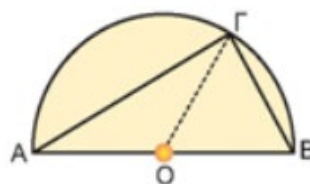


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Σε ημικύκλιο διαμέτρου 6cm δίνεται σημείο του Γ , έτσι ώστε $\widehat{A\Gamma} = 2\widehat{B\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



$$\text{Δίνονται } \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Λύση

$\hat{\Gamma} = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Το τόξο $\widehat{A\Gamma B}$ είναι ημικύκλιο, άρα $\widehat{A\Gamma B} = 180^\circ$ (1). Επίσης $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Gamma}$ (2) και μας δίνεται ότι $\widehat{A\Gamma} = 2\widehat{B\Gamma}$ (3).

Αντικαθιστώ τις σχέσεις (1), (3) στη σχέση (2), οπότε η (2) γίνεται:

$$\begin{aligned}\widehat{A\Gamma B} &= \widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Gamma} \\ 180^\circ &= 2\widehat{B\Gamma} + \widehat{B\Gamma} \\ 180^\circ &= 3\widehat{B\Gamma} \\ \frac{3\widehat{B\Gamma}}{3} &= \frac{180^\circ}{3} \\ \widehat{B\Gamma} &= 60^\circ\end{aligned}$$

$$\text{Επειδή } \widehat{A\Gamma} = 2\widehat{B\Gamma} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{A\Gamma}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \text{ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο } \widehat{A\Gamma}.$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{B\Gamma}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \text{ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο } \widehat{B\Gamma}.$$

Εναλλακτικά η $\hat{A}$ μπορεί να υπολογιστεί από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$:

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} &= 180^\circ \\ \hat{A} + 60^\circ + 90^\circ &= 180^\circ \\ \hat{A} &= 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ \\ \hat{A} &= 180^\circ - 150^\circ \\ \hat{A} &= 30^\circ\end{aligned}$$

Δίνεται ότι $AB = 6\text{cm}$. Όμως AB υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$). Άρα θέλουμε να υπολογίσουμε τις πλευρές AG, BG .

Ας ξεκινήσουμε με την $ΑΓ$. Η $ΑΓ$ είναι προσκείμενη κάθετη πλευρά στη γωνία $\hat{A} = 30^\circ$, της οποίας το ημίτονο και το συνημίτονο μας δίνονται.

Ψάχνουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά $ΑΓ$, έχουμε την υποτείνουσα $ΑΒ = 6cm$ άρα θα χρησιμοποιήσουμε το συνημίτονο. Θυμίζουμε ότι:

$$\sigmaυν\omega = \frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη Πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \text{ και } \omega \text{ μία οξεία γωνία}$$

$$\text{Τελικά } \sigmaυν30^\circ = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} \text{ και αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή, τις σχέσεις } \sigmaυν30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

και $ΑΒ = 6cm$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{ΑΓ}{6} \\ 2ΑΓ &= 6\sqrt{3} \\ \frac{2ΑΓ}{2} &= \frac{6\sqrt{3}}{2} \\ ΑΓ &= 3\sqrt{3}cm \end{aligned}$$

Η πλευρά $ΒΓ$ είναι απέναντι κάθετη στη γωνία $\hat{A}$. Ψάχνουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά $ΒΓ$, έχουμε την υποτείνουσα $ΑΒ = 6cm$ άρα θα χρησιμοποιήσουμε το ημίτονο. Θυμίζουμε ότι:

$$\etaμ\omega = \frac{\text{Απέναντι Κάθετη Πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \text{ και } \omega \text{ μία οξεία γωνία}$$

$$\etaμ30^\circ = \frac{ΒΓ}{ΑΒ} \text{ και αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή, τις σχέσεις } \etaμ30^\circ = \frac{1}{2} \text{ και}$$

$ΑΒ = 6cm$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{ΒΓ}{6} \\ 2ΒΓ &= 6 \\ \frac{2ΒΓ}{2} &= \frac{6}{2} \\ ΒΓ &= 3cm \end{aligned}$$

