Τετράδιο Επανάληψης



Επιμέλεια: Βασίλης Κράνιας - email: info@e-maths.gr

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

- Επαναληπτικά θέματα εξετάσεων
- Όλη η θεωρία σε ερωτήσεις - απαντήσεις



ΑΛΓΕΒΡΑ

Κεφάλαιο 1ο

Αλγεβρικές Παραστάσεις

Α. 1. 1

1. Τι ονομάζετε δύναμη α^ν με βάση τον πραγματικό α και εκθέτη το φυσικό ν > 1;

- Ονομάζεται δύναμη α^ν με βάση τον αριθμό α και εκθέτη το φυσικό $\nu > 1$, το γινόμενο από ν παράγοντες ίσους με α.

$$\text{Δηλαδή, } \alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \cdots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

- Ορίζουμε ακόμη:

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^0 = 1 \text{ με } \alpha \neq 0$$

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \text{ με } \alpha \neq 0 \text{ και } \nu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots..$$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων με βάση πραγματικό και εκθέτη ακέραιο ;

- Για δυνάμεις, με εκθέτες γενικά ακέραιους αριθμούς, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α. $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$ **β.** $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ **γ.** $\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha\cdot\beta)^\nu$

δ. $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu = \frac{\beta^\nu}{\alpha^\nu}$ **ε.** $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$ **στ.** $\left(\alpha^\mu\right)^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$

- Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

3. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού α;

- Ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α και συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ ο θετικός αριθμός **x** που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό α.

$$\text{Επομένως : } \sqrt{\alpha} = \mathbf{x} \text{ αν και μόνο αν } x^2 = \alpha \quad x, \alpha > 0$$

$$\text{Ορίζουμε ακόμη } \sqrt{0} = 0$$

www.e-maths.gr

4. Ποιες είναι οι ιδιότητές των ριζών;

- Από τον ορισμό τις τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού $\alpha \geq 0$ έχουμε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$
- Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$
- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

Α. 1. 2

5. Τι ονομάζεται αλγεβρική παράσταση;

- Ονομάζεται αλγεβρική παράσταση κάθε έκφραση που συνδυάζει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

6. Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης;

- Ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης, ο αριθμός που θα προκύψει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις.

7. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ακέραια;

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

8. Τι ονομάζεται μονώνυμο και ποια τα μέρη από τα οποία αποτελείται;

- Ονομάζεται μονώνυμο μια αλγεβρική παράσταση, στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ αριθμού και μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών.
- Σε ένα μονώνυμο, ο αριθμητικός παράγοντας που γράφεται πρώτος ονομάζεται συντελεστής του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών ονομάζεται κύριο μέρος του μονωνύμου.

9. Ποια μονώνυμα ονομάζονται όμοια;

- Ονομάζονται όμοια δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

www.e-maths.gr

10. Ποια μονώνυμα ονομάζονται ίσα και ποια αντίθετα;

- Ονομάζονται ίσα δύο μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.
- Ονομάζονται αντίθετα δύο μονώνυμα που έχουν αντίθετο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.

11. Τι ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;

- Ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

12. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό μονώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;

- Ονομάζουμε σταθερό μονωνύμο κάθε αριθμό και μηδενικό μονώνυμο τον αριθμό 0.
- Το μηδενικό μονώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

13. Πως ορίζεται το άθροισμα ομοίων μονωνύμων;

- Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

14. Τι ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων;

- Ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων η πρόσθεση ομοίων μονωνύμων.

15. Πως ορίζεται το γινόμενο μονωνύμων;

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το **άθροισμα** των **εκθετών** της.

Α. 1. 3

16. Τι ονομάζεται πολυώνυμο;

- Ονομάζεται πολυώνυμο ένα άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια.

17. Τι ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;

- Ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς την μεταβλητή αυτή.

www.e-maths.gr

18. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό πολυώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;

- Ονομάζουμε σταθερό πολυώνυμο κάθε αριθμό και μηδενικό πολυώνυμο τον αριθμό 0.
- Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά πολυώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

Α. 1. 4

19. Πως πολλαπλασιάζουμε:

α. Μονώνυμο με πολυώνυμο ;

β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο ;

Για να πολλαπλασιάσουμε:

α. Μονώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Α. 1. 5

20. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

- Ονομάζεται ταυτότητα κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών αυτών.

21. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

ii. $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

iii. $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

iv. $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

v. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$

vi. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

vii. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

www.e-maths.gr

Απόδειξη

i. $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^2+\underline{\alpha\cdot\beta}+\underline{\beta\cdot\alpha}+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\cdot\beta+\beta^2$

ii. $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\underline{\alpha\cdot\beta}-\underline{\beta\cdot\alpha}+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\cdot\beta+\beta^2$

iii. $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta)=(\alpha^2+2\alpha\cdot\beta+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta)=$

$=\alpha^3+\underline{2\alpha^2\cdot\beta}+\underline{\alpha\cdot\beta^2}+\underline{\beta\cdot\alpha^2}+\underline{2\alpha\cdot\beta^2}+\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2\cdot\beta+3\alpha\cdot\beta^2+\beta^3$

iv. $(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)^2\cdot(\alpha-\beta)=(\alpha^2-2\alpha\cdot\beta+\beta^2)\cdot(\alpha-\beta)=$

$=\alpha^3-\underline{2\alpha^2\cdot\beta}+\underline{\alpha\cdot\beta^2}-\underline{\beta\cdot\alpha^2}+\underline{2\alpha\cdot\beta^2}-\beta^3=\alpha^3-3\alpha^2\cdot\beta+3\alpha\cdot\beta^2-\beta^3$

v. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha-\beta^2$

vi. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\underline{\alpha^2\beta}+\underline{\alpha\beta^2}-\underline{\beta\alpha^2}-\underline{\alpha\beta^2}-\beta^3=\alpha^3-\beta^3$

vii. $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\underline{\alpha^2\beta}+\underline{\alpha\beta^2}+\underline{\beta\alpha^2}-\underline{\alpha\beta^2}+\beta^3=\alpha^3+\beta^3$

Α. 1. 6

22. Τι ονομάζεται παραγοντοποίηση;

- Ονομάζεται παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου ή γενικότερα μιας αλγεβρικής παράστασης η διαδικασία μετατροπής της παράστασης σε γινόμενο.

23. Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης;

Κοινός παράγοντας

Όταν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

$$\alpha\beta+\alpha\gamma-\alpha\delta=\alpha(\beta+\gamma-\delta)$$

Ομαδοποίηση

Όταν όλοι οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες έτσι ώστε:

$$\alpha\beta+\alpha\gamma-\delta\beta-\delta\gamma=\alpha(\beta+\gamma)-\delta(\beta+\gamma)=(\beta+\gamma)(\alpha-\delta)$$

- Κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα,
- Οι παραστάσεις που μένουν μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα να είναι ίδιες.

www.e-maths.gr

Διαφορά τετραγώνων

Η μέθοδος αυτή παραγοντοποίησης στηρίζεται στην ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$, στην οποία αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε μια διαφορά δύο **τελείων τετραγώνων** σε γινόμενο.

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

Άθροισμα ή διαφορά κύβων

Η παραγοντοποίηση του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο κύβων βασίζεται στις δύο γνωστές μας ταυτότητες:

$$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$$
$$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$$

Σε κάθε μια από τις οποίες αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε τη διαφορά ή το άθροισμα δύο **κύβων** σε γινόμενο.

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

Ανάπτυγμα τετραγώνου

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2,$$

τότε θα γίνει αντίστοιχα

$$(\alpha + \beta)^2 \quad \text{ή} \quad (\alpha - \beta)^2,$$

που είναι γινόμενα παραγόντων αφού :

$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$ και $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$
$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει τη μορφή $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ έχουμε:

$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta =$

$\underline{x^2} + \underline{x\,\alpha} + \underline{x\,\beta} + \underline{\alpha\beta} =$ (Ομαδοποίηση)

$x(x + \alpha) + \beta(x + \alpha) =$ (Κοινός παράγοντας)

$(x + \alpha)(x + \beta)$

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)\cdot(x + \beta)$$

www.e-maths.gr

Α. 1. 8

24. Τι ονομάζεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) και τι Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

Α. 1. 9

25. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή;

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή όταν είναι κλάσμα με όρους πολυώνυμα.

26. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται;

Μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιέχει **εκτός απ' αυτές που μηδενίζουν τον παρανομαστή**, αφού όπως γνωρίζουμε δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

27. Πότε μια ρητή αλγεβρική παράσταση μπορεί να απλοποιηθεί;

Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.

Α. 1. 10

28. Πως κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις;

Για να κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθούμε τους κανόνες που ισχύουν για τις πράξεις των κλασμάτων.

www.e-maths.gr

Δηλαδή:

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta}$ και $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta}$

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}$ και $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta}$ $\beta\delta\neq 0$

$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$ και $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$ $\beta\gamma\delta\neq 0$

$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$ $\beta\gamma\delta\neq 0$

Κεφάλαιο 2ο - Εξισώσεις Ανισώσεις

Α. 2. 1

29. Τι ονομάζεται εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο;

- Ονομάζεται εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής $\alpha x+\beta=0$ με $\alpha\neq 0$.
- Ο α λέγεται συντελεστής του αγνώστου και ο β σταθερός (ή γνωστός) όρος.
- Ρίζα της εξίσωσης ονομάζεται ο αριθμός που αν αντικαταστήσει τον x στην εξίσωση προκύπτει ισότητα που αληθεύει.
- Επίλυση μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την οποία βρίσκουμε τη λύση της.

30. Πότε η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ έχει μία λύση πότε είναι αδύνατη και πότε αόριστη;

- Αν $\alpha\neq 0$, η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ έχει **μοναδική λύση** την $x=-\frac{\beta}{\alpha}$
- Αν $\alpha=0$, και $\beta\neq 0$ η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ γράφεται $0\cdot x=-\beta$ και δεν έχει λύση **(αδύνατη),**
- Αν $\alpha=0$, και $\beta=0$, η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ γράφεται $0\cdot x=0$ οπότε κάθε αριθμός είναι λύση της **(ταυτότητα ή αόριστη).**

www.e-maths.gr

Α. 2. 2

31. Τι ονομάζεται εξίσωση2ου βαθμού, με έναν άγνωστο ;

- Ονομάζεται εξίσωση δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha \neq 0$.
- Οι αριθμοί α και β ονομάζονται συντελεστές του δευτεροβαθμίου και πρωτοβαθμίου όρου αντίστοιχα και ο αριθμός γ σταθερός όρος.
- Επίλυση μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την οποία βρίσκουμε τις τιμές του x που την επαληθεύουν.

32. Πως λύνουμε εξίσωση της μορφής;

α. $\alpha x^2 + \beta x = 0$ με $\alpha \neq 0$

β. $\alpha x^2 + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

Αρχικά θυμόμαστε ότι: **Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$**

α. Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = 3x$, εργαζόμαστε ως εξής:

$x^2 = 3x$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x = 0$ ή $x - 3 = 0$, επομένως $x = 0$ ή $x = 3$

β. Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 - 9 = 0$, εργαζόμαστε ως εξής:

1ος τρόπος

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 - 3^2 = 0$

$(x - 3)(x + 3) = 0$

$x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$x = 3$ ή $x = -3$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 3$ και $x = -3$

2ος τρόπος

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \sqrt{9}$ ή $x = -\sqrt{9}$

$x = 3$ ή $x = -3$

Όταν α είναι θετικός, η εξίσωση $x^2 = \alpha$ έχει δύο λύσεις τις $x = \sqrt{\alpha}$ και $x = -\sqrt{\alpha}$

Αν όμως α αρνητικός τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

www.e-maths.gr

33. Πότε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού:

α. **έχει δύο άνισες ρίζες;**

β. **έχει μια διπλή ρίζα ;**

γ. **δεν έχει ρίζες;**

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς, $\alpha \neq 0$ και διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$:

α. έχει δύο ρίζες άνισες που δίνονται από τον τύπο $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, όταν $\Delta > 0$

β. έχει δύο ρίζες ίσες που δίνονται από τον τύπο $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$, όταν $\Delta = 0$

γ. δεν έχει ρίζες, όταν $\Delta < 0$

34. Πως παραγοντοποιείται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όταν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει λύσεις τις ρ_1, ρ_2;

- Αν ρ_1, ρ_2 είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)$$

Α. 2. 4

35. Τι ονομάζεται κλασματική εξίσωση και πότε ορίζεται αυτή;

Ονομάζεται κλασματική εξίσωση, κάθε εξίσωση που περιέχει άγνωστο στον παρονομαστή. Για να ορίζεται μια κλασματική εξίσωση πρέπει οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός.

