Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με άγνωστο το x λέγεται **εξίσωση 2ου βαθμού**.
Η παράσταση $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ονομάζεται **τριώνυμο** (άθροισμα 3 μονωνύμων).
Οι αριθμοί α,β,γ ονομάζονται **συντελεστές** της εξίσωσης. Ο συντελεστής γ λέγεται και **σταθερός όρος**.

A. Επίλυση της εξίσωσης 2ου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.

Εκμεταλευόμαστε την ιδιότητα: Αν $\mathbf{a\cdot\beta=0}$ τότε $\mathbf{a=0}$ ή $\mathbf{\beta=0}$

- **Εξίσωση της μορφής $\mathbf{ax^2+\beta x=0}$**

Παρατηρούμε ότι ¨βγαίνει¨ κοινός παράγοντας το x.

Είναι $x(\alpha x+\beta)=0$ άρα $x=0$ ή $\alpha x+\beta=0$ ή $\alpha x=-\beta$ άρα $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

- **Εξίσωση της μορφής $\mathbf{ax^2+\gamma=0}$**

Μπορεί να λυθεί με δύο τρόπους.
1ος τρόπος: Απευθείας επίλυση.

Παραδείγματα

1. $x^2-9=0$ ή $x^2=9$ άρα $x=\pm\sqrt{9}=\pm3$

2. $x^2+9=0$ ή $x^2=-9$ αδύνατη

2ος τρόπος: Διαφορά τετραγώνων

Παράδειγμα

3. $x^2-9=0$ ή $(x-3)(x+3)=0$ άρα $x-3=0$ δηλαδή $x=3$ ή $x+3=0$ δηλαδή $x=-3$.

- **Εξίσωση της μορφής $\mathbf{ax^2+\beta x+\gamma=0}$**

  - Αρχικά εξετάζουμε αν έχουμε ανάπτυγμα ταυτότητας.
  - Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με 4α.
  - Μεταφέρουμε τον σταθερό όρο στο β΄ μέλος και στο α΄ μέλος σχηματίζουμε την παράσταση $a^2\pm2\cdot a\cdot\beta$.
  - Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το β^2.
  - Στο πρώτο μέλος έχουμε δημιουργήσει ταυτότητα: $a^2\pm2a\beta+\beta^2=(a\pm\beta)^2$.

Η εξίσωση παίρνει τη μορφή $A^2(x)=B^2$. Η προηγούμενη διαδικασία ονομάζεται **συμπλήρωση τετραγώνου.**

Παραδείγματα

4. $x^2-4x+4=0$ ή $(x-2)^2=0$ ή $x-2=0$ άρα $x=2$

5. $x^2-4x+3=0$ ή $4x^2-16x+12=0$ ή $(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 4=-12$ ή

$(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 4+4^2=-12+4^2$ ή $(2x-4)^2=4$ ή $2x-4=\pm\sqrt{4}$

Άρα $2x-4=2$ ή $2x=2+4$ ή $2x=6$ άρα $x=\frac{6}{2}=3$ ή

$2x-4=-2$ ή $2x=-2+4$ ή $2x=2$ άρα $x=1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-4)(x-1)=0$ β) $y(y+5)=0$ γ) $(3-\omega)(2\omega+1)=0$

δ) $7x(x-7)=0$ ε) $3y\left(\frac{y}{3}-2\right)=0$ στ) $\left(\frac{1}{2}-\omega\right)(2\omega-1)=0$

Λύση

α) $(x-4)(x-1)=0$

$x-4=0$ ή $x-1=0$

$x=4$ ή $x=1$

β) $x(x+5)=0$

$x=0$ ή $x+5=0$

$x=0$ ή $x=-5$

γ) $(3-\omega)(2\omega+1)=0$

$3-\omega=0$ ή $2\omega+1=0$

$\omega=3$ ή $2\omega=-1$

$\omega=-\frac{1}{2}$

δ) $7x(x-7)=0$

$7x=0$ ή $x-7=0$

$x=0$ ή $x=7$

ε) $3y\left(\frac{y}{3}-2\right)=0$

$3y=0$ ή $\frac{y}{3}-2=0$

$y=0$ ή $\frac{y}{3}=2$

$y=6$

στ) $\left(\frac{1}{2}-\omega\right)(2\omega-1)=0$

$\frac{1}{2}-\omega=0$ ή $2\omega-1=0$

$\omega=\frac{1}{2}$ ή $2\omega=1$

$\omega=\frac{1}{2}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2=7x$ β) $-y^2=9y$ γ) $2\omega^2-72=0$