Εναλλακτικά η πλευρά $ΒΓ$ μπορεί να υπολογιστεί και με Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 - ΑΓ^2 = 6^2 - (3\sqrt{3})^2 = 36 - 3^2 \cdot \sqrt{3}^2 = 36 - 9 \cdot \sqrt{3}^2 = 36 - 9 \cdot 3 = 36 - 27 = 9$$

$$ΒΓ = \sqrt{9}$$

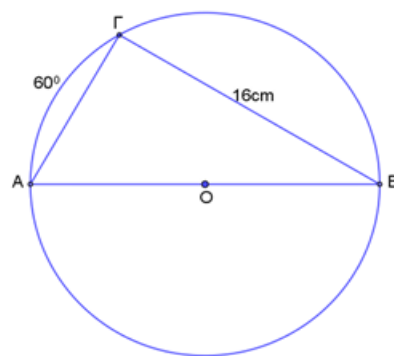
$$ΒΓ = 3cm$$

2. Στο διπλανό σχήμα είναι η $\widehat{AG} = 60^\circ$, η χορδή $B\Gamma = 16\text{cm}$ και η διάμετρος $AB = 20\text{cm}$

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

β) Να υπολογίσετε την πλευρά $A\Gamma$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο γιατί $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

$\hat{B} = \frac{\widehat{AG}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\widehat{AG}$. Το τόξο $\widehat{AGB}$ είναι ημικύκλιο, άρα $\widehat{AGB} = 180^\circ$ (1). Επίσης $\widehat{AGB} = \widehat{AG} + \widehat{GB}$ (2) και $\widehat{AG} = 60^\circ$ (3). Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (1) και (3), στη (2) και έχουμε:

$$\begin{aligned}\widehat{AGB} &= \widehat{AG} + \widehat{GB} \\ 180^\circ &= 60^\circ + \widehat{GB} \\ -\widehat{GB} &= -180^\circ + 60^\circ \\ -\widehat{GB} &= -120^\circ \\ \frac{-\widehat{GB}}{-1} &= \frac{-120^\circ}{-1} \\ \widehat{GB} &= 120^\circ\end{aligned}$$

Επίσης η $\hat{A}$ μπορεί να υπολογιστεί και από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$:

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} &= 180^\circ \\ \hat{A} + 30^\circ + 90^\circ &= 180^\circ \\ \hat{A} &= 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ \\ \hat{A} &= 180^\circ - 120^\circ \\ \hat{A} &= 60^\circ\end{aligned}$$

β) Η πλευρά $A\Gamma$ μπορεί να υπολογιστεί με Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$:

$$\begin{aligned}A\Gamma^2 &= AB^2 - B\Gamma^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 \\ A\Gamma &= \sqrt{144} \\ A\Gamma &= 12\text{cm}\end{aligned}$$

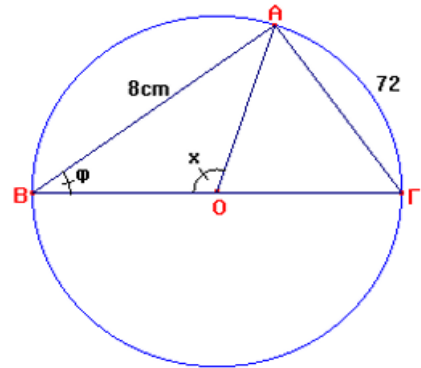
$$\gamma) (AB\Gamma) = \frac{\text{κάθετηΠλευρά} \cdot \text{κάθετηΠλευρά}}{2} = \frac{A\Gamma \cdot B\Gamma}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96 \text{ cm}^2$$

3. Στο διπλανό σχήμα είναι $\widehat{A\Gamma} = 72^\circ$, η χορδή $AB = 8 \text{ cm}$ και η διάμετρος $B\Gamma = 10 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε:

α) Τις γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{x}$ του σχήματος.

β) Τη χορδή $A\Gamma$.

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α) $\hat{\varphi} = \hat{B} = \frac{\widehat{A\Gamma}}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο $\widehat{A\Gamma}$.

Το $\widehat{BA\Gamma}$ είναι ημικύκλιο, άρα $\widehat{BA\Gamma} = 180^\circ$ (1). Επίσης $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{BA} + \widehat{A\Gamma}$ (1) και μας δίνεται ότι $\widehat{A\Gamma} = 72^\circ$ (2).

