

Θέματα και Λύσεις Ημαθιώτικων

2008-2023

Μαθηματικών Διαγωνισμών Α' Γυμνασίου

(παράρτημα Ε.Μ.Ε. Ημαθίας)

έκδοση: 19-10-2024

από τον Χρονόπουλο Τάκη (parmenides51)

Οι μαθηματικοί διαγωνισμοί για μαθητές Α' Γυμνασίου που διοργανώνει το τοπικό παράρτημα της ΕΜΕ Ημαθίας διεξάγονται σε 2 φάσεις (Υπατία - Κ. Καραθεοδωρή).

Υπατία (1^η φάση)

Κ. Καραθεοδωρή (2^η φάση)

(1ος) 2008-2009 : 01-11-2008	θέματα - λύσεις	17-01-2009	θέματα - λύσεις
(2ος) 2009-2010 : 21-11-2009	θέματα - λύσεις	23-01-2010	θέματα - λύσεις
(3ος) 2010-2011 : 30-10-2010	θέματα - λύσεις	15-01-2011	θέματα - λύσεις
(4ος) 2011-2012 : 19-11-2011	θέματα - λύσεις	21-01-2012	θέματα - λύσεις
(5ος) 2012-2013 : 20-10-2012	θέματα - λύσεις	12-01-2013	θέματα - λύσεις
(6ος) 2013-2014 : 19-10-2013	θέματα - λύσεις	18-01-2014	θέματα - λύσεις
(7ος) 2014-2015 : 01-11-2014	θέματα - λύσεις	16-01-2015	θέματα - λύσεις
(8ος) 2015-2016 : 17-11-2015	θέματα - λύσεις	16-01-2016	θέματα - λύσεις
(9ος) 2016-2017 : 12-11-2016	θέματα - λύσεις	28-01-2017	θέματα - λύσεις
(10ος) 2017-2018 : 11-11-2017	θέματα - λύσεις	20-01-2018	θέματα - λύσεις
(11ος) 2018-2019 : 10-11-2018	θέματα - λύσεις	19-01-2019	θέματα
(12ος) 2019-2020 : 9-11-2019	θέματα	18-01-2020	θέματα
2021-2022 δεν διεξήχθη λόγω πανδημίας (covid)			
(13ος) 2021-2022 : 5-11-2021	θέματα - λύσεις	2022	δεν διεξήχθη
(14ος) 2022-2023 : 11-11-2022	θέματα - λύσεις	2023	δεν διεξήχθη
(15ος) 2023-2024 : 4-11-2023	θέματα - λύσεις	20-01-2024	θέματα - λύσεις

Για ευκολία χρησιμοποιήστε τους σελιδοδείκτες (bookmarks) στο αριστερό μέρος του pdf.

Ευχαριστώ για την βοήθειά τους τα μέλη του τοπικού παραρτήματος, Δημήτρη Χονδρολίδη & Στέλιο Μιόγλου. Ο Στέλιος Μιόγλου, δεν είναι πλέον μαζί μας, και προς τιμήν του ονομάστηκε με το όνομά του, η 2^η φάση του τοπικού μαθηματικού διαγωνισμού Ε και ΣΤ Δημοτικού. (www.emeimathias.gr) Η Σελίδα των Μαθηματικών Διαγωνισμών είναι η <http://parmenides51.blogspot.gr/p/eme.html>.

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ**

**1^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά
«Η ΥΠΑΤΙΑ»**



Σάββατο 1 Νοεμβρίου 2008

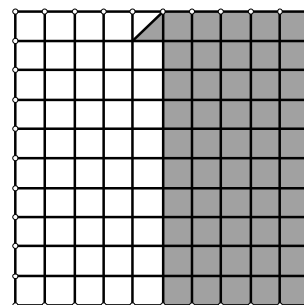
Α' Γυμνασίου

Θέμα 1ο

Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα α, β, γ, δ αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

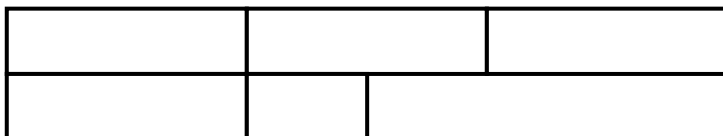
- α. Αν το εμβαδόν ολοκλήρου του τετραγώνου στο διπλανό σχήμα είναι 100cm^2 να βρεθεί το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους .

Μονάδες 5



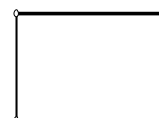
- β. Τα $\frac{3}{4}$ ενός αριθμού είναι ίσα με 9. Να βρεθεί ο αριθμός. **Μονάδες 5**

- γ. Αν το εμβαδόν του διπλανού ορθογωνίου είναι $\frac{2}{3}\text{cm}^2$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος



Μονάδες 5

- δ. Το διπλανό ορθογώνιο το οποίο έχει διαστάσεις Φυσικούς Αριθμούς έχει περίμετρο 30cm και εμβαδόν 56cm^2 . Να βρεθούν οι διαστάσεις του.

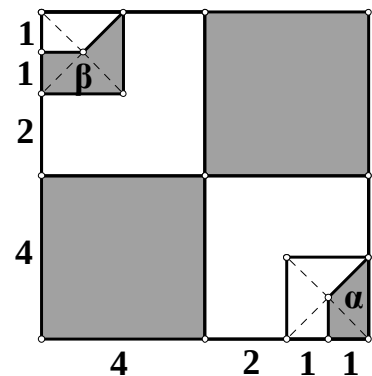


Μονάδες 5

Θέμα 2ο

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά 8 cm.

- A. Πόσο είναι το άθροισμα των εμβαδών των δύο μικρών σκιασμένων μερών α και β; *Μονάδες 7*
- B. Να υπολογιστεί το εμβαδόν που καλύπτουν συνολικά όλα τα σκιασμένα μέρη. *Μονάδες 7*
- Γ. Πόσο ποσοστό του εμβαδού του μεγάλου τετραγώνου καλύπτουν όλα τα σκιασμένα μέρη; *Μονάδες 6*



Θέμα 3ο

Τρεις παίκτες A, B, Γ θα μοιράζονταν αρχικά το $\frac{1}{3}$, το $\frac{1}{4}$ και το $\frac{1}{5}$ ενός ποσού αντίστοιχα. Τελικά όμως μοιράστηκαν το $\frac{1}{4}$, το $\frac{1}{5}$ και το $\frac{1}{6}$ του ίδιου ποσού αντίστοιχα.

- α. Πόσο μέρος το ποσού πήραν συνολικά οι τρεις παίκτες; *Μονάδες 7*
- β. Αιτιολογήστε ότι ο παίκτης που ζημιώθηκε περισσότερο από την τελική διανομή (σχετικά με την αρχική διανομή) ήταν ο A. *Μονάδες 7*
- γ. Αν ο παίκτης A ζημιώθηκε κατά 300 € από την τελική διανομή, να βρείτε ποιο ήταν το αρχικό ποσό και ποιο ποσό πήρε ο κάθε παίκτης. *Μονάδες 6*

Θέμα 4ο

Στα γραφεία της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας της Ημαθίας που βρίσκονται στην οδό Ολγάνου 19 στη Μπαρμπούτα της Βέροιας, υπάρχουν 5 λάμπες φωτισμού και 5 διακόπτες, ένας για κάθε λάμπα.

Με ένα πάτημα του διακόπτη ανάβει η λάμπα και με ένα ακόμη πάτημα σβήνει. Το έτος 2008 έγιναν 2009 πατήματα διακοπών.

Αν αρχικά όλες οι λάμπες ήταν σβησμένες και μετά από τα 2009 πατήματα οι 4 λάμπες είναι αναμμένες, να βρείτε αν η 5^η λάμπα είναι αναμμένη ή σβησμένη αιτιολογώντας το συμπέρασμά σας.

Μονάδες 20

Καλή επιτυχία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ

**2^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα
Μαθηματικά**

«Η ΥΠΑΤΙΑ»



Σάββατο 21 Νοεμβρίου 2009

Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1ο

Ο Mr.Math βρίσκεται σε ένα κινηματογράφο όπου όλες οι σειρές έχουν ακριβώς τον ίδιο αριθμό καθισμάτων. Παρατήρησε ότι μπροστά του βρισκόταν 12 καθίσματα πίσω του 8 , αριστερά 6 και δεξιά 8. Να υπολογίσετε πόσα καθίσματα είχε ο κινηματογράφος.

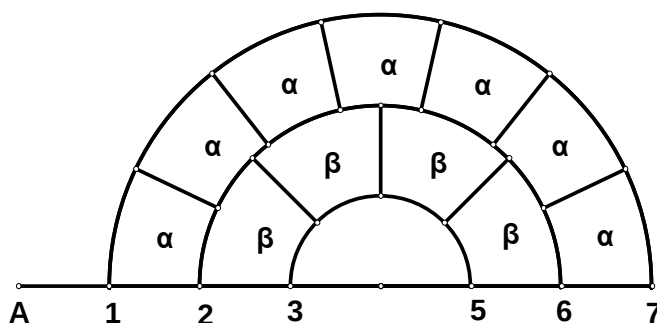
Θέμα 2ο

Η μεγάλη μαθηματικός της αρχαιότητας ΥΠΑΤΙΑ γεννήθηκε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου το 370 μ.Χ. Δεν πρόλαβε να γεράσει. Δολοφονήθηκε καθώς επέστρεφε σπίτι της. Τα χρόνια που έζησε είναι ένας αριθμός που διαιρείται με το 3 και το 5, ενώ αν διαιρεθεί με το 7 αφήνει υπόλοιπο 3. Να βρείτε πόσα χρόνια έζησε η ΥΠΑΤΙΑ και ποια χρονιά πέθανε.

Θέμα 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται 3 ημικύκλια. Τα άκρα των ημικυκλίων απέχουν από το σημείο Α τις αποστάσεις που είναι σημειωμένες στο σχήμα. Χωρίζουμε την περιοχή ανάμεσα στο μεσαίο και το μεγαλύτερο ημικύκλιο σε 7 ίσα μέρη και ονομάζουμε κάθε εμβαδόν α. Χωρίζουμε επίσης την περιοχή ανάμεσα στο μικρό και το μεσαίο ημικύκλιο σε 4 ίσα μέρη και ονομάζουμε κάθε εμβαδόν β.

Να βρείτε ποιο από τα δύο εμβαδά α ή β είναι μεγαλύτερο και να αιτιολογήσετε το συμπέρασμά σας.



Θέμα 4ο

Η τηλεφωνική Εταιρεία ΥΡΑΤΙΑPHONE προσφέρει δύο προγράμματα για τη σχολική χρονιά 2009-2010 στους μαθητές που συμμετέχουν στο διαγωνισμό ΥΠΑΤΙΑ που διενεργεί το Παράρτημα της Ελλην. Μαθηματικής Εταιρείας της Ημαθίας για τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου. Τα προγράμματα ονομάζονται «2009» και «2010».

Το πρόγραμμα «2009» προσφέρει για τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς, 2009 δωρεάν μηνύματα Τα επιπλέον μηνύματα χρεώνονται 7 λεπτά το καθένα. Κάθε κλήση χρεώνεται προς 8 λεπτά.

Το πρόγραμμα «2010» προσφέρει 2010 δωρεάν κλήσεις, ενώ οι επιπλέον κλήσεις χρεώνονται προς 13 λεπτά κάθε μια. Κάθε μήνυμα χρεώνεται προς 7 λεπτά.

Ο Υπάτιος που συμμετέχει στο διαγωνισμό υπολογίζει ότι θα κάνει 2500 κλήσεις και θα στείλει 2500 μηνύματα. Ποιο πρόγραμμα του συμφέρει περισσότερο σύμφωνα με τους υπολογισμούς του;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα)

Καλή επιτυχία

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ**

**3^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα
Μαθηματικά
«Η ΥΠΑΤΙΑ»**



Σάββατο 30 Οκτωβρίου 2010

Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1ο

Γράφουμε τη λέξη ΥΠΑΤΙΑ ξανά και ξανά, τη μια δίπλα στην άλλη, χωρίς κενά, ώστε να σχηματιστεί η λέξη ΥΠΑΤΙΑΥΠΑΤΙΑΥΠΑΤΙΑΥΠΑΤΙΑ.....

Να προσδιορίσετε ποιο γράμμα βρίσκεται:

α) στη 10^η θέση

γ) στην 100^η θέση

β) στην 20^η θέση

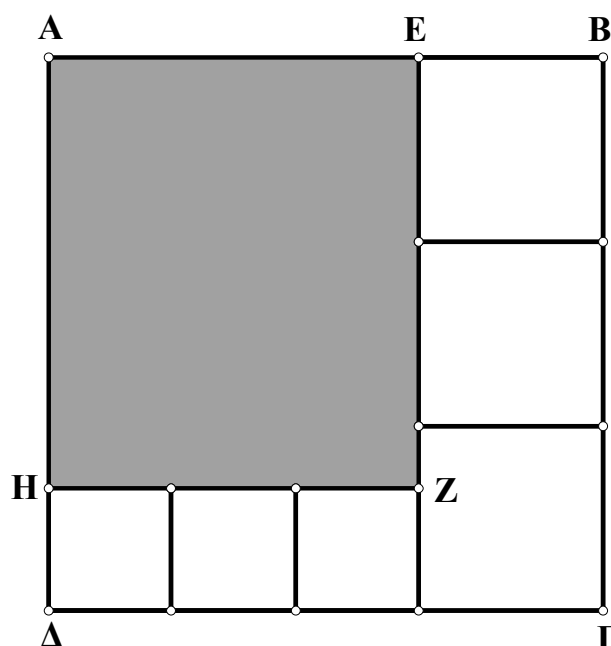
δ) στη 2010^η θέση.

Θέμα 2ο

Να βρεθεί ένας τετραψήφιος αριθμός αν γνωρίζουμε ότι διαιρείται ακριβώς δια 2 και δια 5, το άθροισμα των ψηφίων του είναι 3 και όταν διαιρεθεί δια 7 αφήνει υπόλοιπο 1

Θέμα 3ο

Το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος έχει πλευρά 18 εκατοστά και αποτελείται από 6 τετράγωνα και ένα ορθογώνιο $AEZH$.
Να βρεθεί η περίμετρος του ορθογωνίου $AEZH$.



Θέμα 4ο

Πόσοι είναι οι ακέραιοι αριθμοί

- α) από το 0 ως το 99 που περιέχουν το ψηφίο 7;
- β) από το 100 ως το 199 που περιέχουν το ψηφίο 7;
- γ) από το 1000 ως το 1999 που περιέχουν το ψηφίο 7;
- δ) από το 0 ως το 2010 που περιέχουν το ψηφίο 7;

(όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα)

Καλή επιτυχία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ

4^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά «Η ΥΠΑΤΙΑ»



Σάββατο 19 Νοεμβρίου 2011
Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1^ο

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \quad B = \frac{2}{3} : \frac{1}{5} - 2 \quad \Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 6$$

β) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς A, B και Γ είναι ο μεγαλύτερος και ποιος ο μικρότερος .

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 2^ο

Θεωρούμε όλους τους ακέραιους αριθμούς από το 1 έως το 2011 (δηλ. 1,2,3,...,2011). Να βρείτε:

α) πόσοι από αυτούς διαιρούνται δια του 2.

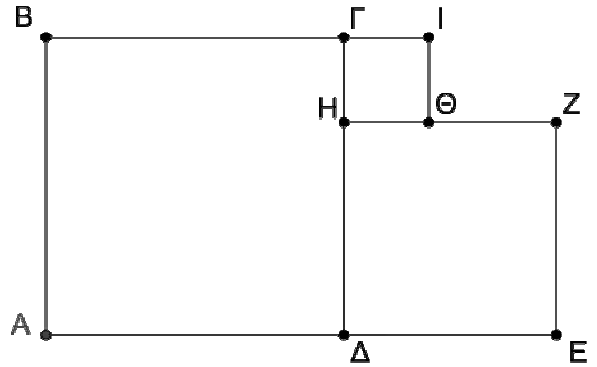
β) πόσοι διαιρούνται δια του 5.

γ) πόσοι διαιρούνται δια του 10.

δ) πόσοι διαιρούνται δια του 2 και δεν διαιρούνται δια του 5.

Θέμα 3^ο

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το σχεδιάγραμμα ενός μικρού σπιτιού, το οποίο αποτελείται από τρεις διαφορετικούς σε μέγεθος χώρους. Και οι τρεις χώροι έχουν σχήμα τετραγώνου.

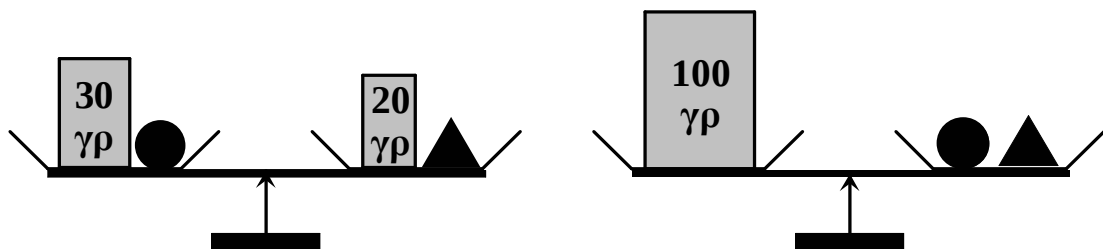


Το μικρότερο τετράγωνο έχει εμβαδόν 4 τετραγωνικά μέτρα, ενώ το μεγαλύτερο έχει περίμετρο 28 μέτρα. Να υπολογίσετε :

- α) Το συνολικό εμβαδόν του σπιτιού.
- β) Την περίμετρο του σπιτιού.

Θέμα 4^ο

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε δύο ζυγαριές που ισορροπούν.
Να βρείτε το βάρος της σφαίρας



Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή επιτυχία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ

5^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά
«Η ΥΠΑΤΙΑ»



Σάββατο 20 Οκτωβρίου 2012
Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1^ο

α) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = 85 \cdot 12 + 9 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 + 50) + 8 - 6$$

$$B = \frac{45^2 - 12}{3^2 - 2^3}$$

β) Ποιο από τα κλάσματα $\frac{A}{B}$ και $\frac{B}{A}$ είναι μεγαλύτερο;

Θέμα 2^ο

Ο καθηγητής ενός σχολείου ζήτησε από τους μαθητές του να κάνουν επανάληψη όλες τις σελίδες από την 20^η μέχρι και την 73^η.

α) Να βρείτε πόσες σελίδες πρέπει να διαβάσουν οι μαθητές.

β) Αν από τις σελίδες αυτές εξαιρέσουμε όσες διαιρούνται δια 5, πόσες σελίδες απομένουν για διάβασμα;

γ) Σε ολόκληρο το βιβλίο, στις σελίδες που είναι πρώτοι αριθμοί υπάρχουν σημαντικές ερωτήσεις. Πόσες και ποιες είναι οι σελίδες αυτές από την 32^η σελίδα ως και την 40^η;

δ) Ο Νίκος έσκισε ένα φύλλο του βιβλίου. Το άθροισμα των σελίδων του φύλλου αυτού είναι 99. Να βρείτε τις σελίδες που κόπηκαν.

Θέμα 3^ο

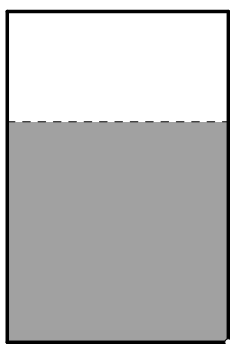
Τρεις φίλοι ο Ανδρέας, ο Βασίλης και ο Γιάννης έχουν συνολικά 178 ευρώ. Αν ο Βασίλης δώσει στον Ανδρέα 4 ευρώ, τότε ο Ανδρέας και ο Βασίλης θα έχουν το ίδιο ποσό χρημάτων. Αν όμως δε γίνει αυτό και ο Γιάννης δώσει στο Βασίλη 6 ευρώ, τότε ο Βασίλης και ο Γιάννης θα έχουν το ίδιο ποσό.

- α) Πόσα επιπλέον χρήματα έχει ο Βασίλης από τον Ανδρέα;
- β) Πόσα επιπλέον χρήματα έχει ο Γιάννης από τον Ανδρέα;
- γ) Πόσα χρήματα έχει καθένας;

Θέμα 4^ο

Ένα ενυδρείο, από την πλευρά που το βλέπουμε, έχει σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις 30 εκατ. πλάτος και 40 εκατ. ύψος (σχήμα 1). Το ενυδρείο είναι γεμάτο με νερό κατά τα $\frac{2}{3}$ του ύψους του.

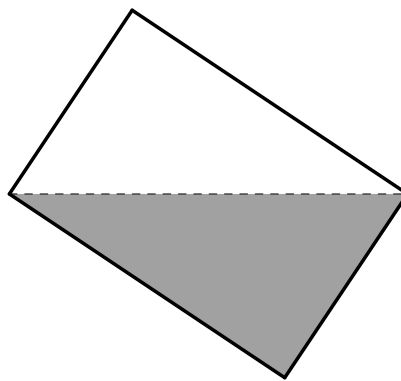
- α) Αν πλαγιάσουμε το ενυδρείο όπως φαίνεται στο σχήμα 2 να βρείτε σε ποιο ύψος θα φτάσει η στάθμη του.
- β) Περιστρέφουμε το ενυδρείο ώστε να βλέπουμε το ίδιο ορθογώνιο. Να εξετάσετε αν η στάθμη του νερού μπορεί να γίνει ποτέ η διαγώνιος του ορθογωνίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή Επιτυχία

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ**

**6^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά
«Η ΥΠΑΤΙΑ»**



Σάββατο 19 Οκτωβρίου 2013

Α΄ Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) : (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + 3 + 2 \cdot 10^3$

β) Να βρεθεί το 30% του αριθμού $B = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 10^2$

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $123,402 \cdot 10^2$ και $1234,019 \cdot 10$

δ) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι μεγαλύτερος;

$124,06 \cdot 10^{28}$ και $2486 \cdot 10^{26}$

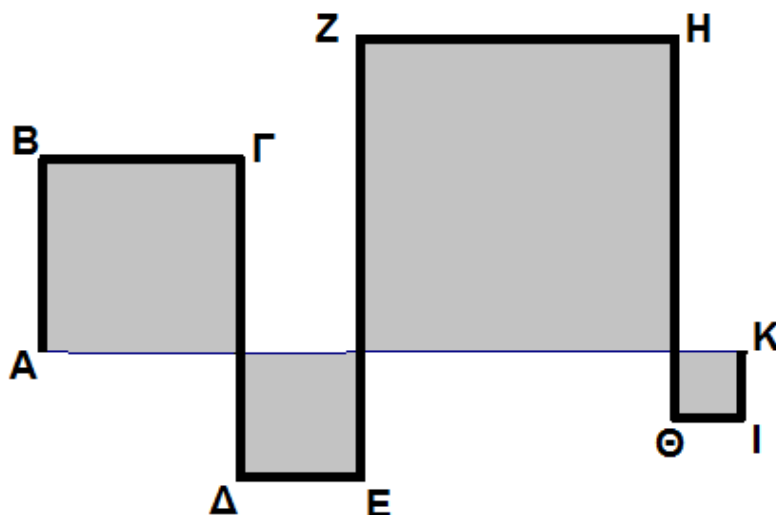
ΘΕΜΑ 2^ο

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε το άθροισμα 3 οποιωνδήποτε αριθμών που βρίσκονται σε διαδοχικά κελιά να είναι ίσο με 10. (σε κάθε κελί βρίσκεται ένας αριθμός).

3		5					
---	--	---	--	--	--	--	--

β) Το κουδούνι του σχολείου χτυπάει κάθε πρωί στις 8:30. Μένουμε στο σχολείο 355 λεπτά. Τι ώρα σχολάμε;

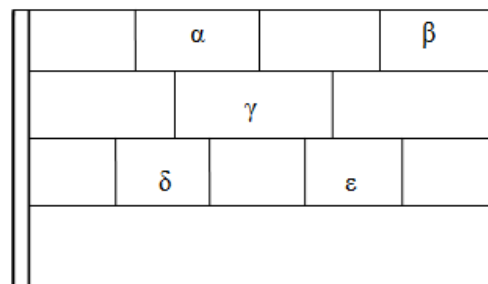
γ) Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν 4 τετράγωνα. Αν το μήκος της διαδρομής ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ είναι 18 μέτρα, να βρείτε το μήκος της διαδρομής ΑΚ.



ΘΕΜΑ 3^ο

Μία σημαία έχει σχήμα ορθογώνιο και χωρίζεται σε τρεις ίσες λωρίδες. Κάθε λωρίδα χωρίζεται σε ίσα μέρη όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- α) Να βρείτε τι μέρος της επιφάνειας της σημαίας αποτελεί το ορθογώνιο α.
- β) Να βρείτε τι μέρος της επιφάνειας της σημαίας αποτελούν συνολικά τα ορθογώνια α, β, γ, δ και ε.



ΘΕΜΑ 4^ο

Ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις ΑΒ=60 μέτρα και ΑΔ=40 μέτρα.

