

Αξιοποιώντας την γεωμετρική αναπαράσταση των κλασμάτων
στην επίλυση προβλημάτων

(δημοσιεύτηκε στο τεύχος 126 του Ευκλείδη Α΄)

Εισαγωγή

Μια διαπραγμάτευση της γεωμετρικής αναπαράστασης των κλασμάτων που βοηθά στην κατανόηση αλλά και στην επίλυση προβλημάτων από μαθητές Α΄ Γυμνασίου ή και Δημοτικού. Στο α΄ μέρος αναλύεται η γεωμετρική αναπαράσταση των κλασμάτων με την μορφή που θα χρησιμοποιηθεί στα προβλήματα που ακολουθούν στα επόμενα μέρη.

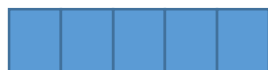
Α΄ μέρος / Γεωμετρική αναπαράσταση ενός κλάσματος

- Τι εκφράζει το κλάσμα $\frac{3}{5}$ γεωμετρικά; [3 < 5]



Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 5 **ίσα** μέρη
και επιλέγουμε τα 3 μέρη (από τα 5 συνολικά).

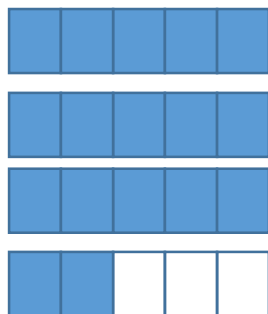
- Τι εκφράζει το κλάσμα $\frac{5}{5}$ γεωμετρικά; [5 = 5]



Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 5 **ίσα** μέρη
και επιλέγουμε τα 5 μέρη (από τα 5 συνολικά),
δηλαδή ολόκληρη την ποσότητα.

- Τι εκφράζει το κλάσμα $\frac{17}{5}$ γεωμετρικά; [17 > 5]

[Επειδή $17 > 5$, χρειαζόμαστε παραπάνω από μια ποσότητα για να πάρουμε τα 17 ίσα μέρη, και αφού κάθε ποσότητα θα χωριστεί σε 5 ίσα μέρη, θέλουμε 3 ποσότητες για τα 15 μέρη συν άλλη μια ποσότητα για τα 2 μέρη, αφού $3 \times 5 + 2 = 17$]

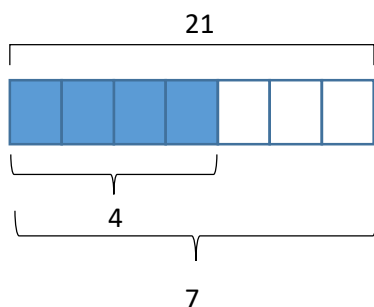


$$\frac{17}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = 3 \frac{2}{5}$$

Παίρνουμε 4 **ίσες** ποσότητες,
και χωρίζουμε κάθε ποσότητα σε 5 **ίσα** μέρη
και επιλέγουμε τα 17 μέρη (από τα $20 = 4 \times 5$ συνολικά),
δηλαδή 3 ολόκληρες από τις αρχικές ποσότητες
και 2 μικρά μέρη (από τα 5).

Β΄ μέρος / Βασικά προβλήματα

Π1. [ξέρω σύνολο και κλάσμα, ψάχνω μέρος]

Σε μια τάξη 21 ατόμων, τα $\frac{4}{7}$ είναι τα αγόρια. Πόσα είναι τα κορίτσια;Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 7 **ίσα** μέρη,

τα 7 μέρη είναι 21 άτομα

το 1 μέρος είναι $21 : 7 = 3$ άτομα

[συμπληρώνουμε το σχήμα]

τα 4 μέρη είναι $4 \times 3 = 12$ άτομα

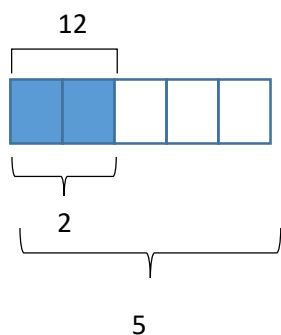
Άρα τα αγόρια είναι 12 άτομα

και τα κορίτσια $21 - 12 = 9$ άτομα.

Αλλιώς τα κορίτσια είναι τα 3 μέρη της τάξης,

δηλαδή $3 \times 3 = 9$ άτομα.**Σχόλιο:** Το πρόβλημα είναι εύκολο, αλλά στοχεύουμε στην εποπτεία και στην κατανόηση της λύσης.