Α. 2. 5

36. Πως συγκρίνουμε (διατάσουμε) δύο πραγματικούς αριθμούς;

Αν οι α και β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε:

- Λέμε ότι ο α είναι μεγαλύτερος του β και το συμβολίζουμε $\alpha > \beta$, όταν $\alpha - \beta > 0$.
- Λέμε ότι ο α είναι μικρότερος του β και το συμβολίζουμε $\alpha < \beta$, όταν $\alpha - \beta < 0$.
- Λέμε ότι ο α είναι ίσος με τον β και το συμβολίζουμε $\alpha = \beta$, όταν $\alpha - \beta = 0$.

www.e-maths.gr

Αντίστροφα

- Αν $\alpha - \beta > 0$, τότε ο α είναι μεγαλύτερος του β.
- Αν $\alpha - \beta < 0$, τότε ο α είναι μικρότερος του β.
- Αν $\alpha - \beta = 0$, τότε ο α είναι ίσος με τον β.

37. Τι ονομάζεται ανισότητα και ποια τα χαρακτηριστικά της;

- Η σχέση της μορφής $\alpha > \beta$ ονομάζεται ανισότητα με μέλη, πρώτο και δεύτερο, τα α και β αντίστοιχα.
- Οι ανισότητες $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ λέγονται ομοιόστροφες (έχουν την ίδια φορά).
- Οι ανισότητες $\alpha < \beta$ και $\gamma > \delta$ λέγονται ετερόστροφες (έχουν αντίθετη φορά).
- Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός α είναι ταυτόχρονα μεγαλύτερος του x και μικρότερος του y, γράφουμε τη « διπλή » ανισότητα $x < \alpha < y$.
- Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός x είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό α, γράφουμε $x \geq \alpha$.

38. Ποιες είναι οι ιδιότητες της διάταξης;

- Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δηλαδή αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
- Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.

  Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.

  Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς.

  Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

  Δηλαδή αν α, β, γ, δ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

www.e-maths.gr

Κεφάλαιο 3ο - Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Α. 3. 1

39. Τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και τι λύση της;

- Ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους κάθε εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$.
- Λύση της γραμμική εξίσωση $αx + βy = γ$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

40. Πως παριστάνεται γραφικά κάθε εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$ με $α \neq 0$ ή $β \neq 0$ και τι ισχύει γι' αυτή;

Κάθε εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$ με $α \neq 0$ ή $β \neq 0$ παριστάνεται γραφικά με μια ευθεία $ε$ έτσι ώστε:

- Αν ένα σημείο ανήκει στην ευθεία, $ε$ οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $αx + βy = γ$.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση $αx + βy = γ$ το σημείο ανήκει στην ευθεία $ε$.

41. Τι παριστάνουν οι εξισώσεις;

α. $y = k$ με $k \neq 0$

β. $y = 0$

γ. $x = k$ με $k \neq 0$

δ. $x = 0$

α. Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, k)$ π.χ η ευθεία $y = 3$

β. Η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα $x'x$.

γ. Η εξίσωση $x = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(k, 0)$ π.χ. η ευθεία $x = 3$

δ. Η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα $y'y$.

www.e-maths.gr

42. Πως βρίσκουμε τις τομές μιας ευθείας $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$;

Κάθε σημείο του $x'x$ έχει τεταγμένη 0, οπότε και το Α, σημείο τομής της $\alpha x + \beta y = \gamma$ με τον $x'x$, θα έχει τεταγμένη $y = 0$ και τετμημένη x έτσι ώστε,

$\alpha x + \beta \cdot 0 = \gamma$ ή $\alpha x = \gamma$ ή $x = \frac{\gamma}{\alpha}$. Άρα $A(\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$

Κάθε σημείο του $y'y$ έχει τετμημένη 0, οπότε και το Β, σημείο τομής της $\alpha x + \beta y = \gamma$ με τον $y'y$, θα έχει τετμημένη $x = 0$ και τεταγμένη y έτσι ώστε,

$\alpha \cdot 0 + \beta y = \gamma$ ή $\beta y = \gamma$ ή $y = \frac{\gamma}{\beta}$. Άρα $B(0, \frac{\gamma}{\beta})$

Παράδειγμα: Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) $3x - y = 1$ με τους άξονες.

Για $x = 0$ έχουμε $3 \cdot 0 - y = = 1$ ή $-y = 1$ ή $y = -1$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -1)$.

Για $y = 0$ έχουμε $3x - 0 = 1$ ή $3x = 1$ ή $x = \frac{1}{3}$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{1}{3}, 0)$.

Α. 3. 2

43. Τι ονομάζεται;

α. Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

β. Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

γ. Επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

α. Ονομάζεται γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ένα σύστημα της μορφής, $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ με ένα τουλάχιστον από τα α, β και α', β' $\neq 0$.

β. Ονομάζεται λύση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y κάθε ζεύγος (x_0, y_0) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

γ. Ονομάζεται επίλυση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y, η διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε κάθε ζεύγος (x_0, y_0) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

www.e-maths.gr

44. Πως γίνεται η γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y και πότε αυτό έχει μία λύση, είναι αδύνατο, ή είναι αόριστο;

Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y, σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες που παριστάνουν τις εξισώσεις του συστήματος και:

- αν τέμνονται το σύστημα έχει **μία λύση,** τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.
- αν είναι παράλληλες δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση και λέμε ότι είναι **αδύνατο.**
- Αν **συμπίπτουν (ταυτίζονται)** έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** και λέμε ότι είναι **αόριστο**.

Κεφάλαιο 4ο - Συναρτήσεις

Α. 4. 1

45. Τι γνωρίζεται για την συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha > 0$;

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$ με $\alpha > 0$ είναι μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή**.
- Η παραβολή που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$ με $\alpha > 0$ έχει **κορυφή** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x'x και πάνω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \geq 0$.
- Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha > 0$ παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.
- Για αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $y = \alpha x^2$ με $\alpha > 0$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y'y.
- Όταν η τιμή του α αυξάνεται, τότε το «άνοιγμα» της παραβολή «κλείνει».

Α. 4. 1

46. Τι γνωρίζεται για την συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha < 0$;

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$ με $\alpha < 0$ είναι μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή**.
- Η παραβολή που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$ με $\alpha < 0$ έχει **κορυφή** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x'x και κάτω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \leq 0$.
- Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha < 0$ παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$,
- Για αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $y = \alpha x^2$ με $\alpha < 0$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y'y.
- Όταν η απόλυτη τιμή του α αυξάνεται, τότε το «άνοιγμα» της παραβολή «κλείνει».

Α. 4. 2

47. Ποια συνάρτηση ονομάζεται τετραγωνική;

Ονομάζεται τετραγωνική κάθε συνάρτηση της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$.

48. Τι γνωρίζεται για τη συνάρτησης $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$;

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ είναι παραβολή με:

- Κορυφή το σημείο $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$ όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$
- Άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Κ και έχει εξίσωση $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\alpha > 0$, η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = -\frac{\Delta}{4\alpha}$ όταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\alpha < 0$, η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παίρνει **μέγιστη τιμή** $y = -\frac{\Delta}{4\alpha}$ όταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

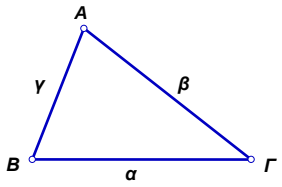


(ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ -ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ)

Κεφάλαιο 1ο – Γεωμετρία

Β. 1. 1

49. Τι ονομάζεται Τρίγωνο και ποια τα κύρια στοιχεία του;

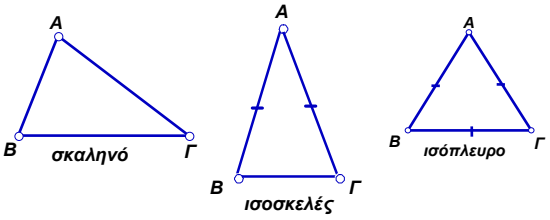


- Ονομάζεται **τρίγωνο** το επίπεδο σχήμα που ορίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία τα οποία συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα.
- Τα **κύρια στοιχεία** ενός τριγώνου είναι, οι πλευρές του και οι γωνίες του.
- **Πλευρές** του τριγώνου ονομάζονται τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές του.
- **Γωνίες** του τριγώνου ονομάζονται οι γωνίες που ορίζονται από τις πλευρές του.

50. Ποια είναι τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές, και ως προς τις γωνίες τους;

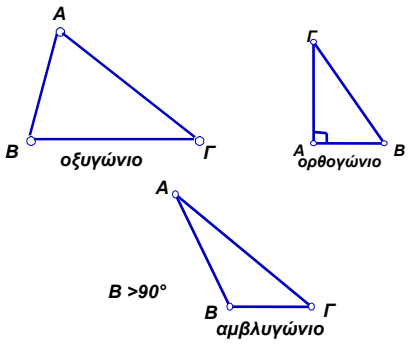
Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις πλευρές του λέγεται:

- **σκαληνό**, αν οι πλευρές του είναι άνισες,
- **ισοσκελές**, αν δύο πλευρές του είναι ίσες,
- **ισόπλευρο**, αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες.



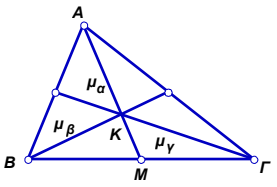
Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις γωνίες του λέγεται:

- **οξυγώνιο**, αν όλες του οι γωνίες είναι οξείες,
- **ορθογώνιο**, αν μία γωνία του είναι ορθή,
- **αμβλυγώνιο**, αν μία γωνία του είναι αμβλεία.

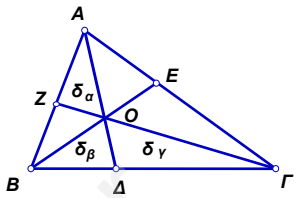


www.e-maths.gr

51. Τι ονομάζεται διάμεσος, διχοτόμος, ύψος, τριγώνου.

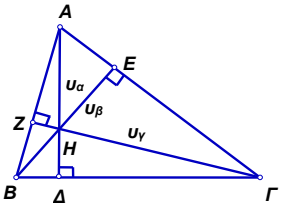


- **Διάμεσος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή του με το μέσο της απέναντι πλευράς. Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις διάμεσους που συμβολίζονται μ_α , μ_β , μ_γ αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.



- **Διχοτόμος** μιας γωνίας ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την κορυφή της γωνίας με την απέναντι πλευρά και διχοτομεί τη γωνία αυτή.

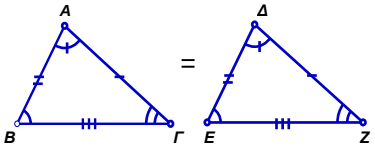
  Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις διχοτόμους που συμβολίζονται δ_α, δ_β, δ_γ αντίστοιχα και διέρχονται από το ίδιο σημείο.



