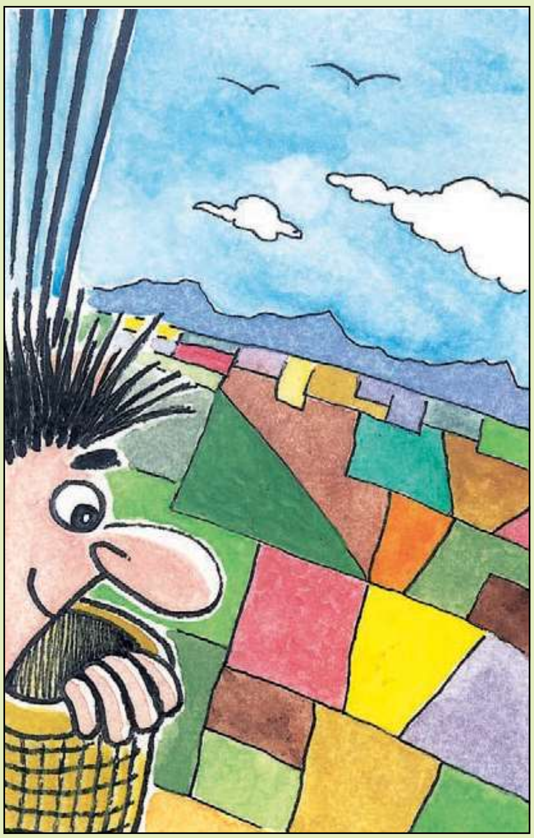
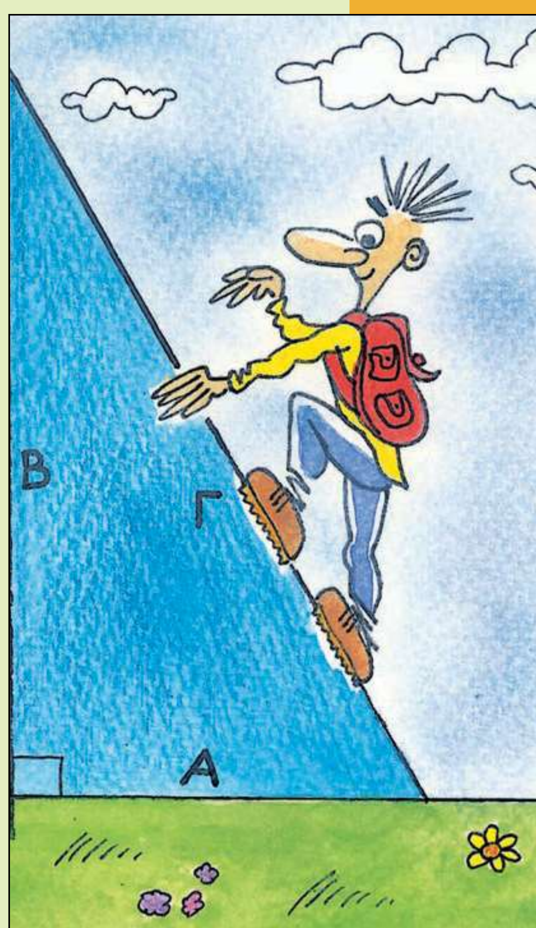
ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

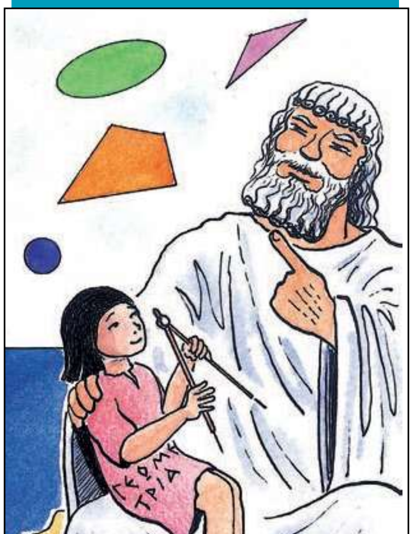
Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων



Πυθαγόρειο Θεώρημα



Εισαγωγικο Σημειωμα

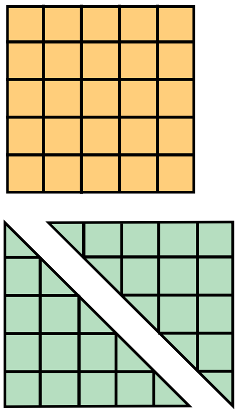


Οι πλημμύρες του Νείλου, του Τίγρη και του Ευφράτη, πριν από περίπου τρεις χιλιετίες, ανάγκασαν τους λαούς που κατοικούσαν στην περιοχή να αναπτύξουν την «τέχνη» της μέτρησης της γης (Γεω-μετρία).

Τότε αναπτύχθηκε η έννοια του εμβαδού, την οποία θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο αυτό. Θα μάθουμε τις βασικές μονάδες μέτρησης εμβαδών, καθώς και τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού: τετραγώνου, ορθογωνίου, παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου.

Στο τέλος του κεφαλαίου θα μελετήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και θα εξετάσουμε αρκετές εφαρμογές του.

1.1. Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δίνονται δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα με κάθετες πλευρές 5 cm και ένα τετράγωνο πλευράς 5 cm.

α) Μπορείτε χρησιμοποιώντας τα τρία αυτά σχήματα να κατασκευάσετε:

i) Ένα ορθογώνιο πλάτους 10 cm και ύψους 5 cm;

ii) Ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο, του οποίου οι κάθετες πλευρές είναι 10 cm;

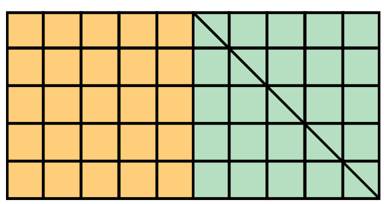
iii) Ένα ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις 5 cm και 15 cm;

β) Τι έκταση καταλαμβάνουν τα παραπάνω σχήματα στο επίπεδο, αν θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης το τετραγωνάκι ☐ πλευράς 1 cm;

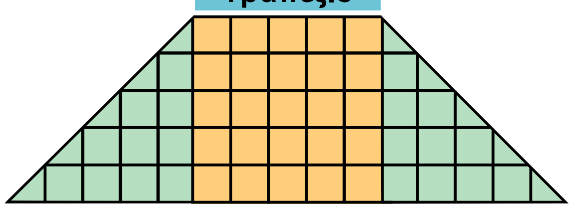
Λύση

α) Έχουμε τα παρακάτω σχήματα:

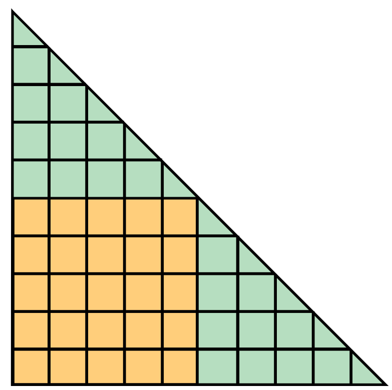
Ορθογώνιο



Τραπέζιο



Ορθογώνιο τρίγωνο



β) Μετρώντας τα τετραγωνάκια πλευράς 1 cm βρίσκουμε ότι το ορθογώνιο καταλαμβάνει έκταση 50, το τραπέζιο 50 και το ορθογώνιο τρίγωνο πάλι 50. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι τα τρία νέα σχήματα που προκύπτουν, παρόλο που είναι διαφορετικά μεταξύ τους, καταλαμβάνουν την ίδια έκταση στο επίπεδο, γιατί αποτελούνται ακριβώς από τα ίδια στοιχεία: το τετράγωνο και τα δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα. Για να δηλώσουμε ότι τα τρία αυτά σχήματα που κατασκευάσαμε, καταλαμβάνουν την ίδια έκταση στο επίπεδο, λέμε ότι έχουν το ίδιο **εμβαδόν**.

Για να μετρήσουμε το εμβαδόν, πρέπει πρώτα να επιλέξουμε μία μονάδα μέτρησης.

Αν, αρχικά, επιλέξουμε ως μονάδα μέτρησης το ένα από τα δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα, τότε τα τρία νέα σχήματα έχουν εμβαδόν 4.

Αν επιλέξουμε ως μονάδα μέτρησης το τετραγωνάκι πλευράς 1 cm, τότε, όπως είδαμε, θα έχουν εμβαδόν 50.

Το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιούμε.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

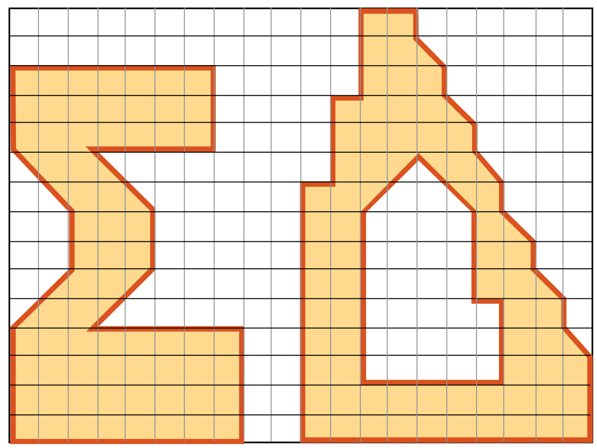
Να υπολογίσετε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδού: α) □ β) ◺ γ) □□

Λύση: α) Μετρώντας τα τετραγωνάκια □ που υπάρχουν μέσα σε κάθε σχήμα παρατηρούμε ότι είναι 71. Άρα Ε = 71.