Αντικαθιστώ τη σχέση (2) στη σχέση (1), οπότε η (1) γίνεται:

$$\begin{aligned}\widehat{BA\Gamma} &= \widehat{BA} + \widehat{A\Gamma} \\ 180^\circ &= \widehat{BA} + 72^\circ \\ 180^\circ - 72^\circ &= \widehat{BA} \\ \widehat{BA} &= 180^\circ - 72^\circ \\ \widehat{BA} &= 108^\circ\end{aligned}$$

$\hat{x} = \widehat{BA} = 108^\circ$ ως επίκεντρη γωνία που βαίνει στο $\widehat{BA}$.

β) $\hat{A} = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο οπότε εφαρμόζουμε Π.Θ. στο τρίγωνο αυτό:

$$\begin{aligned}A\Gamma^2 &= B\Gamma^2 - AB^2 \\ A\Gamma^2 &= 10^2 - 8^2 \\ A\Gamma^2 &= 100 - 64 \\ A\Gamma^2 &= 36 \\ A\Gamma &= \sqrt{36} \\ A\Gamma &= 6 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\gamma) (AB\Gamma) = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

4. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} 26 &= x+1+x+2+2(x+1)+2x-3 \\ 26 &= 2x+\cancel{3}+2x+2+2x-\cancel{3} \\ 26 &= 6x+2 \\ -6x &= -26+2 \\ -6x &= -24 \\ \frac{-6x}{-6} &= \frac{-24}{-6} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(2y+4)-14 &= 2y-2(1-2y) \\ 6y+12-14 &= 2y-2+4y \\ 6y-2y-4y &= -2-12+14 \\ 0y &= -14+14 \\ 0y &= 0 \\ &\text{ταυτότητα} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+7-3(5-x) &= 2x-3-2(3-x)-4 \\ x+7-15+3x &= 2x-3-6+2x-4 \\ x+3x-2x-2x &= -3-6-4-7+15 \\ 0x &= -20+15 \\ 0x &= -5 \\ &\text{αδύνατη} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{3} - \frac{2}{3} &= 7 + \frac{5-x}{3} \\ \cancel{3} \cdot \frac{x+4}{\cancel{3}} - \cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} &= 3 \cdot 7 + \cancel{3} \cdot \frac{5-x}{\cancel{3}} \\ x+4-2 &= 21+5-x \\ x+x &= 21+5-4+2 \\ 2x &= 26-4+2 \\ 2x &= 24 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{24}{2} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2x-1}{5} &= 3 - \frac{6-4x}{5} \\ 5 \cdot 1 - \cancel{5} \cdot \frac{2x-1}{\cancel{5}} &= 5 \cdot 3 - \cancel{5} \cdot \frac{6-4x}{\cancel{5}} \\ 5 - (2x-1) &= 15 - (6-4x) \\ 5-2x+1 &= 15-6+4x \\ -2x-4x &= 15-6-5-1 \\ -6x &= 3 \\ \frac{-6x}{-6} &= \frac{3}{-6} \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3(x+1)}{5} &= \frac{2x+3}{4} \\ 4 \cdot 3(x+1) &= 5 \cdot (2x+3) \\ 12(x+1) &= 10x+15 \\ 12x+12 &= 10x+15 \\ 12x-10x &= 15-12 \\ 2x &= 3 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{3}{2} \\ x &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2(3x+4)}{7} &= \frac{5+x}{3} \\ 3 \cdot 2(3x+4) &= 7 \cdot (5+x) \\ 6(3x+4) &= 7 \cdot (5+x) \\ 18x+24 &= 35+7x \\ 18x-7x &= 35-24 \\ 11x &= 11 \\ \frac{11x}{11} &= \frac{11}{11} \\ x &= 1\end{aligned}$$

5. Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, 6)$. Να βρείτε:

α) Τους αριθμούς α, β .

β) Τα σημεία τομής της παραπάνω ευθείας με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η παραπάνω ευθεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

δ) Αν Β και Γ τα σημεία τομής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα να υπολογίσετε την απόσταση ΒΓ.