- α) Να βρεθούν η περίμετρος και το εμβαδόν του.
- β) Αν η πλευρά ΑΒ αυξηθεί κατά 20% και η πλευρά ΑΔ αυξηθεί κατά 20 μέτρα, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου.
- γ) Αν τώρα στο νέο ορθογώνιο που δημιουργήθηκε μετά τις αυξήσεις του ερωτήματος β) μειώσουμε τη μεγαλύτερη διάσταση κατά 20% και τη μικρότερη κατά 20 μέτρα θα πάρουμε το ορθογώνιο που είχαμε αρχικά; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

7^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Σάββατο 1 Νοεμβρίου 2014

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται οι αριθμοί $A = (6^2 - 4 \cdot 3 + 1) : 5^2 + 3 \cdot 2^3$ και $B = 4^2 \cdot (5^2 - 6 \cdot 4)^{2014} - 2 \cdot 3^1$

α. Να αποδείξετε ότι $A = 25$ και $B = 10$.

β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους τα κλάσματα $\frac{B+2004}{A+1990}$ και $\frac{A+1990}{B+2004}$

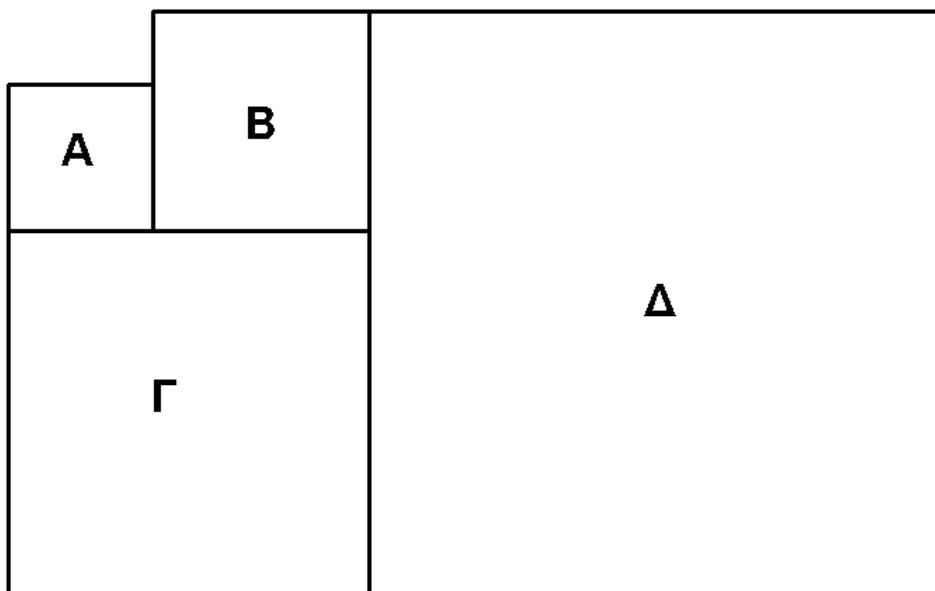
ΘΕΜΑ 2^ο

Τα παρακάτω σχήματα Α, Β, Γ και Δ είναι τετράγωνα. Η περίμετρος του τετραγώνου Α είναι 16 εκατοστά και η περίμετρος του τετραγώνου Β είναι 24 εκατοστά.

α. Να δείξετε ότι η περίμετρος του τετραγώνου Γ είναι 40 εκατοστά.

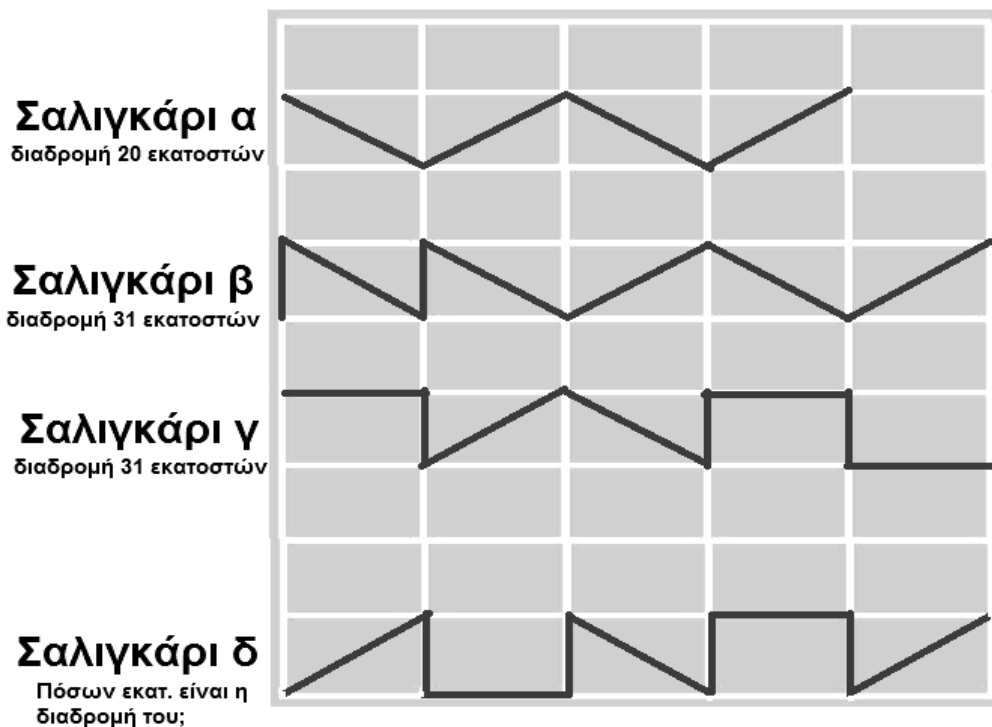
β. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου Δ είναι 256 τετραγωνικά εκατοστά.

γ. Αν χρησιμοποιήσουμε όλους τους παραπάνω αριθμούς, δηλαδή το 16, το 24, το 40 και το 256 τουλάχιστον μία φορά τον καθένα, μπορούμε μόνο με την πράξη της πρόσθεσης να βγάλουμε άθροισμα 2015;



ΘΕΜΑ 3^ο

Στο πλακόστρωτο της αυλής μας, που αποτελείται από πλακάκια που έχουν σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τέσσερα σαλιγκάρια αφήσανε τα ίχνη τους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα με την έντονη μαύρη γραμμή. Παρατηρώντας το σχήμα και ξέροντας ότι το **σαλιγκάρι α** έκανε διαδρομή 20 εκατοστών, το **σαλιγκάρι β** 31 εκατοστών και το **σαλιγκάρι γ** επίσης 31 εκατοστών, να βρείτε πόσα εκατοστά είναι η διαδρομή του **σαλιγκαριού δ**.



ΘΕΜΑ 4^ο

Ένα ζαχαροπλαστείο της Βέροιας ετοίμασε ταψάκια με ρεβανί. Επισκέπτες από την Πιερία και την Κοζάνη αγόρασαν το $\frac{1}{4}$ από αυτά ενώ επισκέπτες από τη Φλώρινα και τον Έβρο το $\frac{1}{6}$ από τα υπόλοιπα. Αν το ζαχαροπλαστείο έχει τώρα 15 ταψάκια, πόσα ταψάκια ετοίμασε;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!



8^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

Σάββατο 14 Νοεμβρίου 2015

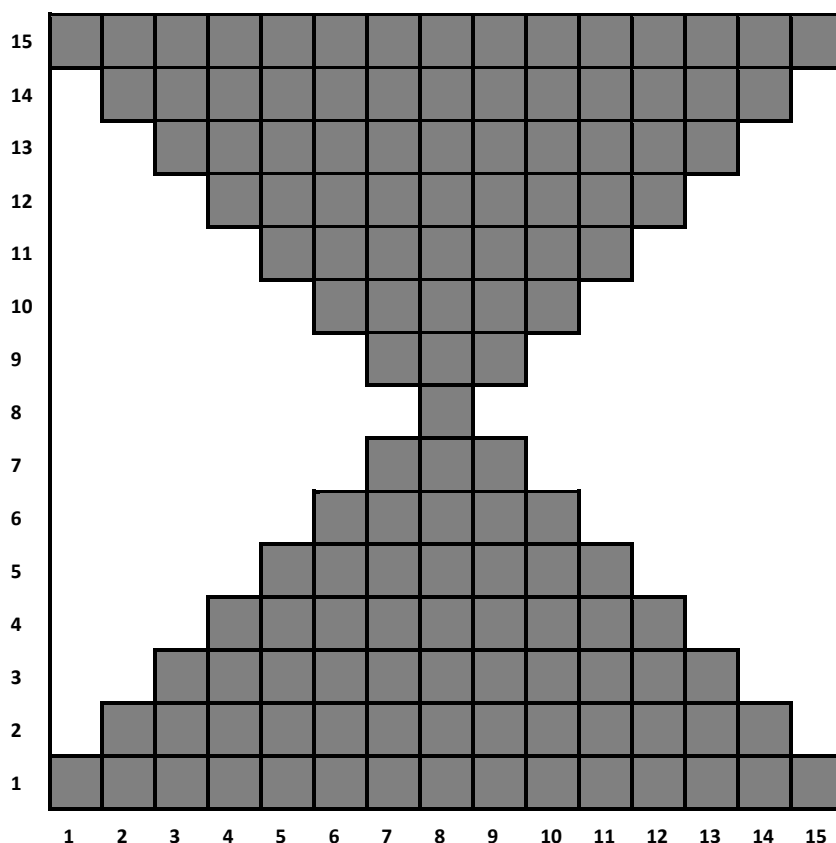
ΘΕΜΑ 1^ο

- α.** Να υπολογίσετε την παράσταση $A = (6^2 + 1 - 72 : 2)^{2015} + (5^2 - 2^3 + 3) : (4^2 - 6 \cdot 2)$
- β.** Να βρείτε τον αριθμό **X** που όταν διαιρεθεί με το **A** δίνει πηλίκο **335** και υπόλοιπο **5**.

ΘΕΜΑ 2^ο

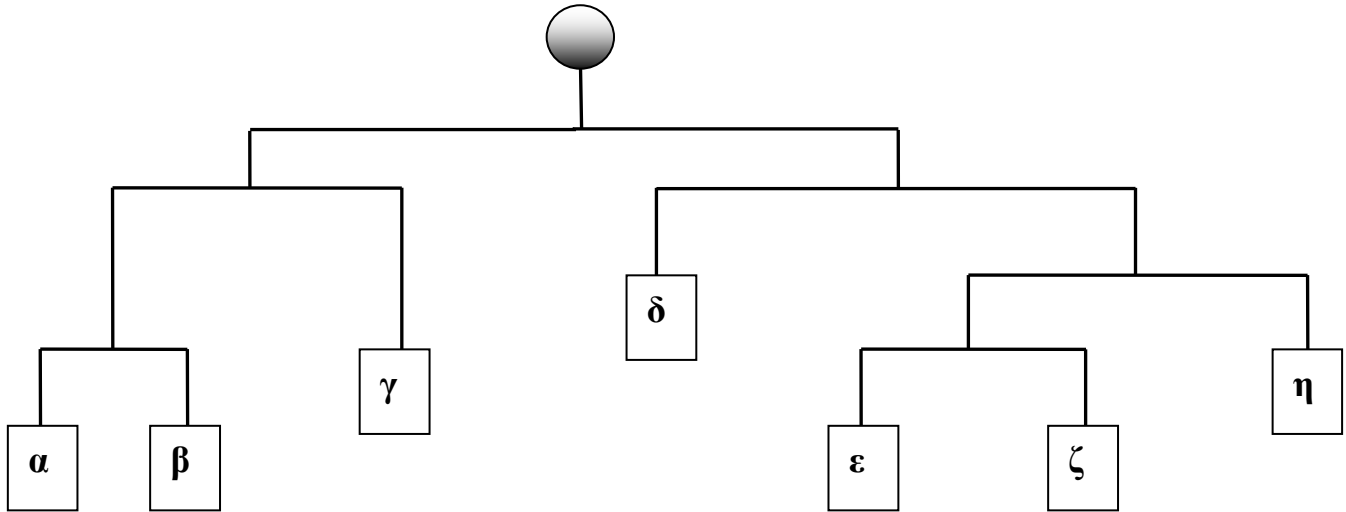
Το κάθε ένα από τα μικρά τετράγωνα (που βρίσκονται στο εσωτερικό του μεγάλου τετραγώνου) είναι πλευράς ενός εκατοστού.

- α. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του μεγάλου τετραγώνου.
- β. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του σκιασμένου σχήματος.
- γ. Είναι σωστός ο ισχυρισμός «**Το επίπεδο σχήμα που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό έχει και τη μεγαλύτερη περίμετρο**»; Να δικαιολογήσετε με ένα παράδειγμα την απάντησή σας.



ΘΕΜΑ 3^ο

Το κρεμαστό αντικείμενο του σχήματος ισορροπεί. Το βάρος του σχοινιού και των οριζόντιων ράβδων δεν υπολογίζονται στο συνολικό βάρος. Αν το συνολικό βάρος είναι **160** γραμμάρια πόσο ζυγίζουν τα βάρη **α, γ, δ, η** και **ε** ;



ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται **έξι** διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Οι **τρεις πρώτοι αριθμοί** έχουν άθροισμα **27**.

α. Ποιο είναι το άθροισμα των **τριών τελευταίων αριθμών** από τους **έξι** διαδοχικούς αριθμούς που δόθηκαν;

β. Ο δεκαπήφιος αριθμός που σχηματίζεται γράφοντας κατά αύξουσα διάταξη τους παραπάνω **έξι** διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς είναι πολλαπλάσιος του **5**;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

9^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Σάββατο 12 Νοεμβρίου 2016

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}{6\frac{2}{3}}$ και $B = \frac{(1^{2016} + 2^2)^2 - 4^2}{3^2} + \frac{1}{10} - \frac{2}{5}$

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων i) A (2μ) και ii) B (2μ)

β. Αν $A = \frac{9}{20}$ και $B = \frac{7}{10}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{B}{A}$ και $2 \cdot B$. (1μ)

ΘΕΜΑ 2^ο

Η Λυδία έχει μία εργασία στην Άλγεβρα από όπου έχει λύσει τα $\frac{4}{9}$ των ασκήσεων και της μένουν 20 άλυτες ασκήσεις. Ο συμμαθητής της ο Αριστοτέλης έχει μία εργασία με 30 ασκήσεις στη Γεωμετρία.

α. Πόσες είναι οι ασκήσεις της Λυδίας; (3μ)

β. Τι μέρος των ασκήσεων του πρέπει να λύσει ο Αριστοτέλης ώστε να έχει τον ίδιο αριθμό λυμένων ασκήσεων με την Λυδία; (2μ)

ΘΕΜΑ 3^ο

Το τετράπλευρο ABΓΔ στο παρακάτω σχήμα είναι ορθογώνιο με περίμετρο Π=32 m, AB=x m και ΒΓ=6 m.

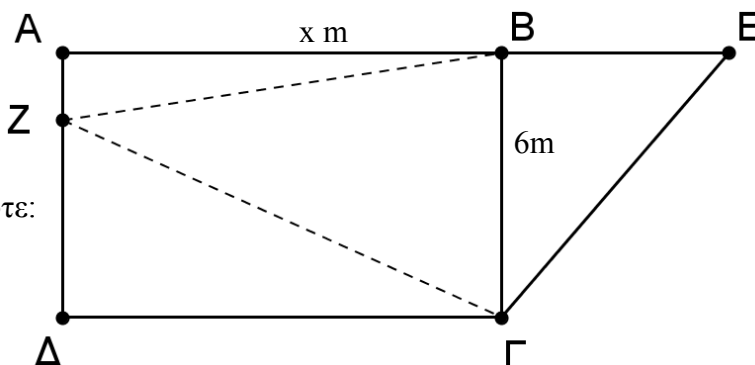
α. Να αποδείξετε ότι x=10 m. (1μ)

β. Να βρείτε το εμβαδό του BΖΓ (1μ)

γ. Αν το BE είναι στην προέκταση του AB και ίσο με το μισό του AB και $AZ = \frac{1}{5} BE$ τότε:

γ₁) Να βρείτε το εμβαδό του ΑΕΓΔ (2μ)

γ₂) Να βρείτε το εμβαδό του ΔΖΓ (1μ)



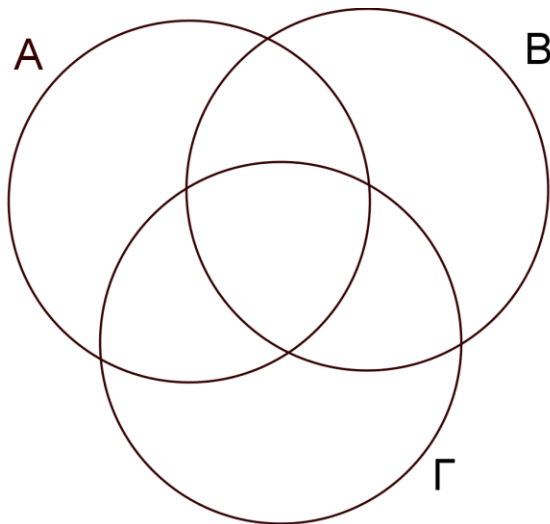
Να μεταφέρετε το σχήμα στο φύλλο απαντήσεων.

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι αριθμοί

130 , 162 , 200 , 351 , 360 , 445 , 513 , 735 , 842 , 999

α. Να τοποθετήσετε τους παραπάνω αριθμούς στους κύκλους **A** , **B** , **Γ** που σας δίνονται στο σχήμα που ακολουθεί, έτσι ώστε οι αριθμοί στον κύκλο **A** να διαιρούνται με το **2**, οι αριθμοί στον κύκλο **B** να διαιρούνται με το **3** και οι αριθμοί στον κύκλο **Γ** να διαιρούνται με το **5**.



Να μεταφέρετε το σχήμα στο φύλλο απαντήσεων.

(2μ)

β. Αν **α** είναι ένας από τους παραπάνω αριθμούς που διαιρείται συγχρόνως και με το **2** και με το **3** και με το **5**, να τον αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

(1μ)

γ. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό **β** ώστε αν πολλαπλασιαστεί με τον **α** να προκύψει ο κύβος ενός φυσικού αριθμού **γ** , δηλαδή $\gamma^3 = \alpha \cdot \beta$.

(2μ)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

10^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Σάββατο 11 Νοεμβρίου 2017

Α΄ Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται η παράσταση $A = \left[\left(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7} \right) \right] : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right)^2$

α) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης Α. (2μ)

β) Δίνονται οι αριθμοί $B = (11,2 - 9,9)^2 - (2,7 - 1,5)^2$ και $\Gamma = \frac{1}{4}$. Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος;

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (1,5μ)

γ) Πόσες φορές είναι μεγαλύτερος ο Α από τον Γ; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (1,5μ)

ΘΕΜΑ 2^ο

Να βρεθούν τα μη μηδενικά ψηφία α,β,γ,δ,ε με $\alpha > \beta > \gamma > \delta > \varepsilon$ για τα οποία ισχύει:

α	β	γ	δ	ε
+ ε	δ	γ	β	α
7	α	6	α	7

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (5μ)

ΘΕΜΑ 3^ο

Ο Υπάτιος αποφάσισε να ασχοληθεί με το τρέξιμο. Αρχικά, έτρεχε **10 χιλιόμετρα** σε **1 ώρα** και έπειτα από πολλές προπονήσεις τρέχει τώρα τα **20 χιλιόμετρα** σε **1 ώρα και 40 λεπτά**.

α) Σε πόση ώρα ο Υπάτιος διανύει το **1 χιλιόμετρο** με τη νέα του απόδοση; (1,5μ)

β) Για την ίδια απόσταση πόσο τοις εκατό λιγότερο χρόνο χρειάζεται ο αθλητής; (1,5 μ)

γ) Ο Υπάτιος πρόκειται να λάβει μέρος στο «6^ο Φιλίππειο Δρόμο»-**14,6 χιλιόμετρα** που ξεκινάει από τη Βεργίνα και καταλήγει στη Βέροια. Αν γνωρίζουμε ότι ο αγώνας θα ξεκινήσει στις **9:30 π.μ.** τι ώρα αναμένεται να φτάσει ο Υπάτιος στη Βέροια ; (2 μ)

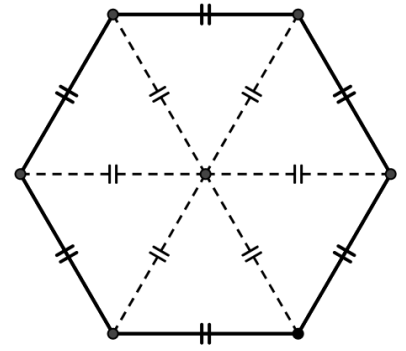
ΘΕΜΑ 4^ο

Στο διπλανό σχήμα «κρύβονται» τρία **διαφορετικά** γεωμετρικά σχήματα.

α) Μπορείτε να τα βρείτε, να τα ονομάσετε και να γράψετε το είδος του καθενός; **(1,5μ)**

β) Τι μέρος του συνολικού εμβαδού αποτελεί το καθένα; **(1,5μ)**

γ) Αν το μεγαλύτερο απ' αυτά έχει εμβαδόν **48cm^2** , να βρεθούν τα εμβαδά των υπολοίπων σχημάτων καθώς και το εμβαδόν ολόκληρου του σχήματος. **(2μ)**



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

11^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Σάββατο 10 Νοεμβρίου 2018

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)}{2^3}$ και $B = 1\frac{1}{8} - (3^2 - 2^3)^{2018} + 0^5$

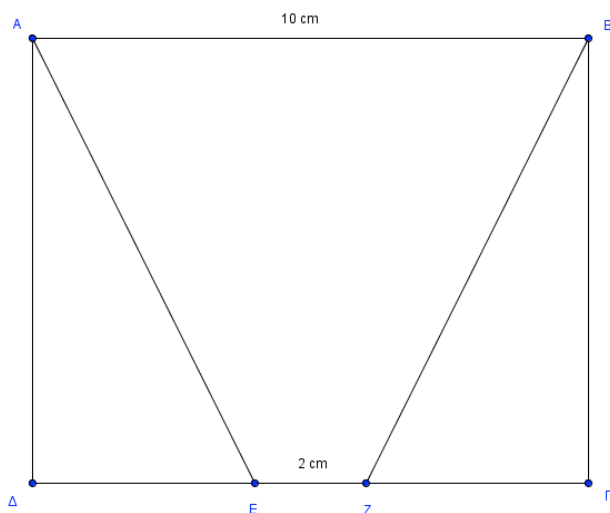
α) Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων A και B. (2μ)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $2A$ και $\frac{B}{A}$. (1,5μ)

γ) Να εξετάσετε αν ο αριθμός $2\left(2A + \frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{B}{A} + \frac{1}{2}\right) + 2^3$ είναι πρώτος ή σύνθετος. (1,5μ)

ΘΕΜΑ 2^ο

Το παρακάτω τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο με την πλευρά **AB=10 cm** και περίμετρο **36 cm**



α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AΔ. (1μ)

β) Αν το ευθύγραμμο τμήμα EZ έχει μήκος **2 cm**, να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ABZE. (2μ)

γ) Στο αρχικό ορθογώνιο, ABΓΔ, μειώνουμε τη μεγάλη πλευρά κατά **2 cm** και αυξάνουμε τη μικρή κατά το $\frac{1}{2}$ του μήκους της. Να βρεθεί η περίμετρος του νέου ορθογωνίου. (2μ)

ΘΕΜΑ 3^ο

Ένα βαρέλι είναι γεμάτο με κρασί. Ο έμπορος πούλησε στην αρχή το $\frac{1}{4}$ από το περιεχόμενό του , μετά άλλα **150 κιλά** και υπολογίζει ότι το βαρέλι είναι γεμάτο κατά τα $\frac{3}{5}$.

- α) Τι μέρος αποτελούν τα **150 κιλά**; (3μ.)
- β) Πόσα κιλά κρασί είχε αρχικά το βαρέλι; (2μ.)

ΘΕΜΑ 4^ο

Γράφουμε την παρακάτω σειρά αριθμών:

1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4,

η οποία επαναλαμβάνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Να βρείτε:

- α) Ποιος αριθμός βρίσκεται στην **15^η** θέση (1μ)
- β) Ποιος αριθμός βρίσκεται στην **100^η** θέση (1μ)
- β) Ποιος αριθμός βρίσκεται στην **2018^η** θέση (1,5μ)
- δ) Το άθροισμα των πρώτων **2018** αριθμών αυτής της σειράς αριθμών. (1,5μ)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

12^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Σάββατο 9 Νοεμβρίου 2019

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

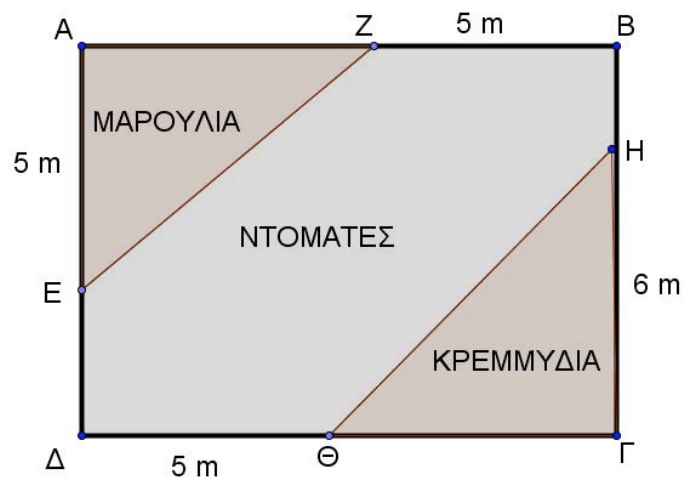
Αντικαθιστώντας κάθε έναν από τους αριθμούς **G** και **Π** με το κατάλληλο ψηφίο από το **0** έως και το **9**, να βρεθούν όλοι οι αριθμοί της μορφής οι οποίοι:

1919**G**353000**Π**

- α) διαιρούνται ακριβώς με το 5 (2μ)
β) διαιρούνται ακριβώς με το 15 (3μ)

ΘΕΜΑ 2^ο

Έναν ορθογώνιο κήπο μήκους $AB = 11 \text{ m}$ και πλάτους $AD = 8 \text{ m}$, τον φυτέψαμε όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α) Να βρεθεί το εμβαδόν του μέρους που είναι φυτεμένα τα μαρούλια και τα κρεμμύδια. (2μ)
β) Τι μέρος της επιφάνειας του κήπου καλύπτουν οι ντομάτες ; (3μ)

ΘΕΜΑ 3^ο

Οι μαθητές της Α΄ Γυμνάσιου ενός σχολείου της Βέροιας είναι λιγότεροι από **200**. Αν σχηματίσουμε **εφτάδες** περισσεύουν **5**, αν σχηματίσουμε **οκτάδες** περισσεύουν **6** και σε **δεκαεξάδες** μένουν **14**.

