

ΜΑΘΗΜΑ 32

Παραγοντοποίηση

Η μέθοδος παραγοντοποίησης «κοινός παράγοντας» και οι λύσεις των ασκήσεων 1,2,3 σελ. 60-61.

Παραγοντοποίηση

Πολλές φορές, για την επίλυση ενός προβλήματος, μιας εξίσωσης, μιας ανίσωσης ή για την απλοποίηση ενός κλάσματος, είναι χρήσιμο να μετατραπεί μία παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο.

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται παραγοντοποίηση.

Μέθοδος παραγοντοποίησης «Κοινός παράγοντας», σελ. 54

α) Κοινός παράγοντας

Αν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

$$3a + 3b - 3\gamma = 3(a + b - \gamma)$$

Για παράδειγμα, σε όλους τους όρους της παράστασης $3a + 3b - 3\gamma$ υπάρχει κοινός παράγοντας το 3, οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$3a + 3b - 3\gamma = 3(a + b - \gamma).$$

Ομοίως η παράσταση $2a^2 - 2ab + 2a$, γράφεται $2a \cdot a - 2a \cdot b + 2a \cdot 1$, οπότε σε όλους τους όρους της υπάρχει κοινός παράγοντας το $2a$.

Άρα, η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$2a^2 - 2ab + 2a = 2a(a - b + 1).$$

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι «βγάζουμε κοινό παράγοντα το $2a$ ».

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $12x^2y - 30xy^2 + 6x^2y^2$ β) $\alpha(\omega - x) + 3\beta(x - \omega)$ γ) $3(2x - 1) + x(4x - 2)$

Λύση

α) Σε όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το $6xy$,
οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} 12x^2y - 30xy^2 + 6x^2y^2 &= \\ &= 6xy \cdot 2x - 6xy \cdot 5y + 6xy \cdot xy = \\ &= 6xy(2x - 5y + xy) \end{aligned}$$

β) Η παράσταση έχει δύο όρους, τους $\alpha(\omega - x)$ και $3\beta(x - \omega)$. Για να δημιουργήσουμε και στους δύο όρους κοινό παράγοντα τον $\omega - x$, τον δεύτερο όρο της τον γράφουμε $-3\beta(\omega - x)$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha(\omega - x) + 3\beta(x - \omega) &= \\ &= \alpha(\omega - x) - 3\beta(\omega - x) = \\ &= (\omega - x)(\alpha - 3\beta) \end{aligned}$$

γ) Αν από τον δεύτερο όρο της παράστασης βγάλουμε κοινό παράγοντα το 2, τότε δημιουργούμε κοινό παράγοντα το $2x - 1$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} 3(2x - 1) + x(4x - 2) &= \\ &= 3(2x - 1) + 2x(2x - 1) = \\ &= (2x - 1)(3 + 2x) \end{aligned}$$

Λύση ασκ. 1 σελ. 60 με τη μέθοδο «Κοινός παράγοντας»

$$\alpha) \quad 3\alpha + 6\beta = 3(\alpha + 2\beta)$$

$$\beta) \quad 2x - 8 = 2(x - 4)$$

$$\gamma) \quad 8\omega^2 + 6\omega = 2\omega(4\omega + 3)$$

$$\delta) \quad -9x^2 - 6x = -3x(3x + 2)$$

$$\epsilon) \quad 8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 = 4\alpha\beta(2\alpha + \beta)$$

$$\sigma\tau) \quad 2x^2 - 2xy + 2x = 2x(x - y + 1)$$

$$\zeta) \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta = \alpha\beta(\alpha + \beta - 1)$$

$$\eta) \quad 2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha^2\beta = 2\alpha^2(\alpha - 2 + 3\beta)$$

$$\theta) \quad \sqrt{2}xy - \sqrt{18}y + \sqrt{8}y^2 = \sqrt{2}y(x - \sqrt{9} + \sqrt{4}y) = \sqrt{2}y(x - 3 + 2y)$$

Λύση ασκ. 2 σελ. 60 με τη μέθοδο «Κοινός παράγοντας»

$$\alpha) x(\alpha - \beta) + \gamma(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(x + \gamma)$$

$$\beta) \alpha(x + \gamma) + \beta(x + \gamma) = (x + \gamma)(\alpha + \beta)$$

$$\begin{aligned} \gamma) (3x - 1)(x - 2) - (x + 4)(x - 2) &= (x - 2) [(3x - 1) - (x + 4)] = \\ &= (x - 2)(3x - 1 - x - 4) = (x - 2)(2x - 5) \end{aligned}$$

$$\delta) \alpha^2(\alpha - 2) - 3(2 - \alpha) = \alpha^2(\alpha - 2) + 3(\alpha - 2) = (\alpha - 2)(\alpha^2 + 3)$$

$$\epsilon) 4x(x - 1) - x + 1 = 4x(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(4x - 1)$$

$$\begin{aligned} \sigma\tau) 2x^2(x - 3) - 6x(x - 3)^2 &= 2x(x - 3) [x - 3(x - 3)] = \\ &= 2x(x - 3)(x - 3x + 9) = 2x(x - 3)(-2x + 9) \end{aligned}$$

Λύση ασκ. 3 σελ. 61 με τη μέθοδο «Κοινός παράγοντας»

Σε αυτήν την άσκηση κάνουμε παραγοντοποίηση τεσσάρων παραστάσεων και στη συνέχεια βλέπουμε πώς μας χρησιμεύει αυτό στην επίλυση εξισώσεων 2^{ου} βαθμού.

i) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

$$\alpha) x^2 + x \quad \beta) 2y^2 - 5y \quad \gamma) \omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) \quad \delta) \alpha(3\alpha + 1) - 4\alpha$$

i) α) $x^2 + x = x(x + 1)$

β) $2y^2 - 5y = y(2y - 5)$

γ) $\omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = \omega(\omega - 3) + 2(\omega - 3) = (\omega - 3)(\omega + 2)$

δ) $\alpha(3\alpha + 1) - 4\alpha = 3\alpha^2 + \alpha - 4\alpha = 3\alpha^2 - 3\alpha = 3\alpha(\alpha - 1)$

ii) Να επιλύσετε τις εξισώσεις

$$\alpha) x^2 + x = 0 \quad \beta) 2y^2 = 5y \quad \gamma) \omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = 0 \quad \delta) \alpha(3\alpha + 1) = 4\alpha$$

ii) Για να είναι το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ ίσο με το μηδέν, πρέπει $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$. Γνωρίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$\alpha) x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

$$\beta) 2y^2 = 5y \Leftrightarrow 2y^2 - 5y = 0 \Leftrightarrow y(2y - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = \frac{5}{2}$$

$$\gamma) \omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = 0 \Leftrightarrow (\omega - 3)(\omega + 2) = 0 \Leftrightarrow \omega - 3 = 0 \text{ ή } \omega + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = 3 \text{ ή } \omega = -2$$

$$\delta) \alpha(3\alpha + 1) = 4\alpha \Leftrightarrow \alpha(3\alpha + 1) - 4\alpha = 0 \Leftrightarrow 3\alpha(\alpha - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \alpha = 1$$