Λύση

α) Επειδή η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$, θα ισχύει $\alpha = -3$, άρα η εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ γίνεται $y = -3x + \beta$.

Επιπλέον η $y = -3x + \beta$ διέρχεται από το σημείο $A(2, 6)$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Για $x = 2$ και $y = 6$, η εξίσωση $y = -3x + \beta$ γίνεται:

$$\begin{aligned}y &= -3x + \beta \\ 6 &= -3 \cdot 2 + \beta \\ 6 &= -6 + \beta \\ -\beta &= -6 - 6 \\ -\beta &= -12 \\ \frac{-\beta}{-1} &= \frac{-12}{-1} \\ \beta &= 12\end{aligned}$$

β) Η ευθεία μας έχει εξίσωση: $y = -3x + 12$

- Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y = 0$ στην εξίσωση $y = -3x + 12$ και έχουμε:

$$y = -3x + 12$$

$$0 = -3x + 12$$

$$3x = 12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

Άρα η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(4,0)$.

- Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $y'y$ θέτουμε $x = 0$ στην εξίσωση $y = -3x + 12$ και έχουμε:

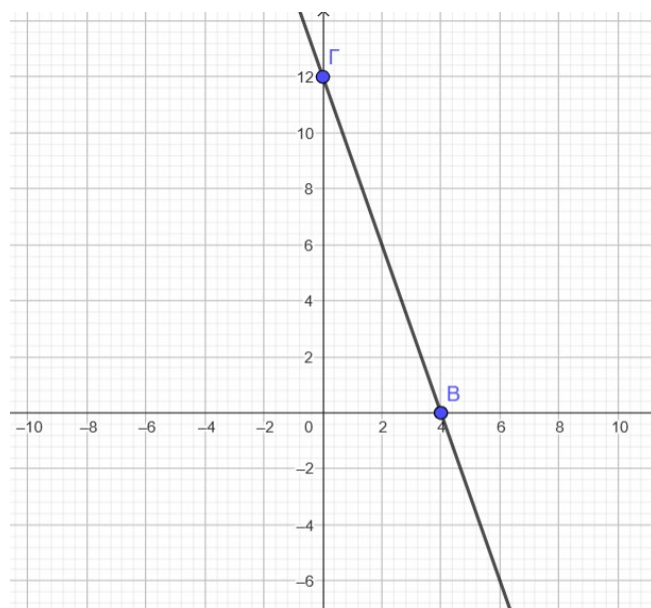
$$y = -3 \cdot 0 + 12$$

$$y = 0 + 12$$

$$y = 12$$

Άρα η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,12)$.

γ) Η ευθεία $y = -3x + 12$ διέρχεται από τα σημεία $B(4,0)$ και $\Gamma(0,12)$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα:



$$(OB\Gamma) = \frac{1}{2}OB \cdot O\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 = 24cm^2$$

δ) Π.Θ. στο τρίγωνο $OB\Gamma$:

$$B\Gamma^2 = OB^2 + O\Gamma^2 = 4^2 + 12^2 = 16 + 144 = 160$$

$$B\Gamma = \sqrt{160}$$

$$B\Gamma = \sqrt{16} \cdot \sqrt{10} = 4\sqrt{10}cm$$

6. Μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(2,4)$.

α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα.

x	-3	5		
y			-8	6

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) του ερωτήματος β) και διέρχεται από το σημείο $B(0,3)$ του άξονα $y'y$.

Λύση

α) Επειδή η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y = \alpha x$. Επιπλέον η $y = \alpha x$ διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$, άρα οι συντεταγμένες του, θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Για $x = 2$ και $y = 4$, η εξίσωση $y = \alpha x$ γίνεται:

$$\begin{aligned}y &= \alpha x \\4 &= \alpha \cdot 2 \\4 &= 2\alpha \\-2\alpha &= -4 \\\frac{-2\alpha}{-2} &= \frac{-4}{-2} \\\alpha &= 2\end{aligned}$$

β) Από το α) ερώτημα προέκυψε ότι $\alpha = 2$, άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $y = 2x$.