α) Να αποδείξετε ότι οι μαθητές είναι **110**. **(2μ)**

β) Αν τα κορίτσια είναι **50** να βρείτε σε πόσες το πολύ ομάδες μπορούμε να χωρίσουμε τους μαθητές ώστε να έχουμε ίδιο αριθμό αγοριών και κοριτσιών σε κάθε ομάδα. **(3μ)**

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε ένα ασανσέρ χωρητικότητας **225** κιλών παίζουν ο Λευτέρης , η Λυδία και η Αθανασία. Ο Λευτέρης είναι **14,5** κιλά βαρύτερος από την Λυδία ενώ η Αθανασία είναι **500** γραμμάρια πιο βαριά από την Λυδία. Αν μπει ακόμα ένα άτομο **80** κιλών, το ασανσέρ γίνεται υπέρβαρο κατά **6** κιλά και **500** γραμμάρια.

α) Πόσο ζυγίζουν και τα τρία παιδιά μαζί ; **(2μ)**

β) Πόσο ζυγίζει το κάθε παιδί; **(3μ)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

13^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Παρασκευή 5 Νοεμβρίου 2021

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται ο ελλιπής πίνακας

		1	9			
--	--	---	---	--	--	--

Α. α. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα με φυσικούς αριθμούς, ώστε το **άθροισμα** τριών οποιοδήποτε αριθμών που βρίσκονται σε διαδοχικά κελιά είναι ίσο με **18**.

(Μονάδες 1)

β. Να **προσθέσετε** τους παραπάνω αριθμούς των επτά κελιών.

Ποιοι είναι οι **διαιρέτες** του **αθροίσματος** που βρήκατε;

Ποιοι διαιρέτες του είναι **πρώτοι** αριθμοί;

(Μονάδες 2)

Β. α. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα με φυσικούς αριθμούς, ώστε το **γινόμενο** τριών οποιοδήποτε αριθμών που βρίσκονται σε διαδοχικά κελιά είναι ίσο με **27**.

(Μονάδες 1)

β. Να **πολλαπλασιάσετε** τους παραπάνω αριθμούς των επτά κελιών.

Το **γινόμενο** διαιρείται με το 3; Διαιρείται με το 9;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας;

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν $A = 2021 \cdot \frac{5^2 - 3 \cdot 7}{4}$ και $B = \frac{(6^2 - 4 \cdot 9) \cdot 2009 + 7}{\frac{7}{1}}$
2022

α) Να βρεθεί ο αριθμός **A**.

β) Να βρεθεί ο αριθμός **B**.

γ) Να βρείτε ένα κλάσμα μεταξύ των $\frac{A}{B}$ και $\frac{B}{A}$.

(Μονάδες 2+2+2)

ΘΕΜΑ 3^ο

Ένα τρίγωνο είναι τοποθετημένο πάνω σε ένα ορθογώνιο με διαστάσεις **8 εκατοστά** και **6 εκατοστά** αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Με σκούρο χρώμα είναι το κοινό τους κομμάτι το οποίο καλύπτει το **70%** του

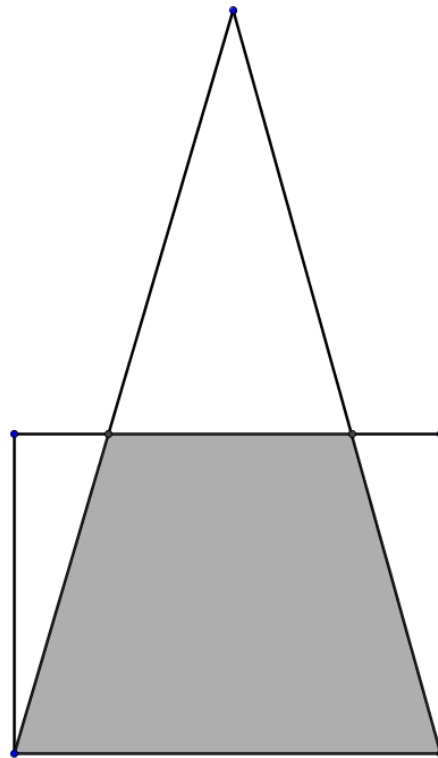
τριγώνου και τα $\frac{7}{8}$ του ορθογωνίου.

ταυτόχρονα.

α) Πόσο είναι το εμβαδόν του τριγώνου;

β) Αν θεωρήσουμε **A**, το λευκό τμήμα του τριγώνου και **B** το λευκό τμήμα του ορθογωνίου, να βρείτε τον λόγο των εμβαδών των τμημάτων $\frac{B}{A}$.

γ) Βρείτε το εμβαδόν τετραγώνου που έχει την ίδια περίμετρο με το ορθογώνιο.



(Μονάδες 4+2+2)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

14^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Παρασκευή 11 Νοεμβρίου 2022

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A = (18:3 + 2^2):10$$

$$B = \frac{2}{3}:\frac{5}{3} + \frac{1}{5}$$

$$\Gamma = \frac{[5 \cdot (2 + 2^2) + 12:2^2]}{(2^3 + 2^2):(11 - 3^2)}$$

(Μονάδες 1+1+2)

Β. Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τα κλάσματα $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{\Gamma}$

(Μονάδες 1)

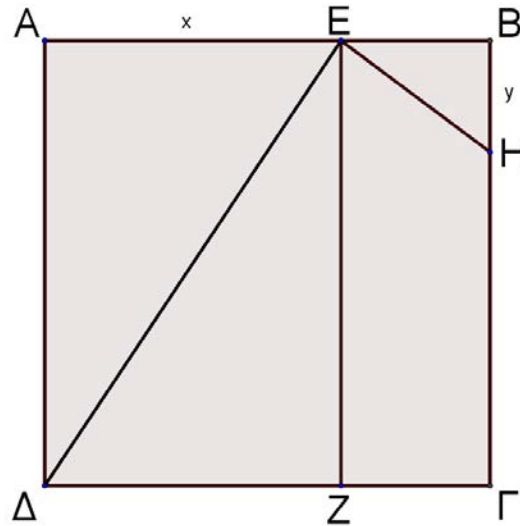
Γ. Να υπολογίσετε την τιμή:

$$X = 2 \cdot A^2 + 5 \cdot B - \frac{10}{11} \Gamma$$

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 12 cm όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν το εμβαδόν του τριγώνου $\mathbf{AED}$ είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του τετραγώνου $\mathbf{ABCD}$ και το εμβαδόν του τριγώνου $\mathbf{EBC}$ είναι ίσο με το $\frac{1}{8}$ του εμβαδού του ορθογωνίου $\mathbf{EBCZ}$, να βρεθούν :

α) Η πλευρά $\mathbf{x=AE}$ (Μονάδες 2)

β) Η πλευρά $\mathbf{y=BE}$ (Μονάδες 2)

γ) Ο λόγος του εμβαδού του τετραπλεύρου $\mathbf{DEHC}$ προς το εμβαδόν του τετραγώνου $\mathbf{ABCD}$. (Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 3^ο

Ο Γεράσιμος και η Αλέκα παίζουν ένα παιχνίδι με ένα σεντούκι 100 χρυσών νομισμάτων εναλλάξ ο ένας μετά τον άλλον.

Ο καθένας μπορεί να πάρει **ένα χρυσό νόμισμα** εάν το μπαούλο έχει **μονό αριθμό** χρυσών νομισμάτων ή **ακριβώς τα μισά** νομίσματα αν το μπαούλο έχει **ζυγό αριθμό** χρυσών νομισμάτων.

Το παιχνίδι τελειώνει όταν δεν υπάρχουν άλλα χρυσά νομίσματα στο σεντούκι.

Αν η Αλέκα παίζει πρώτη, πόσα χρυσά νομίσματα θα έχει η Αλέκα στο τέλος;

(Μονάδες 7)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

15^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Σάββατο 4 Νοεμβρίου 2023

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Στην Αλεξάνδρεια, τρεις γυναίκες, η Δελφίς, η Ίρις και η Νεφέλη, ανακρίνονται ως ύποπτες για κλοπή ενός παπύρου του Ερατοσθένη. Είναι γνωστό ότι κάθε γυναίκα είτε λέει πάντα την αλήθεια είτε λέει πάντα ψέματα.

Στις απολογίες τους είπαν:

(α) Δελφίς: Είμαι αθώα.

(β) Ίρις: Η Νεφέλη έκλεψε τον πάπυρο.

(γ) Νεφέλη: Είμαι αθώα.

(δ) Ίρις: Είμαι ένοχη.

(ε) Δελφίς: Ναι, η Ίρις είναι όντως ένοχη.

Αν ακριβώς μία από τις Δελφίς, Ίρις και Νεφέλη έκανε την κλοπή, ποια είναι η ένοχη;

(Μονάδες 5)

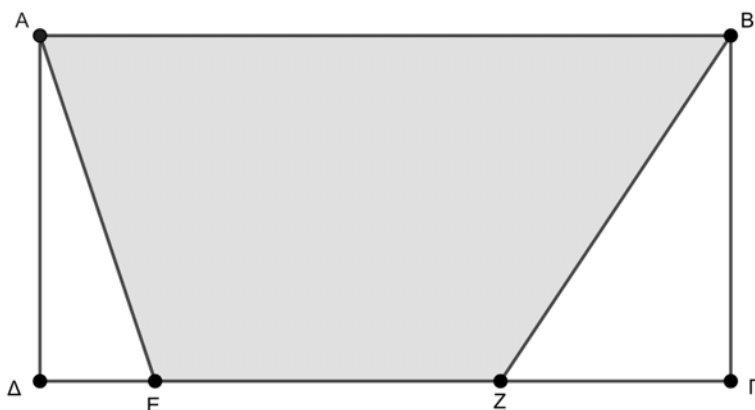
ΘΕΜΑ 2^ο

Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, το εμβαδόν του τραπεζίου $ABZE$ είναι 266cm^2 και οι πλευρές $AB=30\text{cm}$

$AD=14\text{cm}$ και

$DE=5\text{cm}$.

Να βρείτε την πλευρά $Z\Gamma$.



(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2022}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2023}\right).$$

(Μονάδες 2)

β. Να βρεθεί ο αριθμός B, όταν:

$$\frac{1}{4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{99 + 2} = \frac{1}{B - 4}.$$

(Μονάδες 2)

γ. Να συγκρίνετε τις τιμές A και $\frac{1}{B}$.

(Μονάδες 1)

ΘΕΜΑ 4^ο

Αν τα K, Λ και Μ είναι ψηφία (εκτός από το μηδέν) τέτοια ώστε:

$$\begin{array}{rcccc} & & \mathbf{K} & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{M} & \mathbf{\Lambda} \\ + & & & \mathbf{M} & \mathbf{5} & \mathbf{K} \\ \hline & & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array}$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα $K + \Lambda + M$.

(Μονάδες 5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ**

**1^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά
«Η ΥΠΑΤΙΑ»**



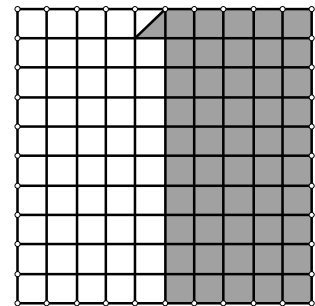
Σάββατο 1 Νοεμβρίου 2008

Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1ο

Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα α, β, γ, δ αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

- α. Αν το εμβαδόν ολοκλήρου του τετραγώνου στο διπλανό σχήμα είναι 100cm^2 να βρεθεί το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους .



Μονάδες 5

Απάντηση

$50,5\text{ cm}^2$

- β. Τα $\frac{3}{4}$ ενός αριθμού είναι ίσα με 9. Να βρεθεί ο αριθμός. **Μονάδες 5**

Απάντηση

Τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού είναι ίσα με 9

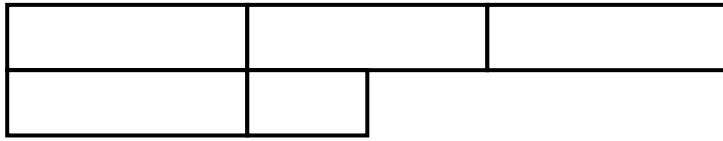
Το $\frac{1}{4}$ του αριθμού είναι ίσο με $9 : 3 = 3$

Τα $\frac{4}{4}$ του αριθμού είναι ίσα με $4 \times 3 = 12$

γ. Αν το εμβαδόν του διπλανού ορθογωνίου είναι $\frac{2}{3} \text{ cm}^2$ να



υπολογίσετε το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος



Μονάδες 5

Απάντηση

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $4,5 \times \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ cm}^2$

δ. Το διπλανό ορθογώνιο το οποίο έχει διαστάσεις Φυσικούς Αριθμούς έχει περίμετρο 30cm και εμβαδόν 56 cm^2 . Να βρεθούν οι διαστάσεις του.



Μονάδες 5

Απάντηση

Αν οι διαστάσεις είναι x και y τότε η ημιπερίμετρος θα είναι $x + y = 15$ και του εμβαδόν $x \cdot y = 56$. Οι μοναδικοί φυσικοί αριθμοί που έχουν άθροισμα 15 και γινόμενο 56 είναι οι 8 και 7. Άρα οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 8 και 7 cm.

Θέμα 2ο

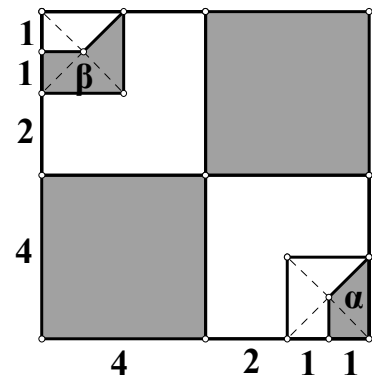
Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά 8 cm.

A. Πόσο είναι το άθροισμα των εμβαδών των δύο μικρών σκιασμένων μερών α και β;

Μονάδες 7

Απάντηση

Με κατάλληλη μετακίνηση διαπιστώνουμε ότι τα δυο μικρά σκιασμένα μέρη α και β σχηματίζουν ένα τετράγωνο πλευράς 2 cm. Άρα το άθροισμα των εμβαδών τους είναι $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$



B. Να υπολογιστεί το εμβαδόν που καλύπτουν συνολικά όλα τα σκιασμένα μέρη.

Μονάδες 7

Απάντηση

Το εμβαδόν που καλύπτουν συνολικά όλα τα σκιασμένα μέρη είναι : $4 + (4 \times 4) + (4 \times 4) = 4 + 16 + 16 = 36 \text{ cm}^2$

Γ. Πόσο ποσοστό του εμβαδού του μεγάλου τετραγώνου καλύπτουν όλα τα σκιασμένα μέρη; **Μονάδες 6**

Απάντηση

Το συνολικό εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου είναι : $8 \times 8 = 64 \text{ cm}^2$ Συνεπώς το ποσοστό του εμβαδού που καλύπτουν όλα τα σκιασμένα μέρη είναι :

$$\frac{36}{64} = 0,5625 = 56,25\%$$

Θέμα 3ο

Τρεις παίκτες Α, Β, Γ θα μοιράζονταν αρχικά το $\frac{1}{3}$, το $\frac{1}{4}$ και το $\frac{1}{5}$ ενός ποσού αντίστοιχα. Τελικά όμως μοιράστηκαν το $\frac{1}{4}$, το $\frac{1}{5}$ και το $\frac{1}{6}$ του ίδιου ποσού αντίστοιχα.

α. Πόσο μέρος το ποσού πήραν συνολικά οι τρεις παίκτες; **Μονάδες 7**

Απάντηση

Οι τρεις παίκτες πήραν συνολικά $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{15}{60} + \frac{12}{60} + \frac{10}{60} = \frac{37}{60}$ του ποσού.

β. Αιτιολογήστε ότι ο παίκτης που ζημιώθηκε περισσότερο από την τελική διανομή (σχετικά με την αρχική διανομή) ήταν ο Α. **Μονάδες 7**

Απάντηση

Ο Α παίκτης αρχικά θα έπαιρνε αρχικά το $\frac{1}{3}$ του ποσού και τελικά πήρε το $\frac{1}{4}$. Άρα

ζημιώθηκε κατά $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ παίκτες. Με τον ίδιο συλλογισμό βρίσκουμε ότι ο Β παίκτης

ζημιώθηκε $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ και ο Γ παίκτης ζημιώθηκε $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ και επειδή

$\frac{1}{12} > \frac{1}{20} > \frac{1}{30}$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο Α παίκτης ζημιώθηκε περισσότερο.

γ. Αν ο παίκτης Α ζημιώθηκε κατά 300 € από την τελική διανομή, να βρείτε ποιο ήταν το αρχικό ποσό και ποιο ποσό πήρε ο κάθε παίκτης. **Μονάδες 6**

Απάντηση

Αφού ο Α παίκτης ζημιώθηκε κατά 300 € και αυτό ήταν το $\frac{1}{12}$ του αρχικού ποσού, άρα το αρχικό ήταν $300 \times 12 = 3.600 \text{ €}$ και το ποσό που πήρε ο κάθε παίκτης είναι :

Ο Α παίκτης πήρε : $\frac{1}{4} \times 3.600 = 900 \text{ €}$

Ο Β παίκτης πήρε : $\frac{1}{5} \times 3.600 = 720 \text{ €}$ και

Ο Γ παίκτης πήρε : $\frac{1}{6} \times 3.600 = 600 \text{ €}$

Θέμα 4ο

Στα γραφεία της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας της Ημαθίας που βρίσκονται στην οδό Ολγάνου 19 στη Μπαρμπούτα της Βέροιας, υπάρχουν 5 λάμπες φωτισμού και 5 διακόπτες, ένας για κάθε λάμπα.

Με ένα πάτημα του διακόπτη ανάβει η λάμπα και με ένα ακόμη πάτημα σβήνει. Το έτος 2008 έγιναν 2009 πατήματα διακοπών.

Αν αρχικά όλες οι λάμπες ήταν σβησμένες και μετά από τα 2009 πατήματα οι 4 λάμπες είναι αναμμένες, να βρείτε αν η 5^η λάμπα είναι αναμμένη ή σβησμένη αιτιολογώντας το συμπέρασμά σας.

Μονάδες 20

Απάντηση

Σε κάθε λάμπα αντιστοιχεί και ένας διακόπτης.

Αν μια λάμπα είναι αναμμένη σημαίνει ότι ο αντίστοιχος διακόπτης πατήθηκε περιττό (μονό) αριθμό ενώ αν είναι σβησμένη σημαίνει ότι ο αντίστοιχος διακόπτης πατήθηκε άρτιο (ζυγό) αριθμό. Αφού οι 4 λάμπες τελικά είναι αναμμένες σημαίνει ότι για την κάθε μια από αυτές ο αντίστοιχος διακόπτης πατήθηκε περιττό αριθμό. Συνεπώς το άθροισμα των πατημάτων για τις 4 λάμπες είναι ένα άθροισμα τεσσάρων περιττών αριθμών. Δηλαδή άρτιος αριθμός. (Γενικότερα όταν προσθέτουμε άρτιο σε πλήθος περιττούς αριθμούς βρίσκουμε άθροισμα άρτιο αριθμό.). Και επειδή έγιναν συνολικά 2009 πατήματα σημαίνει ότι στο διακόπτη της 5^{ης} λάμπας αντιστοιχεί περιττός αριθμός πατημάτων.

(2009 – άρτιος = περιττός)

Συνεπώς η 5^η λάμπα είναι **αναμμένη**.

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ**

**2^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα
Μαθηματικά**

«Η ΥΠΑΤΙΑ»



Σάββατο 21 Νοεμβρίου 2009

Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1ο

Ο βρίσκεται σε ένα κινηματογράφο όπου όλες οι σειρές έχουν ακριβώς τον ίδιο αριθμό καθισμάτων. Παρατήρησε ότι μπροστά του βρισκόταν 12 σειρές καθισμάτων, πίσω του 8 , αριστερά 6 και δεξιά 8. Να υπολογίσετε πόσα καθίσματα είχε ο κινηματογράφος.

Λύση

Η αίθουσα του κινηματογράφου είχε συνολικά 21 σειρές καθισμάτων. (12 σειρές μπροστά από τον Mr.Math + 8 σειρές πίσω του +1 η σειρά που καθόταν ο ίδιος) .

Η κάθε σειρά είχε από 15 καθίσματα (6 καθίσματα αριστερά + 8 δεξιά του + 1 αυτό που καθόταν ο ίδιος)

Επομένως η αίθουσα συνολικά είχε **$21 \times 15 = 315$ καθίσματα.**

Θέμα 2^ο

Η μεγάλη μαθηματικός της αρχαιότητας ΥΠΑΤΙΑ γεννήθηκε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου το 370 μ.Χ. Δεν πρόλαβε να γεράσει. Δολοφονήθηκε καθώς επέστρεφε σπίτι της. Τα χρόνια που έζησε είναι ένας αριθμός που διαιρείται με το 3 και το 5, ενώ αν διαιρεθεί με το 7 αφήνει υπόλοιπο 3. Να βρείτε πόσα χρόνια έζησε η ΥΠΑΤΙΑ και ποια χρονιά πέθανε;

Λύση

Τα χρόνια που έζησε η Υπατία, είναι ένας αριθμός που διαιρείται με το 3 και το 5. Επομένως είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 3 και 5. Άρα είναι πολλαπλάσιο του 15. Δηλαδή είναι κάποιος από τους αριθμούς 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105,

Τα υπόλοιπά των διαιρέσεων των αριθμών αυτών με το 7 είναι αντίστοιχα: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0,

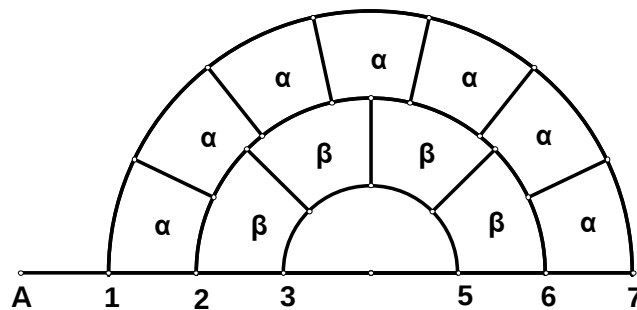
(Παρατήρηση: ο επόμενος αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του 15 και όταν διαιρείται με το 7 αφήνει υπόλοιπο 3 είναι ο 150. Αυτός όμως απορρίπτεται από τα δεδομένα Δεν πρόλαβε να γεράσει.)

Άρα η Υπατία έζησε 45 χρόνια και πέθανε το 514 μ.Χ. ($370+45=415$).

Θέμα 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται 3 ημικύκλια. Τα άκρα των ημικυκλίων απέχουν από το σημείο Α τις αποστάσεις που είναι σημειωμένες στο σχήμα. Χωρίζουμε την περιοχή ανάμεσα στο μεσαίο και το μεγαλύτερο ημικύκλιο σε 7 ίσα μέρη και ονομάζουμε κάθε εμβαδόν α. Χωρίζουμε επίσης την περιοχή ανάμεσα στο μικρό και το μεσαίο ημικύκλιο σε 4 ίσα μέρη και ονομάζουμε κάθε εμβαδόν β.

Να βρείτε ποιο από τα δύο εμβαδά α ή β είναι μεγαλύτερο και να αιτιολογήστε το συμπέρασμά σας.



Λύση

Παρατηρούμε ότι τα 3 ημικύκλια είναι ομόκεντρα (έχουν το ίδιο κέντρο). Οι αντίστοιχες ακτίνες τους είναι: 3, 2, 1 (από το μεγαλύτερο προς το μικτότερο)

Γνωρίζουμε ότι αν ένας κύκλος έχει ακτίνα α , τότε το εμβαδόν του είναι : $E = \pi \cdot \rho^2 \approx 3,14 \cdot \rho^2$. Άρα το εμβαδόν του ημικύκλιου (μισός

κύκλος) θα είναι : $\frac{3,14 \cdot \rho^2}{2} = 1,57 \cdot \rho^2$.