δ) $-2t^2-18=0$ ε) $-0,2\varphi^2+3,2=0$ στ) $\frac{z^2}{6}-0,5z=0$

Λύση

α) $x^2=7x$

$x^2-7x=0$

$x(x-7)=0$

$x=0$ ή $x-7=0$

$x=7$

β) $-y^2=9y$

$0=9y-y^2$

$y(9-y)=0$

$y=0$ ή $9-y=0$

$y=9$

γ) $2\omega^2-72=0$

$2\omega^2=72$

$\omega^2=\frac{72}{2}$

$\omega^2=36$

$\omega=\pm 6$

δ) $-y^2=9y$

$0=9y-y^2$

$y(9-y)=0$

$y=0$ ή $9-y=0$

$y=9$

ε) $-0{,}2\varphi^2+3{,}2=0$

$-0{,}2\varphi^2=-3{,}2$

$\varphi^2=\frac{-3{,}2}{-0{,}2}=16$

$\varphi=\pm\sqrt{16}=\pm4$

δ) $\frac{z^2}{6}-0{,}5z=0$

$\cancel{6}\frac{z^2}{\cancel{6}}-6\cdot0{,}5z=0$

$z(z-3)=0$

$z=0$ ή $z-3=0$ ή $z=3$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2x-1)^2-1=0$ **β)** $3(y+2)^2=12$ **γ)** $(x+1)^2=2x$

δ) $\frac{(x-9)^2}{3}=27$ **ε)** $(3x-1)^2-4x^2=0$ **στ)** $\left(x+\sqrt{3}\right)^2-3=0$

Λύση

α) 1ος τρόπος

$(2x-1)^2-1=0$

$(2x-1)^2=1$

$2x-1=\pm1$

$2x-1=1$ ή $2x-1=-1$

$2x=2$ ή $2x=0$

$x=\frac{2}{2}=1$ ή $x=0$

2ος τρόπος

$(2x-1)^2-1=0$

$[(2x-1)-1][(2x-1)+1]=0$

$(2x-1-1)(2x-1+1)=0$

$(2x-2)2x=0$

$2x-2=0$ ή $2x=0$

$2x=2$ ή $x=0$

$x=\frac{2}{2}=1$ ή $x=0$

β) $3(y+2)^2=12$

$(y+2)^2=\frac{12}{3}=4$

$y+2=\pm2$

$y+2=2$ ή $y+2=-2$

$y=0$ ή $y=-2$

γ) $(x+1)^2=2x$

$x^2+\cancel{2x}+1=\cancel{2x}$

$x^2=-1$ αδύνατη

δ) $\frac{(x-9)^2}{3}=27$

$(x-9)^2=81$

$x-9=\pm9$

$x-9=9$ ή $x-9=-9$

$x=18$ ή $x=0$

ε) $(3x-1)^2-4x^2=0$

$(3x-1-2x)(3x-1+2x)=0$

$(x-1)(5x-1)=0$

$x-1=0$ ή $5x-1=0$

$x=1$ ή $5x=1$

$x=1$ ή $x=\frac{1}{5}$

στ) $\left(x+\sqrt{3}\right)^2-3=0$

$\left(x+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=0$

$\left(x+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{3}}\right)\left(x+\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=0$

$x\left(x+2\sqrt{3}\right)=0$

$x=0$ ή $x+2\sqrt{3}=0$

$x=0$ ή $x=-2\sqrt{3}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(3x+1)^2=5(3x+1)$ **β)** $0{,}5(1-y)^2=18$ **γ)** $(2\omega^2+1)(\omega^2-16)=0$

Λύση

α) $(3x+1)^2 = 5(3x+1)$

$(3x+1)^2 - 5(3x+1) = 0$

$(3x+1)(3x+1-5) = 0$

$(3x+1)(3x-4) = 0$

$3x+1=0$ ή $3x-4=0$

$x = -\frac{1}{3}$ ή $x = \frac{4}{3}$

β) $0,5(1-x)^2 = 18$

$(1-x)^2 = \frac{18}{0,5}$

$(1-x)^2 = 36$

$1-x=6$ ή $1-x=-6$

$-x=5$ ή $-x=-7$

$x=-5$ ή $x=7$

γ) $(2\omega^2+1)(\omega^2-16)=0$

$2\omega^2+1=0$ ή $\omega^2-16=0$

$2\omega^2=-1$ αδύνατη ή

$\omega^2=16$

$\omega=\pm 4$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x(x-4)=-4$ **β)** $y^2+y-12=0$ **γ)** $\omega^2-2\omega-15=0$