β) Αφού κάθε τριγωνάκι ◺ έχει το μισό εμβαδόν από κάθε τετραγωνάκι □, τα δύο εμβαδά με μονάδα μέτρησης το ◺ θα είναι $2 \cdot 71 = 142$. Άρα Ε = 142.

γ) Αφού κάθε □□ έχει το διπλάσιο εμβαδόν από κάθε τετραγωνάκι □, τα δύο εμβαδά με μονάδα μέτρησης το □□ θα είναι $\frac{71}{2} = 35{,}5$.

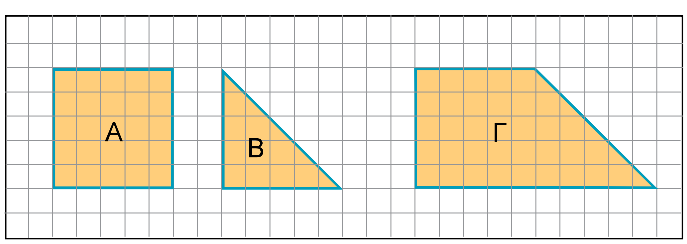
Άρα Ε = 35,5.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

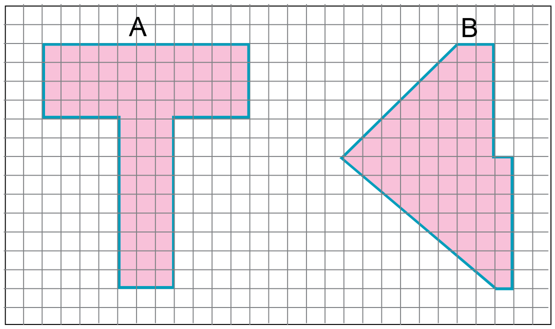
Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σχημάτων Α, Β, Γ χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδών το □. Τι παρατηρείτε;

Λύση: Βρίσκουμε ότι τα εμβαδά των Α, Β, Γ είναι Α: 25, Β: 12,5, Γ: 37,5. Επομένως, παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του Γ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών Α και Β, κάτι που γίνεται φανερό αν «ενώσουμε» κατάλληλα τα σχήματα Α και Β.

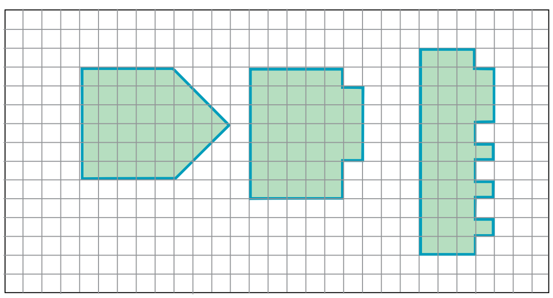


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

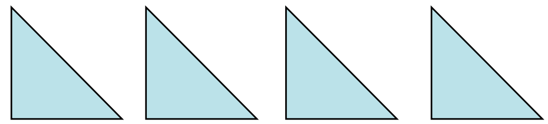
1 Ποιο από τα δύο σχήματα Α, Β έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;



2 Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα παρακάτω σχήματα χρησιμοποιώντας ως μονάδα εμβαδού το ■.
Τι παρατηρείτε;

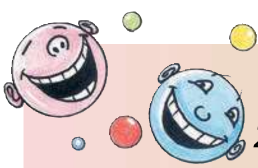


3 Δίνονται τέσσερα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα με ίσες κάθετες πλευρές:



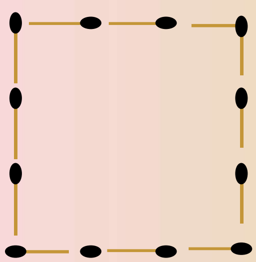
α) Χρησιμοποιώντας μόνο τα δύο τρίγωνα να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο και ένα τετράγωνο.

β) Χρησιμοποιώντας και τα 4 τρίγωνα, (μια φορά το καθένα) να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο, ένα ορθογώνιο και ένα τραπέζιο.

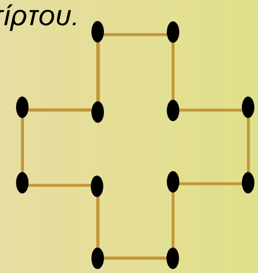


ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

Στο παρακάτω σχήμα χρησιμοποιήσαμε 12 σπίρτα για να σχηματίσουμε ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με 9 τετράγωνα πλευράς ενός σπίρτου!

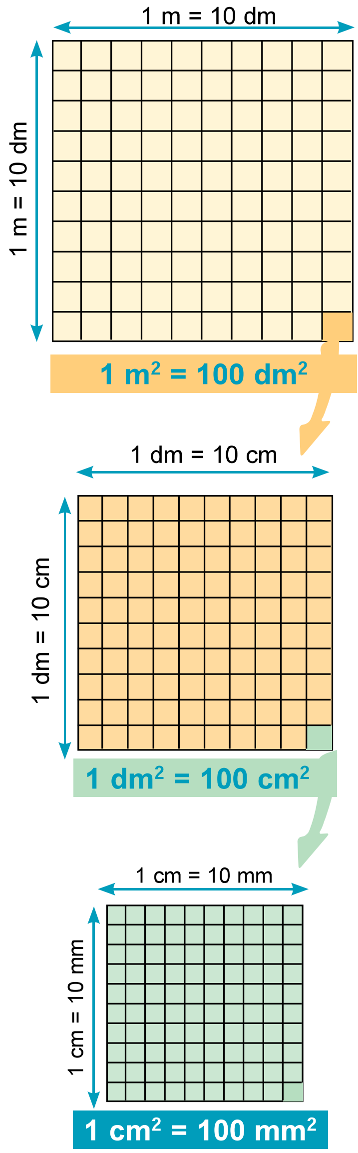


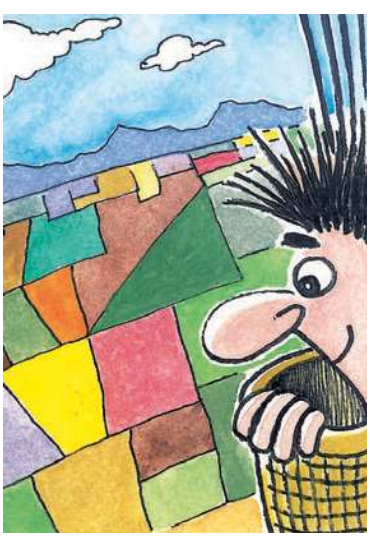
Αν τοποθετήσουμε, όμως, με διαφορετικό τρόπο τα 12 αυτά σπίρτα, μπορούμε να σχηματίσουμε σχήματα με άλλο εμβαδόν.
Για παράδειγμα, το παρακάτω σχήμα (σταυρός) έχει εμβαδόν ίσο με 5 τετράγωνα πλευράς ενός σπίρτου.



Μπορείτε να τοποθετήσετε με άλλο τρόπο τα 12 αυτά σπίρτα, ώστε να προκύψουν σχήματα με εμβαδά 8, 7, 6, 4, 3 τετράγωνα πλευράς ενός σπίρτου;

1.2. Μονάδες μέτρησης επιφανειών





- Ας θεωρήσουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1 m. Το εμβαδόν του τετραγώνου αυτού λέγεται τετραγωνικό μέτρο (1 m^2) και το χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης εμβαδών.
- Αφού 1 m = 10 dm, το τετραγωνικό μέτρο χωρίζεται σε $10 \cdot 10 = 100$ «τετραγωνάκια» πλευράς 1 dm. Το εμβαδόν σε κάθε τετραγωνάκι ονομάζεται τετραγωνικό δεκατόμετρο ή τετραγωνική παλάμη (1 dm^2).
  Παρατηρούμε ότι 1 m^2 = 100 dm^2.
- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα τετράγωνο πλευράς 1 dm.
  Αφού 1 dm = 10 cm, το τετραγωνικό δεκατόμετρο χωρίζεται σε $10 \cdot 10 = 100$ «τετραγωνάκια» πλευράς 1 cm. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 cm λέγεται τετραγωνικό εκατοστόμετρο ή τετραγωνικός πόντος (1 cm^2).
  Παρατηρούμε ότι 1 dm^2 = 100 cm^2.
- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα τετράγωνο πλευράς 1 cm.
  Αφού 1 cm = 10 mm, το τετραγωνικό εκατοστόμετρο χωρίζεται σε $10 \cdot 10 = 100$ «τετραγωνάκια» πλευράς 1 mm. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 mm λέγεται τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (1 mm^2).
  Παρατηρούμε ότι 1 cm^2 = 100 mm^2.
- Άλλες μονάδες μέτρησης εμβαδών είναι:
  – Το τετραγωνικό χιλιόμετρο (1 km^2), το οποίο ισούται με το εμβαδό ενός τετραγώνου πλευράς 1000 m.
    Επομένως 1 km^2 = $1000 \cdot 1000$ = 1.000.000 m^2.
    Χρησιμοποιείται κυρίως για τη μέτρηση μεγάλων εκτάσεων, όπως είναι η έκταση που καταλαμβάνει ένα κράτος, ένας νομός ή ένα νησί.
  – Το στρέμμα, το οποίο ισούται με 1000 m^2 και χρησιμοποιείται κυρίως για τη μέτρηση των εμβαδών οικοπέδων και κτημάτων.

❖ Συνοψίζοντας τα παραπάνω σχηματίζουμε τον πίνακα:

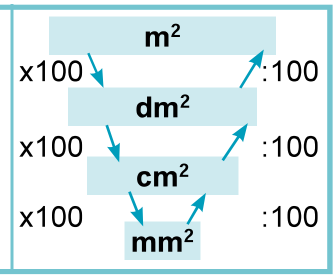
1 m^2 =	100 dm^2 =	10.000 cm^2 =	1.000.000 mm^2
	1 dm^2 =	100 cm^2 =	10.000 mm^2
		1 cm^2 =	100 mm^2

1 mm^2 =	0,01 cm^2 =	0,0001 dm^2 =	0,000001 m^2
	1 cm^2 =	0,01 dm^2 =	0,0001 m^2
		1 dm^2 =	0,01 m^2

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Με τη βοήθεια του σχήματος μετατροπής μονάδων εμβαδού, να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα.