Για να βρούμε το εμβαδόν των 7 τμημάτων (α) , στον εξωτερικό ημιδακτύλιο, θα αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του εξωτερικού ημικυκλίου που έχει ακτίνα 3, το εμβαδόν του εσωτερικού ημικυκλίου , που έχει ακτίνα 2. Έχουμε :

$$\text{Εμβαδόν εξωτ. ημικ.} = 1,57 \cdot \rho^2 = 1,57 \cdot 3^2 = 1,57 \cdot 9 = 14,13$$

$$\text{Εμβαδόν εσωτ. ημικ.} = 1,57 \cdot \rho^2 = 1,57 \cdot 2^2 = 1,57 \cdot 4 = 6,28$$

Επομένως το συνολικό εμβαδών των 7 τμημάτων (α) είναι:
 $14,13 - 6,28 = 7,85$. Άρα το εμβαδόν κάθε τμήματος (α) θα είναι
 $\frac{7,85}{7} \approx 1,12$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε το εμβαδόν του κάθε τμήματος (β). Δηλαδή θα αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του εξωτερικού ημικυκλίου που έχει ακτίνα 2, το εμβαδόν του εσωτερικού ημικυκλίου, που έχει ακτίνα 1. Έχουμε :

$$\text{Εμβαδόν εξωτ. ημικ.} = 1,57 \cdot \rho^2 = 1,57 \cdot 2^2 = 1,57 \cdot 4 = 6,28$$

$$\text{Εμβαδόν εσωτ. ημικ.} = 1,57 \cdot \rho^2 = 1,57 \cdot 1^2 = 1,57 \cdot 1 = 1,57$$

Επομένως το συνολικό εμβαδών των 4 τμημάτων (β) είναι:
 $6,28 - 1,57 = 4,71$. Άρα το εμβαδόν κάθε τμήματος (β) θα είναι
 $\frac{4,71}{4} \approx 1,17$

Άρα το εμβαδόν του τμήματος (β) είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τμήματος (α).

Θέμα 4ο

Η τηλεφωνική Εταιρεία ΥΡΑΤΙΑPHONE προσφέρει δύο προγράμματα για τη σχολική χρονιά 2009-2010 στους μαθητές που συμμετέχουν στο διαγωνισμό ΥΠΑΤΙΑ που διενεργεί το Παράρτημα της Ελλην. Μαθηματικής Εταιρείας της Ημαθίας για τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου. Τα προγράμματα ονομάζονται «2009» και «2010».

Το πρόγραμμα « 2009 » προσφέρει για τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς, 2009 δωρεάν μηνύματα Τα επιπλέον μηνύματα χρεώνονται 7 λεπτά το καθένα. Κάθε κλήση χρεώνεται προς 8 λεπτά.

Το πρόγραμμα «2010» προσφέρει 2010 δωρεάν κλήσεις, ενώ οι επιπλέον κλήσεις χρεώνονται προς 13 λεπτά κάθε μια. Κάθε μήνυμα χρεώνεται προς 7 λεπτά.

Ο Υπάτιος που συμμετέχει στο διαγωνισμό υπολογίζει ότι θα κάνει 2500 κλήσεις και θα στείλει 2500 μηνύματα. Ποιο πρόγραμμα του συμφέρει περισσότερο σύμφωνα με τους υπολογισμούς του;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Το πρόγραμμα «2009» για 2500 κλήσεις και 2500 μηνύματα θα έχει το εξής κόστος:

$$\text{Κόστος μηνυμάτων: } (2500 - 2009) \cdot 0,07 = 491 \cdot 0,07 = 34,37 \text{ €}$$

$$\text{Κόστος κλήσεων : } 2500 \cdot 0,08 = 200 \text{ € .}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα το συνολικό κόστος για το πρόγραμμα «2010» είναι :} \\ 34,37 + 200 = 234,37 \text{ €} \end{aligned}$$

Το πρόγραμμα «2010» για 2500 κλήσεις και 2500 μηνύματα θα έχει το εξής κόστος:

$$\text{Κόστος μηνυμάτων: } 2500 \cdot 0,07 = 175$$

$$\text{Κόστος κλήσεων : } (2500 - 2010) \cdot 0,13 = 490 \cdot 0,13 = 63,7$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα το συνολικό κόστος για το πρόγραμμα «2009» είναι :} \\ 175 + 63,7 = 238,7 \end{aligned}$$

Συνεπώς ο Υπάτιος θα πρέπει να επιλέξει το πρόγραμμα «2009».

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ**

**3^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα
Μαθηματικά
«Η ΥΠΑΤΙΑ»**



Σάββατο 30 Οκτωβρίου 2010

Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1ο

Γράφουμε τη λέξη ΥΠΑΤΙΑ ξανά και ξανά, τη μια δίπλα στην άλλη , χωρίς κενά , ώστε να σχηματιστεί η λέξη ΥΠΑΤΙΑΥΠΑΤΙΑΥΠΑΤΙΑΥΠΑΤΙΑ.....

Να προσδιορίσετε ποιο γράμμα βρίσκεται:

α) στη 10^η θέση

γ) στην 100^η θέση

β) στην 20^η θέση

δ) στη 2010^η θέση.

Λύση

- α)** Μετρώντας βρίσκουμε ότι στη $10^{\text{η}}$ θέση είναι το γράμμα Τ
Υπολογίζοντας: $10 = 6 \cdot 1 + 4$. Άρα το 4^{o} γράμμα της λέξης ΥΠΑΤΙΑ, δηλαδή το Τ.
- β)** Μετρώντας βρίσκουμε ότι στη $20^{\text{η}}$ θέση είναι το γράμμα Π
Υπολογίζοντας: $20 = 6 \cdot 3 + 2$. Άρα το 2^{o} γράμμα της λέξης ΥΠΑΤΙΑ, δηλαδή το Π.
- γ)** Υπολογίζοντας: $100 = 6 \cdot 16 + 4$ Άρα στην $100^{\text{η}}$ θέση βρίσκεται το 4^{o} γράμμα της λέξης ΥΠΑΤΙΑ, δηλαδή το Τ.
- δ)** Υπολογίζοντας: $2010 = 6 \cdot 335 + 0$ Άρα στην $100^{\text{η}}$ θέση βρίσκεται το τελευταίο γράμμα της λέξης ΥΠΑΤΙΑ, δηλαδή το Α.

Θέμα 2ο

Να βρεθεί ένας τετραψήφιος αριθμός αν γνωρίζουμε ότι διαιρείται ακριβώς δια 2 και δια 5, το άθροισμα των ψηφίων του είναι 3 και όταν διαιρεθεί δια 7 αφήνει υπόλοιπο 1

Λύση

Αφού ο ζητούμενος αριθμός διαιρείται ακριβώς δια 2 και δια 5 είναι πολλαπλάσιο του 10, δηλαδή το τελευταίο ψηφίο του είναι το 0.

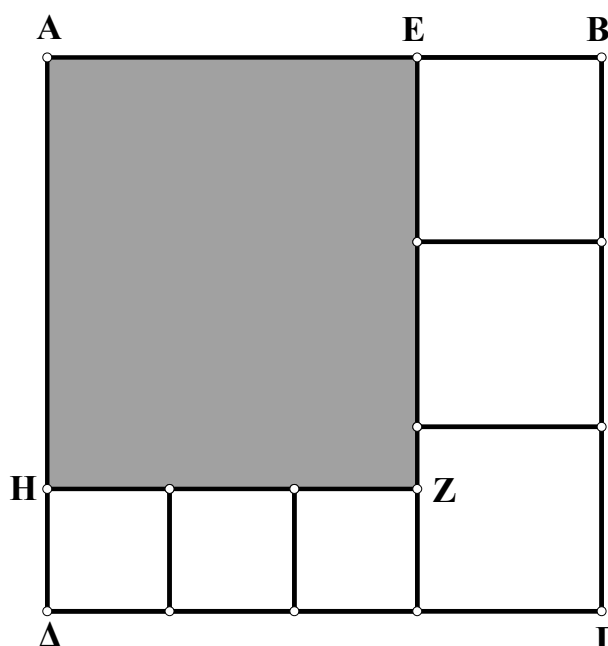
Οι τετραψήφιοι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 10 και το άθροισμα των ψηφίων τους είναι 3 είναι οι εξής: 3000, 2100, 2010, 1200, 1020, 1110

Από τους έξι αυτούς αριθμούς ο μοναδικός που αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 7 είναι ο **2010**.

Θέμα 3ο

Το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος έχει πλευρά 18 εκατοστά και αποτελείται από 6 τετράγωνα και ένα ορθογώνιο $AEZH$.

Να βρεθεί η περίμετρος του ορθογωνίου $AEZH$.



Λύση

Επειδή η πλευρά $B\Gamma$ είναι 18 εκατοστά και σε αυτή την πλευρά υπάρχουν ακριβώς τρία ίσα τετράγωνα το καθένα από αυτά έχει πλευρά ίση με $18 : 3 = 6$ εκατοστά. Επομένως η πλευρά AE είναι ίση με $18 - 6 = 12$ εκατοστά.

Το καθένα από τα άλλα τρία τετράγωνα έχει πλευρά ίση με $(18 - 6) : 3 = 12 : 3 = 4$ εκατοστά. Συνεπώς η πλευρά AH είναι ίση με $18 - 4 = 14$ εκατοστά.

Άρα η περίμετρος του ορθογωνίου $AEZH$ είναι ίση με $AE + EZ + ZH + HA = 12 + 14 + 12 + 14 = 52$ εκατοστά.

Θέμα 4ο

Πόσοι είναι οι ακέραιοι αριθμοί

α) από το 0 ως το 99 που περιέχουν το ψηφίο 7;

β) από το 100 ως το 199 που περιέχουν το ψηφίο 7;

γ) από το 1000 ως το 1999 που περιέχουν το ψηφίο 7;

δ) από το 0 ως το 2010 που περιέχουν το ψηφίο 7;

Λύση

α) Οι ακέραιοι αριθμοί από 0 ως το 99 που περιέχουν το ψηφίο 7 είναι οι: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97 και οι 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79.

Δηλαδή συνολικά $10 + 9 = \mathbf{19}$ αριθμοί.

β) Αντίστοιχα από το 100 ως το 199 είναι οι: 107, 117, 127, 137, 147, 157, 167, 177, 187, 197 και 170, 171, 175, 173, 174, 176, 178, 179.

Δηλαδή πάλι $10 + 9 = \mathbf{19}$ αριθμοί.

γ) Για να υπολογίσουμε το πλήθος των ζητούμενων αριθμών από το 1000 ως το 1999 εργαζόμαστε ως εξής:

Από το 1000 ως το 1099 είναι όσοι και από το 0 ως το 99, δηλαδή **19**.

Από το 1100 ως το 1199 είναι όσοι και από το 100 ως το 199, δηλαδή πάλι **19**.

Από το 1200 ως το 1299 οι αριθμοί είναι και εδώ **19**.

Από το 1300 ως το 1399 ομοίως **19**

Από το 1400 ως το 1499 ομοίως **19**

Από το 1500 ως το 1599 ομοίως **19**

Από το 1600 ως το 1699 ομοίως **19**

Από το 1700 ως το 1799 είναι όλοι, δηλαδή **100**

Από το 1800 ως το 1899 ομοίως **19**

Από το 1900 ως το 1999 ομοίως **19**

Συνεπώς στη χιλιάδα από 1000 ως το 1999 οι ζητούμενοι αριθμοί είναι : $19 \cdot 9 + 100 = \mathbf{271}$

δ) Εργαζόμενοι όπως και στο προηγούμενο ερώτημα βρίσκουμε ότι στη χιλιάδα από το 0 ως το 999 οι ζητούμενοι αριθμοί είναι : $19 \cdot 9 + 100 = \mathbf{271}$:

Από το 2000 ως το 2010 ο μοναδικός αριθμός που περιέχει το 7 είναι ο 2007.

Άρα συνολικά οι ακέραιοι αριθμοί από το 0 ως το 2010 που περιέχουν το ψηφίο 7 είναι: $271 + 271 + 1 = \mathbf{543}$

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ**

**4^{ος} Ημαθιώτικος
Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά
«Η ΥΠΑΤΙΑ»**



**Σάββατο 19 Νοεμβρίου 2011
Α΄ Γυμνασίου**

Θέμα 1ο

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \qquad B = \frac{2}{3} : \frac{1}{5} - 2 \qquad \Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot 6$$

β) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς A , B , και Γ είναι ο μεγαλύτερος και ποιος ο μικρότερος. (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

Λύση

$$\alpha) A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{6} + 1 = \frac{1}{6} + \frac{6}{6} = \frac{7}{6}$$

$$B = \frac{2}{3} : \frac{1}{5} - 2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} - 2 = \frac{10}{3} - \frac{6}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot 6 = \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6} \right) \cdot 6 = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$$

$$\beta) \text{ Έχουμε: } A = \frac{7}{6}, \quad B = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} \quad \text{και} \quad \Gamma = 1 = \frac{6}{6}$$

Επομένως ο μεγαλύτερος αριθμός είναι ο B και ο μικρότερος ο Γ .

Θέμα 2ο

Θωρούμε όλους τους ακέραιους αριθμούς από το 1 έως το 2011 (δηλ. $1, 2, 3, \dots, 2011$). Να βρείτε:

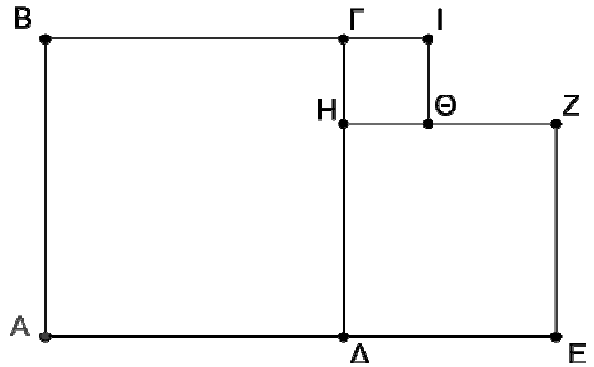
- α) πόσοι από αυτούς διαιρούνται δια του 2.
- β) πόσοι διαιρούνται δια του 5.
- γ) πόσοι διαιρούνται δια του 10.
- δ) πόσοι διαιρούνται δια του 2 και δεν διαιρούνται δια του 10.

Λύση

- α) Από τους δοσμένους αριθμούς διαιρούνται με το 2 οι : $2, 4, 6, \dots, 2010$ και είναι $2010:2 = 1005$
- β) Με το 5 διαιρούνται οι $5, 10, 15, \dots, 2010$ και είναι $2010:5 = 402$
- γ) Με το 10 διαιρούνται οι $10, 20, 30, \dots, 2010$ και είναι $2010:10 = 201$
- δ) Όσοι αριθμοί διαιρούνται δια του 10 υποχρεωτικά διαιρούνται και δια του 2, επομένως αυτοί που *διαιρούνται δια του 2 και δεν διαιρούνται δια του 10* είναι: $1005 - 201 = 804$.

Θέμα 3ο

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το σχεδιάγραμμα ενός μικρού σπιτιού, το οποίο αποτελείται από τρεις διαφορετικούς σε μέγεθος χώρους. Και οι τρεις χώροι έχουν σχήμα τετραγώνου.



Το μικρότερο τετράγωνο έχει εμβαδόν 4 τετραγωνικά μέτρα, ενώ το μεγαλύτερο έχει περίμετρο 28 μέτρα. Να υπολογίσετε :

α) Το συνολικό εμβαδόν του σπιτιού.

β) Την περίμετρο του σπιτιού.

Λύση

α) Το συνολικό εμβαδόν του σπιτιού προκύπτει από το άθροισμα των εμβαδών των τριών τετραγώνων.

Το **μεγαλύτερο** τετράγωνο έχει περίμετρο 28 μέτρα. Άρα η πλευρά του θα είναι $28:4=7$ μέτρα και το εμβαδόν του θα είναι $7 \times 7=49$ τετραγωνικά μέτρα.

Το **μικρότερο** τετράγωνο έχει εμβαδόν 4 τετραγωνικά μέτρα και επομένως η πλευρά του είναι 2 μέτρα.

Η πλευρά του τετραγώνου είναι:

$\Delta H = \Delta \Gamma - \Gamma H = 7 - 2 = 5$ μέτρα. Άρα το εμβαδόν του $\Delta E Z H$ είναι $5 \times 5 = 25$ τετραγωνικά μέτρα.

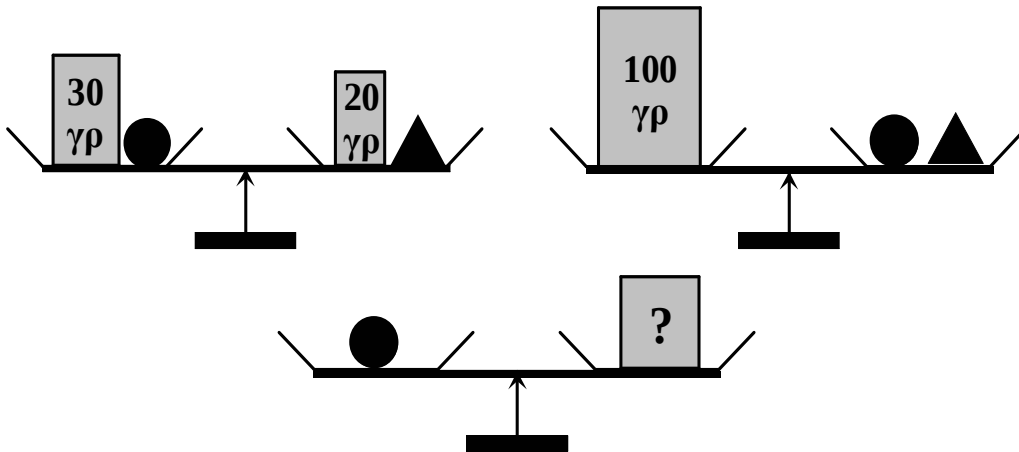
Επομένως το συνολικό εμβαδόν του σπιτιού είναι: $49 + 25 + 4 = 78$ τετραγωνικά μέτρα.

β) Η περίμετρος του σπιτιού είναι:

$AB + BG + GI + I\Theta + \Theta Z + ZE + E\Delta + \Delta A = 7 + 7 + 2 + 2 + (5 - 2) + 5 + 5 + 7 = 38$ μέτρα.

Θέμα 4ο

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τρεις ζυγαριές που ισορροπούν. Να βρείτε, ποιο είναι το άγνωστο βάρος στην τρίτη ζυγαριά. (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)



Λύση

Από την πρώτη ζυγαριά προκύπτει ότι το βάρος της πυραμίδας είναι κατά 10 γρ. περισσότερο από το βάρος της σφαίρας.

Αν επομένως στη δεύτερη ζυγαριά αντικαταστήσουμε τη πυραμίδα με μια σφαίρα και 10 γρ. θα έχουμε από το ένα μέρος της ζυγαριάς 100 γρ. και από το άλλο δυο σφαίρες και 10 γρ. Δηλαδή οι δυο σφαίρες θα έχουν βάρος 90 γρ. Άρα μια σφαίρα έχει βάρος 45 γρ.

Συνεπώς το άγνωστο βάρος στην τρίτη ζυγαριά είναι 45 γρ..

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ**

**5^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά
«Η ΥΠΑΤΙΑ»**



Σάββατο 20 Οκτωβρίου 2012

Α΄ Γυμνασίου

Απαντήσεις στα Θέματα

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = 85 \cdot 12 + 9 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 + 50) + 8 - 6$$

$$B = \frac{45^2 - 12}{3^2 - 2^3}$$

β) Ποιο από τα κλάσματα $\frac{A}{B}$ και $\frac{B}{A}$ είναι μεγαλύτερο;

Απάντηση

α)

$$A = 85 \cdot 12 + 9 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 + 50) + 8 - 6$$

$$A = 1020 + 9 \cdot (60 + 50) + 8 - 6$$

$$A = 1020 + 9 \cdot 110 + 8 - 6$$

$$A = 1020 + 990 + 8 - 6$$

$$A = 2010 + 8 - 6$$

$$A = 2018 - 6$$

$$A = 2012$$

$$B = \frac{45^2 - 12}{3^2 - 2^3}$$

$$B = \frac{2025 - 12}{9 - 8}$$

$$B = \frac{2013}{1}$$

$$B = 2013$$

β) Το κλάσμα $\frac{B}{A} = \frac{2013}{2012}$ είναι μεγαλύτερο της μονάδας, επειδή ο αριθμητής του είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή, ενώ το κλάσμα $\frac{A}{B} = \frac{2012}{2013}$ είναι μικρότερο της μονάδας, επειδή ο αριθμητής είναι μικρότερος του παρονομαστή. Επομένως το κλάσμα $\frac{B}{A}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{A}{B}$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Ο καθηγητής ενός σχολείου ζήτησε από τους μαθητές του να κάνουν επανάληψη όλες τις σελίδες από την 20^η μέχρι και την 73^η.

- α)** Να βρείτε πόσες σελίδες πρέπει να διαβάσουν οι μαθητές.
- β)** Αν από τις σελίδες αυτές εξαιρέσουμε όσες διαιρούνται δια 5, πόσες σελίδες απομένουν για διάβασμα;
- γ)** Σε ολόκληρο το βιβλίο, στις σελίδες που είναι πρώτοι αριθμοί υπάρχουν σημαντικές ερωτήσεις. Πόσες και ποιες είναι οι σελίδες αυτές από την 32^η σελίδα ως και την 40^η;
- δ)** Ο Νίκος έσκισε ένα φύλλο του βιβλίου. Το άθροισμα των σελίδων του φύλλου αυτού είναι 99. Να βρείτε τις σελίδες που κόπηκαν.

Απάντηση

α) Για να βρούμε το πλήθος των σελίδων που πρέπει να διαβάσουν οι μαθητές, πρέπει να από τις 73 πρώτες σελίδες να αφαιρέσουμε όσες δεν θα διαβάσουν, δηλαδή πρέπει να αφαιρέσουμε 19 σελίδες. Έτσι το πλήθος των σελίδων που πρέπει να διαβάσουν οι μαθητές είναι $73 - 19 = 54$.

β) Οι αριθμοί που διαιρούνται δια 5 είναι αυτοί που λήγουν σε 0 ή 5. Έτσι, από το 20 μέχρι το 73 υπάρχουν οι εξής 11 αριθμοί: 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65 και 70. Άρα οι μαθητές πρέπει να διαβάσουν $54 - 11 = 43$ σελίδες.

γ) Εδώ πρέπει να βρούμε τους πρώτους αριθμούς από το 32 μέχρι και το 40. Οι άρτιοι αριθμοί 32, 34, 36, 38, 40 δεν είναι πρώτοι αφού διαιρούνται δια 2. Ο 33 και ο 39 διαιρούνται με το 3, άρα δεν είναι πρώτοι, ενώ ο 35 διαιρείται με το 5, άρα δεν είναι

πρώτος. Μένει μόνο ο 37, ο οποίος είναι πρώτος αριθμός. Άρα υπάρχει μόνο μία σελίδα, η 37.

δ) Οι σελίδες που σκίστηκαν είναι διαδοχικοί αριθμοί. Ο αριθμός της μεγαλύτερης σελίδα είναι ίσος με τον αριθμό της μικρότερης συν 1. Αν λοιπόν από το 99 αφαιρέσουμε 1 βρίσκουμε το διπλάσιο του αριθμού της μικρότερης σελίδας. Άρα ο αριθμός της μικρότερης σελίδας είναι ο $(99 - 1):2 = 49$. Επομένως οι σελίδες που σκίστηκαν είναι οι 49 και 50.

ΘΕΜΑ 3^ο

Τρεις φίλοι ο Ανδρέας, ο Βασίλης και ο Γιάννης έχουν συνολικά 178 ευρώ. Αν ο Βασίλης δώσει στον Ανδρέα 4 ευρώ, τότε ο Ανδρέας και ο Βασίλης θα έχουν το ίδιο ποσό χρημάτων. Αν όμως δε γίνει αυτό και ο Γιάννης δώσει στο Βασίλη 6 ευρώ, τότε ο Βασίλης και ο Γιάννης θα έχουν το ίδιο ποσό.

α) Πόσα επιπλέον χρήματα έχει ο Βασίλης από τον Ανδρέα;

β) Πόσα επιπλέον χρήματα έχει ο Γιάννης από τον Ανδρέα;

γ) Πόσα χρήματα έχει καθένας;

Απάντηση

α) Ο Βασίλης έχει 8 ευρώ περισσότερα από τον Ανδρέα, αφού δίνοντάς του 4 ευρώ, αυτός θα έχει τώρα 4 ευρώ λιγότερα ενώ ο Ανδρέας 4 ευρώ περισσότερα και στο τέλος θα έχουν το ίδιο ποσό .

β) Με το ίδιο σκεπτικό ο Γιάννης έχει 12 ευρώ περισσότερα από το Βασίλη. Επειδή ο Βασίλης έχει 8 ευρώ περισσότερα από τον Ανδρέα, ο Γιάννης έχει $12 + 8 = 20$ ευρώ περισσότερα από τον Ανδρέα.

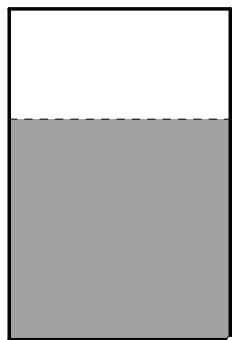
γ) Αν ο Βασίλης χάσει 8 ευρώ και ο Γιάννης 20 ευρώ, τότε και οι 3 φίλοι θα έχουν το ίδιο ποσό. Σε αυτή την περίπτωση και οι τρεις μαζί θα έχουν $178 - 28 = 150$ ευρώ. Άρα ο καθένας θα έχει 50 ευρώ. Έτσι, ο Ανδρέας έχει 50 ευρώ, ο Βασίλης $50 + 8 = 58$ ευρώ και ο Γιάννης $50 + 20 = 70$ ευρώ.