δ) $2t^2-7t+6=0$ **ε)** $3\varphi^2+1=4\varphi$ **στ)** $5z^2-3z-8=0$

Λύση

α) $x(x-4)=-4$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$x-2=0$

$x=2$

β) $y^2+y-12=0$

$4y^2+4y-48=0$

$4y^2+4y=48$

$4y^2+4y+1=49$

$(2y+1)^2=49$

$2y+1=\pm 7$

$2y+1=7$ ή $2y+1=-7$

$2y=7-1=6$ ή $2y=-7-1=-8$

$y=\frac{6}{2}=3$ ή $y=-\frac{8}{2}=-4$

γ) $\omega^2-2\omega-15=0$

$4\omega^2-8\omega-60=0$

$4\omega^2-8\omega=60$

$4\omega^2-8\omega+4=64$

$(2\omega-2)^2=64$

$2\omega-2=\pm 8$

$2\omega-2=8$ ή $2\omega-2=-8$

$2\omega=8+2=10$ ή $2\omega=-8+2=-6$

$\omega=\frac{10}{2}=5$ ή $\omega=-\frac{6}{2}=-3$

δ) $2t^2-7t+6=0$

$16t^2-56t+48=0$

$(4t)^2-2\cdot 4t\cdot 7+7^2=7^2-48$

$(4t-7)^2=1$

$4t-7=\pm 1$

$4t-7=1$ ή $4t-7=-1$

$4t=7+1=8$ ή $4t=7-1=6$

$t=\frac{8}{4}=2$ ή $t=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

ε) $3\varphi^2+1=4\varphi$

$3\varphi^2-4\varphi+1=0$

$36\varphi^2-48\varphi+12=0$

$(6\varphi)^2-2\cdot 6\varphi\cdot 4+4^2=4^2-12$

$(6\varphi-4)^2=4$

$6\varphi-4=\pm 2$

$6\varphi-4=2$ ή $6\varphi-4=-2$

$6\varphi=4+2=6$ ή $6\varphi=4-2=2$

$\varphi=\frac{6}{6}=1$ ή $\varphi=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

στ) $5z^2-3z-8=0$

$100z^2-60z-160=0$

$(10z)^2-2\cdot 10z\cdot 3+3^2=3^2+160$

$(10z-3)^2=169=13^2$

$10z-3=\pm 13$

$10z-3=13$ ή $10z-3=-13$

$10z=13+3=16$ ή

$10z=3-13=-10$

$z=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$ ή $z=-\frac{10}{10}=-1$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $25x^2+10x+1=0$ **β)** $y^2(y-2)+4y(y-2)+4y-8=0$

γ) $\omega^2+2006\omega-2007=0$

Λύση

α) $25x^2+10x+1=0$

$$(5x+1)^2=0$$
$$5x+1=0$$
$$5x=-1$$
$$x=-\frac{1}{5}$$

β) $y^2(y-2)+4y(y-2)+4y-8=0$

$$y^2(y-2)+4y(y-2)+4(y-2)=0$$
$$(y-2)(y^2+4y+4)=0$$
$$y-2=0 \quad ή \quad y^2+4y+4=0$$
$$y=2 \quad ή \quad (y+2)^2=0$$
$$y+2=0$$
$$y=-2$$

γ) $\omega^2+2006\omega-2007=0$

$$\omega^2+2006\omega-2006-1=0$$
$$(\omega-1)(\omega+1)+2006(\omega-1)=0$$
$$(\omega-1)(\omega+1+2006)=0$$
$$\omega-1=0 \quad ή \quad \omega+2007=0$$
$$\omega=1 \quad ή \quad \omega=-2007$$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ **β) $x^2-(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}=0$**

Λύση

α) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$$x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=0$$
$$x(x-\alpha)-\beta(x-\alpha)=0$$
$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$
$$x-\alpha=0 \quad ή \quad x-\beta=0$$
$$x=\alpha \quad ή \quad x=\beta$$

β) $x^2-(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}=0$

$$x^2-\sqrt{3}x+x-\sqrt{3}=0$$
$$x(x-\sqrt{3})+(x-\sqrt{3})=0$$
$$(x-\sqrt{3})(x+1)=0$$
$$x-\sqrt{3}=0 \quad ή \quad x+1=0$$
$$x=\sqrt{3} \quad ή \quad x=-1$$

8. Να λύσετε την εξίσωση: $(x^2-4)^4+(3x+6)^2=0$

Λύση

Επειδή $(x^2-4)^4\ge 0$ και $(3x+6)^2\ge 0$ για όλα τα x είναι $(x^2-4)^4+(3x+6)^2\ge 0$, άρα η ισότητα ισχύει μόνο όταν:

$$x^2-4=0 \text{ ή } (x-2)(x+2)=0 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-2$$

και

$$3x+6=0 \text{ ή } 3x=-6 \text{ άρα } x=-2$$

Επειδή οι παράγοντες x^2-4 και $3x+6$ πρέπει να μηδενίζονται ταυτόχρονα, η κοινή λύση των δύο εξισώσεων είναι $x=-2$.

9. Αν μία ρίζα της εξίσωσης $x^2+\kappa x-4=0$ είναι το 2, ποια είναι η άλλη ρίζα της;

Λύση

Επειδή το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2+\kappa x-4=0$ (1), την επαληθεύει, δηλαδή

$$\begin{aligned}2^2+\kappa\cdot 2-4&=0\\4+2\kappa-4&=0\\2\kappa&=0\\\kappa&=0\end{aligned}$$

Για κ = 0 η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\begin{aligned}x^2-4=0 \quad &ή \quad (x-2)(x+2)=0\\x-2=0 \quad &ή \quad x+2=0\\x=2 \quad &ή \quad x=-2\end{aligned}$$

Άρα η άλλη λύση της εξίσωσης είναι το -2.

10. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τη σχέση:
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha-4\beta-6\gamma+14=0$ *(Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. 1995)*

Λύση

Κάνουμε διάσπαση στο 14 σε $14=1+4+9$ για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων. Η σχέση γίνεται:

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha-4\beta-6\gamma+1+4+9=0$

$\alpha^2-2\alpha+1+\beta^2-4\beta+4+\gamma^2-6\gamma+9=0$

$(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2+(\gamma-3)^2=0 \quad (1)$

Επειδή $(\alpha-1)^2\geq 0$, $(\beta-2)^2\geq 0$ και $(\gamma-3)^2\geq 0$ η σχέση (1) αληθεύει μόνο όταν:

$\alpha-1=0$ και $\beta-2=0$ και $\gamma-3=0$, δηλαδή $\alpha=1$, $\beta=2$ και $\gamma=3$

11. i) Να αποδείξετε ότι: $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

ii) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, να αποδείξετε ότι: $\alpha=\beta=\gamma$.

Λύση

i) $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2=$

$=2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

ii) Είναι: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$

$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=0$

Με βάση το (i) ερώτημα είναι: $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$

Επειδή $(\alpha-\beta)^2\geq 0$, $(\beta-\gamma)^2\geq 0$ και $(\gamma-\alpha)^2\geq 0$, το άθροισμά τους είναι 0 μόνο όταν:

$(\alpha-\beta)^2=0$ και $(\beta-\gamma)^2=0$ και $(\gamma-\alpha)^2=0$ δηλαδή:

$\alpha-\beta=0$ και $\beta-\gamma=0$ και $\gamma-\alpha=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma$.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(3x-6)(x+5)=0$ β) $2x(x-3)(x+1)=0$ γ) $x^2+4x=0$

δ) $4x^2-9=0$ ε) $4x^2=36$ στ) $-3x^2-12=0$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-3)^2=81$ β) $(x-1)^2=36$ γ) $(x-5)^2-49=0$

δ) $5(x+3)^2=180$ ε) $\dfrac{(2x+3)^2}{4}=25$ στ) $2(3x+2)^2-128=0$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2+6x+9=0$ β) $81x^2-18x+1=0$ γ) $49x^2-28x+4=0$

δ) $x^2-9x+18=0$ ε) $x^2+2x-80=0$ στ) $3x^2+5x+2=0$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(9x^2-4)(x^2-16)=0$ β) $(x-1)^2(x^2-4)(x^2+2)=0$

γ) $(x^2+1)^2+1=0$ δ) $(2x-1)^2=(3x-2)^2$

ε) $x^2+(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$ στ) $(x+2)(2-5x)=x^2-4$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3-x^2-x+1=0$ β) $2x^3-4x^2-5x+10=0$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-2)^2+(2x-4)^2=0$ β) $(x+2)^2+(x^2+5x+6)^2=0$

γ) $(x+1)^2+2(x+1)(x-1)+(x-1)^2=0$

18. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2+\lambda x-9=0$ είναι το -3, ποια είναι η άλλη ρίζα της;

19. Να λύσετε την εξίσωση: $9x^2+\kappa x+4=0$, αν η εξίσωση αυτή έχει κοινή λύση με την εξίσωση $2+3x=0$.

B. Επίλυση της εξίσωσης 2ου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» για την επίλυση της εξίσωσης $\mathbf{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0}$ με $\mathbf{\alpha\neq 0}$, έχουμε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$$
$$4\alpha\cdot\alpha x^2+4\alpha\beta x+4\alpha\gamma=0$$
$$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x=-4\alpha\gamma$$
$$(2\alpha x)^2+2(2\alpha x)\beta=-4\alpha\gamma$$
$$(2\alpha x)^2+2(2\alpha x)\beta+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma$$
$$(2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma \quad (1)$$

Αν συμβολίσουμε $\mathbf{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma}$ και τη παράσταση αυτή την ονομάσουμε διακρίνουσα, η (1) γίνεται $(\mathbf{2\alpha x+\beta})^2=\mathbf{\Delta}$ (2)

- Αν $\mathbf{\Delta>0}$ η (2) γίνεται: $(2\alpha x+\beta)^2=\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ οπότε:

$$2\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\Delta}$$
$$2\alpha x=-\beta-\sqrt{\Delta} \text{ ή } 2\alpha x=-\beta+\sqrt{\Delta}$$
$$x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$
$$\text{άρα } \mathbf{x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$$

Δηλαδή η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει **δύο άνισες ρίζες** τις

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- Αν $\mathbf{\Delta=0}$ τότε η (2) γίνεται $(2\alpha x+\beta)^2=0$

$$2\alpha x+\beta=0$$
$$2\alpha x=-\beta$$
$$\mathbf{x=-\frac{\beta}{2\alpha}}$$

Δηλαδή, η εξίσωση έχει μια **διπλή ρίζα** την $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$

- Αν $\mathbf{\Delta<0}$ τότε η εξίσωση $(2\alpha x+\beta)^2=\Delta$ είναι **αδύνατη**, δηλαδή δεν έχει λύση.

