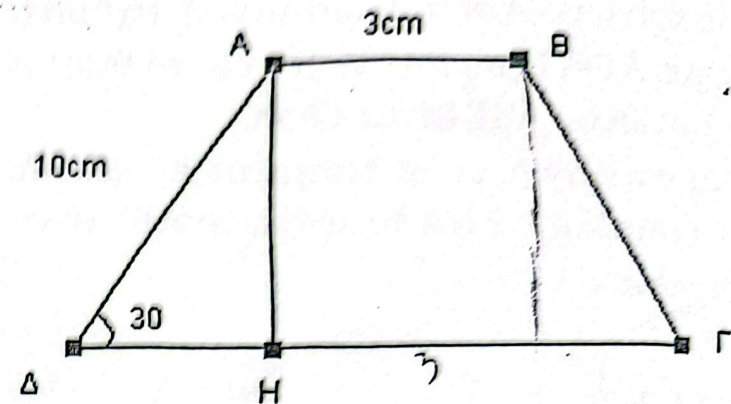
Να υπολογίσετε :

α) Την γωνία $\hat{A}$ και την διάμετρο $B\Gamma$.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

γ) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

(Δικαιολογήσετε σε κάθε περίπτωση τις
ενέργειές σας)



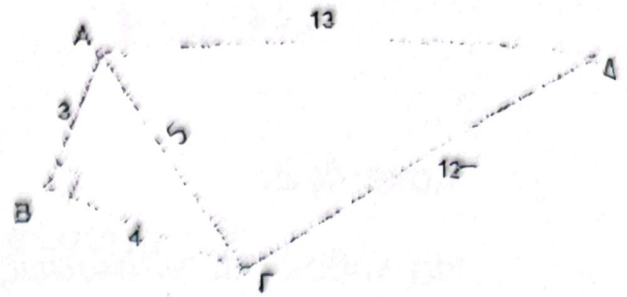
ΘΕΜΑ 2ο

2. Στο διπλανό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B} = 90^\circ$, $AB=3\text{cm}$, $ΒΓ=4\text{cm}$, $ΓΔ=12\text{cm}$ και $ΑΔ=13\text{cm}$.

α. Να βρείτε τη διαγώνιο ΑΓ

β. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας Δ.



ΘΕΜΑ 3ο

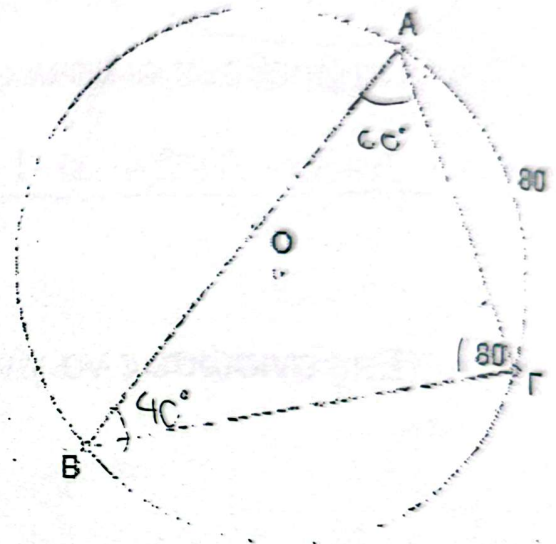
Στο διπλανό σχήμα έχουμε έναν κύκλο (Ο, 10 cm) και ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι κορυφές βρίσκονται πάνω στον κύκλο.

Δίνεται ότι το τόξο $\widehat{ΑΓ} = 80^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 80^\circ$.

α. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία Α.

β. Να βρείτε το μήκος του τόξου $\widehat{ΒΓ}$.

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΒΓ.



11

ΘΕΜΑ 1^ο

Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση

α. της συνάρτησης $y = ax$;

β. της συνάρτησης $y = ax + \beta$ με $\beta \neq 0$;

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν ω είναι οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, να γράψετε τους τύπους που εκφράζουν τα: $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\epsilon\phi\omega$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

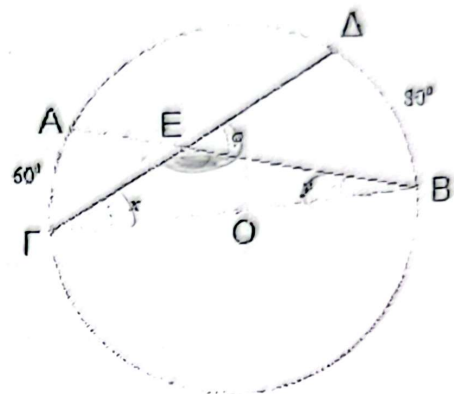
ΘΕΜΑ 1^ο

Στον διπλανό κύκλο κέντρου O , οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο E .