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
253			
	320		
		7122	
			12653



Λύση: Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, για να μετατρέψουμε ένα εμβαδόν στην αμέσως μικρότερη μονάδα, πολλαπλασιάζουμε με το 100, ενώ για να το μετατρέψουμε στην αμέσως μεγαλύτερη μονάδα, διαιρούμε με το 100. Επομένως:

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
253	25300	2530000	253000000
3,20	320	32000	3200000
0,7122	71,22	7122	712200
0,012653	1,2653	126,53	12653

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τα παρακάτω εμβαδά:

α) 3,7 dm^2, 7 cm^2, 4,3 cm^2, 3,7 m^2.
β) 40 cm^2, 42 mm^2, 40 dm^2, 3 m^2.
γ) 1453 mm^2, 14,5 cm^2, 1,4 dm^2, 0,14 m^2.

Λύση: α) Μετατρέπουμε τα τέσσερα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης:
3,7 dm^2 = 370 cm^2, 3,7 m^2 = 37000 cm^2, οπότε:
4,3 cm^2 < 7 cm^2 < 3,7 dm^2 = 370 cm^2 < 3,7 m^2 = 37000 cm^2.

β) 42 mm^2 < 40 cm^2 = 4000 mm^2 < 40 dm^2 = 400000 mm^2 < 3 m^2 = 3000000 mm^2

γ) Αφού 14,5 cm^2 = 1450 mm^2, 1,4 dm^2 = 14000 mm^2 και 0,14 m^2 = 140000mm^2, έχουμε ότι: 14,5 cm^2 < 1453 mm^2 < 1,4 dm^2 < 0,14 m^2.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ	Δ
1	6,2 m^2 =	62 cm^2	620 cm^2	62000 cm^2	0,62 cm^2
2	6,2 mm^2 =	62 cm^2	620 cm^2	0,62 cm^2	0,062 cm^2
3	6,2 cm^2 =	62 m^2	0,62 m^2	620 m^2	0,00062 m^2
4	6,2 cm^2 =	620 mm^2	6200 mm^2	0,62 mm^2	0,00062 mm^2
5	6,2 m^2 =	62 dm^2	620 dm^2	62000 dm^2	0,062 dm^2
6	6,2 mm^2 =	0,0000062 m^2	0,00062 m^2	0,062 m^2	0,0062 m^2

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
Για να μετατρέψουμε:

	Α	Β	Γ
1. m^2 σε dm^2	πολλαπλασιάζουμε με 100	διαιρούμε με 100	διαιρούμε με 10
2. dm^2 σε cm^2	διαιρούμε με 100	πολλαπλασιάζουμε με 100	διαιρούμε με 10
3. cm^2 σε mm^2	διαιρούμε με 100	διαιρούμε με 10	πολ/με με 100
4. dm^2 σε m^2	πολλαπλασιάζουμε με 100	διαιρούμε με 100	διαιρούμε με 10
5. cm^2 σε dm^2	πολλαπλασιάζουμε με 10.000	πολλαπλασιάζουμε με 100	διαιρούμε με 100
6. mm^2 σε cm^2	διαιρούμε με 100	πολλαπλασιάζουμε με 100	διαιρούμε με 10
7. m^2 σε cm^2	διαιρούμε με 100	πολλαπλασιάζουμε με 10.000	διαιρούμε με 10.000
8. m^2 σε mm^2	πολ/με με 1.000.000	διαιρούμε με 100.000	διαιρούμε με 1.000
9. cm^2 σε m^2	διαιρούμε με 100	διαιρούμε με 10.000	πολ/με με 10.000
10. mm^2 σε dm^2	διαιρούμε με 100	πολλαπλασιάζουμε με 10.000	διαιρούμε με 10.000

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να μετατρέψετε σε m^2 τα παρακάτω μεγέθη:
32 cm^2, 312 cm^2, 127 km^2, 710 dm^2, 12720 mm^2, 212 dm^2, 1280 mm^2, 79 km^2.

2 Να μετατρέψετε σε cm^2 τα παρακάτω μεγέθη:
12 m^2, 175 dm^2, 456 m^2, 136 m^2, 3 km^2, 1750 mm^2, 256 km^2.

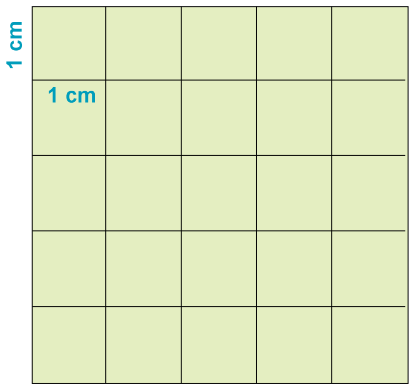
3 Να μετατρέψετε σε mm^2 τα παρακάτω μεγέθη:
12 km^2, 431 m^2, 17 dm^2, 236 cm^2.

4 Να μετατρέψετε σε km^2 τα παρακάτω μεγέθη:
7233 mm^2, 4321 cm^2, 6322 dm^2, 14632 mm^2, 560 m^2.

5 Στις παρακάτω περιπτώσεις να εκφράσετε τα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης και στη συνέχεια να τις κατατάξετε κατά σειρά μεγέθους από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.
α) 13850 mm^2, 0,23 m^2, 0,48 m^2, 670 cm^2, 13,7 dm^2.
β) 32 dm^2, 1,23 m^2, 23270 mm^2, 1356 cm^2.

6 Ποια από τις μονάδες μέτρησης εμβαδού θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, για να μετρήσουμε το εμβαδόν:
α) του δωματίου μας,
β) της Κρήτης,
γ) ενός αγρού,
δ) ενός γραμματόσημου,
ε) ενός φύλλου τετραδίου.

1.3. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

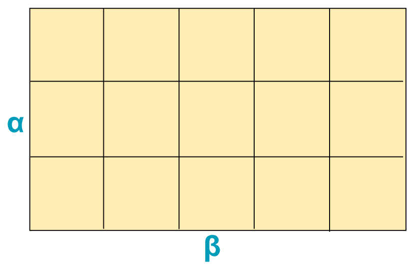


Εμβαδόν τετραγώνου

Ας θεωρήσουμε ένα τετράγωνο πλευράς 5 cm.
Μπορούμε να το χωρίσουμε σε $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ «τετραγωνάκια» πλευράς 1 cm, καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν 1 cm^2. Άρα, το τετράγωνο έχει εμβαδόν 25 cm^2.

Γενικά:

Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α ισούται με $α^2$.



Εμβαδόν ορθογωνίου

Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο με πλευρές 3 cm και 5 cm. Όπως φαίνεται στο σχήμα, το ορθογώνιο χωρίζεται σε 15 «τετραγωνάκια» εμβαδού 1 cm^2. Επομένως, το ορθογώνιο έχει εμβαδόν $3 \cdot 5 = 15$ cm^2.

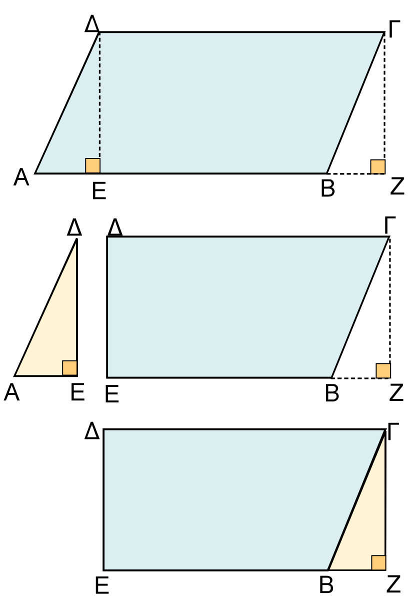
Γενικά:

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές α, β ισούται με $α \cdot β$.

Τις πλευρές ενός ορθογωνίου τις λέμε μήκος (τη μεγαλύτερη πλευρά) και πλάτος (τη μικρότερη) και τις ονομάζουμε διαστάσεις του ορθογωνίου. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι το γινόμενο των διαστάσεων ενός ορθογωνίου ισούται με το εμβαδόν του ή:

εμβαδόν ορθογωνίου = μήκος · πλάτος.

Παρατήρηση:
Για να συμβολίσουμε το εμβαδόν κάθε επίπεδου σχήματος, το γράφουμε μέσα σε παρένθεση. Δηλαδή, το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συμβολίζεται με (ΑΒΓΔ), το εμβαδόν ενός τριγώνου ΖΗΘ συμβολίζεται με (ΖΗΘ) κ.ο.κ.

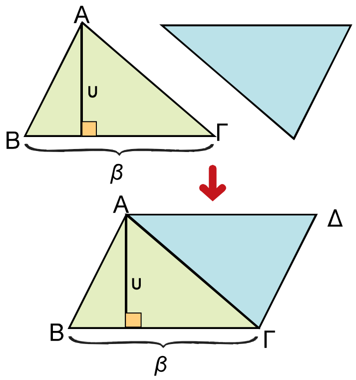


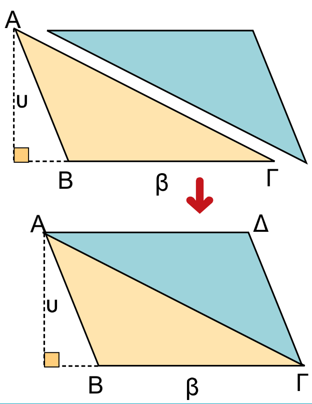
Εμβαδόν παραλληλογράμμου

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με βάση ΑΒ = β = ΓΔ και ας φέρουμε τα ύψη του ΔΕ = υ και ΓΖ = υ. Μεταφέροντας το τρίγωνο ΑΔΕ στη θέση τού (ίσου με αυτό) τριγώνου ΒΓΖ, παρατηρούμε ότι:
το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΕΖΓΔ.