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Αν ρ_1,ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να φέρετε τις εξισώσεις της πρώτης στήλης στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ και να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες στήλες του πίνακα.

Εξίσωση	$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$	α	β	γ
$x(x-1)=-2$				
$3x^2+4=2(x+2)$				
$(x-1)^2=2(x^2-x)$				

Λύση

$x(x-1)=-2$ ή $x^2-x+2=0$

$3x^2+4=2(x+2)$ ή $3x^2+\cancel{4}=2x+\cancel{4}$ ή $3x^2-2x=0$

$(x-1)^2=2(x^2-x)$ ή $x^2-\cancel{2x}+1=2x^2-\cancel{2x}$ ή $x^2+1-2x^2=0$ ή $-x^2-1=0$

Εξίσωση	$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$	α	β	γ
$x(x-1)=-2$	$x^2-x+2=0$	1	–1	2
$3x^2+4=2(x+2)$	$3x^2-2x=0$	3	–2	0
$(x-1)^2=2(x^2-x)$	$-x^2-1=0$	–1	0	–1

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2-x-2=0$ β) $4y^2+3y-1=0$ γ) $-2\omega^2+\omega+6=0$

δ) $2z^2-3z+1=0$ ε) $-25t^2+10t-1=0$ στ) $4x^2-12x+9=0$

ζ) $3x^2+18x+27=0$ η) $x^2-4x=5$ θ) $x^2-3x+7=0$

Λύση

α) Είναι $\alpha=1, \beta=-1, \gamma=-2$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9>0$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{1\pm3}{2}$, άρα $x_1=\dfrac{1+3}{2}=2$ και

$x_2=\dfrac{1-3}{2}=-1$

β) Είναι α = 4, β = 3 και γ = –1 και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=3^2-4\cdot4(-1)=9+16=25>0$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις: $y=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-3\pm\sqrt{25}}{2\cdot4}=\dfrac{-3\pm5}{8}$, δηλαδή

$y_1=\dfrac{-3+5}{8}=\dfrac{1}{4}$ και $y_2=\dfrac{-3-5}{8}=-1$

γ) $\alpha=-2, \beta=1, \gamma=6$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot(-2)\cdot6=1+48=49>0$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις: $\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{-4}=\frac{1\pm7}{-4}$, άρα $\omega_1=\frac{1+7}{-4}=-2$ και

$\omega_2=\frac{1-7}{-4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

δ) $\alpha=2,\ \beta=-3,\ \gamma=1$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=9-8=1>0$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις: $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{3\pm1}{4}$, άρα $z_1=\frac{3+1}{4}=1$ και

$z_2=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

ε) $\alpha=-25,\ \beta=10,\ \gamma=-1$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=10^2-4\cdot(-25)\cdot(-1)=100-100=0$

Άρα η εξίσωση έχει λύση: $x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-10}{-50}=\frac{1}{5}$.

στ) $\alpha=4,\ \beta=-12,\ \gamma=9$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-12)^2-4\cdot4\cdot9=144-144=0$

Άρα η εξίσωση έχει λύση: $x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

ζ) $\alpha=3,\ \beta=18,\ \gamma=27$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=18^2-4\cdot3\cdot27=324-324=0$

Άρα η εξίσωση έχει λύση: $x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-18}{6}=-3$

η) Μεταφέροντας το 5 στο α΄ μέλος, η εξίσωση γίνεται: $x^2-4x-5=0$.

Είναι $\alpha=1,\ \beta=-4,\ \gamma=-5$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)=16+20=36>0$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις: $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm6}{2}$, άρα $x_1=\frac{4+6}{2}=5$ και

$x_2=\frac{4-6}{2}=-1$

θ) Μεταφέροντας το –7 στο α΄ μέλος η εξίσωση γίνεται: $x^2-3x+7=0$.

Είναι α = 1, β = – 3 και γ = 7 και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot7=9-28=-19<0$

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $x^2-7x=0$, ii) $x^2-16=0$

α) με τη βοήθεια του τύπου, β) με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.