ΘΕΜΑ 4^ο

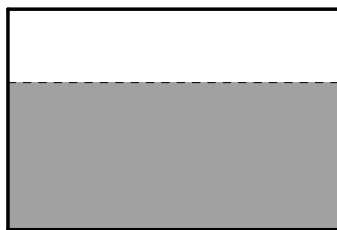
Ένα ενυδρείο, από την πλευρά που το βλέπουμε, έχει σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις 30 εκατ. πλάτος και 40 εκατ. ύψος (σχήμα 1). Το ενυδρείο είναι γεμάτο με νερό κατά τα $\frac{2}{3}$ του ύψους του.

α) Αν πλαγιάσουμε το ενυδρείο όπως φαίνεται στο σχήμα 2 να βρείτε σε ποιο ύψος θα φτάσει η στάθμη του.

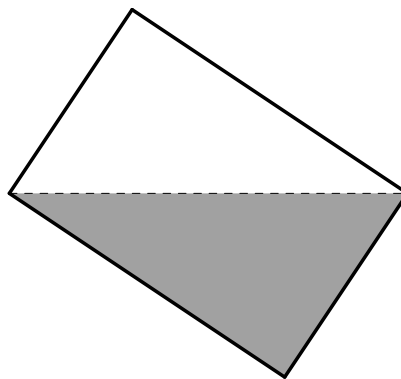
β) Περιστρέφουμε το ενυδρείο ώστε να βλέπουμε το ίδιο ορθογώνιο. Να εξετάσετε αν η στάθμη του νερού μπορεί να γίνει ποτέ η διαγώνιος του ορθογωνίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Απάντηση

α) Η επιφάνεια ολόκληρου του ορθογωνίου που βλέπουμε στο σχήμα 1, είναι $30 \cdot 40 = 1200$ τετρ. εκατ.. Το ενυδρείο είναι γεμάτο με νερό κατά τα $\frac{2}{3}$ του ύψους του. Άρα η επιφάνεια του νερού που βλέπουμε στο σχήμα 1 είναι $\frac{2}{3} \cdot 30 \cdot 40 = \frac{2400}{3} = 800$ τετρ. εκατ.. Στο σχήμα 2, η βάση του ορθογωνίου είναι 40 εκατ..

Επομένως το ύψος της στάθμης του νερού θα είναι $800 : 40 = 20$ εκατ.

β) Για να γίνει η στάθμη του νερού η διαγώνιος του σχήματος 3, πρέπει το νερό μέσα στο ενυδρείο να είναι το μισό της χωρητικότητας του ενυδρείου. Στο πρόβλημα όμως δόθηκε ότι το νερό του ενυδρείου είναι τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού χώρου του ενυδρείου. Επομένως κάτι τέτοιο δεν μπορεί να γίνει.

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ**

**6^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά
«Η ΥΠΑΤΙΑ»**



Σάββατο 19 Οκτωβρίου 2013

Α΄ Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) : (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + 3 + 2 \cdot 10^3$

β) Να βρεθεί το 30% του αριθμού $B = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 10^2$

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $123,402 \cdot 10^2$ και $1234,019 \cdot 10$

δ) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι μεγαλύτερος;

$124,06 \cdot 10^{28}$ και $2486 \cdot 10^{26}$

Απάντηση

α) μονάδες: 2

$$A = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) : (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + 3 + 2 \cdot 10^3$$

$$A = \frac{5}{6} : \frac{1}{12} + 3 + 2 \cdot 1000$$

$$A = \frac{5}{6} \cdot 12 + 3 + 2000$$

$$A = 10 + 2003$$

$$A = 2013$$

β) μονάδες: 1

$$30\% \cdot B = 30\% \cdot (2^3 \cdot 3^2 \cdot 10^2) = \frac{30}{100} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 100 = 30 \cdot 8 \cdot 9 = 2160$$

γ) μονάδες: 1

$$123,402 \cdot 10^2 = 12340,2$$

$$1234,019 \cdot 10 = 12340,19$$

Άρα

$$12340,2 = 12340,20 > 12340,19$$

δ) μονάδες: 1

$$124,06 \cdot 10^{28} > 2486 \cdot 10^{26}$$

$$\text{αφού } 124,06 \cdot 10^{28} = 12406 \cdot 10^{26}$$

Δεν απαιτείται δικαιολόγηση

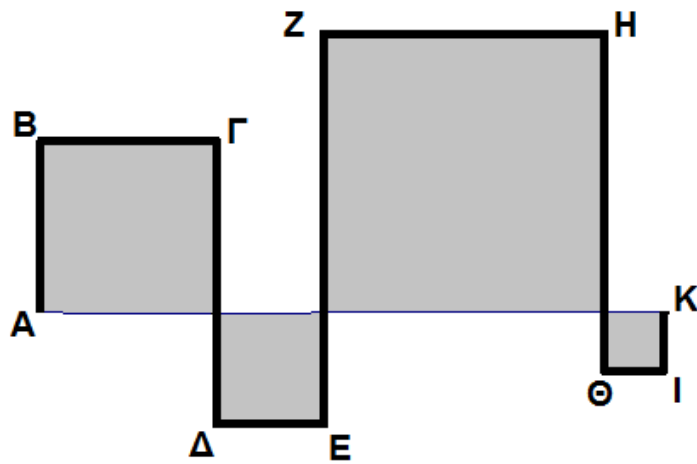
ΘΕΜΑ 2^ο

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε το άθροισμα 3 οποιωνδήποτε αριθμών που βρίσκονται σε διαδοχικά κελιά να είναι ίσο με 10. (σε κάθε κελί βρίσκεται ένας αριθμός).

3		5					
---	--	---	--	--	--	--	--

β) Το κουδούνι του σχολείου χτυπάει κάθε πρωί στις 8:30. Μένουμε στο σχολείο 355 λεπτά. Τι ώρα σχολάμε;

γ) Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν 4 τετράγωνα. Αν το μήκος της διαδρομής ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ είναι 18 μέτρα, να βρείτε το μήκος της διαδρομής ΑΚ.



Απάντηση

α) μονάδες: 1

3	2	5	3	2	5	3	2
---	---	---	---	---	---	---	---

β) μονάδες: 2

Εδώ ο μαθητής δεν θα δώσει απάντηση αν δουλέψει κάνοντας τη διαίρεση του 355 δια 60 και προσθέσει μετά την υποδιαστολή το μηδενικό (δεκαδικό σύστημα), για να βρει κατά τη γνώμη του με ακρίβεια το αποτέλεσμα, γιατί η ώρα δουλεύει με το εξηκονταδικό σύστημα.

Αφού τα 360 λεπτά είναι 6 ώρες, τα 355 είναι 6 ώρες παρά 5 λεπτά. $8:30+6=14:30$, άρα φεύγουμε από το Σχολείο στις 2:25

γ) μονάδες: 2

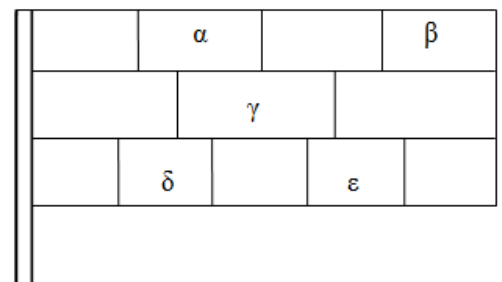
Η ζητούμενη διαδρομή ΑΚ είναι το $\frac{1}{3}$ της δοθείσας, άρα $18:3=6$ μέτρα

ΘΕΜΑ 3^ο

Μία σημαία έχει σχήμα ορθογώνιο και χωρίζεται σε τρεις ίσες λωρίδες. Κάθε λωρίδα χωρίζεται σε ίσα μέρη όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τι μέρος της επιφάνειας της σημαίας αποτελεί το ορθογώνιο α.

β) Να βρείτε τι μέρος της επιφάνειας της σημαίας αποτελούν συνολικά τα ορθογώνια α, β, γ, δ και ε.



Απάντηση

α) μονάδες: 2

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \text{ της επιφ. της σημαίας}$$

β) μονάδες: 3

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{111}{270} \text{ της επιφ. της σημαίας.}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις ΑΒ=60 μέτρα και ΑΔ=40 μέτρα.

α) Να βρεθούν η περίμετρος και το εμβαδόν του.

β) Αν η πλευρά ΑΒ αυξηθεί κατά 20% και η πλευρά ΑΔ αυξηθεί κατά 20 μέτρα, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου.

γ) Αν τώρα στο νέο ορθογώνιο που δημιουργήθηκε μετά τις αυξήσεις του ερωτήματος β) μειώσουμε τη μεγαλύτερη διάσταση κατά 20% και τη μικρότερη κατά 20 μέτρα θα πάρουμε το ορθογώνιο που είχαμε αρχικά; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση

α) μονάδες: 0,5

$$\Pi = 2 \cdot (60 + 40) = 200 \text{ μέτρα (μονάδα 0,25)} \quad E = 60 \cdot 40 = 2400 \text{ τετραγωνικά μέτρα (μονάδα 0,25)}$$

β) μονάδες: 2,5

$$AB = 60 + 20\% \cdot 60 = 60 + 12 = 72 \text{ μέτρα (μονάδα 1,5)}$$

$$AD = 40 + 20 = 60 \text{ μέτρα (μονάδα 0,5)}$$

$$\Pi = 2 \cdot (72 + 60) = 2 \cdot 132 = 264 \text{ μέτρα (μονάδα 0,25)}$$

$$E = 72 \cdot 60 = 4320 \text{ τετραγωνικά μέτρα (μονάδα 0,25)}$$

γ) μονάδες: 2

Όχι, γιατί η μικρότερη θα επανέλθει αφού θα γίνει πάλι $60 - 20 = 40$ μέτρα, αλλά η μεγαλύτερη θα κατέβει κάτω από 60 μέτρα αφού το ποσοστό 20% θα εφαρμοστεί σε μεγαλύτερο αριθμό:

$$\text{Συγκεκριμένα η μεγαλύτερη διάσταση θα γίνει: } 72 - 20\% \cdot 72 = 72 - 14,4 = 57,6 \text{ μέτρα}$$

ΚΑΛΗ ΔΙΟΡΘΩΣΗ!



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

7^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Σάββατο 1 Νοεμβρίου 2014

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται οι αριθμοί $A = (6^2 - 4 \cdot 3 + 1) : 5^2 + 3 \cdot 2^3$ και $B = 4^2 \cdot (5^2 - 6 \cdot 4)^{2014} - 2 \cdot 3^1$

α. Να αποδείξετε ότι $A = 25$ και $B = 10$.

β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους τα κλάσματα $\frac{B+2004}{A+1990}$ και $\frac{A+1990}{B+2004}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α .

$$A = (6^2 - 4 \cdot 3 + 1) : 5^2 + 3 \cdot 2^3$$

$$A = (36 - 12 + 1) : 25 + 3 \cdot 8$$

$$A = 25 : 25 + 24$$

$$A = 1 + 24$$

$$A = 25$$

$$B = 4^2 \cdot (5^2 - 6 \cdot 4)^{2014} - 2 \cdot 3^1$$

$$B = 16 \cdot (25 - 24)^{2014} - 6$$

$$B = 16 \cdot 1 - 6$$

$$B = 10$$

β.

$$\frac{B+2004}{A+1990} = \frac{10+2004}{25+1990} = \frac{2014}{2015} < 1 \quad \text{και} \quad \frac{A+1990}{B+2004} = \frac{25+1990}{10+2004} = \frac{2015}{2014} > 1$$

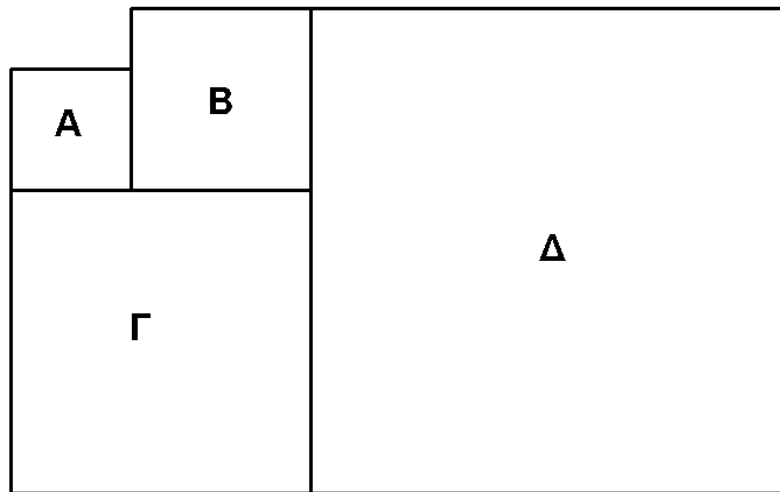
$$\text{Επομένως, } \frac{B+2004}{A+1990} < \frac{A+1990}{B+2004}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Τα παρακάτω σχήματα Α, Β, Γ και Δ είναι τετράγωνα. Η περίμετρος του τετραγώνου Α είναι 16 εκατοστά και η περίμετρος του τετραγώνου Β είναι 24 εκατοστά.

α. Να δείξετε ότι η περίμετρος του τετραγώνου Γ είναι 40 εκατοστά.

- β. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου Δ είναι 256 τετραγωνικά εκατοστά.
- γ. Αν χρησιμοποιήσουμε όλους τους παραπάνω αριθμούς 16, 24, 40 και 256 τουλάχιστον μία φορά τον καθένα, μπορούμε μόνο με την πράξη της πρόσθεσης να βγάλουμε άθροισμα 2015;



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- α. Το τετράγωνο Α έχει περίμετρο 16 εκ., άρα η πλευρά του θα είναι $16:4=4$ εκ.
Το τετράγωνο Β έχει περίμετρο 24 εκ., άρα η πλευρά του θα είναι $24:4=6$ εκ.
Άρα η πλευρά του τετραγώνου Γ είναι $4+6=10$ εκ. και η περιμέτρός του θα είναι $4 \times 10=40$ εκ.
- β. Η πλευρά του τετραγώνου Δ είναι $10+6=16$ εκ. και το εμβαδόν του είναι $16 \times 16=256$ τ.εκ.
- γ. Οι αριθμοί 16, 24, 40 και 256 είναι όλοι άρτιοι, επομένως το άθροισμα τους **δεν** μπορεί να μας δώσει έναν περιττό αριθμό.

ΘΕΜΑ 3^ο

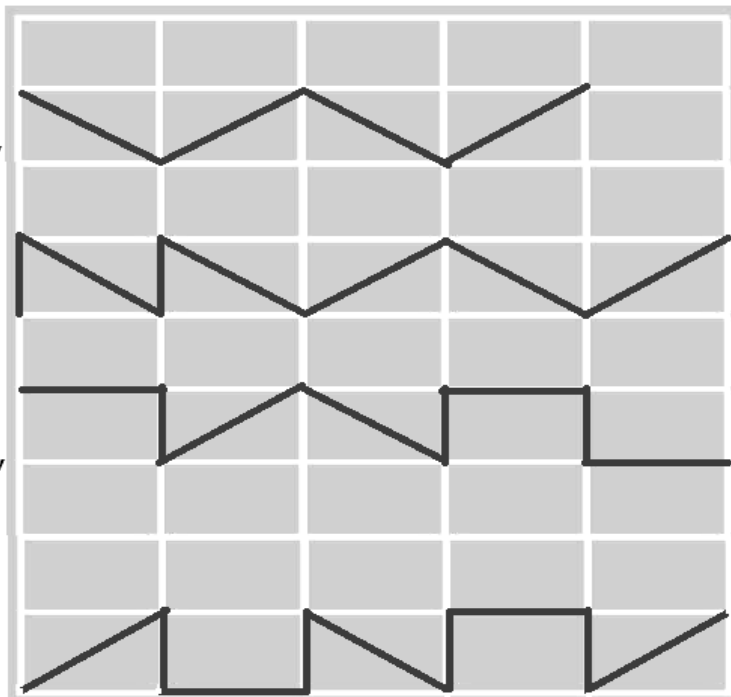
Στο πλακόστρωτο της αυλής μας, που αποτελείται από πλακάκια που έχουν σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τέσσερα σαλιγκάρια αφήσανε τα ίχνη τους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα με την έντονη μαύρη γραμμή. Παρατηρώντας το σχήμα και ξέροντας ότι το **σαλιγκάρι α** έκανε διαδρομή 20 εκατοστών, το **σαλιγκάρι β** 31 εκατοστών και το **σαλιγκάρι γ** επίσης 31 εκατοστών, να βρείτε πόσα εκατοστά είναι η διαδρομή του **σαλιγκαριού δ**.

Σαλιγκάρι α
διαδρομή 20 εκατοστών

Σαλιγκάρι β
διαδρομή 31 εκατοστών

Σαλιγκάρι γ
διαδρομή 31 εκατοστών

Σαλιγκάρι δ
Πόσων εκατ. είναι η
διαδρομή του;



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για το **σαλιγκάρι α** : το μήκος της διαγώνιας γραμμής είναι $20:4=5\text{εκ.}$

Για το **σαλιγκάρι β**: το μήκος της κάθετης γραμμής είναι $(31-5 \times 5):2=6:2=3\text{εκ.}$

Για το **σαλιγκάρι γ**: το μήκος της οριζόντιας γραμμής είναι $(31-2 \times 5-3 \times 3):3=12:3=4\text{εκ.}$

Επομένως, η διαδρομή του **σαλιγκαριού δ** είναι: $3 \times 5 + 4 \times 3 + 2 \times 4 = 15 + 12 + 8 = 35\text{εκ.}$

ΘΕΜΑ 4^ο

Ένα ζαχαροπλαστείο της Βέροιας ετοίμασε ταψάκια με ρεβανί. Επισκέπτες από την Πιερία και την Κοζάνη αγόρασαν το $\frac{1}{4}$ από αυτά ενώ επισκέπτες από τη Φλώρινα και τον Έβρο το $\frac{1}{6}$ από τα υπόλοιπα. Αν το ζαχαροπλαστείο έχει τώρα 15 ταψάκια, πόσα ταψάκια ετοίμασε;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α' τρόπος

Τα 15 αυτά ταψάκια αποτελούν τα $\frac{5}{6}$ από αυτά που έμειναν, επομένως:

Τα $\frac{5}{6}$ είναι 15 ταψάκια

Το $\frac{1}{6}$ είναι $15:5=3$ ταψάκια

Τα $\frac{6}{6}$ είναι $6 \times 3=18$ ταψάκια

Τα 18 αυτά ταψάκια αποτελούν τα $\frac{3}{4}$ από τα συνολικά ταψάκια, επομένως:

Τα $\frac{3}{4}$ είναι 18 ταψάκια

Το $\frac{1}{4}$ είναι $18:3=6$ ταψάκια

Τα $\frac{4}{4}$ είναι $4 \times 6=24$ ταψάκια

Τα συνολικά ταψάκια είναι 24.

β' τρόπος

Επισκέπτες από την Πιερία και την Κοζάνη αγόρασαν το $\frac{1}{4}$ των ταψιών που είχε αρχικά το μαγαζί, επομένως έμειναν τα $\frac{3}{4}$. Οι επισκέπτες από τη Φλώρινα και τον Έβρο αγόρασαν

το $\frac{1}{6}$ από τα υπόλοιπα, δηλαδή το $\frac{1}{6}$ των $\frac{3}{4}$, άρα το $\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ των αρχικών ταψιών.

Τελικά αγοράστηκε το $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ των αρχικών ταψιών και έμειναν τελικά τα $\frac{5}{8}$.

Τα 15 ταψάκια αποτελούν τα $\frac{5}{8}$ των αρχικών ταψιών, άρα:

Τα $\frac{5}{8}$ είναι 15 ταψάκια

Το $\frac{1}{8}$ είναι $15:5=3$ ταψάκια

Τα $\frac{8}{8}$ είναι $3 \times 8=24$ ταψάκια.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

8^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός

στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Σάββατο 14 Νοεμβρίου 2015

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

$$\begin{aligned} A &= (6^2 + 1 - 7 \cdot 2 \div 2)^{2015} + (5^2 - 2^3 + 3) \div (4^2 - 6 \cdot 2) = \\ &= (36 + 1 - 36)^{2015} + (25 - 8 + 3) \div (16 - 12) = \\ &= 1^{2015} + (17 + 3) \div 4 = 1 + 20 \div 4 = 1 + 5 = 6 \end{aligned}$$

$$X = 6 \cdot 335 + 5 = 2010 + 5 = 2015$$

Θέμα 2^ο

A) Περίμετρος: $\Pi_1 = 4 \cdot 15 = 60 \text{ cm}$

Εμβαδόν: $E_1 = 15 \cdot 15 = 225 \text{ cm}^2$

B) Περίμετρος: $\Pi_2 = 29 + 29 + 15 + 15 = 88 \text{ cm}$

Εμβαδόν: $E_2 = 1 + 2 \cdot (3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15) = 1 + 63 \cdot 2 = 127 \text{ cm}^2$

Θέμα 3^ο

Αφού το κρεμαστό αντικείμενο ισορροπεί, άρα θα έχουμε:

$$\alpha + \beta + \gamma = 80 \quad \text{και} \quad \delta + \varepsilon + \zeta + \eta = 80$$

Στον αριστερό κλάδο λόγω ισορροπίας θα έχουμε: $\alpha + \beta = 40$ και $\gamma = 40$
και επιπλέον $\alpha = \beta = 20$

Στον δεξιό κλάδο όμοια λόγω ισορροπίας θα έχουμε :

$$\delta = 40 \quad \text{και} \quad \varepsilon + \zeta + \eta = 40, \quad \varepsilon + \zeta = 20 \quad \text{και} \quad \eta = 20 \quad \text{και} \quad \varepsilon = \zeta = 10$$

Θέμα 4^ο

α) Έστω $n, n+1, n+2$ οι τρεις πρώτοι διαδοχικοί αριθμοί. Θα έχουμε:

$$n + n + 1 + n + 2 = 27 \Leftrightarrow 3n + 3 = 27 \Leftrightarrow 3n = 24 \Leftrightarrow n = 8$$

Επομένως οι τρεις πρώτοι διαδοχικοί αριθμοί είναι: 8, 9, 10. Άρα οι τρεις επόμενοι είναι: 11, 12, 13 και το άθροισμά τους είναι: $11 + 12 + 13 = 36$

β) Ο δεκαψήφιος αριθμός είναι: 8910111213

Δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσιο του 5 γιατί το τελευταίο του ψηφίο δεν είναι 0 ή 5.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

9^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Σάββατο 12 Νοεμβρίου 2016

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}{6\frac{2}{3}}$ και $B = \frac{(1^{2016} + 2^2)^2 - 4^2}{3^2} + \frac{1}{10} - \frac{2}{5}$

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων i) A (2μ) και ii) B (2μ)

β. Αν $A = \frac{9}{20}$ και $B = \frac{7}{10}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{B}{A}$ και $2 \cdot B$. (1μ)

Απάντηση

α.

$$\text{i) } A = \frac{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}{6\frac{2}{3}} = \frac{\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\right) : \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right)}{\frac{20}{3}} = \frac{\frac{3}{6} : \frac{1}{6}}{\frac{20}{3}} = \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{6}{1}}{\frac{20}{3}} = \frac{3}{\frac{20}{3}} = \frac{9}{20}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } B &= \frac{(1^{2016} + 2^2)^2 - 4^2}{3^2} + \frac{1}{10} - \frac{2}{5} = \frac{(1 + 4)^2 - 4^2}{3^2} + \frac{1}{10} - \frac{2}{5} = \frac{5^2 - 4^2}{3^2} + \frac{1}{10} - \frac{2}{5} = \frac{25 - 16}{9} + \frac{1}{10} - \frac{2}{5} = 1 + \frac{1}{10} - \frac{2}{5} \\ &= \frac{10}{10} + \frac{1}{10} - \frac{4}{10} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

$$\text{β. } \frac{B}{A} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{20}} = \frac{140}{90} = \frac{14}{9} \text{ και } 2 \cdot B = 2 \cdot \frac{7}{10} = \frac{14}{10} . \text{ Άρα } \frac{B}{A} > 2 \cdot B$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Η Λυδία έχει μία εργασία στην Άλγεβρα από όπου έχει λύσει τα $\frac{4}{9}$ των ασκήσεων και της μένουν 20

άλυτες ασκήσεις. Ο συμμαθητής της ο Αριστοτέλης έχει μία εργασία με 30 ασκήσεις στη Γεωμετρία.

α. Πόσες είναι οι ασκήσεις της Λυδίας; (3μ)

β. Τι μέρος των ασκήσεων του πρέπει να λύσει ο Αριστοτέλης ώστε να έχει τον ίδιο αριθμό λυμένων ασκήσεων με την Λυδία; (2μ)

Απαντήσεις

α. Τα $\frac{5}{9}$ των ασκήσεων είναι 20

Τα $\frac{1}{9}$ των ασκήσεων είναι $20:5=4$

Τα $\frac{9}{9}$ των ασκήσεων είναι $4 \cdot 9=36$

β. Επειδή της έμειναν άλυτες 20 ασκήσεις η Λυδία έλυσε $36-20 = 16$ ασκήσεις.

Ο Αριστοτέλης πρέπει να λύσει και αυτός 16 ασκήσεις δηλαδή τα $\frac{16}{30} = \frac{8}{15}$ των ασκήσεων του.

Η Λυδία έχει 36 ασκήσεις στην Άλγεβρα

ΘΕΜΑ 3^ο

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ στο παρακάτω σχήμα είναι ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi=32$ m, $AB=x$ m και $B\Gamma=6$ m.