Αν $\widehat{A\Gamma} = 60^\circ$ και $\widehat{B\Delta} = 80^\circ$, να υπολογίσετε:

α. Τις γωνίες x και y .

β. Την γωνία ϕ

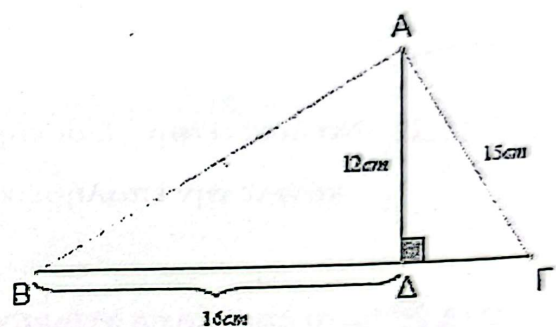


ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος έχουμε $ΑΓ=15\text{ cm}$, $ΒΔ=16\text{ cm}$ και το ύψος $ΑΔ$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12 cm .

α. Να υπολογίσετε τα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.



ΘΕΜΑ 3^ο

α. Να λύσετε τις εξισώσεις:

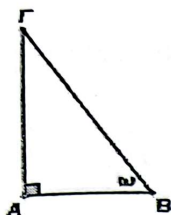
$$\frac{x-2}{6} - \frac{x+2}{8} = 1 + \frac{x}{4}$$

και $2(x+3) - (x+4) = -3 - 3(x-2)$

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^\circ$) να ορίσετε ημω, συνω και εφω

Β. Να διατυπώσετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος.



Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σ (Σωστές) ή Λ (Λανθασμένες)

- 1) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (A ορθή) ισχύει ότι $\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu\Gamma$.
- 2) Το συμμετρικό του $A(3,-4)$ ως προς τον $x'x$ είναι το $A'(-3,4)$
- 3) Υπάρχει οξεία γωνία ω για την οποία $\eta\mu\omega = 2$
- 4) Αν α η κλίση μιας ευθείας $y=ax$ τότε ισχύει ότι $\alpha = \epsilon\varphi\omega$, όπου ω η γωνία που δημιουργεί ευθεία με τον $x'x$.
- 5) Αν $\epsilon_1: y = -3x+8$ και $\epsilon_2: y = 3x-5$ τότε οι ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες.

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Να συμπληρώσετε τους πίνακες τιμών για τις παρακάτω συναρτήσεις

$$1) y = \frac{4x-1}{3}$$

x	-2		0		4	
y		0		5		6

$$2) y = x^2 - 2$$

x	-2		-1		0	
y		2		7		14

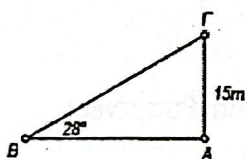
Β. Δίνονται τα σημεία A(1,3) , B(-1,4) , Γ(-6,-8) , Δ(2,-3) , Ε(0,2) , Ι(-5,0)

1) Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο είναι το καθένα

2) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τα συμμετρικά των παρακάτω σημείων

ΣΗΜΕΙΟ	Συμμετρικό ως προς x'x	Συμμετρικό ως προς y'y	Συμμετρικό ως προς το Ο.
A(1,3)			
B(-1,4)			
Γ(-6,-8)			
Δ(2,-3)			
Ε(0,2)			
Ι(-5,0)			

3) Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο (A=90) να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της Γ και το εμβαδό του. (ημ28°= 0,469, συν28°= 0,883, εφ28°= 0,532)



ΘΕΜΑ 3^ο

1) Να βρείτε τη συνάρτηση της ευθείας (ε₁) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο A(2,4).

2) Να βρείτε την συνάρτηση της ευθείας (ε₂) που είναι παράλληλη στην ευθεία του πρώτου ερωτήματος και τέμνει στον y'y στο σημείο B (0,5).

3) Να βρείτε πού η ευθεία ε₂ τέμνει τους άξονες και να τη σχεδιάσετε.

4) Να βρείτε ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην ε₂ Γ (1,7) Δ(3,-2)