Άρα: (ΑΒΓΔ) = (ΕΖΓΔ) = ΕΖ · ΓΖ = β · υ.
Γενικά:

Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μίας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.





Εμβαδόν τυχαίου τριγώνου

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ που δεν είναι ορθογώνιο και ας πάρουμε και άλλο ένα τρίγωνο ίδιο με αυτό. Αν τοποθετήσουμε το δεύτερο τρίγωνο δίπλα στο πρώτο, όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα, τότε θα σχηματιστεί ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, που θα έχει ως βάση β, τη βάση ΒΓ του ΑΒΓ και ως ύψος υ, το ύψος του ΑΒΓ, από την κορυφή Α.
Είτε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο είτε είναι αμβλυγώνιο, το εμβαδόν του θα είναι ίσο με το μισό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ που σχηματίζεται, αν τοποθετήσουμε άλλο ένα τρίγωνο ίσο με το ΑΒΓ, όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα.

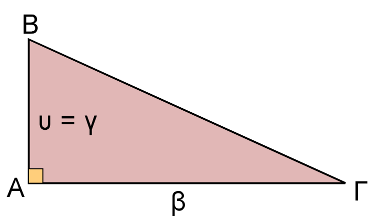
Επομένως, θα ισχύει:

$$\mathbf{(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2}\,β \cdot υ},$$

όπου β η βάση του ΑΒΓ και υ το αντίστοιχο ύψος.

Γενικά:

Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

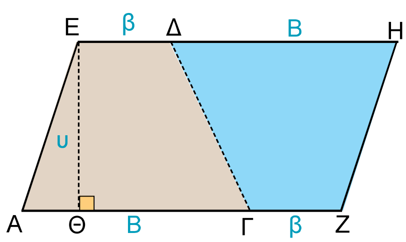


Εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου

Όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, τότε η μία από τις κάθετες πλευρές είναι η βάση β και η άλλη το ύψος του.

Επομένως: $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}β \cdot υ = \frac{1}{2}β \cdot γ$.

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου των δύο κάθετων πλευρών του.



Εμβαδόν τραπεζίου

Ας θεωρήσουμε το τραπέζιο ΑΓΔΕ που έχει μεγάλη βάση ΑΓ = Β, μικρή βάση ΕΔ = β και ύψος ΕΘ = υ.
Θεωρώντας άλλο ένα ίσο τραπέζιο με το ΑΓΔΕ σχηματίζουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΖΗΕ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το παραλληλόγραμμο που σχηματίσαμε έχει βάση (β + Β) και ύψος υ.

Επομένως: $(ΑΖΗΕ) = (β + Β) \cdot υ$.

Όμως: $(ΑΖΗΕ) = 2(ΑΓΔΕ)$

Άρα: $(ΑΓΔΕ) = \frac{(β + Β)υ}{2}$

Το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του με το ύψος του.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα:

Μήκος ορθογωνίου	Πλάτος ορθογωνίου	Περίμετρος ορθογωνίου	Εμβαδόν ορθογωνίου
12 m	**10 m**		
17 m		**44m**	
	9 m		**45 m²**
33 m			**330 m²**

Λύση: Με τη βοήθεια της σχέσης: εμβαδόν ορθογωνίου = μήκος · πλάτος, συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Μήκος ορθογωνίου	Πλάτος ορθογωνίου	Περίμετρος ορθογωνίου	Εμβαδόν ορθογωνίου
12 m	**10 m**	44 m	120 m^2
17 m	5 m	**44m**	85 m^2
5 m	**9 m**	28 m	**45 m^2**
33 m	10 m	86 m	**330 m^2**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Η αίθουσα Φυσικής στο σχολείο της Άννας αποφασίστηκε να στρωθεί με τετράγωνα πλακάκια που το καθένα έχει πλευρά 25 cm.

α) Να βρείτε πόσα πλακάκια θα χρειαστούν, αν το δάπεδο της τάξης έχει διαστάσεις 12 m μήκος και 8 m πλάτος.

β) Αν κάθε πλακάκι κοστίζει 0,5 €, πόσα χρήματα θα χρειαστούν για να στρωθεί η τάξη;

Λύση: α) Το εμβαδόν του δαπέδου είναι: $E_{ΔΑΠ} = 12 \cdot 8 = 96$ (m^2) και το εμβαδόν σε κάθε πλακάκι είναι: $E_{ΠΛΑΚ} = 25 \cdot 25 = 625$ (cm^2) = 0,0625 (m^2).
Διαιρώντας τα δύο αυτά εμβαδά βρίσκουμε πόσα πλακάκια χρειάζονται για να στρωθεί η τάξη:

$$\frac{E_{ΔΑΠ}}{E_{ΠΛΑΚ}} = \frac{96}{0{,}0625} = 1536.$$

β) Αφού χρειάζονται 1536 πλακάκια και το κάθε πλακάκι κοστίζει 0,5 €, το συνολικό κόστος θα είναι: $1536 \cdot 0{,}5 = 768$ €.

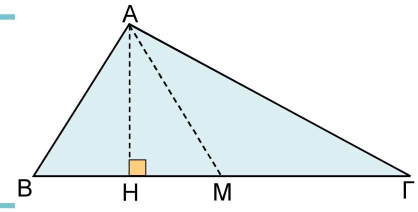
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στο σχολείο της Κάτιας το μαθητικό συμβούλιο εκδίδει μια εφημερίδα που κάθε φύλλο της έχει διαστάσεις 42 cm μήκος και 30 cm πλάτος. Να υπολογίσετε τη συνολική επιφάνεια του χαρτιού που θα χρησιμοποιηθεί, για να τυπωθούν 800 αντίτυπα της εφημερίδας, αν κάθε αντίτυπο έχει 8 φύλλα.

Λύση: Το εμβαδόν κάθε φύλλου είναι $30 \cdot 42 = 1260$ (cm^2). Αφού κάθε αντίτυπο έχει 8 φύλλα, χρειάζονται $8 \cdot 1260 = 10080$ (cm^2) χαρτί για κάθε αντίτυπο.
Επομένως, για να τυπωθούν 800 αντίτυπα, θα χρειαστούν:
$800 \cdot 10080 = 8064000$ (cm^2) = 806,4 (m^2) χαρτί.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ.
Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ έχουν το ίδιο εμβαδόν.



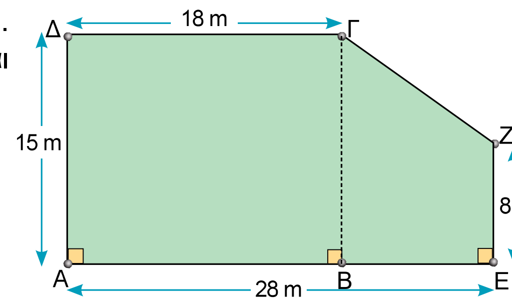
Λύση: Φέρνουμε το ύψος ΑΗ. Τότε το τρίγωνο ΜΑΒ έχει εμβαδόν: $(ΜΑΒ) = \dfrac{ΒΜ \cdot ΑΗ}{2}$.

Το τρίγωνο ΜΑΓ έχει εμβαδόν: $(ΜΑΓ) = \dfrac{ΜΓ \cdot ΑΗ}{2}$. Όμως, ΜΒ = ΜΓ, επειδή το Μ είναι το μέσο της ΒΓ (η ΑΜ είναι διάμεσος). Άρα: (ΜΑΒ) = (ΜΑΓ).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Ένα οικόπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, πωλείται προς 300 € το m^2.
Ποια είναι η αξία του οικοπέδου;

Λύση: Βρίσκουμε πρώτα το εμβαδόν του οικοπέδου.
Αυτό αποτελείται από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ και το τραπέζιο ΒΕΖΓ.
Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:
$(ΑΒΓΔ) = 18 \cdot 15 = 270$ (m^2).
Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:
$(ΒΕΖΓ) = \dfrac{(15+8) \cdot 10}{2} = 115$ (m^2).



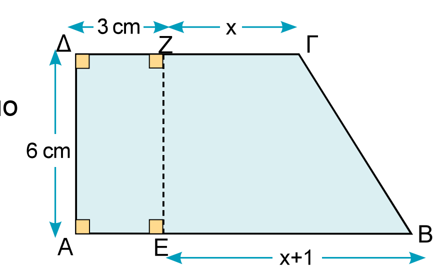
Άρα, το εμβαδόν του οικοπέδου είναι 270 + 115 = 385 (m^2).
Για να βρούμε την αξία πώλησης του οικοπέδου, πολλαπλασιάζουμε το εμβαδόν του με την τιμή πώλησης του τετραγωνικού μέτρου. Άρα, η αξία του οικοπέδου είναι:
$385 \cdot 300 = 115.500$ €.

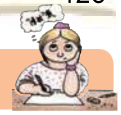
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Στο παρακάτω σχήμα:
α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του x.
β) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι το τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΕΖΔ, να υπολογίσετε το x.

