

ΜΑΘΗΜΑ 47

Τριγωνομετρία

2.1, 2.2, 2.3 (σελ. 232 – 242)

Επιλογή από τα σημαντικά κάθε
παραγράφου

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

Ποιοι είναι οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω που είναι από μηδέν μέχρι 180 μοίρες;

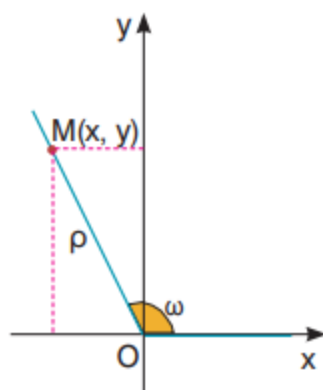
Απάντηση:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Προσοχή: Για να είναι πλήρης η απάντησή σας πρέπει να κάνετε και το σχήμα !!!

Πρόσημα ημω, συνω, εφω

- Όταν μια γωνία είναι οξεία τότε όλοι οι τριγωνομετρικοί της αριθμοί είναι θετικοί. Δηλ. ημω, συνω, εφω θα είναι όλα θετικά.
- Όταν μια γωνία είναι αμβλεία τότε μόνο το ημίτονο είναι θετικό ενώ το συνημίτονο και η εφαπτομένη θα είναι αρνητικά.

Αυτό χρησιμοποιείται σε ασκήσεις !

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μερικών βασικών γωνιών

Θα πρέπει να γνωρίζετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών με μέτρο 0, 90, 180, 30, 45, 60 μοιρών: (σελ. 233-234)

ω	30°	45°	60°
$\eta\mu\omega$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\epsilon\phi\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$$\eta\mu 0^\circ = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$$

$$\epsilon\phi 0^\circ = 0$$

$$\eta\mu 90^\circ = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$$

$$\epsilon\phi 90^\circ \text{ δεν ορίζεται}$$

$$\eta\mu 180^\circ = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1$$

$$\epsilon\phi 180^\circ = 0$$

Όταν δύο γωνίες είναι παραπληρωματικέςσελ. 237

- Όταν δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές τότε έχουν το ίδιο ημίτονο. Όμως τα συνημίτονά τους είναι αντίθετα και οι εφαπτομένες τους είναι αντίθετες.

(Αυτό μας βοηθάει όταν θέλουμε να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας αμβλείας γωνίας πχ των 120 μοιρών. Θα βρούμε των 60 μοιρών και θα αφήσουμε ίδιο το ημίτονο ενώ θα βάλουμε ένα πλην μπροστά στο συνημίτονο και στην εφαπτομένη.)

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες σελ. 240

Οι δύο αυτοί τύποι μας χρησιμεύουν όταν γνωρίζουμε μόνο έναν τριγωνομετρικό αριθμό μιας γωνίας, πχ το ημίτονο, και θέλουμε να βρούμε τους άλλους δύο.

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

Παράδειγμα 1 σελ. 241

Στο παράδειγμα που ακολουθεί μας δίνεται το ημίτονο και ψάχνουμε το συνημίτονο και την εφαπτομένη. Μας δίνεται επίσης ότι η γωνία είναι αμβλεία ώστε να συμπεράνουμε ότι θα έχει αρνητικό συνημίτονο και αρνητική εφαπτομένη.

1 Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

Λύση

Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{16}{25} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \pm \frac{4}{5}.$$

Επειδή η γωνία ω είναι αμβλεία έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$.

$$\text{Από την ταυτότητα } \epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ έχουμε } \epsilon\varphi\omega = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}, \text{ οπότε } \epsilon\varphi\omega = -\frac{3}{4}.$$

Άσκηση 1 σελ. 242

1. Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\text{Άρα } \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{12}{13} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}$$

Όμως το συνημίτονο οξείας γωνίας είναι μεγαλύτερο του μηδενός.

$$\text{Οπότε } \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{12}{13}$$

$$\text{Άρα και } \epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

Άσκηση 2 σελ. 242

2. Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\sin \omega = -\frac{1}{3}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \sin^2\omega = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Όμως η ω είναι αμβλεία. Οπότε $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{8}}{3}$

$$\text{Άρα και } \epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sin\omega} = \frac{\frac{\sqrt{8}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$