Λύση

α) i) Είναι α = 1, β = – 7 και γ = 0, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-7)^2-4\cdot1\cdot0=49>0$ οπότε οι ρίζες είναι:

$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{7\pm\sqrt{49}}{2\cdot1}$ δηλαδή $x=\frac{7+7}{2}=7$ ή $x=\frac{7-7}{2}=0$

ii) Είναι α = 1, β = 0 και γ = –16, οπότε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0^2-4\cdot1(-16)=64>0$ και οι ρίζες

είναι: $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{0\pm\sqrt{64}}{2\cdot1}$ δηλαδή $x=\frac{8}{2}=4$ ή $x=\frac{-8}{2}=-4$

β) i)
$$x^2-7x=0$$
$$x(x-7)=0$$
$$x=0 \text{ ή } x-7=0$$
$$x=7$$

ii)
$$x^2-16=0$$
$$x^2-4^2=0$$
$$(x-4)(x+4)=0$$
$$x-4=0 \text{ ή } x+4=0$$
$$x=4 \text{ ή } x=-4$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x^2-2(x-1)=2x+1$

β) $(y+2)^2+(y-1)^2=5(2y+3)$

γ) $(2\omega-3)^2-(\omega-2)^2=2\omega^2-11$

δ) $\varphi(8-\varphi)-(3\varphi+1)(\varphi+2)=1$

Λύση

α)
$$3x^2-2(x-1)=2x+1$$
$$3x^2-2x+2-2x-1=0$$
$$3x^2-4x+1=0$$
$$\alpha=3,\ \beta=-4,\ \gamma=1,$$
$$\Delta=(-4)^2-4\cdot3\cdot1=4$$
$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot3}=\frac{4\pm2}{6} \text{ άρα}$$
$$x=\frac{4+2}{6}=1 \text{ ή } x=\frac{4-2}{6}=\frac{1}{3}$$

β)
$$(y+2)^2+(y-1)^2=5(2y+3)$$
$$y^2+4y+4+y^2-2y+1=10y+15$$
$$2y^2+4y+4-2y+1-10y-15=0$$
$$2y^2-8y-10=0$$
$$\alpha=2,\ \beta=-8,\ \gamma=-10,$$
$$\Delta=(-8)^2-4\cdot2\cdot(-10)=144$$
$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{8\pm\sqrt{144}}{2\cdot2}=\frac{4\pm12}{4}$$
$$\text{άρα } x=\frac{8+12}{4}=5 \text{ ή } x=\frac{8-12}{4}=-1$$

γ)
$$(2\omega-3)^2-(\omega-2)^2=2\omega^2-11$$
$$4\omega^2-12\omega+9-(\omega^2-4\omega+4)-2\omega^2+11=0$$
$$2\omega^2-12\omega+20-\omega^2+4\omega-4=0$$
$$\omega^2-8\omega+16=0$$
$$(\omega-4)^2=0$$
$$\omega-4=0$$
$$\omega=4$$

δ)
$$\varphi(8-\varphi)-(3\varphi+1)(\varphi+2)=1$$
$$8\varphi-\varphi^2-3\varphi^2-6\varphi-\varphi-2=0$$
$$-4\varphi^2+\varphi-2=0$$
$$\alpha=-4,\ \beta=1,\ \gamma=-2,$$
$$\Delta=1^2-4\cdot(-4)\cdot(-2)=1+24=25$$
$$\varphi=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot(-4)}=\frac{1\pm5}{-8}$$
$$\text{άρα } \varphi=\frac{1+5}{-8}=-\frac{3}{4} \text{ ή } \varphi=\frac{1-5}{-8}=\frac{1}{2}$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+3}{5}=x-2$

β) $\frac{y^2}{3}+\frac{6y+1}{4}=\frac{y-2}{6}-2$

γ) $0{,}5t^2-0{,}4(t+2)=0{,}7(t-2)$

δ) $\frac{\omega}{2}(\sqrt{3}\omega-7)=-\sqrt{3}$

Λύση

α) $\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+3}{5}=x-2$

$\cancel{15}^{5}\cdot\frac{x^2-1}{\cancel{3}}-\cancel{15}^{3}\cdot\frac{x+3}{\cancel{5}}=15\cdot(x-2)$

$5(x^2-1)-3(x+3)-15x+30=0$

$5x^2-5-3x-9-15x+30=0$

$5x^2-18x+16=0$

$\alpha=5,\ \beta=-18,\ \gamma=16$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-18)^2-4\cdot5\cdot16=4>0$

οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες:

$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{18\pm\sqrt{4}}{2\cdot5}=\frac{18\pm2}{10}$ δηλαδή:

$x=\frac{18+2}{10}=2$ ή $x=\frac{18-2}{10}=\frac{8}{5}$

β) $\frac{y^2}{3}+\frac{6y+1}{4}=\frac{y-2}{6}-2$

$\cancel{12}^{4}\cdot\frac{y^2}{\cancel{3}}-\cancel{12}^{3}\cdot\frac{6y+1}{\cancel{4}}=\cancel{12}^{2}\cdot\frac{y-2}{\cancel{6}}-12\cdot2$

$4y^2-3(6y+1)=2(y-2)-24$

$4y^2-18y-3=2y-4-24$

$4y^2-18y-3-2y+4+24=0$

$4y^2-20y+25=0$

$\alpha=4,\ \beta=-20,\ \gamma=25$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-20)^2-4\cdot4\cdot25=0$

οπότε η εξίσωση έχει ρίζα:

$x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$

γ) $0,5t^2-0,4(t+2)=0,7(t-2)$

$0,5t^2-0,4t-0,8=0,7t-1,4$

$0,5t^2-0,4t-0,8-0,7t+1,4=0$

$0,5t^2-1,1t+0,6=0$

$10\cdot0,5t^2-10\cdot1,1t+10\cdot0,6=0$

$5t^2-11t+6=0$

$\alpha=5,\ \beta=-11,\ \gamma=6$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-11)^2-4\cdot5\cdot6=1>0$

οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες:

$t=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{11\pm\sqrt{1}}{2\cdot5}=\frac{11\pm1}{10}$ δηλαδή:

$t=\frac{11+1}{10}=\frac{6}{5}$ ή $t=\frac{11-1}{10}=1$

δ) $\frac{\omega}{2}(\sqrt{3}\omega-7)=-\sqrt{3}$

$\cancel{2}\cdot\frac{\omega}{\cancel{2}}(\sqrt{3}\omega-7)=-2\cdot\sqrt{3}$

$\sqrt{3}\omega^2-7\omega+2\sqrt{3}=0$

$\alpha=\sqrt{3},\ \beta=-7,\ \gamma=2\sqrt{3}$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-7)^2-4\cdot\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}=1>0$

οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες:

$\omega=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2\sqrt{3}}=\frac{7\pm1}{2\sqrt{3}}$ δηλαδή:

$\omega=\frac{7+1}{2\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ή

$\omega=\frac{7-1}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

6. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2+4x-12$ **β)** $3y^2-8y+5$ **γ)** $-2\omega^2+5\omega-3$

δ) $x^2-16x+64$ **ε)** $9y^2+12y+4$ **στ)** $-\omega^2+10\omega-25$

Λύση

α) Είναι $\alpha=1,\ \beta=4,\ \gamma=-12$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot1\cdot(-12)=64>0$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι: $\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-4\pm8}{2}$, άρα $\rho_1=\frac{-4+8}{2}=2$ και $\rho_2=\frac{-4-8}{2}=-6$. Το τριώνυμο γίνεται: $x^2+4x-12=(x-2)(x+6)$

β) Είναι α = 3, β = – 8 και γ = 5 οπότε: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-8)^2-4\cdot 3\cdot 5=4>0$

και οι ρίζες είναι: $\rho_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{8\pm 2}{6}$ δηλαδή $\rho_1=\dfrac{8+2}{6}=\dfrac{5}{3}$ ή $\rho_2=\dfrac{8-2}{6}=1$

Άρα το τριώνυμο γίνεται: $3y^2-8y+5=3\left(y-\dfrac{5}{3}\right)(y-1)=(3y-5)(y-1)$

γ) Είναι α = –2, β = 5 και γ = –3 οπότε: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=5^2-4(-2)(-3)=1>0$

και οι ρίζες είναι: $\rho=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-5\pm 1}{-4}$ δηλαδή $\rho_1=\dfrac{-5+1}{-4}=\dfrac{-4}{-4}=1$ ή $\rho_2=\dfrac{-5-1}{-4}=\dfrac{3}{2}$

Οπότε το τριώνυμο γίνεται: $-2\omega^2+5\omega-3=-2(\omega-1)\left(\omega-\dfrac{3}{2}\right)=(\omega-1)(-2\omega+3)$

δ) $x^2-16x+64=x^2-2\cdot 8\cdot x+8^2=(x-8)^2$

ε) $9y^2+12y+4=(3y)^2+2\cdot 3y\cdot 2+2^2=(3y+2)^2$

στ) $-\omega^2+10\omega-25=-(\omega^2-10\omega+25)=-(\omega^2-2\cdot 5\cdot\omega+5^2)=-(\omega-5)^2$

7. Αν α,β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\neq 0$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση.

α) $\alpha x^2-x+1-\alpha=0$, **β)** $\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\beta=0$

Λύση

α) Είναι $A=\alpha,\ B=-1$ και $\Gamma=1-\alpha$ οπότε η διακρίνουσα είναι:

$\Delta=B^2-4A\cdot\Gamma=(-1)^2-4\cdot\alpha\cdot(1-\alpha)=1-4\alpha+4\alpha^2=1-2\cdot 2\alpha+(2\alpha)^2=(1-2\alpha)^2$

Επειδή $(1-2\alpha)^2\geq 0$, είναι $\Delta\geq 0$, οπότε η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση.

β) Είναι $A=\alpha,\ B=\alpha+\beta$ και $\Gamma=\beta$ οπότε η διακρίνουσα είναι:

$\Delta=B^2-4A\cdot\Gamma=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$

Επειδή $(\alpha-\beta)^2\geq 0$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α,β, είναι $\Delta\geq 0$, οπότε η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση.

8. Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+\gamma)x^2-2\beta x+(\alpha-\gamma)=0$, όπου α,β,γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ. Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓείναι ορθογώνιο.