Λύση: α) Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ, η μικρή βάση είναι ΔΓ = x + 3 (cm), η μεγάλη βάση είναι ΑΒ = x + 1 + 3 = x + 4 (cm) και το ύψος του είναι ΔΑ = 6 (cm). Άρα, το εμβαδόν του είναι: $(ΑΒΓΔ) = \dfrac{(β + Β) \cdot υ}{2} = \dfrac{(x + 3 + x + 4) \cdot 6}{2} = 3(2x + 7)$ (cm^2).

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι
$(ΑΕΖΔ) = 3 \cdot 6 = 18$ (cm^2).
Αφού το εμβαδόν του τραπεζίου είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου, έχουμε:
$(ΑΒΓΔ) = 3 \cdot (ΑΕΖΔ)$ ή $3(2x + 7) = 3 \cdot 18$
Δηλαδή:
$2x + 7 = 18$ ή $2x = 11$ ή $x = 5,5$ (cm).



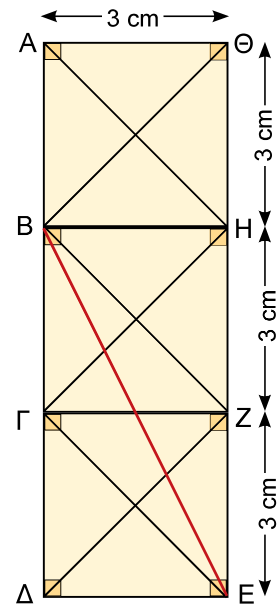


ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο διπλανό σχήμα:

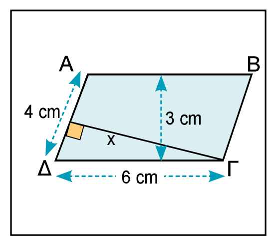
		Α	Β	Γ
1	Το εμβαδόν του ΑΒΗΘ είναι:	3	6	9
2	Το εμβαδόν του ΑΓΖΘ είναι:	6	12	18
3	Το εμβαδόν του ΑΓΕΗ είναι:	12	18	21
4	Το εμβαδόν του ΑΗΓ είναι:	9	12	4,5
5	Το εμβαδόν του ΒΖΗ είναι:	9	12	4,5
6	Το εμβαδόν του ΑΔΖΗ είναι:	12	18	21
7	Το εμβαδόν του ΑΔΕΗ είναι:	22,5	18	27
8	Το εμβαδόν του ΑΒΕΘ είναι:	22,5	18	21

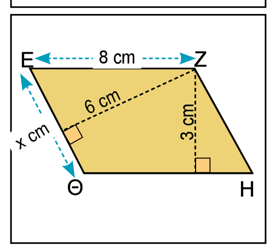
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

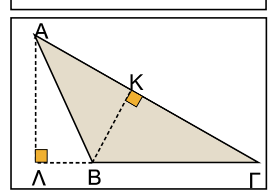


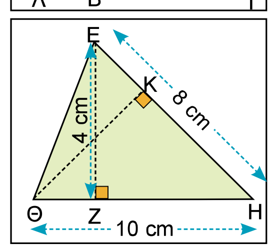
2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

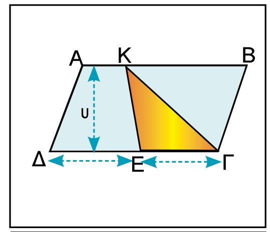
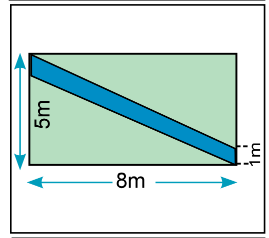
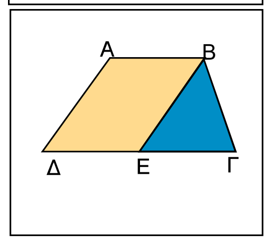
		Α	Β	Γ
1	Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι:	24	9	18
2	Το ύψος x που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΔ είναι:	5,5	9	4,5
3	Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ είναι:	24	12	32
4	Η πλευρά x = ΕΘ είναι:	4	6	5
5	Ποιο από τα επόμενα δεν είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ;	$\frac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}{2}$	$\frac{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΚ}}{2}$	$\frac{\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΛ}}{2}$
6	Το εμβαδόν του τριγώνου ΕΘΗ είναι:	32	16	20
7	Το ύψος ΘΚ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΕΗ είναι:	4	5	6









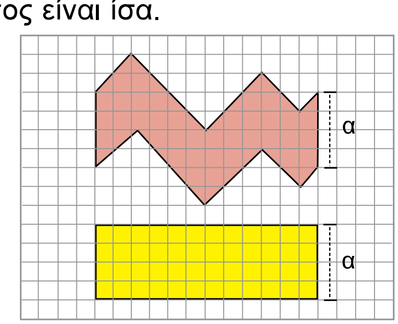
		Α	Β	Γ	
8	Το διπλανό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν $16cm^2$ και το Ε είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΕΓ είναι:	4	6	8	
9	Το εμβαδόν του μπλε παραλληλογράμμου είναι:	5	4	8	
10	Το εμβαδόν κάθε πράσινου τριγώνου είναι:	16	20	17,5	
11	Αν το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΕΔ είναι $12cm^2$ και το Ε είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ, τότε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι:	24	16	18	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Αν η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 60 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

2 Οι διαστάσεις ενός φύλλου στο εικοσάφυλλο τετράδιο του Σταύρου είναι 21 cm και 30 cm. Να υπολογίσετε πόση επιφάνεια χαρτιού έχει όλο το τετράδιο.

3 Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι τα εμβαδά του ροζ και του κίτρινου σχήματος είναι ίσα.

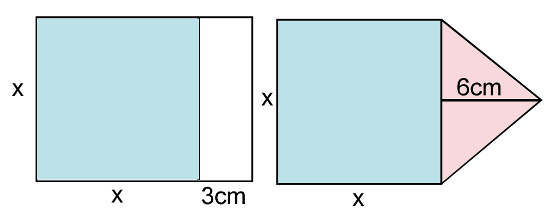


4 Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη συνέχεια να προεκτείνετε την πλευρά ΑΒ του τετραγώνου και να πάρετε τμήμα ΒΕ = ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ και το τρίγωνο ΑΕΔ έχουν ίσα εμβαδά.

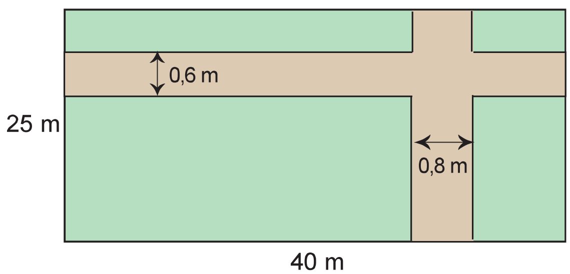
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΑΕΔ είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του ΒΓΕ.

5 Να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο σχημάτων στο παρακάτω σχήμα, αν x = 5 cm. Στη συνέχεια, να εξηγήσετε γιατί αυτά είναι ίσα για οποιαδήποτε τιμή του x.



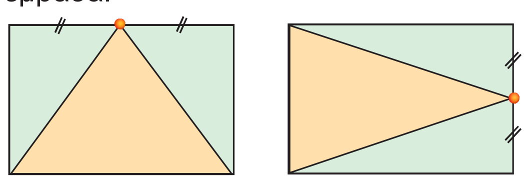
6 Ένα τετράγωνο και ένα τραπέζιο έχουν ίσα εμβαδά. Αν οι βάσεις του τραπεζίου είναι 12 cm και 20 cm και το ύψος του είναι 4 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου.

7 Ένας ορθογώνιος κήπος έχει διαστάσεις 40 m και 25 m. Τον κήπο διασχίζουν δύο κάθετα μεταξύ τους δρομάκια. Το ένα παράλληλο προς τη μεγάλη πλευρά του κήπου με πλάτος 0,6 m και το άλλο με πλάτος 0,8 m. Το υπόλοιπο τμήμα θα



φυτευτεί με γκαζόν. Να υπολογίσετε το κόστος της κατασκευής του γκαζόν, αν ο γεωπόνος χρεώνει 12 € κάθε m^2 γκαζόν.

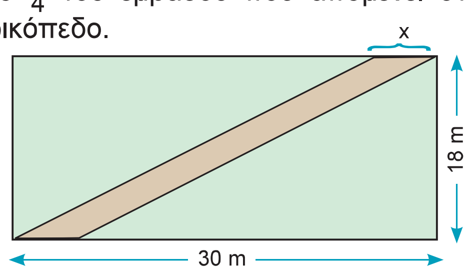
8 Τα παρακάτω ορθογώνια έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Εξηγήστε γιατί τα πράσινα μέρη των δύο ορθογωνίων έχουν ίσα εμβαδά.



9 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου, το οποίο διασχίζει διαγώνια ένας δρόμος σταθερού πλάτους.

α) Να αποδείξετε ότι τα τριγωνικά οικόπεδα που απομένουν έχουν ίσα εμβαδά.

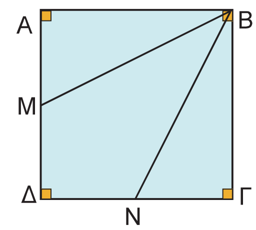
β) Να υπολογίσετε το x, ώστε ο δρόμος να «αποκόπτει» από το οικόπεδο τμήμα του οποίου το εμβαδόν να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού που απομένει στο οικόπεδο.



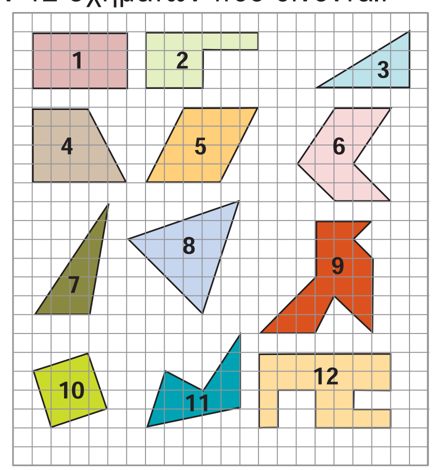
10 Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι Μ και Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΔ και ΔΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΝΓΒ έχουν ίσα εμβαδά.