- **Ύψος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μια κορυφή του, κάθετο προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.

  Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρία ύψη που συμβολίζονται υ_α , υ_β , υ_γ αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.

52. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα ;



Δύο τρίγωνα λέγονται ίσα, όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις ομόλογες πλευρές τους (πλευρές απέναντι από ίσες γωνίες) ίσες μία προς μία.

Έτσι αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα τότε:

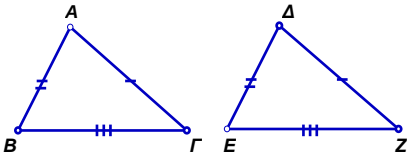
$$\left.\begin{array}{l} A = \Delta \\ B = E \\ \hat{\Gamma} = Z \end{array}\right\} \text{ Γωνίες} \qquad \left.\begin{array}{l} AB = \Delta E \\ B\Gamma = EZ \\ A\Gamma = \Delta Z \end{array}\right\} \text{ Ομόλογες πλευρές}$$

www.e-maths.gr

53. Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα;

(Κριτήρια ισότητας τριγώνων)

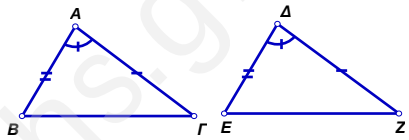
Κριτήριο (Π. Π. Π.)



- Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι τρεις πλευρές του ενός, είναι ίσες με τις τρεις πλευρές του άλλου μία προς μία.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AB = \Delta E \\ B\Gamma = EZ \\ A\Gamma = \Delta Z \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$$

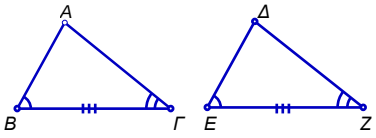
Κριτήριο (Π. Γ. Π.)



- Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι δύο πλευρές και η περιεχόμενη σ' αυτές γωνία του ενός, είναι ίσες με τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη σ' αυτές γωνία του άλλου αντίστοιχα.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AB = \Delta E \\ A\Gamma = \Delta Z \\ A = \Delta \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$$

Κριτήριο (Γ. Π. Γ.)



- Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία πλευρά και οι προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες του ενός είναι ίσες με την μία πλευρά και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες του άλλου αντίστοιχα.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

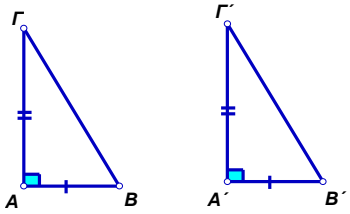
$$\left.\begin{array}{l} B\Gamma = EZ \\ B = E \\ \hat{\Gamma} = Z \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$$

www.e-maths.gr

54. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;

(Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων)

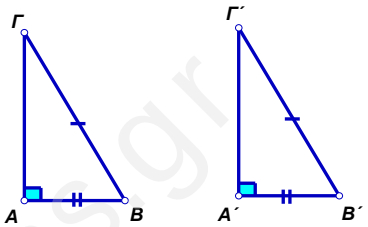
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι δύο κάθετες πλευρές του ενός είναι ίσες με τις δύο κάθετες πλευρές του άλλου.



- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} A = A' = 90^o \\ AB = A'B' \\ A\Gamma = A'\Gamma' \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

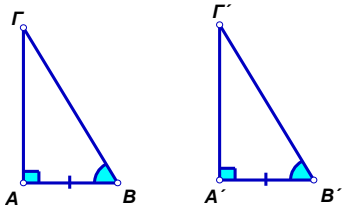
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά του ενός είναι ίσες με την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά του άλλου.



- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} A = A' = 90^o \\ AB = A'B' \\ B\Gamma = B'\Gamma' \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

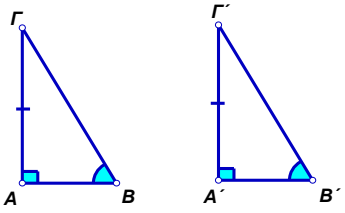
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία κάθετη πλευρά και η προσκείμενη της οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με τη μία κάθετη πλευρά και την προσκείμενη της οξεία γωνία του άλλου.



- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} A = A' = 90^o \\ AB = A'B' \\ B = B' \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία κάθετη πλευρά και η απέναντι της οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με την μία κάθετη πλευρά και την απέναντι της οξεία γωνία του άλλου.

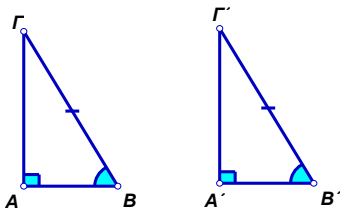


www.e-maths.gr

- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} A = A' = 90^o \\ A\Gamma = A'\Gamma' \\ B = B' \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$$

- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με την υποτείνουσα και την αντίστοιχη οξεία γωνία του άλλου.



- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} A = A' = 90^o \\ B\Gamma = B'\Gamma' \\ B = B' \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$$

Συμπέρασμα:

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν

- **Δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή**
- **Μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.**

55. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ;

- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος.

56. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;

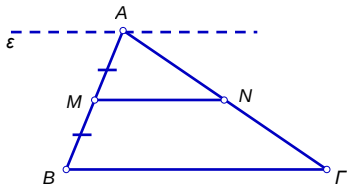
- Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.

www.e-maths.gr

57. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του , αυτή διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και το σημείο Μ μέσο της πλευράς του ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν. Θα δείξουμε ότι ΑΝ = ΝΓ.



Από το σημείο Α φέρνουμε μια βοηθητική ευθεία ε // ΒΓ. Οι παράλληλες ευθείες ε, ΜΝ και ΒΓ ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΒ, άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΓ. Επομένως ΑΝ = ΝΓ.

Β. 1. 2

58. Τι ονομάζεται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων και με τι ισούται;

- Λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που συμβολίζεται $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$, ονομάζεται ο αριθμός λ για τον οποίο ισχύει ΓΔ = λ·ΑΒ.
- Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με το λόγο των μηκών τους εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

59. Πότε τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ;

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β και δ όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα

τμήματα **α, β, γ, δ.**

Τα ευθύγραμμα τμήματα **α, δ** ονομάζονται **άκροι όροι,** ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα **β, γ** ονομάζονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.

60. Ποιες είναι οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών ;

Σε μια αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα **α, β, γ, δ** εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των αναλογιών που ισχύουν και στους αριθμούς χρησιμοποιώντας τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων. Οι σημαντικότερες από τις ιδιότητες αυτές είναι:

- Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

$$Αν\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\ τότε\ \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$$

- Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.

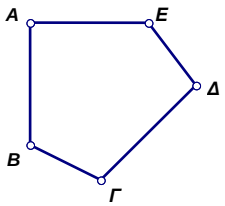
$$Αν\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\ τότε\ \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}\ ή\ \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$$

- Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

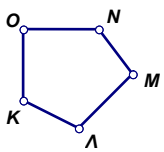
$$Αν\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\ τότε\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

Β. 1. 5

61. Πότε δύο πολύγωνα λέγονται όμοια;



Δύο πολύγωνα λέγονται **όμοια**, όταν το ένα είναι **μεγέθυνση** ή **σμίκρυνση** του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες(αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες.



Έτσι τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΟΚΛΜΝ που έχουν, $Α=Ο$, $Β=Κ$, $\hat{Γ}=Λ$, $Δ=Μ$, $Ε=Ν$

και $\frac{ΑΒ}{ΟΚ}=\frac{ΒΓ}{ΚΛ}=\frac{ΓΔ}{ΛΜ}=\frac{ΔΕ}{ΜΝ}=\frac{ΕΑ}{ΝΟ}=λ$ είναι όμοια.

Το λ ονομάζεται λόγος ομοιότητας.

62. Ποιες προτάσεις προκύπτουν από τον ορισμό της ομοιότητα δύο πολυγώνων;

Από τον ορισμό της ομοιότητας δύο πολυγώνων προκύπτουν οι επόμενες προτάσεις.

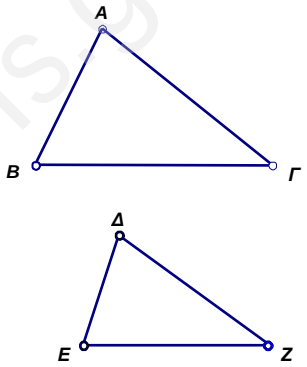
- Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.
- Δύο ίσα πολύγωνα είναι και όμοια, με λόγο ομοιότητας 1.
- Κάθε πολύγωνο είναι όμοιο με τον εαυτό του.
- Δύο πολύγωνα όμοια προς τρίτο είναι και όμοια μεταξύ τους.

63. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται όμοια;

- Δύο τρίγωνα λέγονται **όμοια** όταν έχουν τις γωνίες τους **ίσες** μία προς μία και τις **ομόλογες** (αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες. Δηλαδή

  αν $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \approx \overset{\triangle}{\Delta EZ}$, τότε $A = \Delta$, $B = E$, $\hat{\Gamma} = Z$

  και $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$



- Ο λόγος των αντιστοίχων (ομολόγων) πλευρών τους ονομάζεται <u>λόγος ομοιότητας</u> και συμβολίζεται με λ.

64. Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;

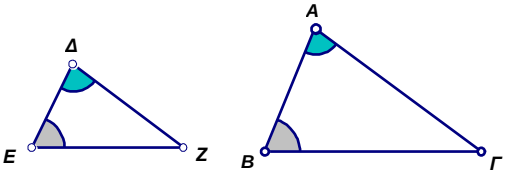
(Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων)

- Δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν δύο γωνίες του ενός είναι ίσες με δύο γωνίες του άλλου μία προς μία.

  Αν δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν

  $A = \Delta$, $B = E$, τότε $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \approx \overset{\triangle}{\Delta EZ}$

  και επομένως $\hat{\Gamma} = Z$ και $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$



Β. 1. 6

65. Με τι ισούται ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων;

- Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.

www.e-maths.gr

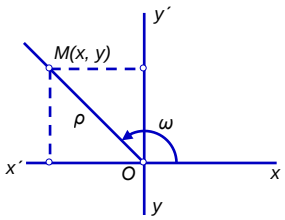
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – Τριγωνομετρία

Β. 2. 1

66. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας;

- Έστω ω ($0° \leqq \omega \leqq 180°$) η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox, όταν αυτός στραφεί κατά τη θετική φορά.
- Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο M(x, y) με xOM = ω και $OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ τότε ορίζουμε:

- $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$
- $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$
- $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}$

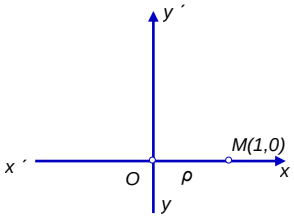


- Το ημω και συνω παίρνουν τιμές από το – 1 έως το +1.
- Είναι δηλαδή $-1 \leqq \eta\mu\omega \leqq 1$ και $-1 \leqq \sigma\upsilon\nu\omega \leqq 1$
- Η εφω παίρνει οποιαδήποτε τιμή.
- Αν το M(x, y) βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο, τότε ημω >0, συνω >0, εφω >0
- Αν το M(x, y) βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο, τότε ημω> 0, συνω<0, εφω<0

67. Ποιοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω = 0° ή ω = 90° ή ω = 180°;

Αν το M είναι σημείο του ημιάξονα Ox π.χ. το M(1,0), τότε ω = xOM = 0° και ρ = OM = 1 οπότε έχουμε:

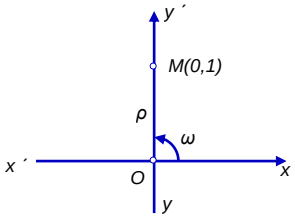
- $\eta\mu 0° = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$
- $\sigma\upsilon\nu 0° = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$
- $\varepsilon\varphi 0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$



www.e-maths.gr

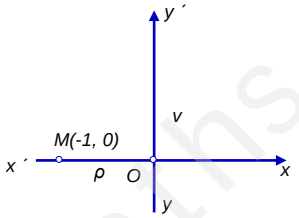
Αν το Μ είναι σημείο του ημιάξονα Oy π.χ. το Μ(0, 1), τότε ω = xOM = 90° και ρ = ΟΜ = 1 οπότε έχουμε:

- $\eta\mu 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$
- $\sigma\upsilon\nu 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$
- $\varepsilon\varphi 90^\circ$ δεν ορίζεται, αφού $x = 0$



Αν το Μ είναι σημείο του ημιάξονα Ox' π.χ. το σημείο Μ(–1, 0), τότε ω = xOM = 180° και ρ = ΟΜ = 1 οπότε έχουμε:

- $\eta\mu 180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$
- $\sigma\upsilon\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = 1$
- $\varepsilon\varphi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$



Β. 2. 2

68. Ποιες σχέσεις συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών;

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και (180° - ω) ισχύουν:

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

Β. 2. 3

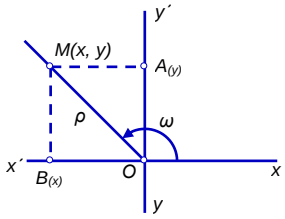
69. Να αποδείξετε ότι για μια οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν οι τύποι:

α. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ **και** **β.** $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

www.e-maths.gr

Απόδειξη α

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 = \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} =$$

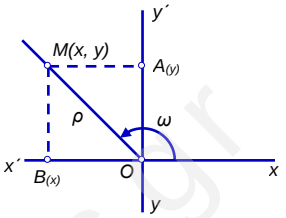


$$\frac{y^2 + x^2}{\rho^2} = \frac{OA^2 + OB^2}{\rho^2} \underline{\underline{\ OB = AM\ }}$$

$$\frac{OA^2 + AM^2}{\rho^2} \underline{\underline{\ \text{Πυθ. θεώρημα}\ }} \frac{OM^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$

Απόδειξη β

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y \cdot \cancel{\rho}}{x \cdot \cancel{\rho}} = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\omega$$



Καλό διάβασμα και καλή επιτυχία!!!

www.e-maths.gr

Θέμα 1ο

Δίνονται οι αριθμοί $x=\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{5}{12}}-\sqrt{\frac{3}{8}}\sqrt{\frac{2}{3}}$ και $y=\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{9\sqrt{16}}}}$.

Α. Να αποδείξετε ότι $x=\frac{1}{3}$.

Β. Να αποδείξετε ότι $y=6$.

Γ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Lambda=\frac{\left(x^5\cdot y^{-2}\right)^4\cdot\left(x^{-1}\cdot y^{-4}\right)^{-6}}{\left(x^{-12}\cdot y^{-7}\right)^{-2}}$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $x=\sqrt{50}-\sqrt{72}-\sqrt{32}+4\sqrt{18}$ και $y=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{28}-2\sqrt{63}}{7\cdot\sqrt{14}}$

Α. Να υπολογίσετε τον αριθμό x.

Β. Να υπολογίσετε τον αριθμό y.

Γ. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\dfrac{7}{x}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

Δ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Lambda=\dfrac{\left(x^3\cdot y\right)^{-1}\cdot\left(x^4\cdot y^2\right)^2}{\left(x^4\cdot y^{-2}\right)^3\cdot\left(x^{-5}\cdot y^{-3}\right)^2}$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 3ο

Δίνονται οι αριθμοί $x=\sqrt{4+\sqrt{29-\sqrt{6+\sqrt{100}}}}$ και $y=\sqrt{18}-\sqrt{72}+\sqrt{200}-\sqrt{32}$

Α. Να υπολογίσετε τον αριθμό x.

Β. Να γράψετε τον αριθμό y στην μορφή $\beta\sqrt{2}$

Γ. Να κάνετε τις πράξεις

i) $(x-y)^2$ ii) $(y-x)(x+y)$

Δ. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{x}{y}$ σε ένα κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 4ο

Δίνεται ο αριθμός $x=3-\sqrt{8}$.

Α. Να αποδείξετε ότι $\left(3+\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)=1$.

Β. Να βρείτε τον αντίστροφο του αριθμού x.

Γ. Να υπολογίσετε την παράσταση $x+\frac{1}{x}$.

Δ. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $x^2+\frac{1}{x^2}$ ii) $(x+1)^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 5ο

Α. Να γράψετε την παράσταση $A = \sqrt{8}+\sqrt{16}-\sqrt{200}+\sqrt{50}$ στην μορφή $\alpha+\beta\sqrt{2}$, όπου α, β ακέραιοι αριθμοί.

Β. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $\left(4+3\sqrt{2}\right)^2$ ii) $\left(4-3\sqrt{2}\right)\left(4+3\sqrt{2}\right)$

Γ. Να μετατρέψετε την παράσταση $\frac{4+3\sqrt{2}}{A}$ σε ένα κλάσμα με παρονομαστή ρητό αριθμό.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 6ο

Δίνεται ο αριθμός $a = 2 + \sqrt{3}$

Α. Να βρείτε τον αντίστροφο του αριθμού a.

Β. Να υπολογίσετε την παράσταση $a + \frac{1}{a}$.

Γ. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $a^2 + \frac{1}{a^2}$ ii) $a^3 + \frac{1}{a^3}$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 7ο

Α. Να βρείτε την τιμή της παράστασης Κ = $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{3}}$

Β. Να αποδείξετε ότι $(2x-1)^3-2x(2x-1)(2x+1)+(2x+3)^2=-8x^2+20x+8$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $(2x-1)^3-2x(2x-1)(2x+1)+(2x+3)^2=24\text{K}$,
όπου Κ η τιμή της παράστασης του Α ερωτήματος.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 8ο

Δίνονται οι εξισώσεις: $x^2-7x+6=0$ και $x^2+7x+6=0$

Α. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις και μετά να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα: x^2-7x+6 και x^2+7x+6

Β. Δίνονται οι παραστάσεις: $\text{K}=\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-36}$, $\Lambda=\dfrac{x^2+7x+6}{x^2-1}$

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις Α και Β και μετά να τις απλοποιήσετε.

Γ. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $(2\text{A}+2\text{B})^2-(2\text{A}-2\text{B})^2$ είναι ανεξάρτητη του x.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 9ο

Α. Να λύσετε την εξίσωση $x^2-5x+4=0$.

Β. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις x^2-16, x^2-5x+4 και στη συνέχεια να απλοποιήσετε το κλάσμα $\dfrac{1-x}{x^2-5x+4}$

Γ. Να υπολογίσετε την παράσταση $\dfrac{1}{x^2-16}-\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1-x}{x^2-5x+4}$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 10ο

Α. Να λύσετε την εξίσωση $-2x^2 = 3x - 5$

Β. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα $\text{K} = \dfrac{-2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$ και να το απλοποιήσετε.

Γ. Να υπολογίσετε την παράσταση $\text{K} : \dfrac{(2x+5)^2}{x+1}$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 11ο

Δίνεται το πολυώνυμο P(x)= $x^3+\alpha x^2+\beta x+12$ για το οποίο ισχύει:
P(-1) = 12 και P(-3) = -30.

Α. Να αποδείξετε ότι α = -3 και β = -4

Β. Να παραγοντοποιήσετε το P(x)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 12ο

Έστω οι παραστάσεις $A(x) = 2x(3x-1)-\left(3x^2+1\right)-(x-1)(x+1)$ και

$B(x) = \left(2-3x\right)^2-\left(2x-1\right)\left(4x-3\right)$

Α. Να δείξετε ότι $A(x) = 2x^2-2x$ και $B(x) = x^2-2x+1$.

Β. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $A(x)$ και $B(x)$.

Γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$\Gamma\left(x\right) = \dfrac{x\cdot B\left(x\right)}{A\left(x\right)}$ και μετά να απλοποιήσετε την παράσταση $\Gamma(x)$.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $\Gamma(x) = \left(x-1\right)^3$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 13ο

Δίνεται η παράσταση $K = \left(\frac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x} - \frac{1}{2x^3 - 8x} \right) : \frac{x+6}{2x^2 + 4x}$

Α. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$x^3 - 4x^2 + 4x,\ 2x^3 - 8x,\ 2x^2 + 4x$

Β. Να αποδείξετε ότι $K = \frac{1}{(x-2)^2}$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{K} = 25$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 14ο

Δίνεται η παράσταση $\Lambda = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 - 5x}$

Α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Λ.

Β. Να απλοποιήσετε την παραπάνω παράσταση και να δείξετε ότι $\Lambda = \dfrac{x-2}{x+5}$

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $\Lambda^2 - 4\Lambda + 4 = 0$.

ΛΥΣΗ.

www.e-maths.gr

Θέμα 15ο

Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{K}=\dfrac{x+3}{x+1}:\left(\dfrac{x^2-9}{x^2+x}\cdot\dfrac{x}{x^2-3x}\right)$, και $\Lambda=\dfrac{x^2-3x}{\dfrac{2x-6}{x+1}}$.

Α. Να υπολογίσετε την παράσταση Κ.

Β. Να υπολογίσετε την παράσταση Λ.

Γ. Να δείξετε ότι $\dfrac{\Lambda}{\mathrm{K}}=\dfrac{x+1}{2}$.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $\left(\dfrac{\Lambda}{\mathrm{K}}\right)^2-6\left(\dfrac{\Lambda}{\mathrm{K}}\right)+9=0$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 16ο

Α. Να απλοποιηθεί η παράσταση $K = \frac{2-4x}{x^2-2x+1} \cdot \frac{1-x}{8x-4}$

Β. Να απλοποιηθεί η παράσταση $\Lambda = \frac{2x-6}{2x^2-3x} \cdot \frac{4x^2-9}{9-3x}$

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $K + \Lambda = \frac{5}{12}$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 17ο

Δίνονται οι παραστάσεις $\text{K} = \left(x^2 - 5x + 2\right)^2 - 4$ και $\Lambda = x^3 - 5x^2 - x^2 + 5x$

Α. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις Κ και Λ.

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\text{K} = 0$

Γ. Να βρείτε τις τιμές του x που έχει νόημα η αλγεβρική παράσταση $\frac{\text{K}}{\Lambda}$ και μετά να την απλοποιήσετε.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\text{K}}{\Lambda} = \sqrt{2} \cdot x$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 18ο

Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{K} = x^2(x-4)+x-4+2x(x-4)$ και $\Lambda = (x-4)^2-(4+x)(4-x)$.

Α. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις Κ και Λ.

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{K} = 0$

Γ. Να βρείτε τις τιμές του x που έχει νόημα η παράσταση $\Gamma = 2x\cdot\frac{\mathrm{K}}{\Lambda}$ και μετά να την απλοποιήσετε.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $\Gamma = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 19ο

Δίνεται η ανίσωση $\frac{x+5}{6}-\frac{x-4}{9}\le\frac{x+7}{3}$

Α. Να λύσετε την ανίσωση.

Β. Αν α η μικρότερη ακέραια λύση της παραπάνω ανίσωσης, να λύσετε την εξίσωση $x^3-2x^2-x+5+\alpha=0$ (1)

Γ. Αν β η μεγαλύτερη θετική ρίζα της εξίσωσης (1) να λύσετε την εξίσωση $x^2=\beta$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 20ο

Α. Να λύσετε την εξίσωση $3x^3+8=12x+2x^2$.

Β. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{2x-1}{2} \geq \frac{x-2(x-1)}{4}$.