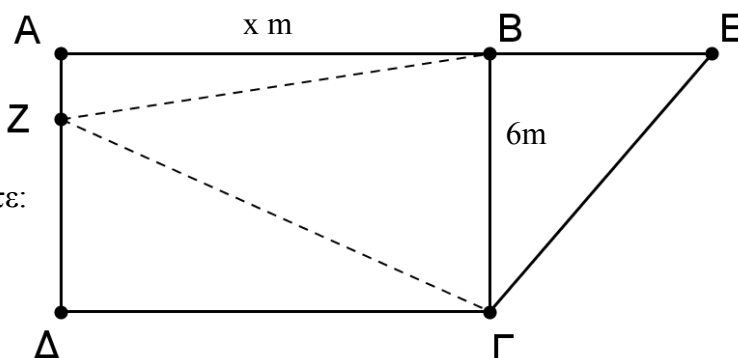
α. Να αποδείξετε ότι $x=10$ m. (1μ)

β. Να βρείτε το εμβαδό του ΒΖΓ (1μ)

γ. Αν το ΒΕ είναι στην προέκταση του ΑΒ και ίσο με το μισό του ΑΒ και $AZ = \frac{1}{5} BE$ τότε:

γ1) Να βρείτε το εμβαδό του ΑΕΓΔ (2μ)

γ2) Να βρείτε το εμβαδό του ΔΖΓ (1μ)



Να μεταφέρετε το σχήμα στο φύλλο απαντήσεων.

Απαντήσεις

α. $x+6+x+6=32$

$$2x+12=32$$

$$2x=20$$

$$x=10 \text{ m}$$

β. $(BZ\Gamma) = \frac{6 \cdot 10}{2} = 30 \text{ m}^2$

γ. $BE=5\text{m}$

$$AZ = \frac{1}{5} BE = 1\text{m}$$

$$\Delta Z = 6 - 1 = 5\text{m}$$

γ1) $(A\epsilon\Gamma\Delta) = (A\text{B}\Gamma\Delta) + (B\epsilon\Gamma)$

$$= 10 \cdot 6 + \frac{5 \cdot 6}{2}$$

$$= 60 + 15$$

$$= 75 \text{ m}^2$$

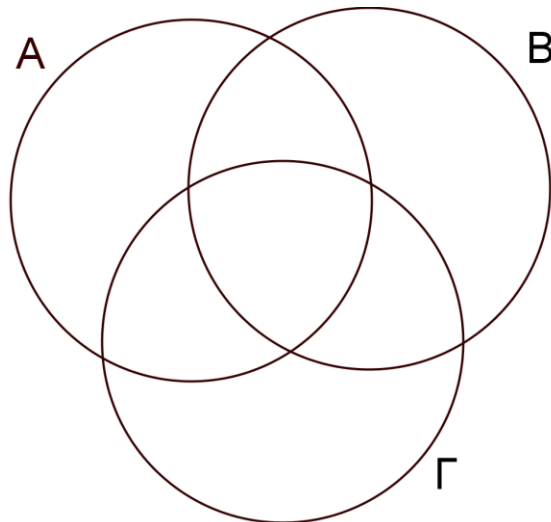
γ2) $(\Delta Z\Gamma) = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25 \text{ m}^2$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι αριθμοί

130 , 162 , 200 , 351 , 360 , 445 , 513 , 735 , 842 , 999

α. Να τοποθετήσετε τους παραπάνω αριθμούς στους κύκλους **A** , **B** , **Γ** που σας δίνονται στο σχήμα που ακολουθεί, έτσι ώστε οι αριθμοί στον κύκλο **A** να διαιρούνται με το **2**, οι αριθμοί στον κύκλο **B** να διαιρούνται με το **3** και οι αριθμοί στον κύκλο **Γ** να διαιρούνται με το **5**.



Να μεταφέρετε το σχήμα στο φύλλο απαντήσεων.

(2μ)

β. Αν **α** είναι ένας από τους παραπάνω αριθμούς που διαιρείται συγχρόνως και με το **2** και με το **3** και με το **5**, να τον αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

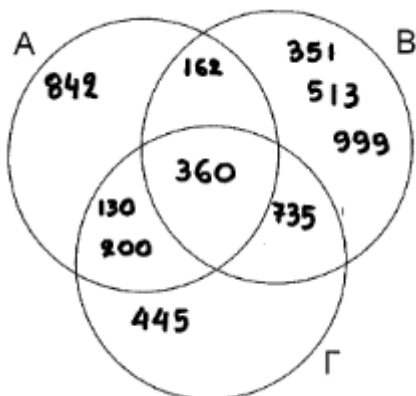
(1μ)

γ. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό **β** ώστε αν πολλαπλασιαστεί με τον **α** να προκύψει ο κύβος ενός φυσικού αριθμού **γ** , δηλαδή $\gamma^3 = \alpha \cdot \beta$.

(2μ)

Απαντήσεις

α.



β. Ο αριθμός **α** που διαιρείται συγχρόνως και με το **2** και με το **3** και με το **5** είναι ο **360**.

$$\text{Άρα } 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

γ. Επειδή $\gamma^3 = \alpha \cdot \beta = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ πρέπει $\beta = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$

$$\text{ώστε } \gamma^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \cdot 30 \cdot 30 = 30^3$$



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

10^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Σάββατο 11 Νοεμβρίου 2017

Α' Γυμνασίου

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται η παράσταση $A = \left[\left(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7} \right) \right] : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right)^2$

α) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης Α. (2μ)

β) Δίνονται οι αριθμοί $B = (11,2 - 9,9)^2 - (2,7 - 1,5)^2$ και $\Gamma = \frac{1}{4}$. Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος;

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (1,5μ)

γ) Πόσες φορές είναι μεγαλύτερος ο Α από τον Γ; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (1,5μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α)) Είναι

$$A = \left[\left(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7} \right) \right] : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right)^2$$

$$A = \left[\left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2} \right) \cdot \left(\frac{7}{7} - \frac{1}{7} \right) \right] : \left(\frac{2}{8} - \frac{1}{8} \right)^2$$

$$A = \left[\left(\frac{14}{6} + \frac{21}{6} \right) \cdot \frac{6}{7} \right] : \left(\frac{1}{8} \right)^2$$

$$A = \left(\frac{35}{6} \cdot \frac{6}{7} \right) : \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \right)$$

$$A = \frac{35}{7} : \frac{1}{64}$$

$$A = 5 \cdot 64$$

$$A = 320$$

β) Είναι $B = 1,3^2 - 1,2^2 = 1,69 - 1,44 = 0,25$ και $\Gamma = 1:4 = 0,25$ άρα $\Gamma = B$.

γ) Αρκεί να κάνουμε τη διαίρεση $A : \Gamma = 320 : \frac{1}{4} = 320 \cdot 4 = 1280$, άρα ο Α είναι 1280 φορές μεγαλύτερος από τον Γ.

ΘΕΜΑ 2^ο

Να βρεθούν τα μη μηδενικά ψηφία $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ με $\alpha > \beta > \gamma > \delta > \epsilon$ για τα οποία ισχύει:

$$\begin{array}{rccccc} & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon \\ + & \epsilon & \delta & \gamma & \beta & \alpha \\ \hline & 7 & \alpha & 6 & \alpha & 7 \end{array}$$

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (5μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι $\gamma + \gamma = 6$ άρα $\gamma = 3$ ή $\gamma + \gamma = 16$ άρα $\gamma = 8$ αδύνατο διότι τότε ο α δεν θα ήταν ψηφίο. Άρα $\gamma = 3$

Επειδή $\epsilon < \delta < \gamma$ είναι $\epsilon = 1$ και $\delta = 2$. Επομένως έχουμε

$$\begin{array}{rccccc} & \alpha & \beta & 3 & 2 & 1 \\ + & 1 & 2 & 3 & \beta & \alpha \\ \hline & 7 & \alpha & 6 & \alpha & 7 \end{array}$$

Άρα $\alpha + 1 = 7$ άρα $\alpha = 6$ και $\beta + 2 = 6$ άρα $\beta = 4$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Ο Υπάτιος αποφάσισε να ασχοληθεί με το τρέξιμο. Αρχικά, έτρεχε **10 χιλιόμετρα σε 1 ώρα** και έπειτα από πολλές προπονήσεις τρέχει τώρα τα **20 χιλιόμετρα σε 1 ώρα και 40 λεπτά**.

α) Σε πόση ώρα ο Υπάτιος διανύει το **1 χιλιόμετρο** με τη νέα του απόδοση; (1,5μ)

β) Για την ίδια απόσταση πόσο τοις εκατό λιγότερο χρόνο χρειάζεται ο αθλητής; (1,5 μ)

γ) Ο Υπάτιος πρόκειται να λάβει μέρος στο «6^ο Φιλίππειο Δρόμο»-**14,6 χιλιόμετρα** που ξεκινάει από τη Βεργίνα και καταλήγει στη Βέροια. Αν γνωρίζουμε ότι ο αγώνας θα ξεκινήσει στις **9:30 π.μ.** τι ώρα αναμένεται να φτάσει ο Υπάτιος στη Βέροια ; (2 μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Τα 20 χιλιόμετρα τα διανύει σε 1 ώρα και 40 λεπτά = 100 λεπτά

Το 1 χιλιόμετρο το διανύει σε $100:20 = 5$ λεπτά.

β) Με την αρχική απόδοση ο Υπάτιος διένυε το 1 χιλιόμετρο σε $60:10 = 6$ λεπτά. Άρα ο χρόνος του βελτιώθηκε κατά 1 λεπτό το χιλιόμετρο, δηλαδή $1/6 = 16,666\ldots\%$.

γ) Αφού ο Υπάτιος τρέχει το 1 χιλιόμετρο σε 5 λεπτά, επομένως τα 14,6 τα τρέχει σε $14,6 \cdot 5 = 73$ λεπτά επομένως αναμένεται να φτάσει στη Βέροια στις 10:43π.μ.

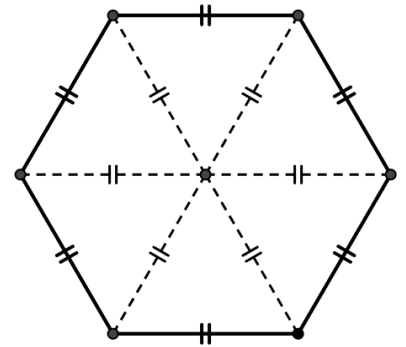
ΘΕΜΑ 4^ο

Στο διπλανό σχήμα «κρύβονται» τρία **διαφορετικά** γεωμετρικά σχήματα.

α) Μπορείτε να τα βρείτε, να τα ονομάσετε και να γράψετε το είδος του καθενός; **(1,5μ)**

β) Τι μέρος του συνολικού εμβαδού αποτελεί το καθένα; **(1,5μ)**

γ) Αν το μεγαλύτερο απ' αυτά έχει εμβαδόν **48cm²**, να βρεθούν τα εμβαδά των υπολοίπων σχημάτων καθώς και το εμβαδόν ολόκληρου του σχήματος. **(2μ)**



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

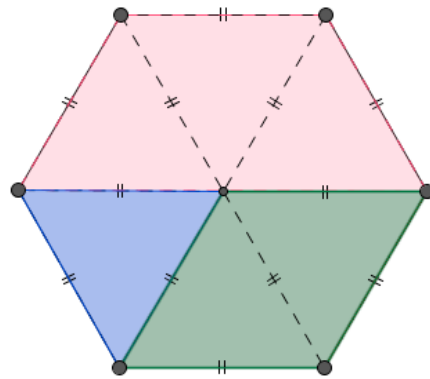
α) Τα γεωμετρικά σχήματα είναι:

ισοσκελές τραπέζιο, ισόπλευρο τρίγωνο και ρόμβος.

β) ισοσκελές τραπέζιο: $\frac{1}{2}$

ρόμβος: $\frac{1}{3}$

ισόπλευρο τρίγωνο: $\frac{1}{6}$



γ) Το $\frac{1}{2}$ αντιστοιχεί σε 48cm² άρα όλο το σχήμα σε $2 * \frac{1}{2} = 96\text{cm}^2$

Το $\frac{1}{3}$ αντιστοιχεί σε $96:3=32\text{ cm}^2$ και το $\frac{1}{6}$ αντιστοιχεί σε $96:6=16\text{ cm}^2$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

11^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Σάββατο 10 Νοεμβρίου 2018

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)}{2^3}$ και $B = 1\frac{1}{8} - (3^2 - 2^3)^{2018} + 0^5$

α) Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων A και B. (2μ)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $2A$ και $\frac{B}{A}$. (1,5μ)

γ) Να εξετάσετε αν ο αριθμός $2\left(2A + \frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{B}{A} + \frac{1}{2}\right) + 2^3$ είναι πρώτος ή σύνθετος. (1,5μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\alpha) \quad A = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)}{2^3}$$

$$A = \frac{\left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{4}{8} - \frac{1}{8}\right)}{8}$$

$$A = \frac{\frac{3}{4} : \frac{3}{8}}{8}$$

$$A = \frac{2}{8}$$

$$A = \frac{1}{4}$$

$$B = 1\frac{1}{8} - (3^2 - 2^3)^{2018} + 0^5$$

$$B = \frac{9}{8} - (9 - 8)^{2018}$$

$$B = \frac{9}{8} - 1$$

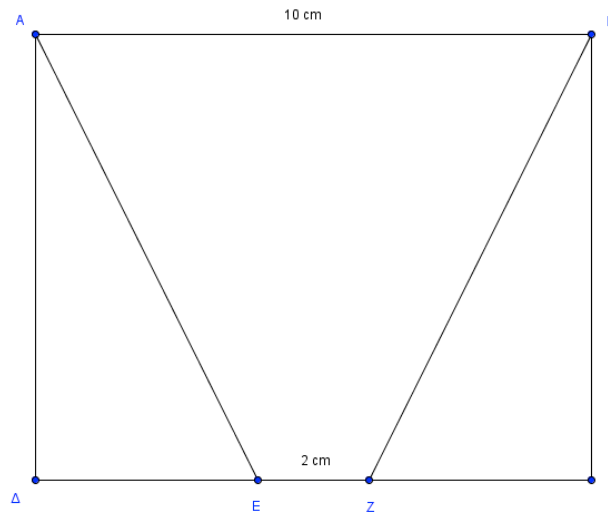
$$B = \frac{1}{8}$$

$$\beta) \quad 2A = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{B}{A} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{άρα} \quad A=B$$

$$\gamma) \quad 2\left(2A + \frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{B}{A} + \frac{1}{2}\right) + 2^3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + 8 = 2 + 3 + 8 = 13, \text{ που είναι πρώτος.}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Το παρακάτω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με την πλευρά $AB=10\text{ cm}$ και περίμετρο 36 cm



α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $A\Delta$. (1μ)

β) Αν το ευθύγραμμο τμήμα EZ έχει μήκος 2 cm , να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου $ABZE$. (2μ)

γ) Στο αρχικό ορθογώνιο, $AB\Gamma\Delta$, μειώνουμε τη μεγάλη πλευρά κατά 2 cm και αυξάνουμε τη μικρή κατά $\frac{1}{2}$ του μήκους της. Να βρεθεί η περίμετρος του νέου ορθογωνίου. (2μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $A\Delta = \frac{36 - 20}{2} = \frac{16}{2} = 8\text{ cm}$

β) $E = \frac{(2 + 10) \cdot 8}{2} = 12 \cdot 4 = 48\text{ cm}^2$

γ) Η μεγάλη πλευρά θα είναι $10 - 2 = 8\text{ cm}$ και η μικρή θα είναι $8 - \frac{1}{2} \cdot 8 = 4\text{ cm}$

Άρα, η νέα περίμετρος θα είναι: $8 + 8 + 4 + 4 = 24\text{ cm}$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Ένα βαρέλι είναι γεμάτο με κρασί. Ο έμπορος πούλησε στην αρχή το $\frac{1}{4}$ από το περιεχόμενό του, μετά άλλα 150 κιλά και υπολογίζει ότι το βαρέλι είναι γεμάτο κατά τα $\frac{3}{5}$.

α) Τι μέρος αποτελούν τα 150 κιλά ; (3μ.)

β) Πόσα κιλά κρασί είχε αρχικά το βαρέλι; (2μ.)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Μετά την πώληση θα του μείνουν τα $\frac{3}{4}$ από το περιεχόμενο του βαρελιού, επομένως του απέμειναν

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}, \text{ τα οποία αντιστοιχούν στα 150 κιλά.}$$

β) Τα $\frac{3}{20}$ είναι 150 κιλά

Το $\frac{1}{20}$ είναι $150:3=50$ κιλά

Τα $\frac{20}{20}$ είναι $20 \cdot 20 = 1000$ κιλά.

ΘΕΜΑ 4^ο

Γράφουμε την παρακάτω σειρά αριθμών:

1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4,

η οποία επαναλαμβάνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Να βρείτε:

- α) Ποιος αριθμός βρίσκεται στην **15^η** θέση **(1μ)**
- β) Ποιος αριθμός βρίσκεται στην **100^η** θέση **(1μ)**
- β) Ποιος αριθμός βρίσκεται στην **2018^η** θέση **(1,5μ)**
- δ) Το άθροισμα των πρώτων **2018** αριθμών αυτής της σειράς αριθμών. **(1,5)**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αξιοποίηση του Τύπου της Ευκλείδειας Διαίρεσης $\Delta = \delta\pi + \upsilon$

- α) Επειδή $15 = 3 \cdot 4 + 3$, άρα ο αριθμός που βρίσκεται στην **15^η** θέση είναι το 3.
- β) Επειδή $100 = 25 \cdot 4 + 0$, άρα ο αριθμός που βρίσκεται στην **100^η** θέση είναι το 4.
- γ) Επειδή $2018 = 504 \cdot 4 + 2$, άρα ο αριθμός που βρίσκεται στην **2018^η** θέση είναι ο 2.
- δ) Το άθροισμα των 2018 πρώτων αριθμών είναι: $(1 + 2 + 3 + 4) \cdot 504 + (1 + 2) = 10 \cdot 504 + 3 = 5043$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

13^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Παρασκευή 5 Νοεμβρίου 2021

Α΄ Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται ο ελλιπής πίνακας

		1	9			
--	--	---	---	--	--	--

Α. α. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα με φυσικούς αριθμούς, ώστε το **άθροισμα** τριών οποιοδήποτε αριθμών που βρίσκονται σε διαδοχικά κελιά είναι ίσο με **18**.

(Μονάδες 1)

β. Να **προσθέσετε** τους παραπάνω αριθμούς των επτά κελιών.

Ποιοι είναι οι **διαιρέτες** του **αθροίσματος** που βρήκατε;

Ποιοι διαιρέτες του είναι **πρώτοι** αριθμοί;

(Μονάδες 2)

Β. α. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα με φυσικούς αριθμούς, ώστε το **γινόμενο** τριών οποιοδήποτε αριθμών που βρίσκονται σε διαδοχικά κελιά είναι ίσο με **27**.

(Μονάδες 1)

β. Να **πολλαπλασιάσετε** τους παραπάνω αριθμούς των επτά κελιών.

Το **γινόμενο** διαιρείται με το 3; Διαιρείται με το 9;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας;

(Μονάδες 2)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. α.

9	8	1	9	8	1	9
---	---	---	---	---	---	---

β. $9+8+1+9+8+1+9=45$

Οι διαιρέτες του 45 είναι: 1,3,5,9,15,45

Πρώτοι αριθμοί είναι οι: 3 και 5.

Β. α.

9	3	1	9	3	1	9
---	---	---	---	---	---	---

β. $9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 9 = 6561$

Επειδή το άθροισμα των ψηφίων είναι: $6+5+6+1=18$, το οποίο διαιρείται και με το 3 και με το 9 το γινόμενο διαιρείται και με το 3 και με το 9.

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν $A = 2021 \cdot \frac{5^2 - 3 \cdot 7}{4}$ και $B = \frac{(6^2 - 4 \cdot 9) \cdot 2009 + 7}{\frac{7}{1}}$
2022

α) Να βρεθεί ο αριθμός **A**.

β) Να βρεθεί ο αριθμός **B**.

γ) Να βρείτε ένα κλάσμα μεταξύ των $\frac{A}{B}$ και $\frac{B}{A}$.

(Μονάδες 2+2+2)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $A = 2021 \cdot \frac{5^2 - 3 \cdot 7}{4}$

$$A = 2021 \cdot \frac{25 - 21}{4}$$

$$A = 2021 \cdot \frac{4}{4}$$

$$A = 2021 \cdot 1$$

$$A = 2021$$

$$\beta) \quad B = \frac{\frac{(6^2 - 4 \cdot 9) \cdot 2009 + 7}{7}}{\frac{1}{2022}}$$

$$B = \frac{\frac{(36 - 36) \cdot 2009 + 7}{7}}{\frac{1}{2022}}$$

$$B = \frac{\frac{0 \cdot 2009 + 7}{7}}{\frac{1}{2022}}$$

$$B = \frac{\frac{7}{7}}{\frac{1}{2022}}$$

$$B = \frac{\frac{7}{1}}{\frac{1}{2022}}$$

$$B = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2022}}$$

$$B = 2022$$

$$\gamma) \quad \frac{A}{B} = \frac{2021}{2022} < 1$$

$$\frac{B}{A} = \frac{2021}{2021} > 1$$

Οπότε:

$$\frac{A}{B} < 1 < \frac{B}{A}$$

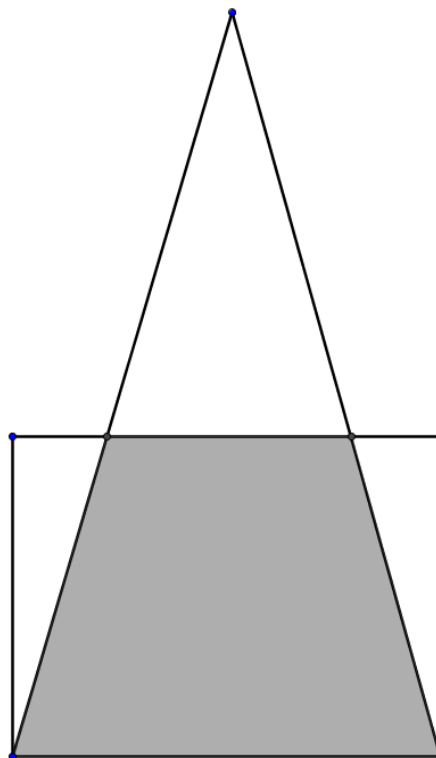
ΘΕΜΑ 3^ο

Ένα τρίγωνο είναι τοποθετημένο πάνω σε ένα ορθογώνιο με διαστάσεις **8 εκατοστά** και **6 εκατοστά** αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Με σκούρο χρώμα είναι το κοινό τους κομμάτι το οποίο καλύπτει το **70%** του

τριγώνου και τα $\frac{7}{8}$ του ορθογωνίου.

ταυτόχρονα.



α) Πόσο είναι το εμβαδόν του τριγώνου;

β) Αν θεωρήσουμε **A**, το λευκό τμήμα του τριγώνου και **B** το λευκό τμήμα του ορθογωνίου, να βρείτε τον λόγο των

εμβαδών των τμημάτων $\frac{B}{A}$.

γ) Βρείτε το εμβαδόν τετραγώνου που έχει την ίδια περίμετρο με το ορθογώνιο.