Π2. [ξέρω μέρος και κλάσμα, ψάχνω σύνολο]

Τα $\frac{2}{5}$ μιας τάξης, που είναι 12 παιδιά, μαθαίνουν Γαλλικά. Πόσα παιδιά έχει όλη η τάξη;Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 5 **ίσα** μέρη,

τα 2 μέρη είναι 12 παιδιά

το 1 μέρος είναι $12 : 2 = 6$ παιδιά

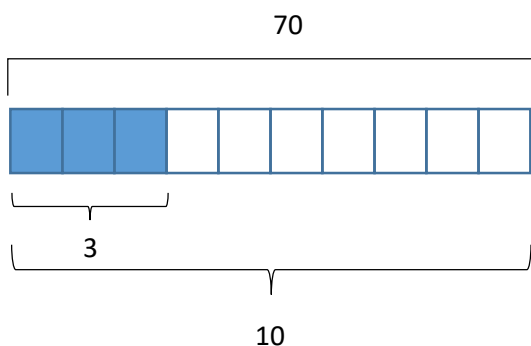
[συμπληρώνουμε το σχήμα]

το σύνολο, τα 5 μέρη είναι $5 \times 6 = 30$ παιδιά.

Άρα η τάξη έχει 30 παιδιά.

Π3. [μείωση κατά ένα ποσοστό, ξέρω αρχική τιμή]

Ο Βασίλης θέλει να αγοράσει στις εκπτώσεις παπούτσια, που γράφουν στο καρτελάκι τους, αρχική τιμή 70 € και -30% . Πόσο θα κοστίζουν τελικά τα παπούτσια αυτά, μετά την έκπτωση;



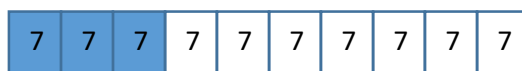
$$30\% = \frac{30}{100} = \frac{3\cancel{0}}{10\cancel{0}} = \frac{3}{10}$$

Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 10 **ίσα** μέρη,

τα 10 μέρη είναι 70 €

το 1 μέρος είναι $70 : 10 = 7$ €

[συμπληρώνουμε το σχήμα]



τα 3 μέρη είναι $3 \times 7 = 21$ €

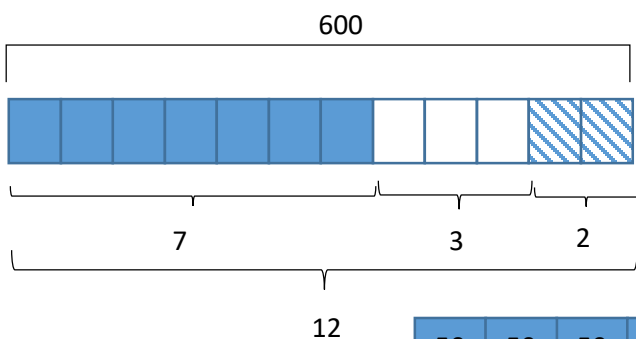
δηλαδή η έκπτωση είναι 21 €

Άρα τα παπούτσια, μετά την έκπτωση, κοστίζουν $70 - 21 = 49$ €

Π4. [μερισμός σε μέρη ανάλογα]

Η Ελένη, η Αθανασία και η Ζωή αγόρασαν μερικά λαχεία μαζί. Η Ελένη έδωσε 7 €, η Αθανασία 3 € και η Ζωή 2 €. Ένα από τα λαχεία αυτά, κέρδισε 600 €. Πως είναι δίκαιο να μοιραστούν τα κέρδη;

Κάθε άτομο θα μοιραστεί χρήματα ανάλογα με το ποσό που πλήρωσε.



Χωρίζουμε μια ποσότητα σε $7+3+2=12$ **ίσα** μέρη,

τα 12 μέρη είναι 600 €

το 1 μέρος είναι $600 : 12 = 50$ €

[συμπληρώνουμε το σχήμα]



Άρα η Ελένη θα πάρει 7 μέρη, $7 \times 50 = 350$ €

η Αθανασία θα πάρει 3 μέρη, $3 \times 50 = 150$ €

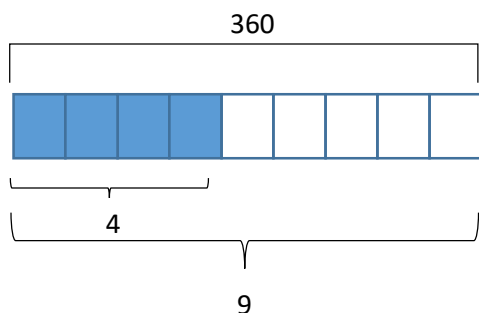
και η Ζωή θα πάρει 2 μέρη, $2 \times 50 = 100$ €.

Σχόλιο: Με όποιον άλλο τρόπο μοιραστούν τα κέρδη, πάντα κάποιο άτομο θα αδικείται.