Γ. Δίνεται το πολυώνυμο $p(x)=3x^3+8-12x-2x^2$ και κ η κοινή λύση της εξίσωσης και της ανίσωσης του Α και Β ερωτήματος.

i) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου p(x) για x = κ.

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση $\Lambda=\left(\sqrt{15}\right)^{\kappa}-3\sqrt{7^{\kappa}}+4\sqrt{(-5)^{\kappa}}$.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 21ο

Α. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{2(x-3)}{3}-\frac{3x-1}{2}\le\frac{x}{6}$.

Β. i) Αν β η μικρότερη θετική ακέραια λύση της παραπάνω ανίσωσης, να λύσετε την εξίσωση: $2\beta x^3=3\beta x^2+4x-6$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $x^2+\beta=0$.

Γ. Να υπολογίσετε την παράσταση $K=\frac{5\sqrt{27\beta}-2\sqrt{48}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{74+\sqrt{\beta}}}$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 22ο

Α. Να λύσετε την ανίσωση $2(x-2)-3 \geq 3(x-1)-6$.

Β. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{4x-3}{2}-\frac{x-2}{4}>\frac{3x-3}{2}$.

Γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παραπάνω δύο ανισώσεων και στη συνέχεια να ονομάσετε κ τη μεγαλύτερη κοινή θετική ακέραια λύση.

Δ. Να υπολογίσετε το βαθμό του πολυωνύμου $p(x)=4x^{k}-8x-4x^{2}+6$ και στη συνέχεια να βρείτε τα α,β,γ ώστε τα πολυώνυμα p(x), $q(x)=\alpha x^{2}+\beta x+\gamma$ να είναι ίσα.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 23ο

Α. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{2x+1}{6}-x<\frac{3-2x}{3}$.

Β. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{2}(7x-9)<x+3$.

Γ. i) Αν λ η μεγαλύτερη κοινή θετική ακέραια λύση των παραπάνω δύο ανισώσεων, να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $p(x)=\left(4x^3-5x^{\lambda}+8\right)-\left(4x^{\lambda+1}-6x^2-6x+1\right)$.

ii) Να βρεθούν τα α,β,γ ώστε τα πολυώνυμα p(x), $q(x)=\alpha x^2+(\beta+1)x+\gamma$ να είναι ίσα.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 24ο

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 2(x+1)+3(y+2)=21 \\ 4(x-2)-3(y+1)=3(x-y)+y-12 \end{cases}$ (Σ)

A. Να δείξετε ότι το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ x-y=-1 \end{cases}$ και να το λύσετε.

B. Αν η λύση του συστήματος (Σ) του προηγούμενου ερωτήματος είναι (x,y) = (2,3), τότε να βρείτε τις τιμές των α,β έτσι ώστε και το σύστημα $\begin{cases} ax+\beta y=10 \\ 5ax+2\beta y=14 \end{cases}$ να έχει την ίδια λύση (x,y) = (2,3).

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 25ο

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - 8x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ και έστω Δ η διακρίνουσα της.

Αν ισχύει $\begin{cases} \gamma - 3\Delta = 3 \\ 5\Delta - 5 = \gamma \end{cases}$

Α. Να βρείτε τη διακρίνουσα και τον αριθμό γ.

Β. Να βρείτε τον αριθμό α.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 26ο

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+5x+1=0$ (1) με $\alpha \neq 0$ και έστω Δ η διακρίνουσα της για την οποία ισχύει η σχέση $\Delta\cdot(\Delta-9)=0$. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες λύσεις τότε:

Α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Β. Να βρείτε τον αριθμό α.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 27ο

Για τους αριθμούς α και β ισχύει: $\begin{cases} \dfrac{\alpha+\beta}{15}-\dfrac{\alpha-\beta}{10}=\dfrac{1}{6} \\ 2(2\alpha+\beta)-\dfrac{1}{3}(6\alpha-3\beta)=16 \end{cases}$

Α. Να αποδείξετε ότι α = 5 και β = 2.

Β. Να βρείτε το ανάπτυγμα της παράστασης $A = 3(x+1)^2-2(-x-1)^2-4x$.

Γ. Αν ισχύει ότι $\beta \le x \le \alpha$, να δείξετε ότι $1 \le A \le 16$.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 28ο

Για τους αριθμούς α και β ισχύει: $\begin{cases} 2(2\alpha-\beta)-5=3(\alpha-\beta-1) \\ \dfrac{\alpha-1}{3}-\dfrac{\beta+2}{6}=1 \end{cases}$

Α. Να αποδείξετε ότι α = 4 και β = -2.

Β. Να βρείτε το ανάπτυγμα της παράστασης $A = 6(x-4)^2-5(-x+4)^2+16x$.

Γ. Αν ισχύει ότι $\beta \le x \le \alpha$, να δείξετε ότι $4 \le A \le 64$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 29ο

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + \alpha x + \beta$.

Α. Αν γνωρίζετε ότι $P(0) = 4$ να βρείτε το β.

Β. Αν γνωρίζετε ότι $P(1) + 2 = P(3)$ να βρείτε το α.

Γ. Για $\alpha = -3$ και $\beta = 4$ να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 26 \\ (\alpha + 5)x + \left(\dfrac{\beta + 6}{2}\right) y = 21 \end{cases}$

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $P(2x) = 0$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 30ο

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + \alpha x + \beta$.

Α. Αν γνωρίζετε ότι $P(0) = 6$ να βρείτε το β.

Β. Αν γνωρίζετε ότι $P(5) = 3P(1)$ να βρείτε το α.

Γ. Για $\alpha = -5$ και $\beta = 6$ να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2\alpha}x + \frac{6}{5\beta}y = 0,6 \end{cases}$

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $P(-2x) = 0$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 31ο

A. Να λυθεί η εξίσωση $2x^2-2x-12=0$ (1).

B. Αν x_1, x_2, είναι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης με $x_1 < x_2$, τότε:

i) Να λύσετε ως προς α και β το σύστημα $\begin{cases} x_1\cdot\alpha+x_2\cdot\beta-1=0 \\ \dfrac{-x_1\cdot\alpha-3\cdot\beta}{2}=3\alpha \end{cases}$

ii) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο P(x) = $(x-x_2)^2-(x-x_1)(x+x_1)+6x$ είναι σταθερό πολυώνυμο.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 32ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\alpha+1)x^2+(\beta-9)x+6$.

Α. Αν γνωρίζεται ότι το P(x) είναι σταθερό πολυώνυμο να βρείτε τα α,β.

Β. Αν $\alpha=-1$ και $\beta=9$ να λύσετε την ανίσωση $\frac{3x+\alpha}{2}\le 3x+1\le\frac{6x+\beta}{3}$ και να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Γ. Αν ο αριθμός κ είναι λύση της προηγούμενης ανίσωσης, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται ο αριθμός $2\kappa-5$.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 33ο

Δίνεται η ισότητα $\alpha^2+4\alpha+4+\beta^2-10\beta+25=0$. (1)

Α. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $\alpha^2+4\alpha+4$, $\beta^2-10\beta+25$.

Β. Να βρείτε τους αριθμούς α,β που επαληθεύουν την ισότητα (1).

Γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $\begin{cases} 7(x+1)+2<2(18-x) \\ x^2+3(x+1)\geq x+(x-1)(x+1) \end{cases}$

και να ελέγξετε ποιοι από τους αριθμούς α,β που βρήκατε στο ερώτημα Β, επαληθεύουν ταυτόχρονα τις παραπάνω ανισώσεις.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 34ο

Δίνεται η ισότητα $x^2+y^2-2x+4y+5=0$. (1)

Α. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις x^2-2x+1 και y^2+4y+4.

Β. Να βρείτε τους αριθμούς x,y που επαληθεύουν την ισότητα (1).

Γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $\begin{cases} 3x-3(x-1)>1-2(x-1) \\ 1-3(-2x)+x\le 2x-2(2-9x) \end{cases}$

και να ελέγξετε ποιοι από τους αριθμούς x,y που βρήκατε στο ερώτημα Β, επαληθεύουν ταυτόχρονα τις παραπάνω ανισώσεις.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 35ο

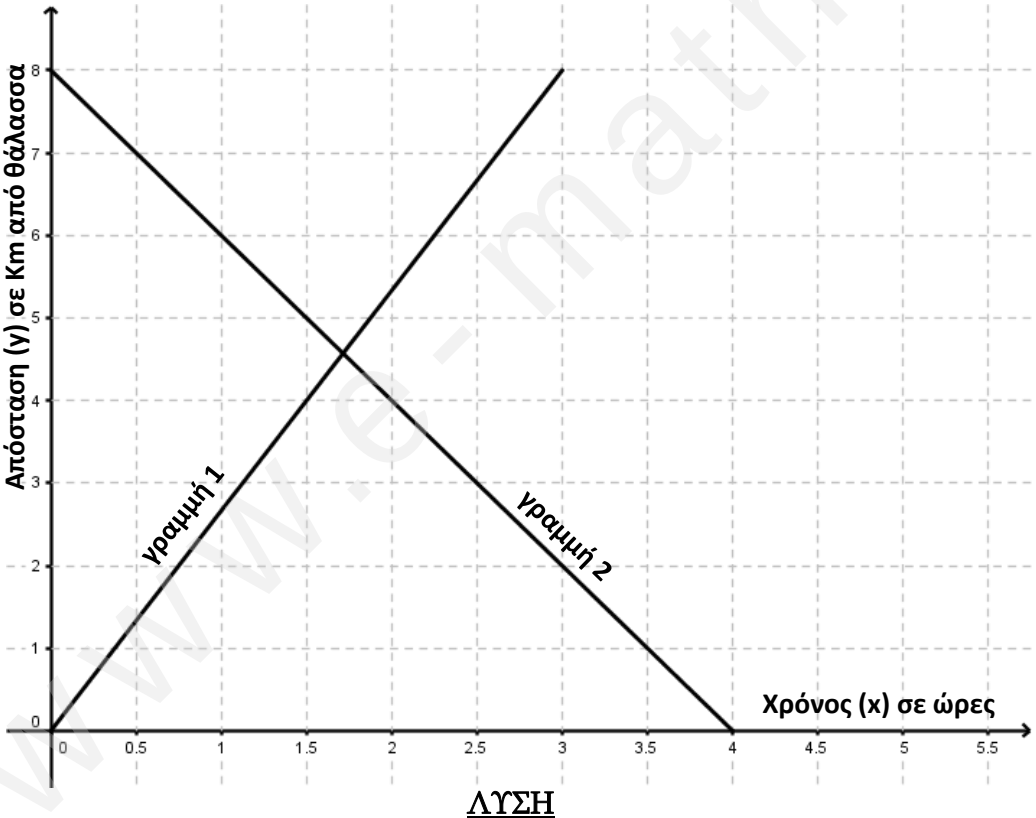
Ο Βασίλης ξεκινάει το πρωί από το σπίτι του για να πάει στη θάλασσα, η οποία απέχει 8 km. Ταυτόχρονα ξεκινάει από τη θάλασσα ο αδελφός του Βασίλη ο Κώστας, για να επιστρέψει στο σπίτι του από την ίδια διαδρομή. Τα γραφήματα που περιγράφουν την απόσταση κάθε παιδιού από τη θάλασσα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

Α. Ποια γραμμή αντιστοιχεί στον Βασίλη και ποια στον Κώστα;

Β. Τι εκφράζει το σημείο τομής των δύο γραμμών;

Γ. Σε πόση ώρα θα συναντήσει ο Βασίλης τον Κώστα;

Δ. Πως μπορούμε να περιγράψουμε αλγεβρικά τη συνάντηση τους και να βρούμε την ώρα συνάντησης;



ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 36ο

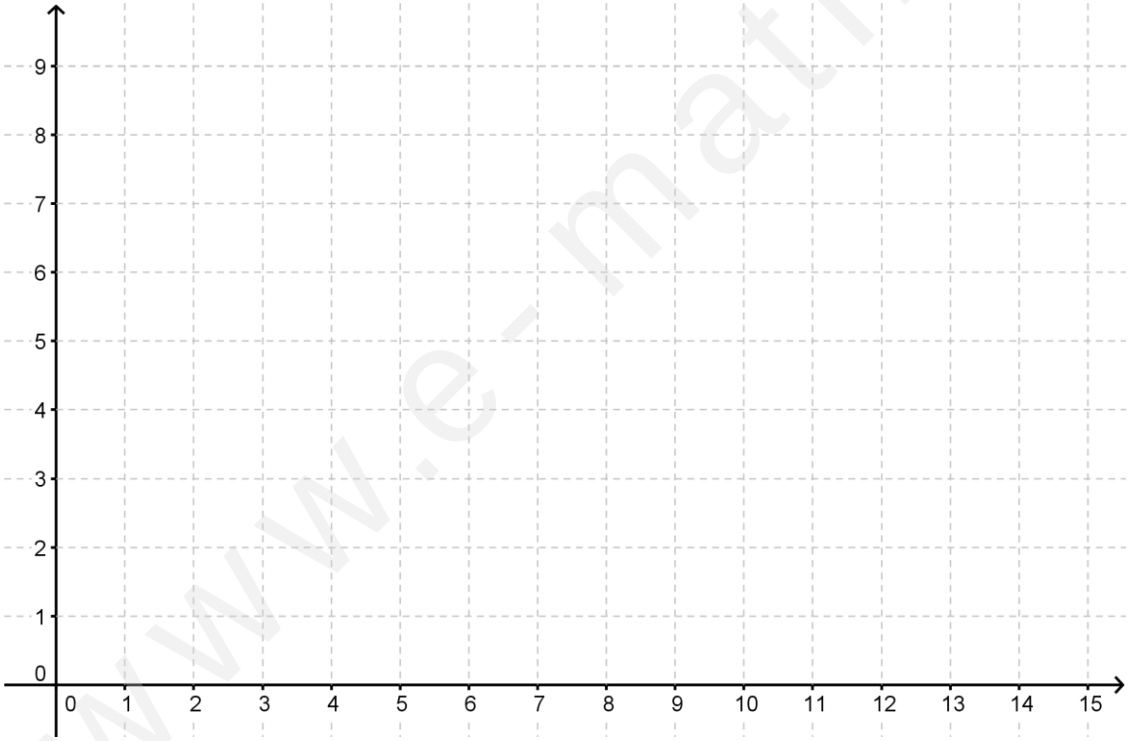
Σε ένα μικρό ξενοδοχείο υπάρχουν x δίκλινα και y τρίκλινα δωμάτια. Το ξενοδοχείο έχει συνολικά 25 κρεβάτια.

Α. Να βρείτε τη γραμμική εξίσωση που συνδέει τα x,y και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία στο παρακάτω σύστημα αξόνων.

Β. Από το σχήμα που έχετε κάνει, να εκτιμήσετε πόσα δίκλινα και πόσα τρίκλινα δωμάτια μπορεί να έχει το ξενοδοχείο.

Γ. Ποιος είναι ο λόγος που δεν μπορούμε να βρούμε με ακρίβεια, το πλήθος των δίκλινων και τρίκλινων δωματίων;

Δ. Αν γνωρίζετε ότι τα τρίκλινα δωμάτια είναι κατά 5 περισσότερα από τα δίκλινα, μπορείτε να βρείτε με ακρίβεια το πλήθος των δωματίων;



www.e-maths.gr

ΛΥΣΗ

Θέμα 37ο

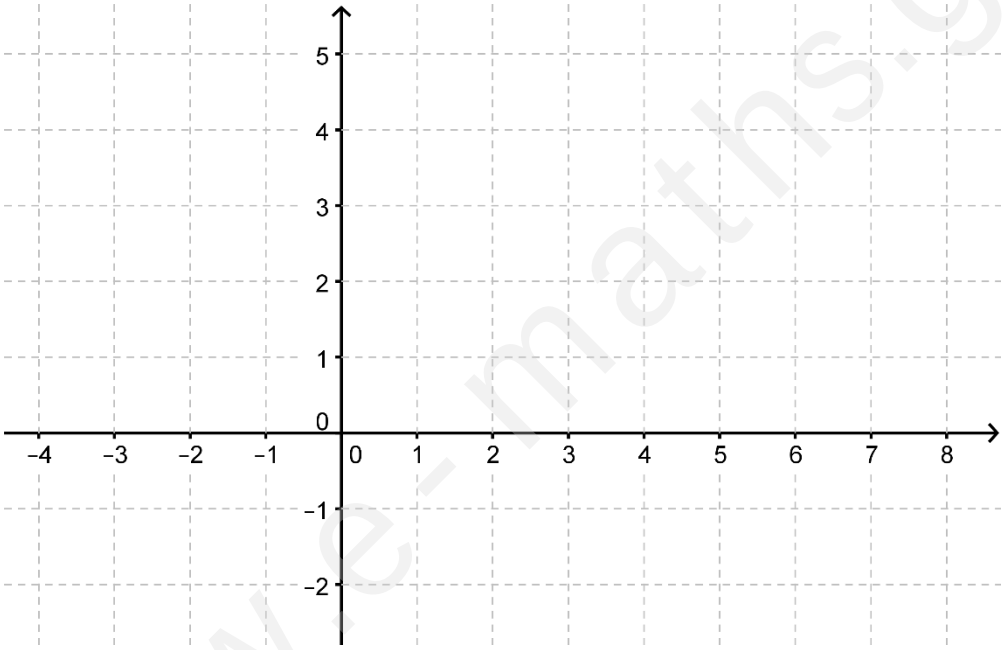
Έστω ευθεία (ε) $\alpha x + \beta y = 8$ που διέρχεται από τα σημεία Α(-2,3) και Β(5,-4).

Α. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β και να γράψετε την εξίσωση της ευθείας (ε).

Β. Για $\alpha = \beta = 8$, να βρείτε:

i) Τα σημεία Μ και Ν στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα και να σχεδιάσετε την ευθεία (ε).

ii) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου ΟΜΝ όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. (δίνεται $\sqrt{2} \simeq 1,4$)



ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 38ο

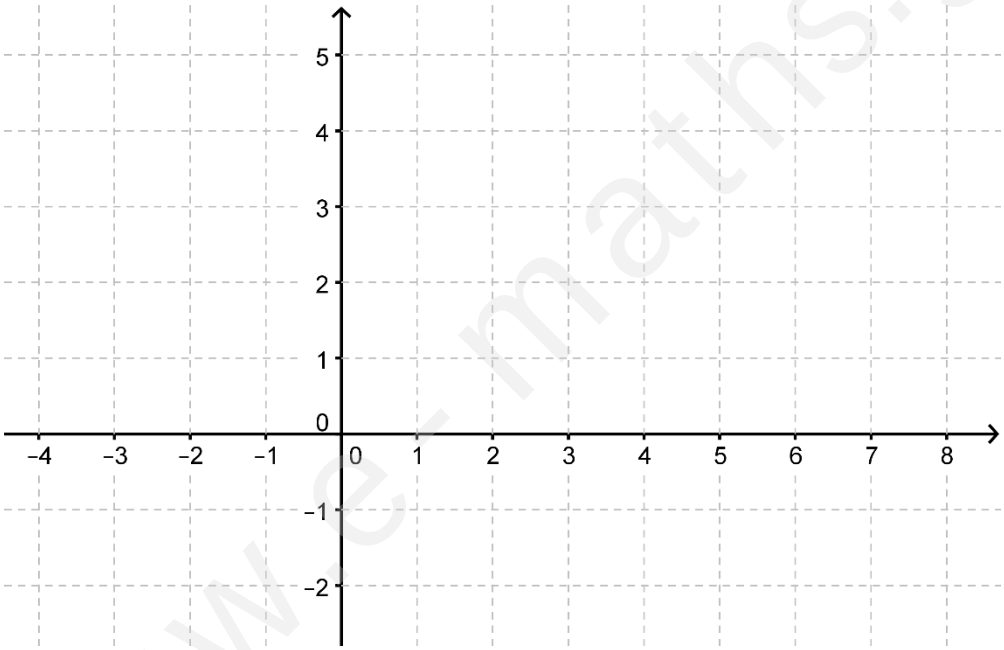
Δίνεται η ευθεία ε: $(\lambda-3)x+(\lambda+4)y=7$ (1)

Α. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία ε να είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

Β. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία ε να είναι παράλληλη στον άξονα y'y.

Γ. Να σχεδιάσετε τις παραπάνω ευθείες.

Δ. Για ποια τιμή του λ η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Κ(1,-2)



ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 39ο

Δίνονται οι ευθείες (ε): x + y = 4 και (ζ): 2x + y = 6.

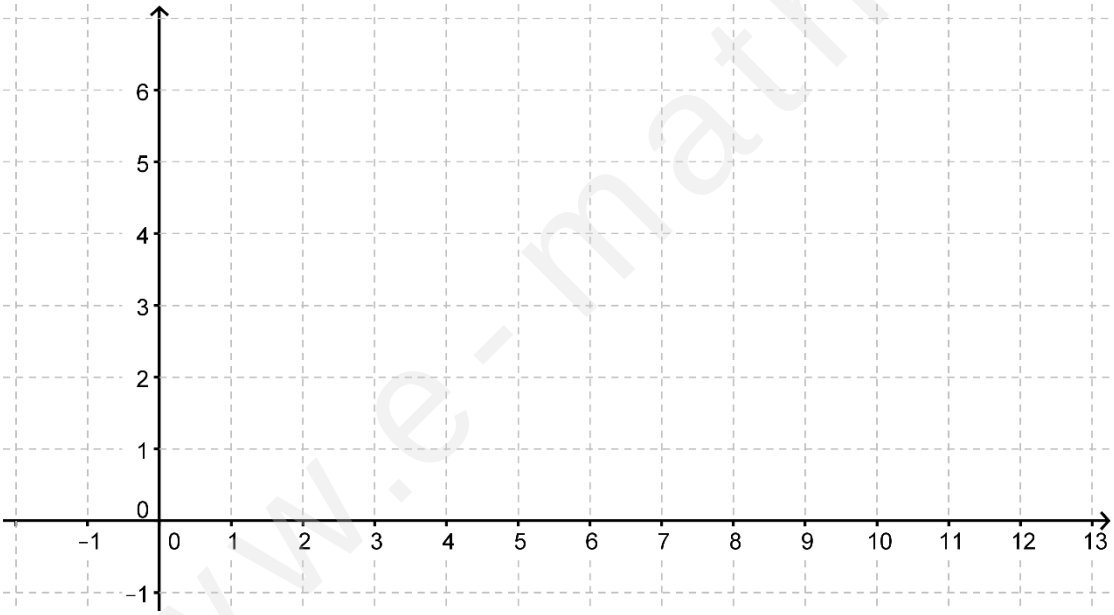
Α. Να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.

Β. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες, του σημείου τομής τους Μ.

Γ. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά ότι το παραπάνω ζεύγος, είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} x+y=4 \\ 4032x+2016y=12096 \end{cases}$

Δ. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας φ.