Για $x = -3$ η εξίσωση $y = 2x$ γίνεται : $y = 2 \cdot (-3) = -6$

Για $x = 5$ η εξίσωση $y = 2x$ γίνεται : $y = 2 \cdot 5 = 10$

Για $y = -8$ η εξίσωση $y = 2x$ γίνεται :

$$\begin{aligned}-8 &= 2 \cdot x \\-2x &= 8 \\\frac{-2x}{-2} &= \frac{8}{-2} \\x &= -4\end{aligned}$$

Για $y = 6$ η εξίσωση $y = 2x$ γίνεται :

$$\begin{aligned}6 &= 2 \cdot x \\-2x &= -6 \\\frac{-2x}{-2} &= \frac{-6}{-2} \\x &= 3\end{aligned}$$

x	-3	5	-4	3
y	-6	10	-8	6

γ) Αφού η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 2x$ θα είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$, με $\alpha = 2$. Δλδ. $y = 2x + \beta$

Επίσης η ευθεία (ζ) διέρχεται από το σημείο $B(0,3)$ του άξονα $y'y$, άρα οι συντεταγμένες του, θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Για $x = 0$ και $y = 3$, η εξίσωση $y = 2x + \beta$ γίνεται:

$$\begin{aligned}y &= 2x + \beta \\3 &= 2 \cdot 0 + \beta \\3 &= 0 + \beta \\-\beta &= -3 \\\frac{-\beta}{-1} &= \frac{-3}{-1} \\\beta &= 3\end{aligned}$$

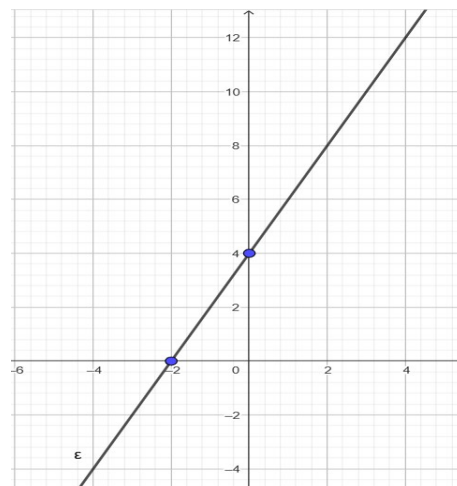
Άρα η ευθεία (ζ) έχει εξίσωση: $y = 2x + 3$

7. Η ευθεία (ε) του διπλανού σχήματος έχει κλίση $\alpha = 2$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,4)$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε).

β) Να εξεταστεί αν τα σημεία $A(3,5)$ και $B(12,6)$ ανήκουν στην ευθεία (ε).

γ) Να γραφτεί η εξίσωση της ευθείας (ε') που είναι παράλληλη στην (ε) και περνάει από την αρχή των αξόνων.



Λύση

α) Η ευθεία (ε) του σχήματος έχει κλίση $\alpha = 2$, και δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα είναι της μορφής $y = 2x + \beta$. Επίσης τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,4)$, άρα οι συντεταγμένες του, θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε):

Για $x = 0$ και $y = 4$, η εξίσωση $y = 2x + \beta$ γίνεται:

$$\begin{aligned} y &= 2x + \beta \\ 4 &= 2 \cdot 0 + \beta \\ 4 &= 0 + \beta \\ -\beta &= -4 \\ \frac{-\beta}{-1} &= \frac{-4}{-1} \\ \beta &= 4 \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία (ε), έχει εξίσωση: $y = 2x + 4$.

β) Για να ανήκουν τα σημεία $A(3,5)$ και $B(7,24)$ στην ευθεία (ε), θα πρέπει οι συντεταγμένες τους, να επαληθεύουν την εξίσωση της.

Ξεκινάμε με το σημείο $A(3,5)$. Για $x = 3$ και $y = 5$, η εξίσωση $y = 2x + 4$ γίνεται:

$$\begin{aligned} 5 &= 2 \cdot 3 + 4 \\ 5 &= 6 + 4 \\ 5 &= 10 \\ \text{αδύνατο} \end{aligned}$$

Άρα το σημείο $A(3,5)$ δεν ανήκει στην ευθεία (ε).