(Μονάδες 4+2+2)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E = \alpha \cdot \beta = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2$$

Το σκουρόχρωμο κοινό τμήμα είναι:

$$\frac{7}{8} \cdot 48 = 42 \text{ cm}^2$$

Το 70% του εμβαδού του τριγώνου είναι 42 cm^2

Το 1% του εμβαδού του τριγώνου είναι $42:70=0,6 \text{ cm}^2$

Το 100% του εμβαδού του τριγώνου είναι $0,6 \cdot 100 = 60 \text{ cm}^2$

β) $A = 60 - 42 = 18 \text{ cm}^2$

$$B = 48 - 42 = 6 \text{ cm}^2$$

$$\frac{B}{A} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

γ) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 12 + 16 = 28 \text{ cm}$$

Οπότε το τετράγωνο με περίμετρο 28 cm έχει πλευρά $28:4 = 7 \text{ cm}$

Άρα το εμβαδόν του είναι:

$$E = 7^2 = 49 \text{ cm}^2$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ «ΥΠΑΤΙΑ 2022»

(και τρόπος βαθμολόγησης)

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$A = (18 : 3 + 2^2) : 10 \quad (\text{Μονάδες 1})$$

$$B = \frac{2}{3} : \frac{5}{3} + \frac{1}{5} \quad (\text{Μονάδες 1})$$

$$\Gamma = \frac{[5 \cdot (2+2^2) + 12 \cdot 2^2]}{(2^3+2^2) : (11-3^2)} \quad (\text{Μονάδες 2})$$

β) Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τις τιμές $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{\Gamma}$. (Μονάδες 1)

γ) Υπολογίστε την τιμή $X = 2 \cdot A^2 + 5 \cdot B - \frac{10}{11} \cdot \Gamma$ (Μονάδες 2)

Απάντηση:

$$\alpha) \quad A = (18 : 3 + 2^2) : 10 = (6+4) : 10 \quad (0.5 \text{ M}) = 10 : 10 = 1 \quad (0.5 \text{ M})$$

$$B = \frac{2}{3} : \frac{5}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \quad (0.5 \text{ M}) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \quad (0.5 \text{ M})$$

$$\Gamma = \frac{[5 \cdot (2+2^2) + 12 \cdot 2^2]}{(2^3+2^2) : (11-3^2)} = \frac{5 \cdot (2+4) + 12 \cdot 4}{(8+4) : (11-9)} \quad (1\text{M}) = \frac{5 \cdot 6 + 3}{12 : 2} \quad (0.5 \text{ M})$$

$$= \frac{33}{6} = \frac{11}{2} \quad (0.5 \text{ M})$$

$$\beta) \quad \frac{1}{A} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} > 1 \quad \text{γιατί ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή}$$

(0.5 M)

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\frac{11}{2}} = \frac{2}{11} < 1 \quad \text{γιατί ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή}$$

(0.5 M)

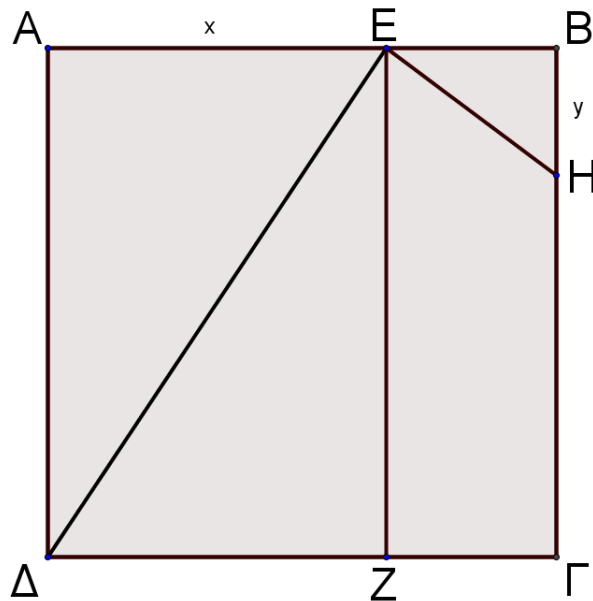
$$\frac{2}{11} < 1 < \frac{5}{3} \rightarrow \frac{1}{\Gamma} < \frac{1}{A} < \frac{1}{B} \quad (1M)$$

$$\gamma) X = 2 \cdot A^2 + 5 \cdot B - \frac{10}{11} \cdot \Gamma = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot \frac{3}{5} - \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{2} \quad (0.5 M)$$

$$= 2 \cdot 1 + \frac{15}{5} - \frac{10}{2} \quad (0.5 M) = 2 + 3 - 5 \quad (0.5 M) = 0 \quad (0.5 M)$$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τετράγωνο **ΑΒΓΔ** πλευράς **12 cm** όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν το εμβαδόν του τριγώνου **ΑΕΔ** είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του τετραγώνου **ΑΒΓΔ** και το εμβαδόν του τριγώνου **ΕΒΗ** είναι ίσο με το $\frac{1}{8}$ του εμβαδού του ορθογωνίου **ΕΒΓΖ**, να βρεθούν :

α) Η πλευρά $x=AE$ (Μονάδες 2)

β) Η πλευρά $y=BH$ (Μονάδες 2)

γ) Ο λόγος του εμβαδού του τετραπλεύρου **ΔΕΗΓ** προς το εμβαδόν του τετραγώνου **ΑΒΓΔ**. (Μονάδες 2)

Απάντηση:

$$E_{AB\Gamma\Delta} = 12 \cdot 12 = 144 cm^2$$

$$\alpha) E_{AE\Delta} = \frac{1}{3} \cdot 144 = \frac{144}{3} = 48 cm^2 \quad (1 M)$$

$$\frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = 48 \rightarrow \beta \cdot \upsilon = 96 \rightarrow 12x = 96 \text{ (0.5 M)} \rightarrow x = 96:12 \rightarrow x = 8 \text{ cm. (0.5 M)}$$

$$\beta) EB = AB - AE = 12 - 8 = 4 \text{ cm}$$

$$E_{EB\Gamma Z} = 12 \cdot 4 = 48 \text{ cm}^2 \quad \text{(0.5 M)}$$

$$E_{EBH} = \frac{1}{8} \cdot 48 = \frac{48}{8} = 6 \text{ cm}^2 \quad \text{(0,5 M)}$$

$$\frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = 6 \rightarrow \beta \cdot \upsilon = 12 \rightarrow 4\gamma = 12 \text{ (0.5 M)} \rightarrow \gamma = 12:4 \rightarrow \gamma = 3 \text{ cm. (0.5 M)}$$

$$\gamma) E_{\Delta E\eta\Gamma} = E_{AB\Gamma\Delta} - (E_{AE\Delta} + E_{EBH}) \text{ (0,5 M)} = 144 - (48 + 6) = 144 - 54 = 90 \text{ cm}^2$$

(0,5 M)

$$\frac{E_{\Delta E\eta\Gamma}}{E_{AB\Gamma\Delta}} = \frac{90}{144} = \frac{30}{48} \text{ (0,5 M)} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \text{ (0,5 M)}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Ο Γεράσιμος και η Αλέκα παίζουν ένα παιχνίδι με ένα σεντούκι 100 χρυσών νομισμάτων εναλλάξ ο ένας μετά τον άλλον.

Ο καθένας μπορεί να πάρει **ένα χρυσό νόμισμα** εάν το μπαούλο έχει **μονό αριθμό** χρυσών νομισμάτων ή **ακριβώς τα μισά** νομίσματα αν το μπαούλο έχει **ζυγό αριθμό** χρυσών νομισμάτων.

Το παιχνίδι τελειώνει όταν δεν υπάρχουν άλλα χρυσά νομίσματα στο σεντούκι.

Αν η Αλέκα παίζει πρώτη, πόσα χρυσά νομίσματα θα έχει η Αλέκα στο τέλος;

(Μονάδες 7)

Απάντηση:

Ακολουθούμε τη διαδικασία:

- Η Αλέκα παίρνει τα μισά από τα 100 νομίσματα δηλαδή 50 νομίσματα. Άρα μένουν 50 νομίσματα. **(1 M)**
- Ο Γεράσιμος παίρνει τα μισά από τα 50 νομίσματα, δηλαδή 25 νομίσματα. Απομένουν 25 νομίσματα. **(1 M)**

- Η Αλέκα παίρνει 1 νόμισμα, αφήνοντας 24 νομίσματα. **(1 M)**
- Ο Γεράσιμος παίρνει τα μισά από τα 24 νομίσματα, δηλαδή 12 νομίσματα. Μένουν 12 νομίσματα. **(0.5 M)**
- Η Αλέκα παίρνει τα μισά από τα 12 νομίσματα δηλαδή 6 νομίσματα. Απομένουν 6 νομίσματα. **(0.5 M)**
- Ο Γεράσιμος παίρνει τα μισά από τα 6 νομίσματα, δηλαδή τα 3 νομίσματα. Έτσι μένουν 3 νομίσματα. **(0.5 M)**
- Η Αλέκα παίρνει 1 νόμισμα, αφήνοντας 2 νομίσματα. **(0.5 M)**
- Ο Γεράσιμος παίρνει τα μισά από τα 2 νομίσματα δηλαδή 1 νόμισμα. Μένει 1 νόμισμα. **(0.5 M)**
- Η Αλέκα παίρνει 1 νόμισμα, αφήνοντας 0 νομίσματα. **(0.5 M)**

Το παιχνίδι τελειώνει.

Στο τέλος του παιχνιδιού, η Αλέκα έχει $50 + 1 + 6 + 1 + 1 = 59$ νομίσματα

(1 M)



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

15^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Η ΥΠΑΤΙΑ»

Σάββατο 4 Νοεμβρίου 2023

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Στην Αλεξάνδρεια, τρεις γυναίκες, η Δελφίς, η Ίρις και η Νεφέλη, ανακρίνονται ως ύποπτες για κλοπή ενός παπύρου του Ερατοσθένη. Είναι γνωστό ότι κάθε γυναίκα είτε λέει πάντα την αλήθεια είτε λέει πάντα ψέματα.

Στις απολογίες τους είπαν:

(α) Δελφίς: Είμαι αθώα.

(β) Ίρις: Η Νεφέλη έκλεψε τον πάπυρο.

(γ) Νεφέλη: Είμαι αθώα.

(δ) Ίρις: Είμαι ένοχη.

(ε) Δελφίς: Ναι, η Ίρις είναι όντως ένοχη.

Αν ακριβώς μία από τις Δελφίς, Ίρις και Νεφέλη έκανε την κλοπή, ποια είναι η ένοχη;

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

Η απάντηση είναι η Δελφίς.

Η Ίρις έκανε δύο αντικρουόμενες δηλώσεις, άρα πάντα λέει ψέματα, οπότε δεν είναι ένοχη.

Συνέπεια αυτού είναι ότι και η Νεφέλη είναι αθώα οπότε προκύπτει ότι η Δελφίς λέει ψέματα άρα είναι ένοχη.

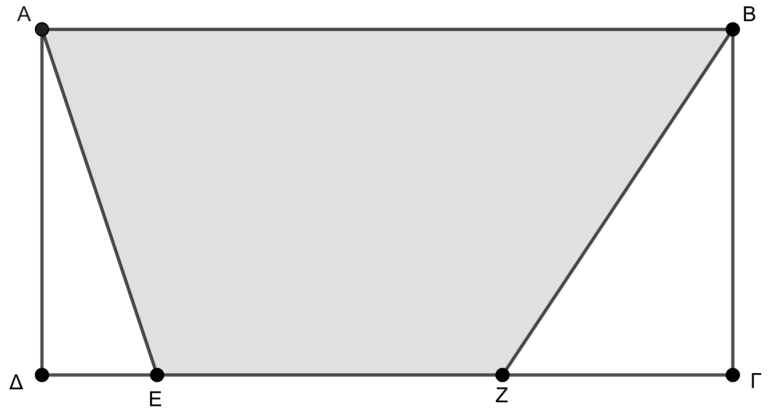
ΘΕΜΑ 2^ο

Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, το εμβαδόν του τραπεζίου $ABZE$ είναι 266cm^2 και οι πλευρές $AB=30\text{cm}$

$A\Delta=14\text{cm}$ και

$\Delta E=5\text{cm}$.

Να βρείτε την πλευρά $Z\Gamma$.



(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

$$E_{AB\Gamma\Delta} = AB \cdot A\Delta = 14 \cdot 30 = 420 \text{ cm}^2$$

$$E_{A\Delta E} = \frac{\Delta E \cdot A\Delta}{2} = \frac{14 \cdot 5}{2} = 35 \text{ cm}^2$$

$$E_{BZ\Gamma} = E_{AB\Gamma\Delta} - (E_{A\Delta E} + E_{ABZE}) = 420 - (266 + 35) = 420 - 301 = 119 \text{ cm}^2$$

$$\text{Οπότε } E_{BZ\Gamma} = 119 \text{ cm}^2$$

$$\frac{Z\Gamma \cdot B\Gamma}{2} = 119$$

$$\frac{Z\Gamma \cdot 14}{2} = 119$$

$$Z\Gamma \cdot 14 = 2 \cdot 119$$

$$Z\Gamma \cdot 14 = 238$$

$$Z\Gamma = 238 : 14$$

$$Z\Gamma = 17 \text{ cm}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2022}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2023}\right).$$

(Μονάδες 2)

β. Να βρεθεί ο αριθμός B, όταν:

$$\frac{1}{4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{99 + 2} = \frac{1}{B - 4}.$$

(Μονάδες 2)

γ. Να συγκρίνετε τις τιμές A και $\frac{1}{B}$.

(Μονάδες 1)

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \alpha. A &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2022}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2023}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2022}{2023} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2021 \cdot 2022}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2022 \cdot 2023} \\ &= \frac{1}{2023} \end{aligned}$$

$$\beta. \frac{1}{4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{99 + 2} = \frac{1}{B - 4} =$$

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{101} = \frac{1}{B - 4} =$$

$$\frac{1}{2020} = \frac{1}{B - 4}$$

$$B - 4 = 2020 =$$

$$B = 2024$$

$$\gamma. A = \frac{1}{2023} \text{ και } \frac{1}{B} = \frac{1}{2024}. \text{ Άρα } \frac{1}{2023} > \frac{1}{2024}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Αν τα K , Λ και M είναι ψηφία (εκτός από το μηδέν) τέτοια ώστε:

$$\begin{array}{rcccc} & K & \Lambda & M & \Lambda \\ + & & M & 5 & K \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα $K+\Lambda+M$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

Από την τελευταία στήλη προκύπτει ότι: $\Lambda+K=3$ ή $\Lambda+K=13$

Επίσης, $M+5=2$ ή $M+5=12$

Αλλά επειδή ο αριθμός M είναι ψηφίο εκτός από το μηδέν, δηλαδή από 1 έως 9, το άθροισμα $M+5$ αποκλείεται να ισούται με 2. Οπότε $M+5=12$, δηλαδή $M=7$.

Επίσης, $\Lambda+M+1=10$ (αφού υπάρχει κρατούμενο), οπότε $\Lambda+7+1=10$, δηλαδή $\Lambda=2$.

Οπότε, $\Lambda+K=13$ αδύνατο, αφού γιατί θα έπρεπε $K=11$.

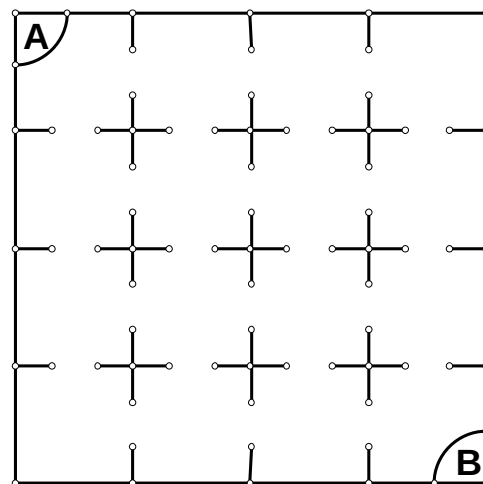
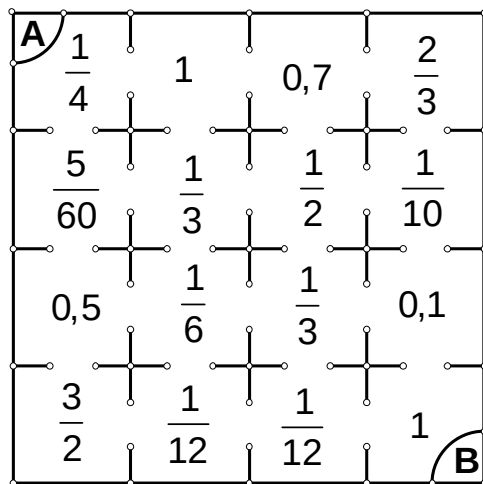
Αρα, $\Lambda+K=3$ δηλαδή $K=1$

Τελικά $K+\Lambda+M=10$.

ΘΕΜΑ 1^ο

Η Αθηνά και ο Βασίλης περιμένουν στη σειρά. Είναι 7 άνθρωποι πίσω από την Αθηνά η οποία βρίσκεται 3 θέσεις μπροστά από τον Βασίλη. Αν μπροστά από τον Βασίλη βρίσκονται 6 άνθρωποι, πόσοι άνθρωποι συνολικά βρίσκονται στη σειρά;

ΘΕΜΑ 2^ο



Να μετατρέψετε τους αριθμούς που βρίσκονται μέσα στα τετράγωνα σε ομώνυμα κλάσματα και να τους τοποθετήσετε στο διπλανό σχήμα.

Ποια διαδρομή πρέπει να ακολουθήσει κάποιος από το Α ως το Β ώστε το άθροισμα των αριθμών που θα συναντήσει να είναι 2;

Οι κινήσεις που επιτρέπονται είναι οριζόντια και κάθετα.

Από κάθε κουτί επιτρέπεται να περάσει μόνο μια φορά.

ΘΕΜΑ 3^ο

Ο μεγάλος Έλληνας μαθηματικός Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή (και όχι Καραθεοδωρής), που υπήρξε και δάσκαλος του Αϊνστάιν, γεννήθηκε στο Βερολίνο στις 13 Σεπτεμβρίου τον 19^ο αιώνα (δηλαδή μεταξύ 1800 και 1900) και πέθανε στο Μόναχο στις 2 Φεβρουαρίου τον 20^ο αιώνα (δηλαδή μεταξύ 1900 και 2000).

Το έτος γέννησης του Καραθεοδωρή αν διαιρεθεί δια 30 ή 31 αφήνει υπόλοιπο 13

Το έτος θανάτου του διαιρείται ακριβώς δια 2, 3 και 5, αλλά δε διαιρείται ακριβώς δια 4.

α) Βρείτε όλα τα έτη του 19^{ου} αιώνα που όταν διαιρούνται δια 30 αφήνουν υπόλοιπο 13.

β) Βρείτε όλα τα έτη του 19^{ου} αιώνα που όταν διαιρούνται δια 31 αφήνουν υπόλοιπο 13.

γ) Βρείτε το έτος γέννησης του Καραθεοδωρή.

δ) Βρείτε το έτος θανάτου του Καραθεοδωρή.

ε) Πόσα χρόνια έζησε ο μεγάλος μαθηματικός;

ΘΕΜΑ 4^ο

Έχουμε μια ζυγαριά ακριβείας με δύο δίσκους και απεριορίστο αριθμό από σταθμά (δηλαδή βάρη) των 9, των 15 και των 21 γραμμαρίων.



Μπορούμε να ζυγίσουμε διάφορα βάρη τοποθετώντας σταθμά ή στον έναν ή και στους δύο δίσκους της ζυγαριάς. Π.χ. μπορούμε να ζυγίσουμε βάρος 33 γραμμαρίων, αν θέσουμε στον ένα δίσκο δύο βάρη των 21 γραμμαρίων και στον άλλο δίσκο ένα βάρος των 9 γραμμαρίων. ($21 + 21 = 9 + 33$)

- α) Πως μπορούμε να ζυγίσουμε βάρος 6 γραμμαρίων;
- β) Πως μπορούμε να ζυγίσουμε βάρος 12 γραμμαρίων;
- γ) Πως μπορούμε να ζυγίσουμε βάρος 3 γραμμαρίων;
- δ) Τι κοινό έχουν όλα τα βάρη που μπορούμε να ζυγίσουμε; (3, 6, 9, 12, 15 κ.λπ)
- ε) Εξηγείστε γιατί δεν μπορούμε να ζυγίσουμε ούτε βάρος 2008 γραμμαρίων ούτε βάρος 2009 γραμμαρίων με τα σταθμά που διαθέτουμε.

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ**

**2^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα
Μαθηματικά.
«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»**



Σάββατο 23 Ιανουαρίου 2010

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5 σχηματίζουμε εξαψήφιους αριθμούς χρησιμοποιώντας όλα τα ψηφία μία φορά το καθένα, π.χ 235014, 540213 κ.λ.π (το 0 δεν μπορεί να είναι 1^ο ψηφίο).

α) Δικαιολογήστε γιατί όλοι οι εξαψήφιοι αυτοί αριθμοί διαιρούνται δια του 3, αλλά δε διαιρούνται δια 9

β) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορούμε να σχηματίσουμε ώστε να διαιρείται ακριβώς και δια 4 και δια 5;

ΘΕΜΑ 2^ο

Ο Κώστας είχε μερικά χρυσά νομίσματα και αποφάσισε μια Κυριακή να τα ξοδέψει με τον εξής τρόπο:

Κάθε Δευτέρα θα τα διπλασίαζε και κάθε Παρασκευή θα ξόδευε 32. Αν το Σάββατο της 4ης εβδομάδας δεν του είχε απομείνει κανένα νόμισμα, πόσα νομίσματα είχε στην αρχή ;

ΘΕΜΑ 3°

Θεωρούμε όλους τους περιττούς αριθμούς από το 1 ως το 2009, δηλαδή τους αριθμούς 1, 3, 5, 7, ..., 2007, 2009. Το πλήθος των αριθμών αυτών το ονομάζουμε A. Θεωρούμε επίσης όλους τους άρτιους αριθμούς από το 2 ως το 2010, δηλαδή τους αριθμούς 2, 4, 6, 8, ..., 2008, 2010. Το πλήθος των αριθμών αυτών το ονομάζουμε B.

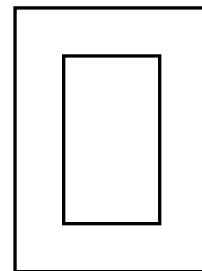
- α) Να δικαιολογήσετε ότι $A = B$
- β) Να βρείτε το πλήθος των αριθμών κάθε ομάδας. Είναι ο αριθμός αυτός άρτιος ή περιττός;
- γ) Να βρείτε τη θέση που κατέχει ο μεσαίος αριθμός σε κάθε ομάδα; (δηλαδή $1^{\text{ος}}$, $2^{\text{ος}}$, $3^{\text{ος}}$, ...)
- δ) Να βρείτε τον μεσαίο αριθμό της δεύτερης ομάδας 2, 4, 6, 8, ..., 2008, 2010
- ε) Να βρείτε τον μεσαίο αριθμό της πρώτης ομάδας 1, 3, 5, 7, ..., 2007, 2009

ΘΕΜΑ 4°

Η μεγαλύτερη πλευρά του εξωτερικού ορθογωνίου του διπλανού σχήματος μειώθηκε κατά 20% ενώ η μικρότερη πλευρά του μειώθηκε κατά 30% δημιουργήθηκε έτσι το εσωτερικό ορθογώνιο.

Αν το εμβαδόν του εσωτερικού ορθογωνίου είναι 112 τετραγωνικά εκατοστά

- α) να βρεθεί το εμβαδόν του εξωτερικού ορθογωνίου.
- β) αν οι πλευρές των ορθογωνίων είναι ακέραιοι αριθμοί και η περίμετρος του εσωτερικού ορθογωνίου είναι 46 εκατοστά να βρεθούν οι διαστάσεις των δύο ορθογωνίων



ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ:

- α) Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα
- β) Όλες οι απαντήσεις πρέπει να συνοδεύονται με τις αιτιολογήσεις τους (όχι μόνο τα αποτελέσματα)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ**

**3^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά.
«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»**



Σάββατο 15 Ιανουαρίου 2011

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Να βρεθεί ο ακέραιος αριθμός a , ώστε να ισχύει: $\frac{31}{4} < \frac{a}{6} < \frac{63}{8}$

ΘΕΜΑ 2^ο

Κατά τη διάρκεια του ίδιου μήνα, τρεις Κυριακές αντιστοιχούν σε άρτια ημερομηνία. Στις 20 αυτού του μήνα, ποια μέρα θα είναι;

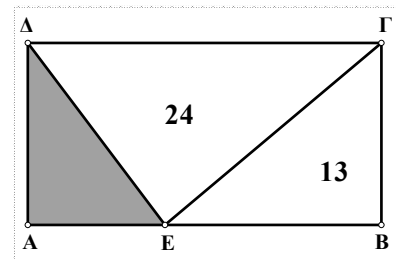
ΘΕΜΑ 3^ο

Ο αριθμός $k=201020102010\dots2010$ έχει δημιουργηθεί επαναλαμβάνοντας 2011 φορές τον αριθμό 2010.

- α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός k διαιρείται δια 9
- β) Αν ο αριθμός k δεν διαιρείται δια 9, πόσες ακόμη φορές πρέπει να επαναλάβουμε το 2010 (το λιγότερο δυνατό) ώστε ο νέος αριθμός να διαιρείται δια 9;

ΘΕΜΑ 4^ο

Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ αποτελείται από τρία τρίγωνα. Το εμβαδόν του ΕΒΓ είναι 13 τετρ. εκατοστά και το εμβαδόν του ΓΔΕ είναι 24 τετρ. εκατοστά. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ**

**4^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά.
«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»**



Σάββατο 21 Ιανουαρίου 2012

A' Γυμνασίου

Θέμα 1^ο

Να συμπληρώσετε με ψηφία τα δύο κενά τετράγωνα του αριθμού

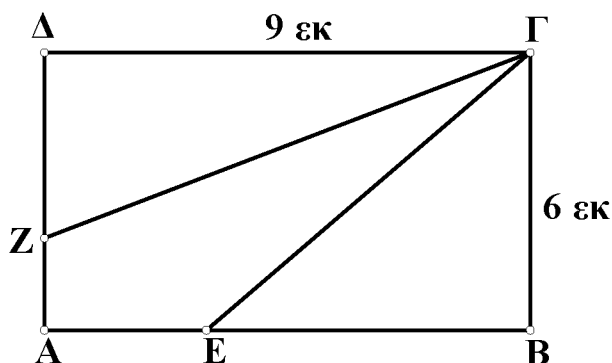
2		
---	--	--

 ώστε ο τριψήφιος που θα προκύψει να διαιρείται ακριβώς δια 2, 5 και 9.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 2^ο

Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, οι διαστάσεις είναι $AB = 9$ εκ. και $AD = 6$ εκ. Είναι επίσης $BE = 6$ εκ.

- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.
- β) Αν για το σημείο Ζ της πλευράς ΑΔ το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΓΖΑΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του ΑΒΓΔ, να βρεθεί το μήκος του τμήματος ΑΖ.