Λύση

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με $A=\alpha+\gamma,\ B=-2\beta$ και $\Gamma=\alpha-\gamma$

οπότε η διακρίνουσα είναι:

$\Delta = B^2 - 4A\cdot\Gamma = (-2\beta)^2 - 4(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma) = 4\beta^2 - 4(\alpha^2-\gamma^2) = 4(\beta^2-\alpha^2+\gamma^2)$

Επειδή η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα, είναι $\Delta = 0$ ή $\beta^2-\alpha^2+\gamma^2=0$ άρα $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$ (1).

Λόγω της σχέσης (1) στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

9. Αν μία λύση της εξίσωσης $x^2+(\kappa-5)x+\kappa=0$ είναι ο αριθμός 1, να βρείτε την άλλη λύση.

Λύση

Επειδή ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης τότε θα την επαληθεύει. Δηλαδή:

$1^2+(\kappa-5)\cdot 1+\kappa=0$ ή $1+\kappa-5+\kappa=0$ ή $2\kappa=4$ άρα $\kappa=2$

Για κ = 2 η εξίσωση γίνεται: $x^2-3x+2=0$

Είναι α = 1, β = –3 και γ = 2 οπότε:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=1>0$ και οι ρίζες είναι: $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{3\pm1}{2}$ δηλαδή:

$x_1=\dfrac{3+1}{2}=\dfrac{4}{2}=2$ ή $x_2=\dfrac{3-1}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

Οπότε η άλλη λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός 2.

10. Να λύσετε την εξίσωση: $(2x^2+1)^2-2(2x^2+1)+2=5$

Λύση

Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται συχνά στην εξίσωση το $2x^2+1$, οπότε θα θεωρήσουμε ως άγνωστο το $2x^2+1$.

Θέτουμε $2x^2+1=\omega$ (1) οπότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2-2\omega+2=5$ ή $\omega^2-2\omega-3=0$

Είναι α = 1, β = –2, γ = –3 και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16>0$

οπότε $\omega=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\dfrac{2\pm4}{2}$, δηλαδή

$\omega_1=\dfrac{2+4}{2}=\dfrac{6}{2}=3$, ή $\omega_2=\dfrac{2-4}{2}=-\dfrac{2}{2}=-1$

Αν ω = 3 από την (1) έχουμε: $2x^2+1=3$ ή $2x^2=2$ ή $x^2=1$ άρα $x_1=1$ ή $x_2=-1$

Αν ω = –1 τότε από την (1) έχουμε: $2x^2+1=-1$ ή $2x^2=-2$ ή $x^2=-1$ που είναι αδύνατη.

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης $(2x^2+1)^2-2(2x^2+1)+2=5$ είναι 1 και -1.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x^2+5x-3=0$ **β)** $x^2-9x+18=0$ **γ)** $4x^2+7x-2=0$

δ) $4x^2+20x+25=0$ **ε)** $2x^2+5x+1=0$ **στ)** $2x^2-3x+7=0$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2-4\sqrt{3}x+8=0$ **β)** $x^2-6\sqrt{2}x+9=0$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+1)^2-(x-1)(x+2)=-2x(x-3)$ **β)** $x(5x-1)=3(5x-1)-9$

γ) $4x^2+(x+2)^2=4x(x+2)$ **δ)** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{5}{12}=0$

ε) $(x+2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-(3x-1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)=1-2x$ **στ)** $x(x-1)^2-x^3=(5x-3)^2-(4x-3)^2$

14. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) x^2-2x-3 **β)** x^2+x-6 **γ)** x^2-3x+2

δ) $6x^2-x-1$ **ε)** $2x^2+5x-2$ **στ)** $3x^2+5x-2$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+5)(x^2-10x+9)=0$ **β)** $(4x^2-25)(x^2-8x+7)$

16. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x^2-4x+1=0$, όπου λ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

17. Αν $\lambda\neq 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda\chi^2+2\chi-(\lambda-2)=0$ έχει πραγματικές ρίζες.

18. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2=0$ να έχει ρίζα το 2 και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ρίζα αυτή είναι διπλή.

19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\alpha^2x^2-2\alpha^2\beta x+\alpha^2\beta^2-1=0,\ \alpha\neq 0$ **β)** $(\alpha^2-\beta^2)x^2-2(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2-\beta^2=0,\ \alpha\neq\pm\beta$

20. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις $x^2+5x+\alpha=0$ και $x^2+2\alpha x+\alpha^2+4\alpha-25=0$ έχουν το ίδιο πλήθος λύσεων.

21. Αν $\alpha-\beta+\gamma=0$ και $\alpha\neq 0$ να λύσετε την εξίσωση: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

22. Αν η εξίσωση $x^2-4x+\lambda=0$ έχει 2 ίσες ρίζες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $4x^2-(\lambda+1)x+1=0$, έχει 2 ρίζες οι οποίες και να βρεθούν.