Όμοια εργαζόμαστε και για το σημείο $B(7,18)$. Για $x = 7$ και $y = 18$, η εξίσωση $y = 2x + 4$ γίνεται:

$$18 = 2 \cdot 7 + 4$$

$$18 = 14 + 4$$

$$18 = 18$$

που ισχύει

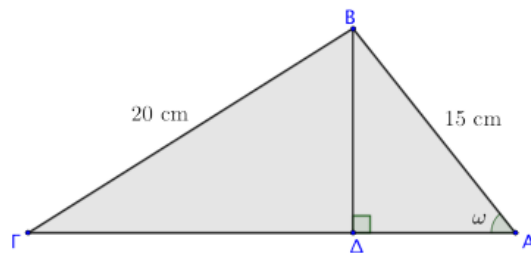
Άρα το σημείο $B(7,18)$ ανήκει στην ευθεία (ε) .

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε') που είναι παράλληλη στην (ε) και περνάει από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y = \alpha x$, με $\alpha = 2$. Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε') είναι η $y = 2x$.

8.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $BA = 15 \text{ cm}$, $B\Gamma = 20 \text{ cm}$ και $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$. Να βρείτε:

- (α') το μήκος του ύψους $B\Delta$,
- (β') την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$
- (γ') το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Delta$: $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ και θέλουμε να βρούμε το ύψος $B\Delta$.

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντιΚάθετηΠλευρά}}{\text{υποείνουσα}} = \frac{B\Delta}{AB} \quad (1)$$

Δίνεται ότι $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ (2) και $AB = 15 \text{ cm}$ (3). Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (2) και (3) στη σχέση (1) και έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu\omega &= \frac{B\Delta}{AB} \\ \frac{4}{5} &= \frac{B\Delta}{15} \\ 5B\Delta &= 4 \cdot 15 \\ \frac{5B\Delta}{5} &= \frac{60}{5} \\ B\Delta &= 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

β) $\Pi_{AB\Gamma} = AB + B\Gamma + \Gamma A$. Άρα για να υπολογίσουμε την περίμετρο πρέπει να βρούμε την πλευρά ΓA .

Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ με Π.Θ. θα υπολογίσουμε την πλευρά $\Gamma\Delta$:

$$\Gamma\Delta^2 = \text{B}\Gamma^2 - \text{B}\Delta^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$$

$$\Gamma\Delta = \sqrt{256} = 16\text{cm}$$

Αντίστοιχα στο τρίγωνο $\text{AB}\Delta$ με Π.Θ. θα υπολογίσουμε την πλευρά ΔA :

$$\text{A}\Delta^2 = \text{B}\text{A}^2 - \text{B}\Delta^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$$

$$\text{A}\Delta = \sqrt{81} = 9\text{cm}$$

$$\Gamma\text{A} = \Gamma\Delta + \Delta\text{A} = 16 + 9 = 25\text{cm} \text{ οπότε } \Pi_{\text{AB}\Gamma} = \text{AB} + \text{B}\Gamma + \Gamma\text{A} = 15 + 20 + 25 = 60\text{cm}$$

$$\gamma) (\text{AB}\Gamma) = \frac{1}{2} \text{A}\Gamma \cdot \text{B}\Delta = \frac{1}{2} 25 \cdot 12 = 150\text{cm}^2$$

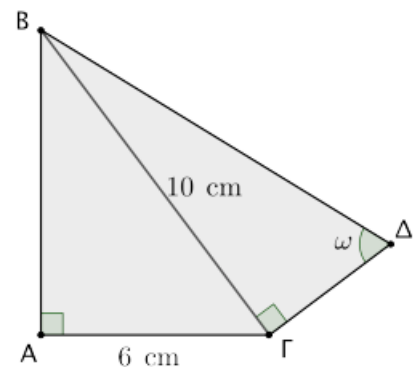
9. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα

$\text{AB}\Gamma$ και $\text{B}\Delta\Gamma$, με $\text{A}\Gamma = 6\text{cm}$, $\text{B}\Gamma = 10\text{cm}$ και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{5}{2}$.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$.

β) Να υπολογίσετε $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$.

γ) Το εμβαδόν του τετράπλευρου $\text{AB}\Gamma\Delta$.



