Πώς βρίσκουμε το Ε.Κ.Π.

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

1ος τρόπος

Του Δημοτικού (= αγγαρεία)

Βρίσκουμε καμιά δεκαριά πολλαπλάσια, του κάθε αριθμού ξεχωριστά (ή όσα χρειάζεται, τέλος πάντων). Κατόπιν, τα συγκρίνουμε κι αν ανακαλύψουμε κοινά πολλάπλάσια, μεταξύ τους, επιλέγουμε το μικρότερο. Αυτός ο τρόπος είναι βολικός μονάχα για μικρούς αριθμούς.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ΕΚΠ των αριθμών: **12** , **8** , **3**

- Τα πολλαπλάσια του 12 είναι : 12 , 24 , 36 , 48 , 60 , 72 , ...
- Τα πολλαπλάσια του 8 είναι : 8 , 16 , 24 , 32 , 40 , 48 , 56 , ...
- Τα πολλαπλάσια του 3 είναι : 3 , 6 , 9 , 12 , 15 , 18 , 21 , 24 , 27 , 30 , ...
- Παρατηρούμε ότι το 24 είναι το μικρότερο κοινό πολλαπλάσιο
- Άρα το ΕΚΠ (12, 8, 3) = **24**

2ος τρόπος

Ανάλυση σε Γινόμενο Πρώτων Παραγόντων

Αναλύουμε ξεχωριστά κάθε αριθμό, από τους οποίους ζητάμε το ΕΚΠ, σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Στη συνέχεια, από τα γινόμενα πρώτων παραγόντων που σχηματίζονται, επιλέγουμε :

α. **κοινούς και μη κοινούς** παράγοντες (μία φορά τον καθένα) και
β. στη **μεγαλύτερη** δύναμη, που εμφανίζονται

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ΕΚΠ των αριθμών: **12** , **32** , **9**

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Δηλ.

$$\begin{array}{rcl} 12 & = 2 \cdot 2 \cdot 3 & = \mathbf{2^2 \cdot 3} \\ 32 & = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 & = \mathbf{2^5} \\ 108 & = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 & = \mathbf{3^2} \end{array}$$

Κοινοί και μη κοινοί παράγοντες, είναι το 2 και το 3 .
Η μεγαλύτερη δύναμη του 2 είναι 2^5 , ενώ η μεγαλύτερη του 3 είναι 3^2 .

Άρα το ΕΚΠ (12, 32, 9) = $2^5 \cdot 3^2$ = 32 · 9 = **288**

Παρατηρήσεις

- Πρώτοι ονομάζονται οι αριθμοί, που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα (1).
- Οι πρώτοι αριθμοί μέχρι το 50 είναι :

  2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 , 31 , 37 , 41 , 43 , 47
- Το 2 είναι ο μόνος πρώτος αριθμός που είναι και άρτιος.
- Η μονάδα (1) δεν θεωρείται πρώτος αριθμός.

3ος τρόπος
Πρακτικά πράγματα

Παίρνουμε το **μεγαλύτερο** από τους αριθμούς, των οποίων ζητάμε το ΕΚΠ.

- Εξετάζουμε αν ο αριθμός αυτός είναι **κοινό πολλαπλάσιο** όλων των υπόλοιπων.
- Αν ναι, τότε βρήκαμε το ΕΚΠ !
- Αν δεν είναι, τότε υπολογίζουμε το επόμενο πολλαπλάσιο, του αριθμού αυτού.
- Κάνουμε πάλι το ίδιο : εξετάζουμε αν ο νέος αριθμός είναι κοινό πολλαπλάσιο όλων των υπόλοιπων, κ.ο.κ.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ΕΚΠ των αριθμών: **12**, **8**, **3**

- Ο μεγαλύτερος είναι το 12
- Το 12 δεν είναι κοινό πολλαπλάσιο του 8 και του 3
- Εξετάζω το επόμενο πολλαπλάσιο του 12, δηλαδή το 24
- Το 24 είναι πολλαπλάσιο και του 8 και του 3
- Άρα το ΕΚΠ (12, 8, 3) = **24**

Πού μας χρησιμεύει το ΕΚΠ (στο σχολείο)