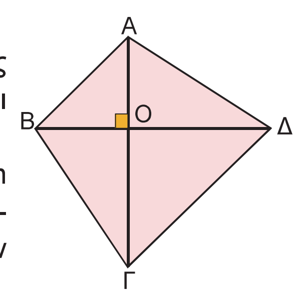
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΜΔΝ έχει εμβαδόν όσο είναι το άθροισμα των εμβαδών των παραπάνω τριγώνων.



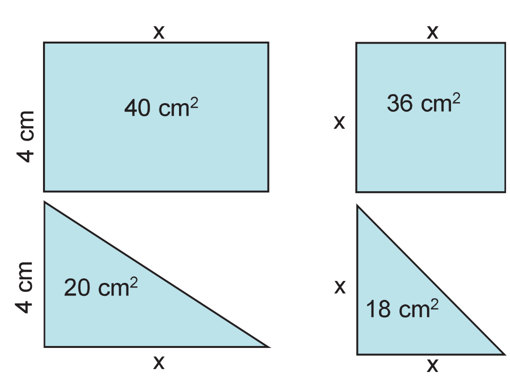
11 Στα παρακάτω σχήματα κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 cm. Να βρείτε τα εμβαδά των 12 σχημάτων που δίνονται:



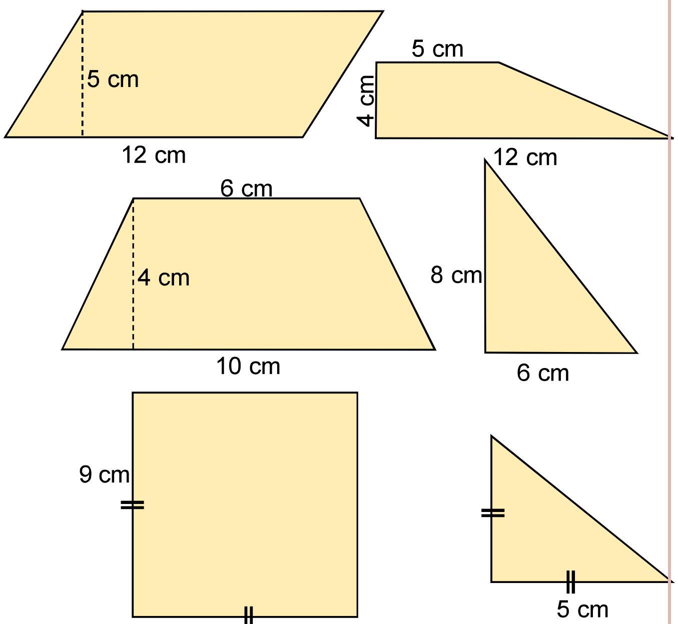
12 Στο τετράπλευρο του διπλανού σχήματος οι διαγώνιες είναι κάθετες.
Αν ΒΔ=5 cm, ΟΑ=3cm και ΟΓ=6cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετράπλευρου.



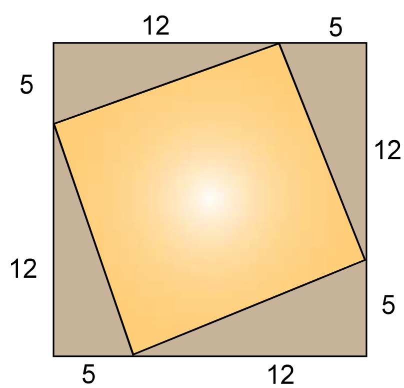
13 Να υπολογίσετε το x σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα.



14 Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων:



15 Να βρείτε το εμβαδόν του πορτοκαλί τετραγώνου του παρακάτω σχήματος.

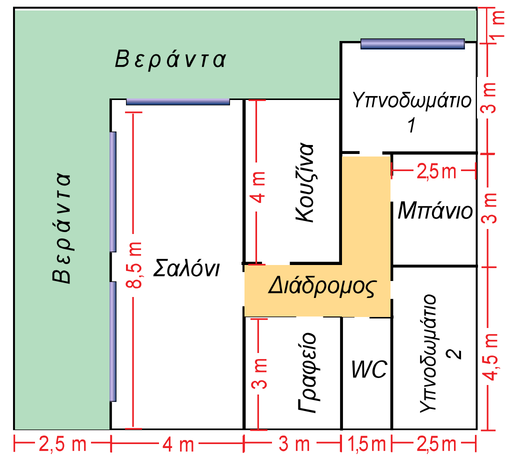


16 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η κάτοψη ενός διαμερίσματος. Να βρείτε:

α) Το εμβαδόν κάθε δωματίου.

β) Το εμβαδόν του γωνιακού διαδρόμου.

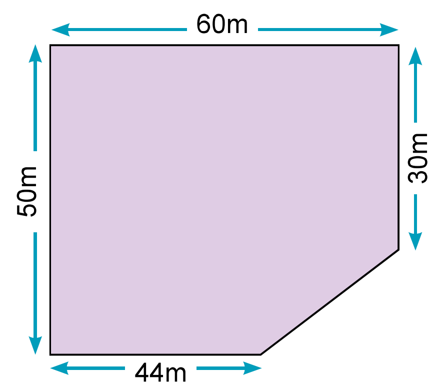
γ) Το εμβαδόν της βεράντας.

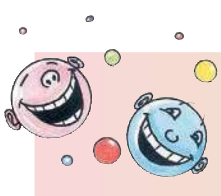


17 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το τοπογραφικό διάγραμμα ενός κτήματος το οποίο πωλείται προς 20.000 € το στρέμμα.

α) Να βρεθεί η αξία του κτήματος.

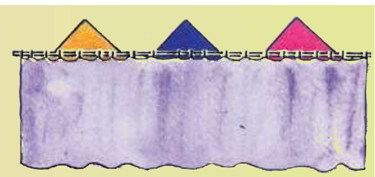
β) Πόσα κλήματα μπορούμε να φυτέψουμε στο κτήμα αυτό, αν κάθε κλήμα απαιτεί 2,5 m² χώρο;





ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

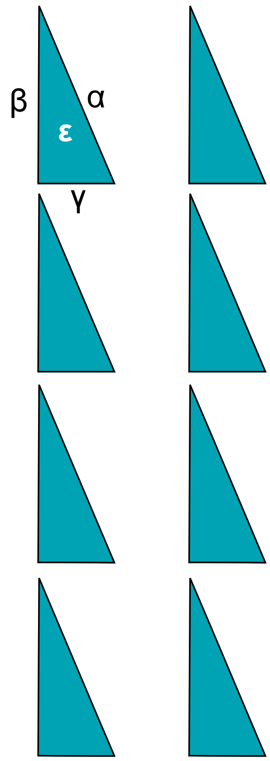
Πίσω από την κουρτίνα κρύβονται ένα τετράγωνο, ένα ορθογώνιο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

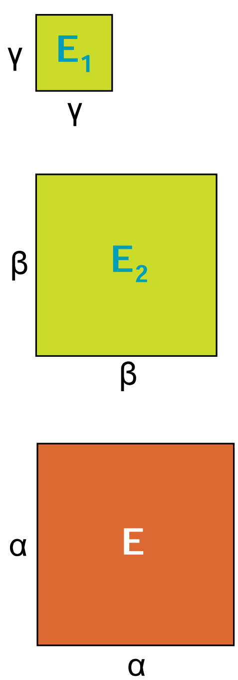


Βρείτε τη θέση και το εμβαδόν καθενός, αν γνωρίζετε ότι:

1. *Το ορθογώνιο έχει τετραπλάσιο εμβαδόν και βρίσκεται πιο αριστερά από το τετράγωνο.*
2. *Ένα σχήμα εμβαδού 100 cm² βρίσκεται δεξιά από το ορθογώνιο τρίγωνο.*
3. *Δεξιά από ένα σχήμα με τέσσερις ορθές γωνίες βρίσκεται το ορθογώνιο τρίγωνο.*
4. *Οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου.*

1.4. Πυθαγόρειο θεώρημα





ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δίνονται οκτώ ίσα ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές β, γ και υποτείνουσα α και τρία τετράγωνα με πλευρές α, β, γ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ε, Ε, E_1, E_2 των διπλανών τριγώνων και τετραγώνων.

β) Να τοποθετήσετε κατάλληλα τα τρίγωνα και τετράγωνα, ώστε να σχηματίσουν δύο νέα τετράγωνα, πλευράς (β + γ).

Λύση

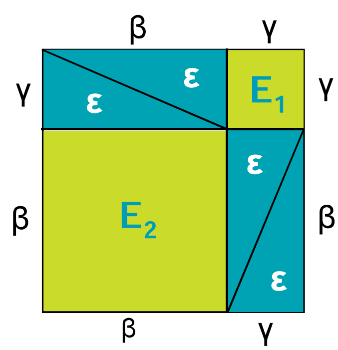
α) Έχουμε ότι: $ε = \dfrac{β \cdot γ}{2}$

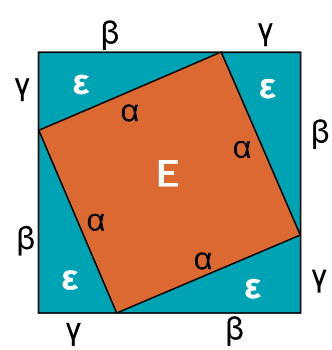
$Ε = α^2$
$E_1 = γ^2$
$E_2 = β^2$

β) Αρκεί να τα τοποθετήσουμε όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε το εμβαδόν των ίσων τετραγώνων πλευράς (β + γ) με δύο διαφορετικούς τρόπους:

1ος τρόπος: $E_1 + E_2 + 4ε$ από το πρώτο τετράγωνο που αποτελείται από 4 τρίγωνα και τα δύο τετράγωνα πλευράς β, γ αντίστοιχα.

