

ΜΑΘΗΜΑ 26

σελ. 43 (α,β) σελ. 44(δ)

Ταυτότητες

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

Άσκησης 1,2,3,4 σελ. 49

α) Τετράγωνο αθροίσματος

Αν την παράσταση $(α + β)^2$ τη γράψουμε $(α + β)(α + β)$ και βρούμε το ανάπτυγμα του γινομένου, έχουμε:

$$\begin{aligned}(α + β)^2 &= (α + β)(α + β) = \\ &= α^2 + αβ + βα + β^2 = \\ &= α^2 + 2αβ + β^2\end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα

$$(α + β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$$

Το δεύτερο μέρος της προηγούμενης ισότητας λέγεται **ανάπτυγμα** του $(α + β)^2$.

Για παράδειγμα, το ανάπτυγμα του $(y + 4)^2$ προκύπτει, αν στην προηγούμενη ταυτότητα αντικαταστήσουμε το $α$ με το y και το $β$ με το 4 , οπότε έχουμε:

$$(y + 4)^2 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 = y^2 + 8y + 16.$$

Η προηγούμενη ταυτότητα, όπως και όλες οι επόμενες, χρησιμοποιούνται και όταν τα $α$, $β$ είναι οποιεσδήποτε αλγεβρικές παραστάσεις, π.χ.

$$\begin{array}{ccccccc}(2x + 3y)^2 & = & (2x)^2 & + & 2 \cdot 2x \cdot 3y & + & (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (α + β)^2 & = & α^2 & + & 2αβ & + & β^2\end{array}$$

β) Τετράγωνο διαφοράς

Αν την παράσταση $(a - b)^2$ τη γράψουμε $(a - b)(a - b)$ και βρούμε το ανάπτυγμα του γινομένου, τότε μπορούμε να αποδείξουμε και την ταυτότητα

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Πράγματι έχουμε:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Για παράδειγμα, το ανάπτυγμα του $(y - 4)^2$ προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε το a με το y και το b με το 4 , οπότε έχουμε:

$$(y - 4)^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 = y^2 - 8y + 16$$

Ομοίως, για να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα του $(3x - 4y)^2$ έχουμε:

$$(3x - 4y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (4y) + (4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ (a - b)^2 & = & a^2 & - & 2ab & + & b^2 \end{array}$$

δ) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

Αν βρούμε το ανάπτυγμα του γινομένου $(a + b)(a - b)$ έχουμε:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2 = a^2 - b^2$$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Η προηγούμενη ταυτότητα χρησιμοποιείται για να βρίσκουμε γρήγορα το γινόμενο αθροίσματος δύο παραστάσεων επί τη διαφορά τους. Για παράδειγμα, έχουμε:

- $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$
- $(3a + 2b)(3a - 2b) = (3a)^2 - (2b)^2 = 9a^2 - 4b^2$

Ασκ. 1 σελ. 49

1

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 2)^2$

β) $(y + 5)^2$

γ) $(2\omega + 1)^2$

δ) $(\kappa + 2\lambda)^2$

ε) $(3y + 2\beta)^2$

στ) $(x^2 + 1)^2$

ζ) $(y^2 + y)^2$

η) $(2x^2 + 3x)^2$

θ) $(x + \sqrt{2})^2$

ι) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$

ια) $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$

ιβ) $\left(\omega + \frac{4}{\omega}\right)^2$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Ασκ. 2 σελ. 49

2

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x - 3)^2$

β) $(y - 5)^2$

γ) $(3\omega - 1)^2$

δ) $(2\kappa - \lambda)^2$

ε) $(3y - 2\beta)^2$

στ) $(x^2 - 2)^2$

ζ) $(y^2 - y)^2$

η) $(2x^2 - 5x)^2$

θ) $(x - \sqrt{3})^2$

ι) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

ια) $\left(a - \frac{3}{2}\right)^2$

ιβ) $\left(\omega - \frac{2}{\omega}\right)^2$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Άσκ. 3 σελ. 49

3

Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ταυτότητα να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $(\sqrt{3} + 1)^2$

β) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2$

γ) $(\sqrt{2} - 3)^2$

δ) $(1 - \sqrt{7})^2$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Άσκ. 4 σελ. 49

3

Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ταυτότητα να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $(\sqrt{3} + 1)^2$

β) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2$

γ) $(\sqrt{2} - 3)^2$

δ) $(1 - \sqrt{7})^2$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$