Τις περισσότερες φορές, το ΕΚΠ μας χρησιμεύει στην πρόσθεση ή αφαίρεση κλασμάτων, όταν αυτά είναι ετερώνυμα - δηλαδή έχουν διαφορετικούς παρονομαστές - κι εμείς χρειάζεται πρώτα να μετατρέψουμε σε ομώνυμα. Έτσι, γεννήθηκαν κάποτε τα διάσημα "καπελάκια", πάνω από τα κλάσματα. Μέσα σε κάθε "καπελάκι", γράφουμε το πηλίκο της διαίρεσης του ΕΚΠ με τον αντίστοιχο παρονομαστή. Δηλαδή, τον αριθμό εκείνο, τον οποίο αν πολλαπλασιάσουμε με το "καπελάκι" θα μας δώσει πάλι το ΕΚΠ.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης : $A = \frac{2}{3} + \frac{7}{6} + \frac{5}{2}$

- Το ΕΚΠ (3, 6, 2) = 6
- Στο 1ο καπελάκι βάζουμε 6 : 3 = 2
- Στο 2ο καπελάκι βάζουμε 6 : 6 = 1
- Στο 3ο καπελάκι βάζουμε 6 : 2 = 3
- Έτσι, η παράσταση γίνεται :

$$A = \overset{2}{\frac{2}{3}} + \overset{1}{\frac{7}{6}} + \overset{3}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{6} + \frac{7}{6} + \frac{15}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

Πώς βρίσκουμε το Μ.Κ.Δ.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

1ος τρόπος
Του Δημοτικού (= αγγαρεία)

Βρίσκουμε όλους τους διαιρέτες, κάθε αριθμού ξεχωριστά. Κατόπιν, τους συγκρίνουμε κι αν ανακαλύψουμε κοινούς διαιρέτες, μεταξύ τους, επιλέγουμε το μεγαλύτερο. Όπως και στο ΕΚΠ, αυτός ο τρόπος είναι βολικός μονάχα για μικρούς αριθμούς.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών: **12** , **8** , **16**

- Οι διαιρέτες του 12 είναι : 12 , 6 , 4 , 3 , 2 , 1
- Οι διαιρέτες του 8 είναι : 8 , 4 , 2 , 1
- Οι διαιρέτες του 16 είναι : 16 , 8 , 4 , 1
- Παρατηρούμε ότι το 4 είναι ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης
- Άρα ο ΜΚΔ (12, 8, 16) = **4**

2ος τρόπος
Ανάλυση σε Γινόμενο Πρώτων Παραγόντων

Αναλύουμε τους αριθμούς, των οποίων ζητάμε το ΜΚΔ, σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, αλλά αυτή τη φορά τον **καθένα ξεχωριστά**. Στη συνέχεια, από τα γινόμενα πρώτων παραγόντων που σχηματίζονται, επιλέγουμε τους πρώτους παράγοντες, οι οποίοι:

α. είναι **κοινοί** σε όλα τα γινόμενα και
β. στη **μικρότερη** δύναμη, που εμφανίζονται

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών: **12** , **32** , **108**

$$
\begin{array}{r|l}
12 & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
32 & 2 \\
16 & 2 \\
8 & 2 \\
4 & 2 \\
2 & 2 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
108 & 2 \\
54 & 2 \\
27 & 3 \\
9 & 3 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
$$

Δηλ.
$$
\begin{aligned}
12 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 &&= \mathbf{2^2} \\
32 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &&= \mathbf{2^5} \\
108 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 &&= \mathbf{2^2 \cdot 3^3}
\end{aligned}
$$

Και στα τρία γινόμενα συναντάμε μονάχα το 2.
Η μικρότερη δύναμη στην οποία το συναντάμε είναι 2^2.

Άρα ο ΜΚΔ (12, 32, 108) = 2^2 = **4**

3ος τρόπος

Πρακτικός

Παίρνουμε το **μικρότερο** από τους αριθμούς, των οποίων ζητάμε το ΜΚΔ.

- Εξετάζουμε αν αυτός ο αριθμός είναι κοινός διαιρέτης όλων των υπόλοιπων.
- Αν ναι, τότε βρήκαμε το ΜΚΔ !
- Αν δεν είναι, τότε τον αφαιρούμε από καθένα από τους υπόλοιπους αριθμούς.
- Εφαρμόζουμε τη διαδικασία ξανά από την αρχή.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών: **16, 56, 40**

– Ο μικρότερος είναι το 16	**16**	**56**	**40**
– Δεν είναι κοινός διαιρέτης του 56 και του 40		-16	-16
– Αφαιρώ το 16 από το 56 και το 40	**16**	**40**	**24**
– Ο μικρότερος είναι πάλι το 16			
– Δεν είναι κοινός διαιρέτης του 40 και του 24		-16	-16
– Αφαιρώ το 16 από το 40 και το 24	**16**	**24**	**8**
– Ο μικρότερος, τώρα, είναι το 8			
– Το 8 είναι κοινός διαιρέτης του 16 και του 24			
– Άρα ο ΜΚΔ (16, 56, 40) = **8**			

4ος τρόπος

Πρακτικός

Παίρνουμε το **μικρότερο** από τους αριθμούς, των οποίων ζητάμε το ΜΚΔ.