Ε. Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{XOM}=\varphi$;



ΛΥΣΗ

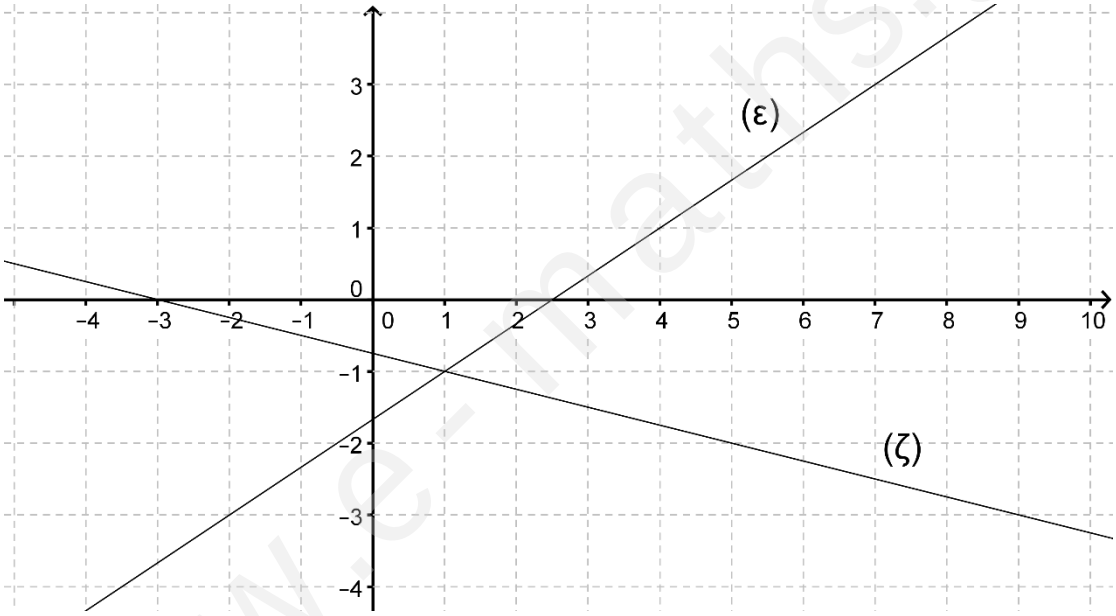
www.e-maths.gr

Θέμα 40ο

Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων οι ευθείες με εξισώσεις (ε): 2x - 3y = 5 και (ζ): x + 4y = -3.

Α. Γιατί το σύστημα $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+4y=-3 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση; Να την προσδιορίσετε γραφικά από το σχήμα.

Β. Να λύσετε αλγεβρικά με όποια μέθοδο θέλετε το σύστημα $\begin{cases} 4x+3y=1 \\ 6x-5y=11 \end{cases}$ και να αποδείξετε ότι έχει την ίδια λύση, με το σύστημα του Α ερωτήματος.



ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 41ο

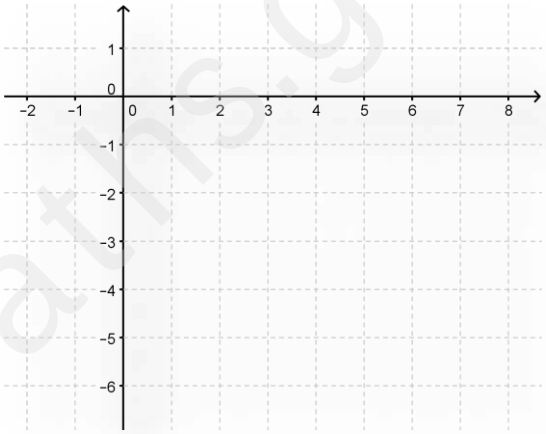
Α. Έστω οι ευθείες (ε): $2x + y = 5$ και (ζ): $3x – 2y = 4$. Να βρείτε το σημείο τομής των δύο ευθειών.

Β. Δίνεται η παραβολή $y = - x^2 + (\lambda-1)x – 3$

i) Να εξετάσετε αν η παραπάνω παραβολή έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, αιτιολογώντας την απάντηση σας.

ii) Αν το σημείο Α(2,1) ανήκει στην γραφική της παράσταση, να υπολογίσετε την τιμή του λ.

iii) Για $\lambda = 5$ να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της παραβολής, καθώς και τα κοινά σημεία της παραβολής αυτής με τους άξονες x΄x και y΄y.



iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της παραβολής που προκύπτει από το iii στο διπλανό σύστημα αξόνων.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 42ο

Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2 + \alpha x + \beta$ με α,β πραγματικούς αριθμούς.

Α. Να βρεθούν οι αριθμοί α και β, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης να διέρχεται από τα σημεία Α(-2,4) και Β(3,-1).

Β. Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο Α ερώτημα:

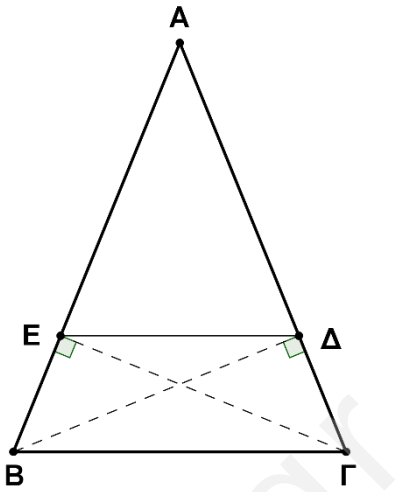
i) Να βρείτε το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα y' y καθώς και τον άξονα συμμετρίας της παραβολής.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 43ο



Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), χαράζουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.
Να δειχθεί ότι:

Α. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα.

Β. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

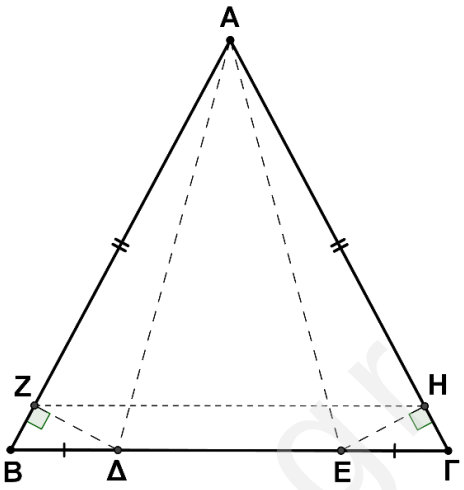
Γ. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 44ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στη βάση ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ,Ε έτσι ώστε να ισχύει ΒΔ = ΕΓ.



Α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Β. Αν ΔΖ ⊥ ΑΒ και ΕΗ ⊥ ΑΓ, να αποδείξετε ότι ΔΖ = ΕΗ.

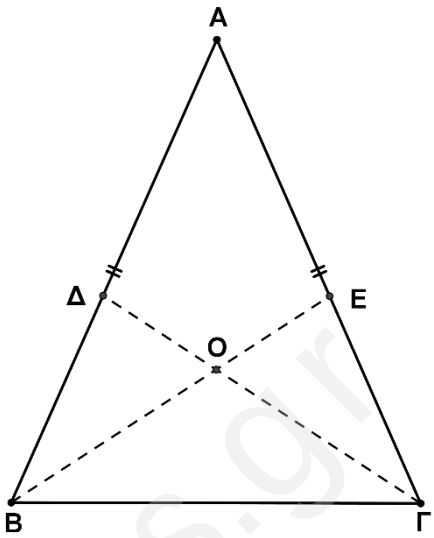
Γ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 45ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΒΕ, ΓΔ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα. Θεωρούμε επίσης Ο το σημείο τομής των ΒΕ και ΓΔ.



Α. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι ΒΕ και ΓΔ είναι ίσες.

Β. Να δείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

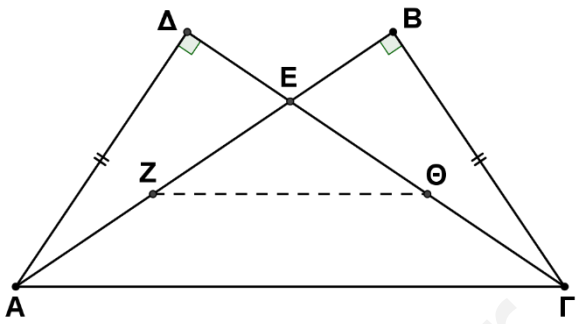
Γ. Να δείξετε ότι τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 46ο

Στο διπλανό σχήμα θεωρούμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ καθώς επίσης και Ε το σημείο τομής των ΑΒ και ΓΔ. Αν Ζ το μέσο της ΑΕ, Θ το μέσο της ΕΓ και ΑΔ = ΒΓ τότε:



Α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ίσα.

Β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές

Γ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΕ είναι ίσα.

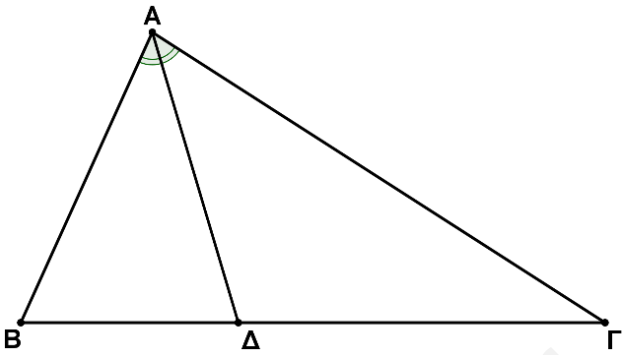
Δ. Αν τέλος γνωρίζετε ΑΓ = 22cm, να δείξετε ότι ΖΘ//ΑΓ και να βρείτε το μήκος του τμήματος ΖΘ

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 47ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος του. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε ΑΕ τέτοιο ώστε ΑΕ = ΑΒ.



Α. Αφού σχεδιάσετε το σημείο Ε πάνω στο σχήμα να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.

Β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ισοσκελές.

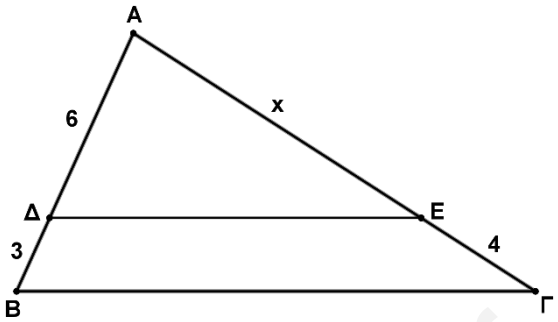
Γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 48ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ΔΕ // ΒΓ.



Α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια αιτιολογώντας την απάντηση σας.

Β. Να αποδείξετε ότι x = 8 μ.μ.

Γ. Αν γνωρίζετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ έχει εμβαδόν 20 τ.μ. τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

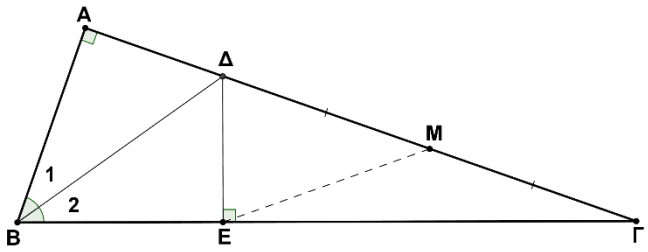
Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 49ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή την γωνία Α. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ. Από το Δ φέρνουμε κάθετη στην ΒΓ που την τέμνει στο Ε.



Α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΔ είναι ίσα.

Β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια και να συμπληρώσετε την ισότητα $\frac{\ldots}{\text{ΕΔ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\ldots} = \frac{\ldots}{\text{ΕΓ}}$

Γ. Αν Μ το μέσο της υποτείνουσας ΓΔ και ισχύει ΕΜ = 2μ.μ και ΒΓ = 6μ.μ τότε να αποδείξετε ότι ισχύει $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{9}{4}(\text{ΕΔΓ})$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

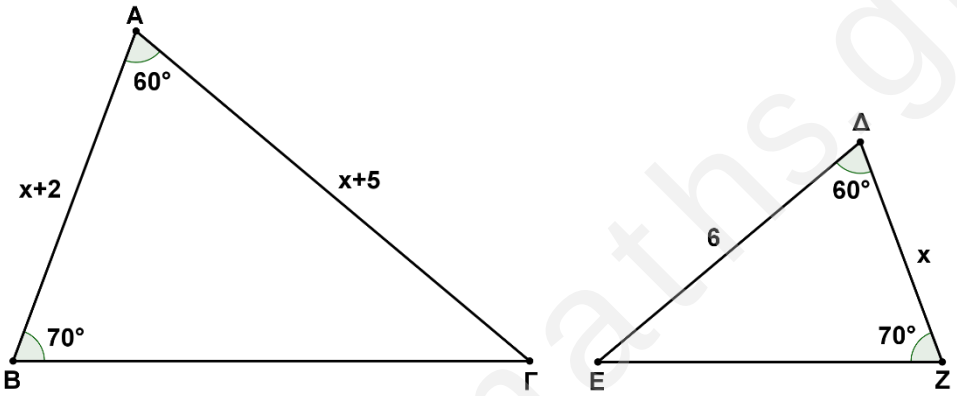
Θέμα 50ο

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ.