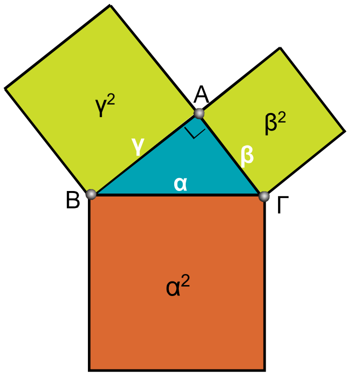
2ος τρόπος: Ε + 4ε από το δεύτερο τετράγωνο που αποτελείται πάλι από 4 τρίγωνα και το τετράγωνο πλευράς α.





Επομένως, θα ισχύει ότι: $E_1 + E_2 + 4ε = Ε + 4ε$ ή
$E_1 + E_2 = Ε$ ή
$\boldsymbol{β^2 + γ^2 = α^2}$

Η σχέση αυτή, που συνδέει τις κάθετες πλευρές με την υποτείνουσα ενός τριγώνου, εκφράζει το **Πυθαγόρειο θεώρημα**, δηλαδή ισχύει:



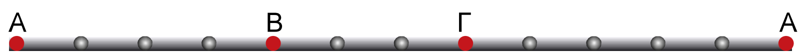
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

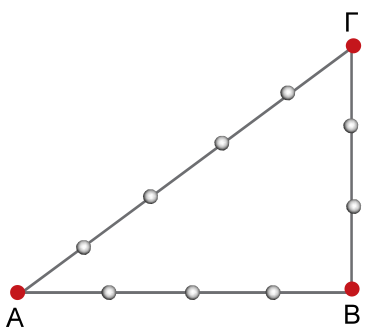
Παρατήρηση:

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, δηλαδή το εμβαδόν του μεγάλου πορτοκαλί τετραγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο πράσινων τετραγώνων.

Το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος



Στην Αρχαία Αίγυπτο για την κατασκευή ορθών γωνιών χρησιμοποιούσαν το σκοινί του παραπάνω σχήματος. Όπως βλέπουμε, το σκοινί έχει 13 κόμπους σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους που σχηματίζουν 12 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

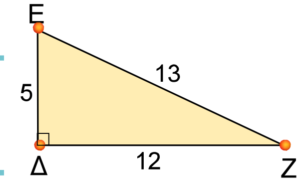


Κρατώντας τους ακραίους κόμπους ενωμένους και τεντώνοντας το σκοινί στους κόκκινους κόμπους, σχηματίζεται το τρίγωνο ΑΒΓ, το οποίο οι αρχαίοι Αιγύπτιοι πίστευαν ότι είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την κορυφή Β. Μεταγενέστερα, οι αρχαίοι Έλληνες επαλήθευσαν τον ισχυρισμό αυτό αποδεικνύοντας την επόμενη γενική πρόταση, που είναι γνωστή ως το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος:

Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

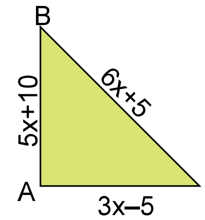
Να επαληθεύσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος.



Λύση: Στο τρίγωνο ΔΕΖ οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη 5 και 12, οπότε το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών είναι $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.
Επιπλέον, η υποτείνουσα έχει μήκος 13 και το τετράγωνό της ισούται με: $13^2 = 169$.
Επομένως, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, αφού: $5^2 + 12^2 = 13^2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 150 m.
α) Να βρείτε τον αριθμό x.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



Λύση: α) Η περίμετρος του τριγώνου είναι:

$ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = 5x + 10 + 6x + 5 + 3x – 5 = 14x + 10$.

Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι:

$14x + 10 = 150$ ή $14x = 150 – 10$ ή

$14x = 140$ ή $x = \frac{140}{14}$.

Άρα $x = 10$.

β) Για $x = 10$ τα μήκη των πλευρών (σε μέτρα) είναι:

$ΑΒ = 5 \cdot 10 + 10 = 60$,

$ΑΓ = 3 \cdot 10 – 5 = 25$,

$ΒΓ = 6 \cdot 10 + 5 = 65$.

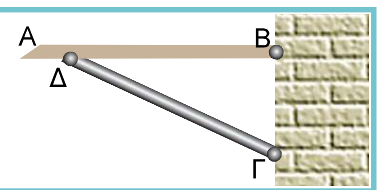
Επομένως: $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 60^2 + 25^2 = 3600 + 625 = 4225$.

Επίσης: $ΒΓ^2 = 65^2 = 4225$.

Επομένως: $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ και σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ένα ράφι ΑΒ είναι στερεωμένο σε ένα κατακόρυφο τοίχο με ένα μεταλλικό στήριγμα μήκους ΓΔ = 32,6 cm. Αν ΒΔ = 27,7 cm και ΒΓ = 17,2 cm, να εξετάσετε αν το ράφι είναι οριζόντιο.



Λύση: Το ράφι θα είναι οριζόντιο, μόνο αν είναι κάθετο στον τοίχο, δηλαδή αν το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο στο Β.

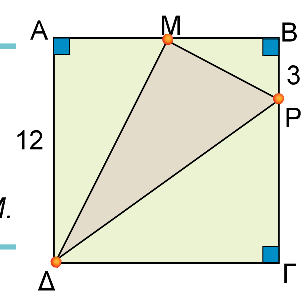
Είναι: $ΒΔ^2 + ΒΓ^2 = 27{,}7^2 + 17{,}2^2 = 767{,}29 + 295{,}84 = 1063{,}13$.

Επίσης: $ΓΔ^2 = 32{,}6^2 = 1062{,}76$.

Επομένως: $ΒΔ^2 + ΒΓ^2 \neq ΓΔ^2$, οπότε το τρίγωνο ΒΓΔ δεν είναι ορθογώνιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 12 cm. Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και ΒΡ = 3 cm.
α) Να υπολογίσετε τα $ΜΔ^2$, $ΜΡ^2$ και $ΔΡ^2$.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΡΔ είναι ορθογώνιο στο Μ.



Λύση: α) Αφού το Μ είναι μέσο του ΑΒ, είναι ΑΜ = ΜΒ = 6 (cm).

Επίσης: ΓΡ = 12 – 3 = 9 (cm).

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΔ έχουμε:

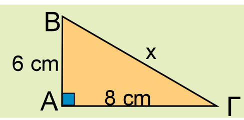
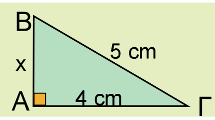
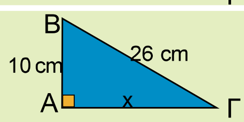
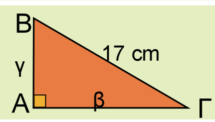
$ΜΔ^2 = ΑΔ^2 + ΑΜ^2 = 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180$.

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΡ έχουμε:
$ΜΡ^2 = ΜΒ^2 + ΒΡ^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$,
και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΡ έχουμε:
$ΔΡ^2 = ΔΓ^2 + ΡΓ^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$.

β) Είναι $ΜΔ^2 + ΜΡ^2 = 180 + 45 = 225 = ΔΡ^2$, οπότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος, το τρίγωνο ΜΡΔ είναι ορθογώνιο στο Μ.

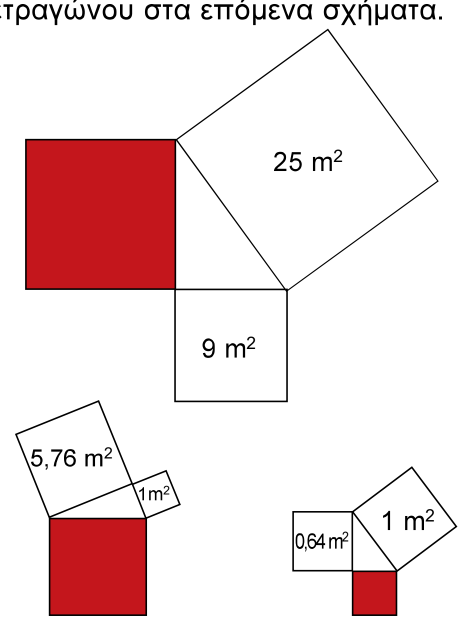
ΕΡΩΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Στις παρακάτω ερωτήσεις 1 - 4 τα τρίγωνα ΑΒΓ είναι ορθογώνια στο Α.
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

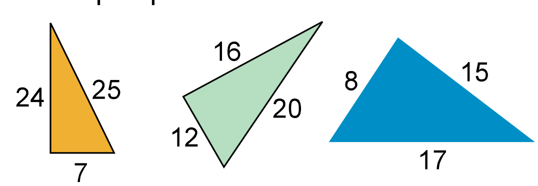
			Α	Β	Γ	Δ
1		x =	7 cm	9 cm	10 cm	12 cm
2		x =	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
3		x =	14 cm	20 cm	24 cm	30 cm
4		β = και γ =	β=15 και γ=8	β=13 και γ=10	β=12 και γ=13	β=8 και γ=9

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να βρείτε το εμβαδόν του κόκκινου τετραγώνου στα επόμενα σχήματα.