- Εξετάζουμε αν ο αριθμός αυτός είναι κοινός διαιρέτης όλων των υπόλοιπων.
- Αν ναι, τότε βρήκαμε το ΜΚΔ !
- Αν δεν είναι, τότε βρίσκουμε όλους τους διαιρέτες αυτού του αριθμού.
- Εξετάζουμε με τη σειρά, από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο, αν κάποιος από αυτούς είναι κοινός διαιρέτης των αριθμών που μας ενδιαφέρει.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών: **44** , **12** , **36**

- Ο μικρότερος είναι το 12
- Δεν είναι κοινός διαιρέτης του 44 και του 36
- Υπολογίζω τους διαιρέτες του 12 : .... **6 , 4 , 3 , 2 , 1**
- Εξετάζω τον μεγαλύτερο διαιρέτη του 12, δηλ. το 6
- Το 6 είναι διαιρέτης του 36 αλλά όχι του 44
- Εξετάζω τον επόμενο, δηλαδή το 4
- Το 4 διαιρεί και το 36 και το 44
- Άρα ο ΜΚΔ (44, 12, 36) = **4**

Παρατηρήσεις

- Ο μεγαλύτερος διαιρέτης ενός ζυγού αριθμού βρίσκεται πολύ εύκολα, γιατί είναι το μισό του.
- Πολύ χρήσιμο είναι να θυμόμαστε τα **Κριτήρια Διαιρετότητας**.
- Είναι δυνατόν, μετά απ' όλα αυτά, να διαπιστώσουμε ότι οι αριθμοί δεν έχουν κανέναν κοινό διαιρέτη ή - πιο σωστά - ο μόνος κοινός διαιρέτης που έχουν είναι η μονάδα (1) . Τους αριθμούς αυτούς τους ονομάζουμε **πρώτους μεταξύ τους**.

Πού μας χρησιμεύει ο ΜΚΔ (στο σχολείο)

Ο ΜΚΔ μας χρησιμεύει όταν απλοποιούμε κλάσματα, ώστε να βρίσκουμε αμέσως το **ανάγωγο** εκείνο κλάσμα που είναι ισοδύναμο με το αρχικό. Διαιρούμε, δηλαδή, αριθμητή και παρονομαστή με το ΜΚΔ τους. Αν οι όροι του κλάσματος δεν έχουν κανέναν κοινό διαιρέτη (δηλαδή είναι πρώτοι μεταξύ τους) τότε το κλάσμα είναι ήδη ανάγωγο.

Παράδειγμα

Να απλοποιηθεί η παράσταση : $A = \frac{64}{56}$

Χωρίς τη βοήθεια του ΜΚΔ, εκτελούμε διαδοχικές απλοποιήσεις :

$$A = \frac{64}{56} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{32}{28} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{16}{14} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{8}{7}$$

Με τη βοήθεια όμως του ΜΚΔ, έχουμε :

ΜΚΔ (64, 56) = 8

$$A = \frac{64}{56} \overset{:8}{\underset{:8}{=}} \frac{8}{7}$$

Πώς βρίσκουμε Ε.Κ.Π. & Μ.Κ.Δ. ταυτόχρονα !

Ας αφήσουμε, τώρα, στην άκρη το μπλα-μπλά κι ας δούμε πώς ξεμπερδεύουμε μ' ένα σμπάρο δυο τρυγόνια. Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, αυτή τη φορά όμως όλους μαζί, ταυτόχρονα. Το κόλπο, εδώ, είναι κάθε φορά που κάποιος πρώτος αριθμός τους διαιρεί όλους, να τον σημειώνουμε πχ. με ένα "τικ". Στο τέλος, το συνολικό γινόμενο των πρώτων παραγόντων μας δίνει το ΕΚΠ, ενώ το γινόμενο μόνο εκείνων με "τικ" μας δίνει το ΜΚΔ.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ΕΚΠ και ο ΜΚΔ των αριθμών: **18** , **30** , **12**

18	30	12	2	✓
9	15	6	2	
9	15	3	3	✓
3	5	1	3	
1	5	1	5	
1	1	1		

Άρα το ΕΚΠ (18, 30, 12) = 2 · 2 · 3 · 3 · 5 = 4 · 9 · 5 = **180**
ενώ ο ΜΚΔ (18, 30, 12) = 2 · 3 = **6**