Α. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι όμοια.

Β. Να βρείτε τον λόγο ομοιότητάς τους λ.

Γ. Αν $\lambda = \frac{3}{2}$ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 18 cm^2 , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ.

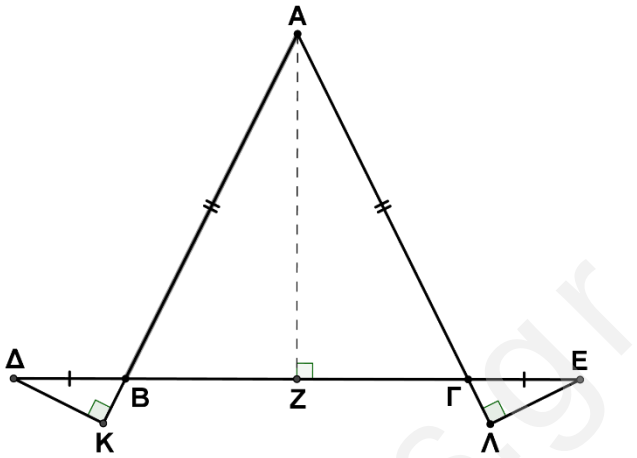


ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 51ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις προεκτάσεις της βάσης ΒΓ παίρνουμε σημεία Δ, Ε έτσι ώστε ΒΔ = ΓΕ. Αν ΔΚ ⊥ ΑΒ και ΕΛ ⊥ ΑΓ και ΑΖ ⊥ ΒΓ να αποδείξετε ότι:



Α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

Β. Τα τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΕΛ είναι ίσα.

Γ. Τα τρίγωνα ΒΔΚ και ΑΒΖ είναι όμοια και να γράψετε τους αντίστοιχους λόγους ομοιότητας.

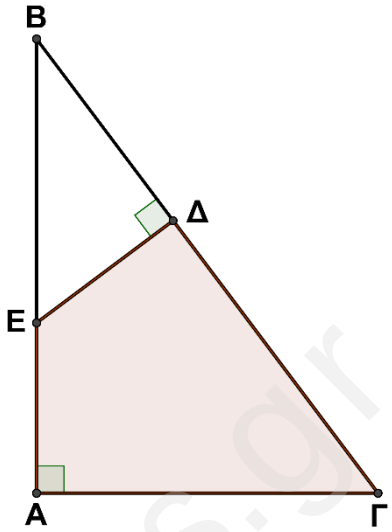
Δ. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 16 cm^2 και το ύψος ΑΖ είναι τριπλάσιο από το ΔΚ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΚ.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 52ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με ΑΒ = 8μ.μ. και ΑΓ = 6μ.μ. Στην υποτείνουσα ΒΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ = 4μ.μ. Από το σημείο Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ε.



Α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ είναι όμοια.

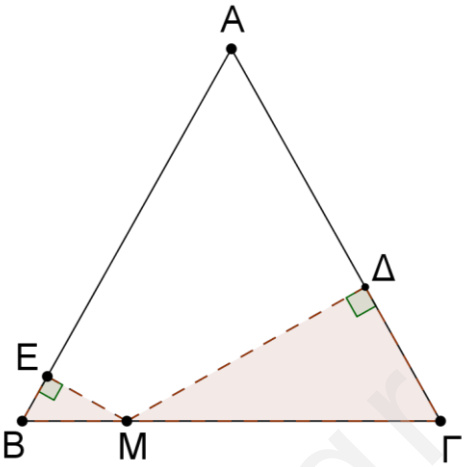
Β. Να υπολογίσετε το μήκος ΔΕ.

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΓ.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 53ο



Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές με:

$\text{ΒΜ} = \frac{1}{3}\text{ΜΓ}$, $\text{ΜΕ} \perp \text{ΑΒ}$, $\text{ΜΔ} \perp \text{ΑΓ}$ και $(\text{ΑΒΓ}) = 300$ τ.μ.

Α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΕΒ και ΜΔΓ είναι όμοια.

Β. Να αποδείξετε ότι $(\text{ΜΔΓ}) = 9(\text{ΜΕΒ})$.

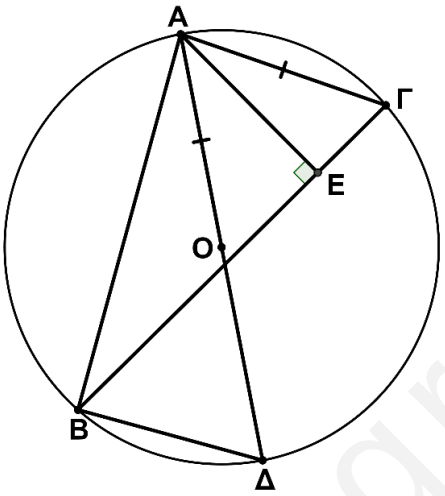
Γ. Αν $(\text{ΑΕΜΔ}) = 200$ τ.μ., να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΜΕΒ και ΜΔΓ.

Δ. Αν Κ είναι το μέσο της ΒΓ να δείξετε ότι τα σημεία Β και Κ ισαπέχουν από την ευθεία ΜΕ.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 54ο



Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι κορυφές είναι σημεία του κύκλου με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ. Αν γνωρίζετε ότι ΑΕ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, ΑΔ η διάμετρος του κύκλου (Ο,ρ) και ΑΓ = ρ, τότε:

Α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι όμοια.

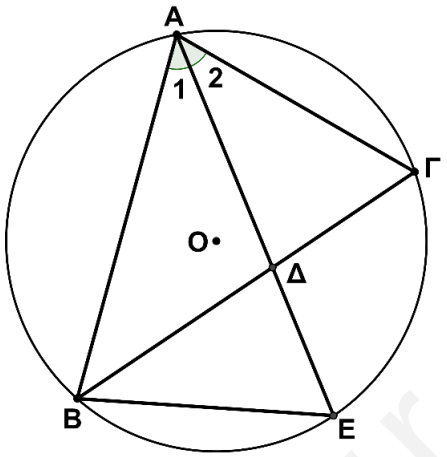
Β. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων.

Γ. Να υπολογίσετε τους λόγους: i) $\frac{AB+B\Delta+\Delta A}{AE+E\Gamma+\Gamma A}$ ii) $\frac{(AB\Delta)}{(AE\Gamma)}$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 55ο



Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι κορυφές είναι σημεία του κύκλου με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ. Η διχοτόμος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον κύκλο στο Ε.

Α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΓ είναι όμοια.

Β. Αν γνωρίζετε επιπλέον ότι ΑΕ = 2x+5, ΑΓ = x, ΑΒ = x+4, ΑΔ = 3

i) Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ.

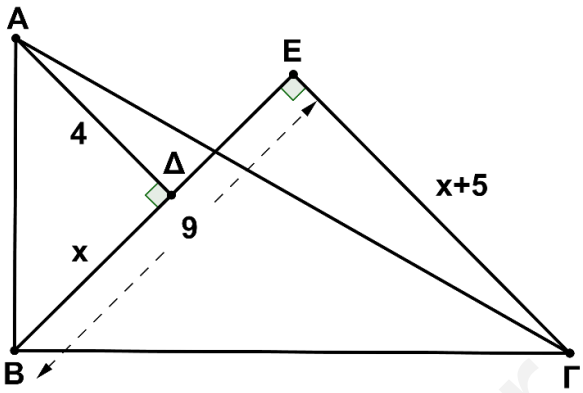
ii) Αν λ = 3 και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΓ είναι 4 cm^2, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΕ.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 56ο

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΒΕ. Αν γνωρίζετε ότι τα τμήματα ΑΔ και ΓΕ είναι κάθετα στην διχοτόμο ΒΕ να αποδείξετε ότι:



Α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΕΓ είναι όμοια.

Β. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την αμοιότητα και στη συνέχεια να υπολογίσετε το x.

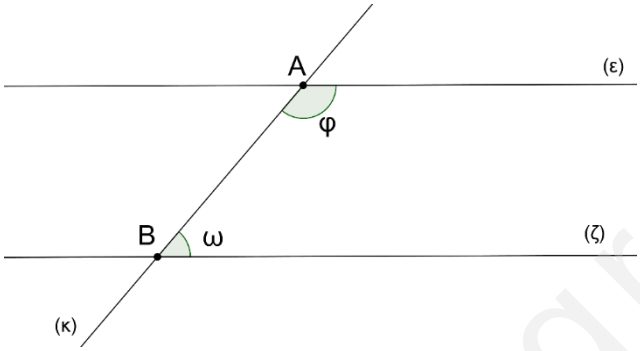
Γ. Να υπολογίσετε τον λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΔ και ΓΒΕ.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 57ο

Οι παράλληλες ευθείες του παρακάτω σχήματος (ε) και (ζ) τέμνονται από την ευθεία (κ) και σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες ω και φ.



Αν $\text{συνω} = \frac{\sqrt{100}+\sqrt{25}}{17}$ να υπολογίσετε :

Α. Το ημω και εφω.

Β. Το ημφ, συνφ και εφφ.

Γ. Την τιμή της παράστασης $A = \frac{17\text{ημφ}+15\text{εφω}+17\text{συνφ}}{\text{ημ}^2\varphi+\text{συν}^2\omega}$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 58ο

Α. Αν $P(x)=\left(-6x^2+2x^3-2\right)-\left(x^3+5x+1\right)+\left(14x^2-x-x^3\right)$ και $Q(x)=\alpha x^2+\beta x-3$, να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ να είναι ίσα.

Β. Να τοποθετήσετε το σημείο Μ(-6,8) σε ένα σύστημα συντεταγμένων και να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{XOM}$.

Γ. Αν β ο αριθμός που προέκυψε από το Α ερώτημα και x = βημω, y = βσυνω, να δείξετε ότι $x^2 + y^2 = 36$.

Δ. Αν α ο αριθμός που προέκυψε από το Α ερώτημα και ημφ = $\frac{\alpha}{10}$, με φ οξεία γωνία, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας φ.

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 59ο

Δίνεται η εξίσωση $4x^2-1=0$, η οξεία γωνία ω και η αμβλεία γωνία φ.
Οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι τα συνω και συνφ.

Α. Να βρείτε τα συνω και συνφ.

Β. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας φ.

Γ. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^3\omega+\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega=\eta\mu\omega$

Δ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Lambda=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\eta\mu\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\sqrt{3}\cdot\varepsilon\varphi\varphi$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr

Θέμα 60ο

Έστω γωνία ω για την οποία ισχύει $(\eta\mu\omega-4)^2+\sigma\upsilon\nu^2\omega=13$ και $0\le\omega\le180^o$

Α. Να βρείτε το ημω.

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu\omega=\frac{1}{2}$ και να βρείτε τη γωνία ω.

Γ. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\omega-\eta\mu^2\omega=2\sigma\upsilon\nu^2\omega-1$

Δ. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=2\eta\mu(180-\omega)+\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega-\sqrt{3}\cdot\varepsilon\varphi(180-\omega)$

ΛΥΣΗ

www.e-maths.gr