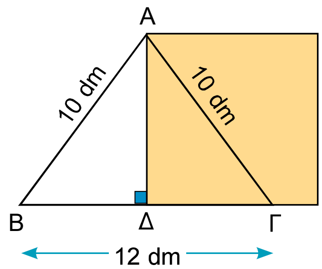
2 Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια.



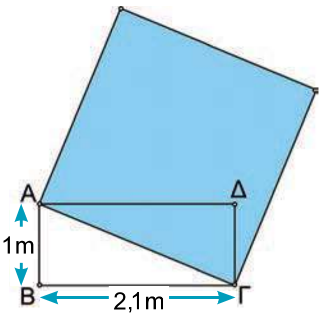
3 α) Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών 6 cm, 8 cm και 10 cm. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει διπλάσιες πλευρές από τις πλευρές του ΑΒΓ, καθώς και το τρίγωνο που έχει τις μισές πλευρές από τις πλευρές του ΑΒΓ, είναι επίσης ορθογώνιο.

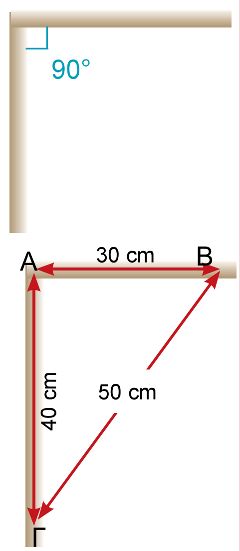
4 Το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ = 10 dm και ΒΓ = 12 dm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με το ύψος ΑΔ του τριγώνου.



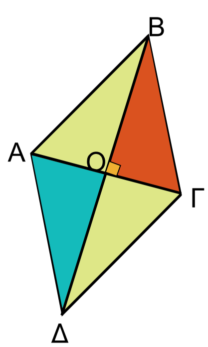
5 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μπλε τετραγώνου το οποίο έχει πλευρά ίση με τη διαγώνιο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.



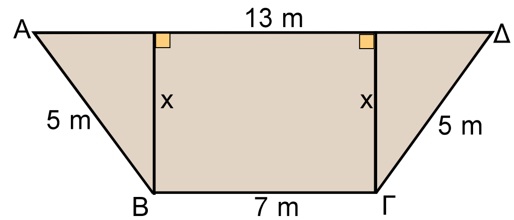
6 Για να σχηματίσει ορθή γωνία με δύο ξύλινα δοκάρια (όπως λέμε για να «γωνιάσει» τα δοκάρια), ένας τεχνίτης μετράει στο ένα δοκάρι ΑΒ = 30 cm και στο άλλο ΑΓ = 40 cm. Στη συνέχεια, τα τοποθετεί κατάλληλα, ώστε να είναι ΒΓ = 50 cm. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί είναι σίγουρος ότι η γωνία που σχηματίζουν τα δοκάρια είναι ορθή;



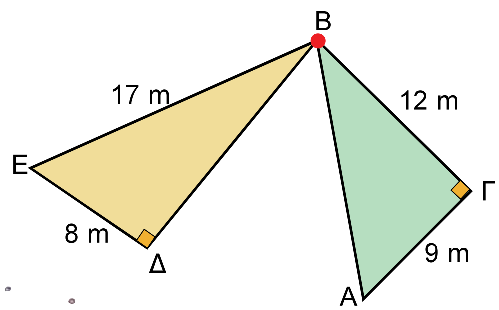
7 Ο χαρταετός του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με διαγώνιες 12 dm και 16 dm. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν της επιφάνειας του χαρταετού.



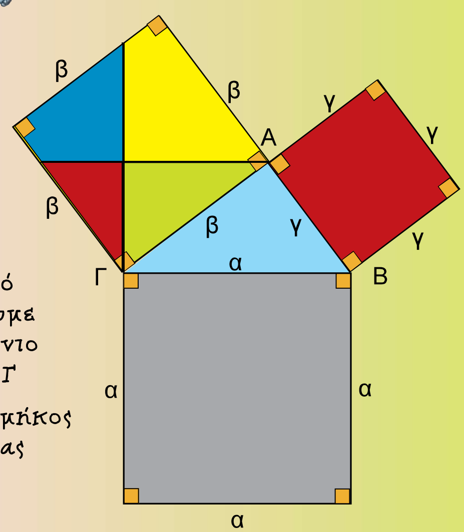
8 Η διατομή ενός καναλιού είναι σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου με πλευρές: ΓΔ = ΑΒ = 5 m, ΒΓ = 7 m και ΑΔ = 13 m. Να υπολογίσετε το ύψος x του καναλιού.



9 Ποια από τις τοποθεσίες Ε, Δ, Α είναι πλησιέστερα στην πόλη Β;

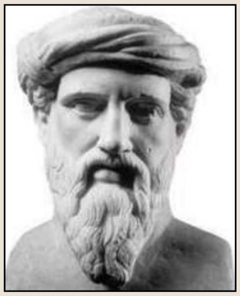


ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:



Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) με μήκος υποτείνουσας α και μήκη κάθετων πλευρών β και γ. Εξωτερικά του τριγώνου έχουμε κατασκευάσει τρία τετράγωνα με μήκη πλευρών α, β και γ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τα χρωματιστά «κομμάτια» που αποτελούν τα τετράγωνα των κάθετων πλευρών, μπορείτε να «γεμίσετε» το μεγάλο γκρίζο τετράγωνο της υποτείνουσας εφαρμόζοντας ακριβώς τα χρωματιστά κομμάτια χωρίς το ένα να επικαλύπτει το άλλο;

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ



Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί ένα από τα πιο κομψά αλλά ταυτόχρονα και πιο σημαντικά θεωρήματα με πολλές εφαρμογές.

Η ανακάλυψη του θεωρήματος, αν και παραδοσιακά αποδίδεται στον ***Πυθαγόρα το Σάμιο*** *(585 - 500 π.Χ.), δεν είναι βέβαιο ότι έγινε από αυτόν ή από κάποιον από τους μαθητές του στην Πυθαγόρεια Σχολή που ίδρυσε.*

Όμως είναι βέβαιο πως είτε ο ίδιος είτε οι μαθητές του διατύπωσαν την πρώτη απόδειξη. Σύμφωνα με την παράδοση, οι θεοί ανακοίνωσαν στον Πυθαγόρα το ομώνυμο θεώρημα και όταν το απέδειξε, για να τους ευχαριστήσει, έκανε θυσία 100 βοδιών. Για τον λόγο αυτό, το Πυθαγόρειο θεώρημα αναφέρεται συχνά και ως “θεώρημα της εκατόμβης”.

Επιπλέον, οι Πυθαγόρειοι διατύπωσαν και απέδειξαν το αντίστροφο του θεωρήματος.

Πολλοί μαθηματικοί, διάσημοι και μη, προσπάθησαν να αποδείξουν το Πυθαγόρειο θεώρημα με δική τους ανεξάρτητη μέθοδο. Ανάμεσα σ’ αυτούς υπάρχουν και προσωπικότητες, όπως ο Leonardo da Vinci και ο πρόεδρος των ΗΠΑ Garfield.

Το 1940 ο Elisha Scott Loomis περιέλαβε 365 διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος σ’ ένα βιβλίο.

Επανάληψη Κεφαλαίου 1

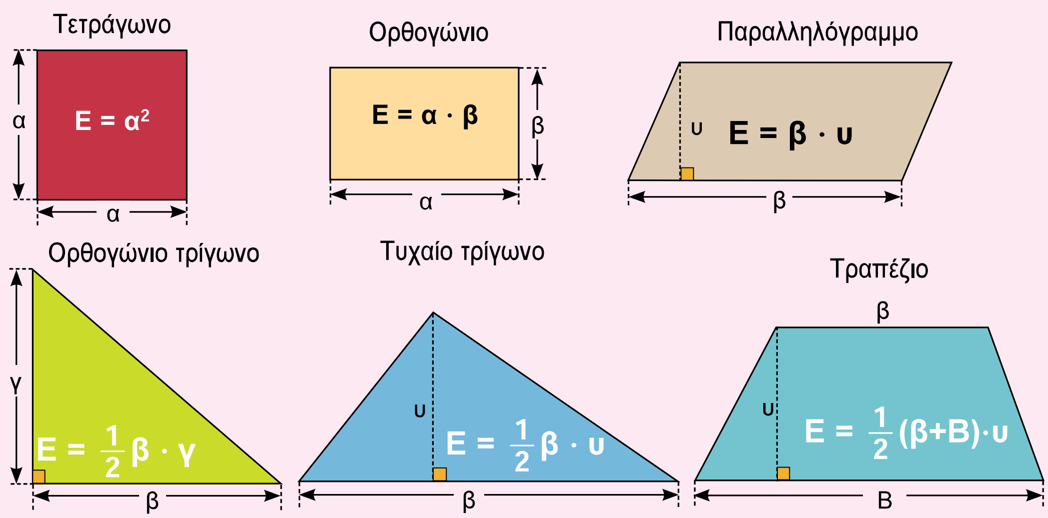
Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων - Πυθαγόρειο θεώρημα

- Το **εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας** είναι ο θετικός αριθμός που εκφράζει το πλήθος των μονάδων μέτρησης, το οποίο χρειάζεται να πάρουμε, ώστε να καλύψουμε τη δοσμένη επιφάνεια.

- **Μονάδες μέτρησης εμβαδών**

1 m²=	100 dm^2 =	10.000 cm^2 =	1.000.000 mm^2
	1 dm^2 =	100 cm^2 =	10.000 mm^2
		1 cm^2 =	100 mm^2

- **Εμβαδά των βασικών επιπέδων σχημάτων.**



- **Πυθαγόρειο θεώρημα: $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$**
  Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.
- **Αντίστροφο Πυθαγόρειου θεωρήματος**
  Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.