Π5. [μοιρασιά με κλάσματα, ξέρω την αρχική ποσότητα]

Η γιαγιά μοίρασε 360 € σε 3 εγγόνια του, τον Αναστάση, τον Δημήτρη και τον Κώστα. Αρχικά έδωσε στον Αναστάση τα $\frac{4}{9}$ του συνολικού ποσού. Μετά έδωσε στον Δημήτρη τα $\frac{5}{8}$ των υπόλοιπων χρημάτων. Τέλος έδωσε στον Κώστα όσα χρήματα περίσσεψαν από τον Αναστάση και τον Δημήτρη. Πόσα χρήματα πήρε ο καθένας τους;

Αρχικά ψάχνουμε τα χρήματα του Αναστάση [$\frac{4}{9}$ της γιαγιάς]

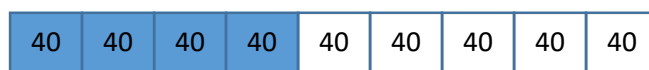


Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 9 **ίσα** μέρη,

τα 9 μέρη είναι 360 €

το 1 μέρος είναι $360 : 9 = 40$ €

[συμπληρώνουμε το σχήμα]

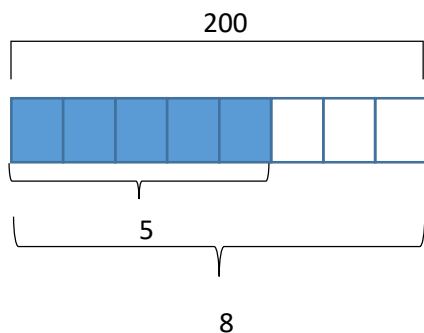


τα 4 μέρη είναι $4 \times 40 = 160$ €

Άρα ο Αναστάσης πήρε 160 €

Περίσσεψαν $360 - 160 = 200$ € για τα άλλα δυο εγγόνια

Μετά ψάχνουμε τα χρήματα του Δημήτρη [$\frac{5}{8}$ των υπολοίπων, που έμειναν από τον Αναστάση]



Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 8 **ίσα** μέρη,

τα 8 μέρη είναι 200 €

το 1 μέρος είναι $200 : 8 = 25$ €

[συμπληρώνουμε το σχήμα]



τα 5 μέρη είναι $5 \times 25 = 125$ €

Άρα ο Δημήτρης πήρε 125 €

Τέλος ψάχνουμε τα χρήματα του Κώστα

Περίσσεψαν για τον Κώστα $200 - 125 = 75$ €

Άρα ο Κώστας πήρε 75 €

Αλλιώς ο Κώστας πήρε $360 - 160 - 125 = 200 - 125 = 75$ €

Γ΄ μέρος / Σύνθετα προβλήματα

Π6. [αύξηση κατά ποσοστό, ξέρω τελική τιμή]

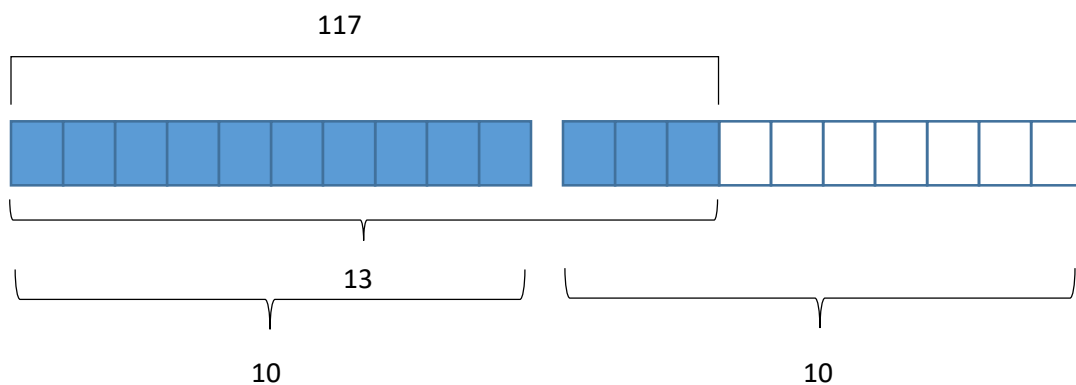
Η τιμή μιας τηλεόρασης, αφού τελείωσε η μέρα Black Friday, αυξήθηκε κατά 30%. Αν μετά την Black Friday, η τηλεόραση κοστίζει 117 €, πόσο κόστιζε η τηλεόραση την Black Friday;

Η τελική τιμή θα είναι όσο η αρχική τιμή [της Black Friday] συν την αύξηση

δηλαδή $100\% + 30\% = 130\%$ της αρχικής τιμής.

$$\frac{130}{100} = \frac{13\cancel{0}}{10\cancel{0}} = \frac{13}{10}, \quad \frac{13}{10} = \frac{1 \cdot 10 + 3}{10} = 1 \frac{3}{10}$$