Λύση

α) Π.Θ. στο τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$:

$$\text{AB}^2 = \text{B}\Gamma^2 - \text{A}\Gamma^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$\text{AB} = \sqrt{64} = 8\text{cm}$$

Στο τρίγωνο $\text{B}\Gamma\Delta$: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{B}\Gamma}{\Gamma\Delta}$ (1). Δίνονται $\text{B}\Gamma = 10\text{cm}$ (2) και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{5}{2}$ (3).

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2), (3) στη σχέση (1), έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{B}\Gamma}{\Gamma\Delta}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{\Gamma\Delta}$$

$$5\Gamma\Delta = 20$$

$$\frac{5\Gamma\Delta}{5} = \frac{20}{5}$$

$$\Gamma\Delta = 4\text{cm}$$

β) Για να βρούμε $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$ πρέπει να υπολογίσουμε την υποτείνουσα του τριγώνου $\text{B}\Gamma\Delta$. Εφαρμόζουμε Π.Θ. στο τρίγωνο $\text{B}\Gamma\Delta$:

$$B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = 10^2 + 4^2 = 100 + 16 = 116$$

$$B\Delta = \sqrt{116}$$

$$\text{Άρα } \eta\mu\omega = \frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{10}{\sqrt{116}} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\Gamma\Delta}{B\Delta} = \frac{4}{\sqrt{116}}$$

γ)

$$(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (B\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot AB + \frac{1}{2} B\Gamma \cdot \Gamma\Delta = \frac{1}{2} 6 \cdot 8 + \frac{1}{2} 10 \cdot 4 = \frac{1}{2} 48 + \frac{1}{2} 40 = 24 + 20 = 44 \text{ cm}^2$$

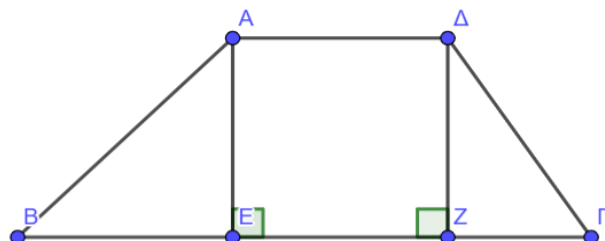
10. Δίνεται το τραπέζιο ABΓΔ για το οποίο ισχύουν: $AB = 10 \text{ cm}$, $A\Delta = 12 \text{ cm}$, $\eta\mu B = \frac{3}{5}$ και

$\epsilon\phi\Gamma = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $AE = 6 \text{ cm}$ και $BE = 8 \text{ cm}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\Gamma Z = 6 \text{ cm}$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τραpezίου ABΓΔ.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ABE :

$\eta\mu B = \frac{AE}{AB}$ (1). Δίνονται $AB = 10 \text{ cm}$ (2) και $\eta\mu B = \frac{3}{5}$ (3). Αντικαθιστώντας τις σχέσεις

(2), (3) στη σχέση (1), έχουμε:

$$\eta\mu B = \frac{AE}{AB}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{AE}{10}$$

$$5AE = 30$$

$$\frac{5AE}{5} = \frac{30}{5}$$

$$AE = 6 \text{ cm}$$

Π.Θ. στο τρίγωνο ABE :

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$BE = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

β) Το τετράπλευρο AΔZE είναι ορθογώνιο άρα οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δηλ.

$EZ = A\Delta = 12 \text{ cm}$ και $\Delta Z = AE = 6 \text{ cm}$.

Στο τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$: $\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\Delta Z}{Z\Gamma}$ (1). Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi\Gamma = 1$ (2) και βρήκαμε ότι $\Delta Z = 6\text{cm}$ (3).

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2), (3) στη σχέση (1), έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\Delta Z}{Z\Gamma}$$

$$1 = \frac{6}{Z\Gamma}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{6}{Z\Gamma}$$

$$Z\Gamma = 6\text{cm}$$

$$B\Gamma = BE + EZ + \Gamma Z = 8 + 12 + 6 = 26$$

$$\nu) (AB\Gamma\Delta) = \frac{(B\Gamma + A\Delta) \cdot AE}{2} = \frac{(26 + 12) \cdot 10}{2} = \frac{38 \cdot 10}{2} = \frac{380}{2} = 190\text{cm}^2$$