[Επειδή $13 > 10$, χρειαζόμαστε παραπάνω από μια ποσότητα για να πάρουμε τα 13 ίσα μέρη, και αφού κάθε ποσότητα θα χωριστεί σε 10 ίσα μέρη, θέλουμε μια ποσότητα για τα 10 μέρη συν άλλη μια ποσότητα για τα 3 μέρη, αφού $1 \times 10 + 3 = 10 + 3 = 13$]



Παίρνουμε 2 **ίσες** ποσότητες,

και χωρίζουμε κάθε ποσότητα σε 10 **ίσα** μέρη

και επιλέγουμε τα 13 μέρη (από τα $20 = 2 \times 10$ συνολικά),

δηλαδή ολόκληρη την μια ποσότητα και 3 μέρη από την άλλη ποσότητα

Χωρίζουμε το 117 σε 13 **ίσα** μέρη,

το 1 μέρος είναι $117 : 13 = 9$ €

[συμπληρώνουμε το σχήμα]



[Η αρχική τιμή είναι τα 10 μέρη, η αύξηση είναι τα 3 μέρη]

τα 10 μέρη είναι $10 \times 9 = 90$ €

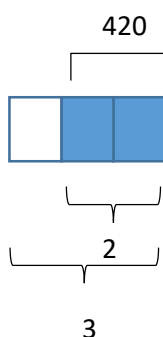
Άρα η τηλεόραση κόστιζε την Black Friday 90 €.

Σχόλιο: Αντίστοιχο πρόβλημα, θα μπορούσε να ζητηθεί με ΦΠΑ, αν τα παιδιά γνωρίζουν για το ΦΠΑ.

Π7. [μοιρασιά με κλάσμα και ποσοστό, ψάχνω τη αρχική ποσότητα]

Ο παππούς μοίρασε χρήματα σε 3 εγγονές του, την Αγάπη, την Ελπίδα και την Χαρά. Αρχικά έδωσε στην Αγάπη το 30 % του συνολικού ποσού. Μετά έδωσε στην Ελπίδα το $\frac{1}{3}$ των υπολοίπων χρημάτων . Τέλος έδωσε στην Χαρά 420 €. Πόσα Χρήματα είχε αρχικά ο παππούς;

Αρχικά ψάχνουμε τα χρήματα της Ελπίδας [$\frac{1}{3}$ των υπολοίπων, που έμειναν από την Αγάπη]



Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 3 **ίσα** μέρη,

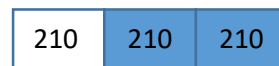
[η Ελπίδα πήρε το 1 μέρος από τα 3]

[η Χαρά πήρε τα $3-1=2$ μέρη από τα 3]

τα 2 μέρη είναι 420 €

το 1 μέρος είναι $420 : 2 = 210$ €

[συμπληρώνουμε το σχήμα]



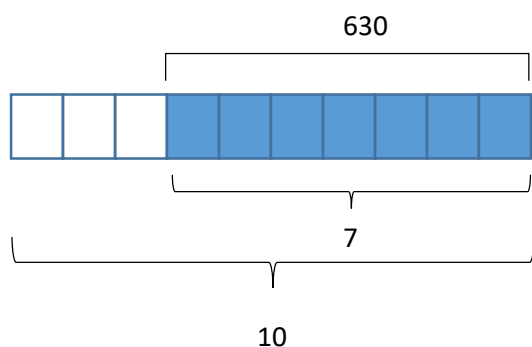
Άρα η Ελπίδα πήρε 210 €

Η Ελπίδα και η Χαρά μαζί μοιράστηκαν $210 + 420 = 630$ €.

Μετά ψάχνουμε τα χρήματα της Αγάπης [30% των χρημάτων του παππού]

$$30\% = \frac{30}{100} = \frac{3\cancel{0}}{10\cancel{0}} = \frac{3}{10}$$

Χωρίζουμε μια ποσότητα σε 10 **ίσα** μέρη,



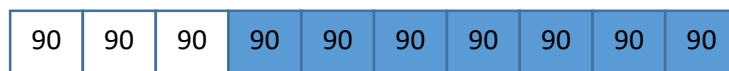
[η Αγάπη πήρε τα 3 μέρη από τα 10]

[η Ελπίδα και η Χαρά πήραν τα $10-3=7$ μέρη από τα 10]

τα 7 μέρη είναι 630 €

το 1 μέρος είναι $630 : 7 = 90$ €

[συμπληρώνουμε το σχήμα]



τα 3 μέρη είναι $3 \times 90 = 270$ €

Άρα η Αγάπη πήρε 270 €

Ο Παππούς είχε αρχικά $270 + 210 + 420 = 900$ €