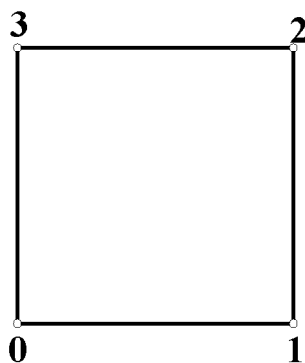
Θέμα 3^ο

Στις κορυφές του τετραγώνου του σχήματος 1 είναι τοποθετημένοι οι αριθμοί 0, 1, 2, 3. Εκλέγουμε 3 από τις 4 κορυφές και προσθέτουμε σε κάθε μια το 1 (αν π.χ εκλέξουμε τις κορυφές με τους αριθμούς 0, 1 και 3 οι κορυφές θα γίνουν 1, 2 και 4 αντίστοιχα).

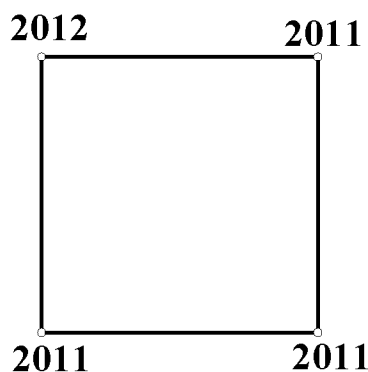
Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται όσες φορές χρειαστεί.

α) Τι παρατηρείτε για το άθροισμα των αριθμών στις 4 κορυφές μετά από κάθε διαδικασία;

β) Να αποδείξετε ότι δεν μπορούμε να φτάσουμε στο αποτέλεσμα του σχήματος 2 οσοδήποτε φορές και αν εκτελέσουμε την παραπάνω διαδικασία.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Θέμα 4^ο

Αν τοποθετήσουμε το ψηφίο 7 στο τέλος ενός διψήφιου αριθμού, ο τριψήπιος που προκύπτει είναι κατά 529 μεγαλύτερος του αρχικού διψήφιου. Να βρεθεί ο διψήπιος αριθμός.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

5^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά.

«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»



Σάββατο 12 Ιανουαρίου 2013

Α' Γυμνασίου

Θέμα 1^ο

Ένας αριθμός αποτελείται από 4025 ψηφία από τα οποία τα 2012 είναι τριάρια και 2013 είναι δυάρια με τυχαία σειρά (ανακατωμένα μεταξύ τους).

α) Εξηγήστε γιατί ο αριθμός διαιρείται δια 9.

Μονάδες 3

β) Ποια πρέπει να είναι τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού ώστε ο αριθμός να διαιρείται δια 4;

Μονάδες 2

Θέμα 2^ο

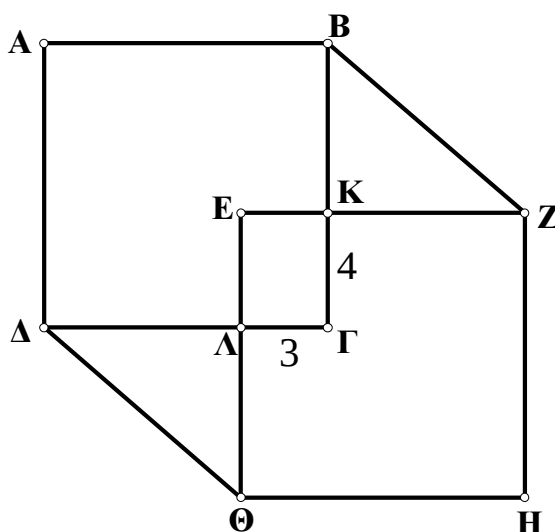
Δύο ίσα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ με πλευρά 10cm το καθένα, έχουν κοινό το ορθογώνιο ΕΚΓΛ με διαστάσεις 3cm και 4 cm όπως δείχνει το σχήμα.

α) Υπολογίστε τα μήκη των καθέτων πλευρών των δύο ορθογώνιων τριγώνων ΒΚΖ και ΔΛΘ.

Μονάδες 1

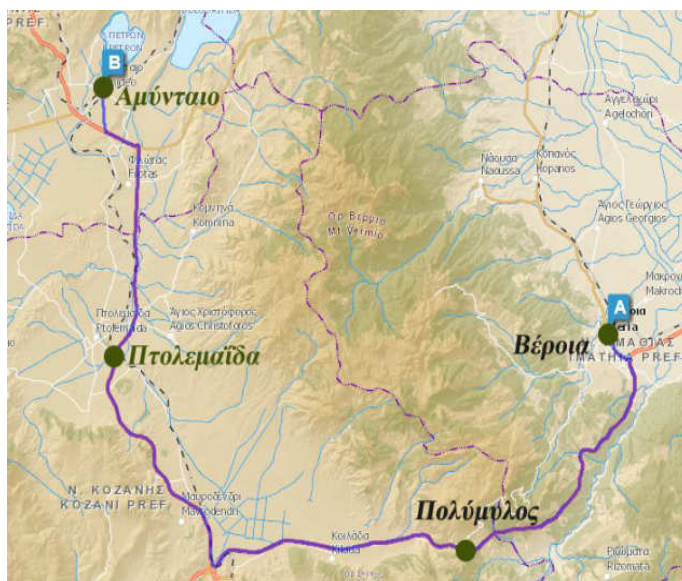
β) Υπολογίστε το εμβαδόν του εξαγώνου ΑΒΖΗΘΔ.

Μονάδες 4



Θέμα 3^ο

Ένας μαθητής της Α΄ Γυμνασίου για να πάρει μέρος στο διαγωνισμό ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ που διεξάγεται φέτος και για τους μαθητές του Νομού Φλώρινας, ξεκίνησε οδικώς από τη Βέροια για να πάει στο Αμύνταιο του Νομού Φλώρινας περνώντας από τον Πολύμυλο και κατόπιν από την Πτολεμαΐδα.



Όταν έφτασε στον Πολύμυλο παρατήρησε ότι πρέπει να διανύσει ακόμη 42 χιλιόμετρα για να φτάσει στην Πτολεμαΐδα η οποία βρίσκεται στα $\frac{3}{4}$ της απόστασης Βέροιας – Αμυνταίου, ενώ αν διανύσει 34 χιλιόμετρα μετά τον Πολύμυλο θα έχει κάνει τα $\frac{2}{3}$ της διαδρομής Βέροιας – Αμυνταίου.

Να βρεθούν οι αποστάσεις:

α) Βέροιας – Αμυνταίου

Μονάδες 3

β) Πτολεμαΐδας – Αμυνταίου

Μονάδες 1

γ) Βέροιας - Πολυμύλου

Μονάδες 1

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ
6ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά
«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»



Σάββατο 18 Ιανουαρίου 2014

Α΄ Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Ένα σχολείο έχει 50 μαθητές. Ο γυμναστής του σχολείου, θέλοντας να σχηματίσει ομάδες εργασίας, τους γράφει σε μια λίστα με αλφαβητική σειρά δίνοντάς τους και τον αντίστοιχο αύξοντα αριθμό (αριθμό καταλόγου). Δηλαδή στο μαθητή που είναι γραμμένος πρώτος στη λίστα αντιστοιχεί ο αριθμός 1 και στον τελευταίο ο αριθμός 50. Κατόπιν αναθέτει εργασίες στις 4 ομάδες, τις οποίες σχηματίζει ως εξής:

Ομάδα Α: Περιλαμβάνει τους μαθητές με αριθμό καταλόγου πολλαπλάσιο του 2. Αυτοί αναλαμβάνουν την καθαριότητα της αυλής.

Ομάδα Β: Περιλαμβάνει τους μαθητές με αριθμό καταλόγου πολλαπλάσιο του 3. Αυτοί αναλαμβάνουν το πότισμα των δένδρων του σχολείου.

Ομάδα Γ: Περιλαμβάνει τους μαθητές με αριθμό καταλόγου πολλαπλάσιο του 5. Αυτοί αναλαμβάνουν τη φύτευση καλλωπιστικών φυτών.

Ομάδα Δ: Περιλαμβάνει τους μαθητές με αριθμό καταλόγου πολλαπλάσιο του 6. Αυτοί αναλαμβάνουν το βάψιμο των διαδρόμων του σχολικού κτιρίου.

α) Πόσοι μαθητές ανήκουν σε κάθε ομάδα; **Μονάδες 2**

β) Υπάρχουν μαθητές που θα κάνουν περισσότερες από μία εργασίες; **Μονάδες 1**

γ) Πόσοι μαθητές συμμετέχουν ταυτόχρονα στις ομάδες Γ και Δ; **Μονάδες 1**

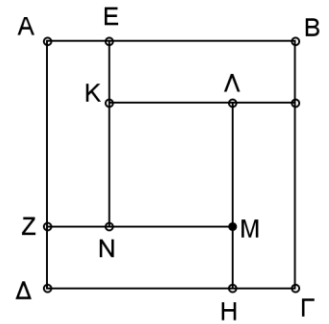
δ) Υπάρχουν μαθητές που δεν συμμετέχουν σε καμία ομάδα εργασίας και αν ναι, πόσοι είναι; **Μονάδες 1**

ΘΕΜΑ 2ο

α) Στο εξωτερικό ενός τετραγώνου ΚΛΜΝ τοποθετούμε τέσσερα ίσα ορθογώνια έτσι ώστε να δημιουργηθεί το μεγάλο τετράγωνο ΑΒΓΔ. (Βλέπε το διπλανό σχήμα).

Αν το κάθε ορθογώνιο έχει περίμετρο 40 εκ. να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 2



β) Ένας υπάλληλος ξοδεύει κάθε μήνα τα $\frac{7}{10}$ του μισθού του. Αν ελαττωθεί ο μισθός του κατά

το $\frac{1}{15}$ να βρείτε ποιο μέρος του νέου μισθού πρέπει να ξοδεύει ώστε να διατηρήσει την ίδια

ποιότητα ζωής, δηλαδή να ξοδεύει κάθε μήνα όσα ξόδευε και πριν τη μείωση.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και το ΑΒΕΖ τετράγωνο. Αν η περίμετρος του τετραγώνου ΑΒΕΖ είναι 20 μέτρα, η μεγάλη βάση ΓΔ του τραpezίου είναι διπλάσια από τη μικρή βάση ΑΒ, το ύψος του

$AK = \frac{1}{5} \Delta\Gamma$ και το τρίγωνο ΑΔΚ είναι ισοσκελές τότε :

α) να βρείτε το εμβαδό του τραpezίου ΑΒΓΔ

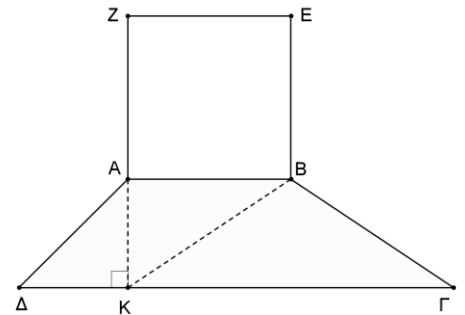
Μονάδες 2

β) να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΒΚΓ

Μονάδες 1

γ) πόσα χρήματα θα ξοδέψουμε για να σπείρουμε με γκαζόν ένα οικόπεδο που έχει ακριβώς το σχήμα του τραpezίου ΑΒΓΔ αν για κάθε 1 τετραγωνικό μέτρο χρειάζονται 500 γραμμάρια σπόρου και το 1 κιλό σπόρου κοστίζει 20,14 €;

Μονάδες 2



ΘΕΜΑ 4ο

Γράφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., 1000 σε μια σειρά και δημιουργούμε τον πολυψήφιο αριθμό $X=12345678910111213141516...9991000$

α) Πόσα ψηφία χρησιμοποιήσαμε μέχρι να γράψουμε και τον αριθμό 100; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 2

β) Ποιο ψηφίο του αριθμού X βρίσκεται στην 2014^η θέση;

Μονάδες 3

ΣΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

7^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»



Σάββατο 17 Ιανουαρίου 2015

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Να γίνουν οι πράξεις:

$$A = \frac{\left(4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4}\right) \div 1\frac{3}{2} + \frac{5}{9} + 2 \cdot 1007}{\left(2\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \frac{3}{2}}$$

β) Αν $A = 2015$, να λυθεί η εξίσωση $\frac{3x-3}{9} = \frac{A-2012}{3}$

ΘΕΜΑ 2

Α) Κάθε σχήμα αντιπροσωπεύει και έναν αριθμό.

$$\square \times \square = \bigcirc$$

$$\bigcirc + 200 = 600$$

$$\bigcirc \div \triangle = 25$$

$$\square - \triangle = \text{πεντάγωνο}$$

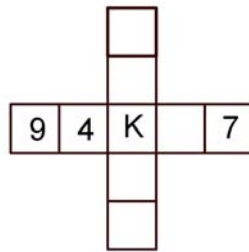
Ποιος είναι ο αριθμός που αντιπροσωπεύει κάθε σχήμα;

Β) Οι αριθμοί 2015 και 757 διαιρούμενοι με τον θετικό αριθμό x δίνουν και οι δύο υπόλοιπο 17.

Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x ;

ΘΕΜΑ 3

Τοποθετήστε τους αριθμούς από το 1 έως το 9 έναν σε κάθε τετράγωνο (κάθε αριθμός χρησιμοποιείται μόνο μία φορά) ώστε το άθροισμα της οριζόντιας στήλης να είναι ίσο με το άθροισμα της κατακόρυφης στήλης.



Ποιες τιμές παίρνει το K ;

ΘΕΜΑ 4ο

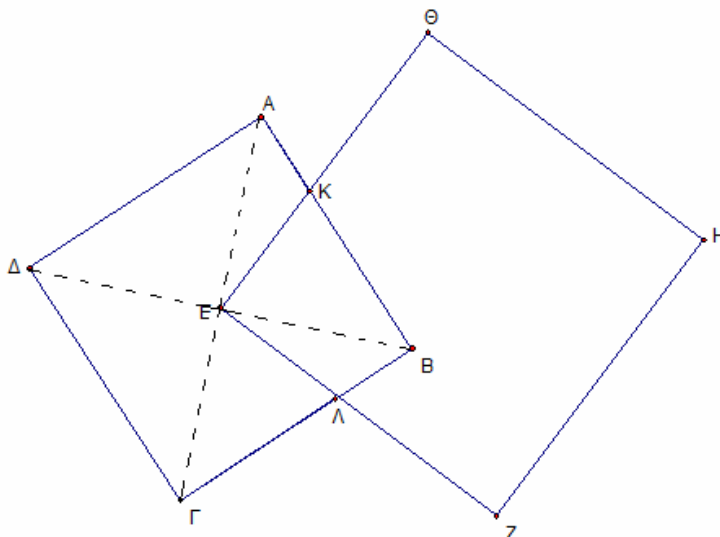
Το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει εμβαδόν 36 τετραγωνικά μέτρα και το $E\Theta HZ$ έχει πλευρά 7,5 μέτρα. Αν ξέρουμε ότι $KB = 2 AK$ και $\Gamma\Lambda = 2 \Lambda B$, να βρείτε:

α) Την πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου $E\Theta HZ$

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου $K\Lambda B$

δ) Αν η κορυφή E είναι το κέντρο του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, να βρείτε το εμβαδόν του κοινού μέρους τους, δηλαδή το εμβαδόν του τετραπλεύρου $K\Lambda B E$.





Σάββατο 16 Ιανουαρίου 2016

Α' Γυμνασίου

Θέμα 1°

Αν $x + y = 6 \cdot 2015 + \left[(4 + 2) : 2 - 6 : (2^2 - 1) \right]^{10} - 6 \cdot 2014$ και $y - \omega = \frac{46}{16} \cdot \frac{2}{23} + \frac{11}{6} - \frac{1}{8} : \frac{3}{2}$

α) Ναδειχθεί ότι ο αριθμός: $x + 2 \cdot y - \omega + 2$ είναι πρώτος.

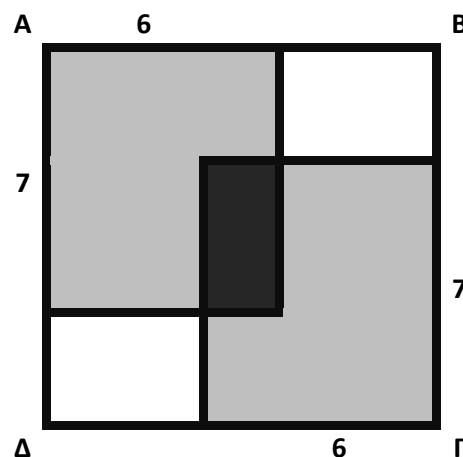
β) Μεταξύ ποιων διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται ο αριθμός: $K = A + \frac{B}{5}$ όπου $A = x + y$ και $B = y - \omega$.

Θέμα 2°

Δύο ίδια φύλλα χαρτιού με πλευρές 6 εκ. και 7 εκ. τοποθετούνται στις γωνίες του τετραγώνου **ΑΒΓΔ** πλευράς 10 εκ. Τα δύο φύλλα επικαλύπτονται, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Πόσο είναι το εμβαδό και πόση η περίμετρος της επικαλυπτόμενης περιοχής;

β) Πόσο είναι το εμβαδό της υπόλοιπης περιοχής;



Θέμα 3°

Δίνεται η πράξη $\alpha \# \beta = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha \cdot \beta$, όπου α, β φυσικοί αριθμοί.

α) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων i) $8 \# 12$ και ii) $(2 \# 3) \# (4 \# 5)$

β) Να υπολογιστεί η τιμή του α όταν ο φυσικός αριθμός α είναι πολλαπλάσιος του 5 και $\alpha \# 5 = 75$.

Θέμα 4°

Δίνεται ο αριθμός $A = 122333444455555 \dots 151515 \dots 15$, όπου κάθε αριθμός εμφανίζεται τόσες φορές όσες είναι η τιμή του στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (το 1 μία φορά, το 2 δύο φορές, το 3 τρεις φορές, κ.τ.λ. και τέλος το 15 δεκαπέντε φορές)

α) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων που χρειαζόμαστε για να γράψουμε τον αριθμό A

β) Ποιο ψηφίο βρίσκεται στην 100^n θέση;

Καλή επιτυχία



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

9ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»

Σάββατο 28 Ιανουαρίου 2017

Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1^ο

Δίνονται οι παραστάσεις $A = (2^5 - 3^3) : 5 + (6,4 - 5) \cdot \frac{20}{4}$ και $B = 18 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} : \frac{3}{4}\right) \cdot \left(1\frac{3}{6} - 1\right)$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων A και B.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A^2 + B^2 + A \cdot B + 1$

γ) Αν οι κ, λ είναι αντίστροφοι αριθμοί, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$(\kappa \cdot \lambda)^{2017} + \kappa \left(\lambda + \frac{1}{\kappa} \right)$$

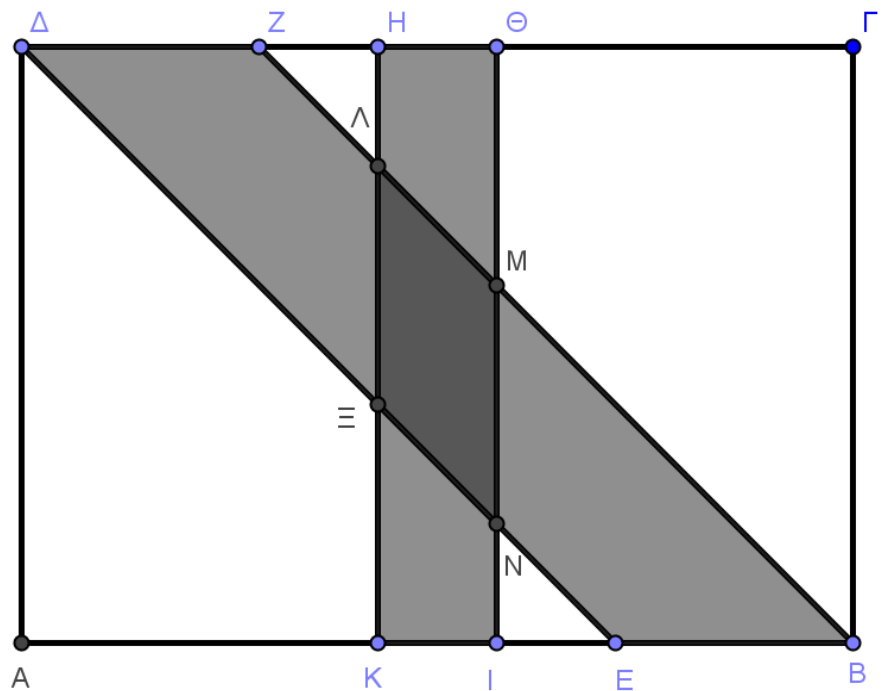
Θέμα 2^ο

Το διπλανό χωράφι ABΓΔ είναι σχήματος ορθογωνίου με πλευρές AB=7εκ. και AD=5εκ. από το οποίο διέρχονται δύο δρόμοι. Ακόμη, δίνεται ότι ΛΞ=2εκ. ΔΖ = BE = 2εκ και ΗΘ = KI = 1εκ.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωραφιού ABΓΔ.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου ΛΜΝΞ.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτεται από δρόμους.



Θέμα 3^ο

Ένας διψήφιος αριθμός είναι **πενταπλάσιος** από το άθροισμα των ψηφίων του.

α) Να δικαιολογήσετε πλήρως ότι το ψηφίο των μονάδων του είναι 0 ή 5.

β) Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 4^ο

Στο 8ο Πανελλήνιο Μαθηματικό Καλοκαιρινό Σχολείο της Νάουσας συμμετείχαν συνολικά **2017 μαθητές** (αγόρια και κορίτσια) από **8 τάξεις** (Ε' Δημοτικού έως και Γ' Λυκείου) από **9 νομούς**.

α) Να δικαιολογήσετε ότι υπήρχαν τουλάχιστον **1009 μαθητές** του ίδιου φύλου.

β) Να δικαιολογήσετε ότι υπήρχαν **15 μαθητές** του ίδιου φύλου, ίδιας τάξης και από τον ίδιο νομό.

Σας ευχόμαστε επιτυχία!



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

10ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»

Σάββατο 20 Ιανουαρίου 2018

Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1^ο

α) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \frac{3^2 + 4^2}{5} + \left[(3^2 - 2^3)^{2018} + 3 \cdot 6 + 1 \right]$ (2μ)

β) Να βρεθούν όλοι οι τριψήφιοι $\overline{\alpha\beta\gamma}$ αριθμοί (α εκατοντάδες, β δεκάδες, γ μονάδες), έτσι ώστε το άθροισμα $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ να είναι διαιρέτης του αριθμού A, όπου $a \neq 0$. (3μ)

Θέμα 2^ο

α) Μπορείτε να χωρίσετε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9 σε τρεις ομάδες των τριών αριθμών έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών στην κάθε ομάδα να είναι το ίδιο; Αν ναι να παρουσιάσετε μια τέτοια λύση, αν όχι να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. (1μ)

β) Μπορείτε να κάνετε το ίδιο με το πρώτο ερώτημα για τους αριθμούς 1, 3, 5, 7, 9, 12, 13, 14 και 15. (2μ)

γ) Μπορείτε να κάνετε το ίδιο με το πρώτο ερώτημα για τους αριθμούς 101, 202, 303, 404, 505, 606, 708, 2017 και 2018. (2μ)

Θέμα 3^ο

Από τους μαθητές ενός γυμνασίου το $\frac{1}{4}$ συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το $\frac{1}{5}$ στην περιβαλλοντική ομάδα, το $\frac{1}{3}$ στην ομάδα φωτογραφίας, ενώ οι υπόλοιποι 60 μαθητές συμμετέχουν σε άλλες ομάδες του σχολείου. Οι μαθητές των τριών αυτών ομάδων συμμετέχουν μόνο σε μία ομάδα, εκτός από 8 μαθητές που συμμετέχουν στη θεατρική και στην περιβαλλοντική ομάδα. Επίσης, όλοι οι μαθητές του σχολείου συμμετέχουν σε κάποια ομάδα.

α) Να βρεθεί το πλήθος των μαθητών του σχολείου. (3μ)

β) Αν το πλήθος των μαθητών είναι 240, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών που συμμετέχει μόνο στη θεατρική ομάδα. (2μ)

Θέμα 4^ο

Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αυξάνουμε το πλάτος του κατά 20% και μειώνουμε το μήκος του κατά 10%. Έτσι σχηματίζεται ένα νέο τετράπλευρο.

α) Να υπολογίσετε πόσο επί τοις εκατό αυξήθηκε ή μειώθηκε το εμβαδόν του σχήματος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(2μ)**

β) Αν το νέο τετράπλευρο είναι τετράγωνο με εμβαδόν 144 τ. μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου και να αποδείξετε ότι η περίμετρος αυξήθηκε λιγότερο από 3%. **(3μ)**

Σας ευχόμαστε καλή επιτυχία!



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
ΗΜΑΘΙΑΣ

11ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»

Σάββατο 19 Ιανουαρίου 2019

Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1^ο

Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}$$

α) Να υπολογίσετε την παράσταση Α. (2,5 μ)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x+1}{5} = A$ (2,5 μ.)

Θέμα 2^ο

Δίνονται οι τριψήφιοι αριθμοί **77P**, **6QP**, **QQP** και όπου **P, Q** είναι μη-μηδενικοί μονοψήφιοι ακέραιοι. Αν ισχύει ότι:

$$\begin{array}{r} 77P \\ + 6QP \\ \hline 1PP7 \end{array}$$

α) Να βρεθεί το άθροισμα **P+Q**. (2,5 μ.)

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας

β) Αν μ ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης της διαφοράς $A = 2019 - 1PP7$ να βρεθεί η τιμή

της παράστασης : $B = \frac{\mu - \frac{\mu}{2}}{\frac{\mu}{3} + 1} - \frac{1}{8}$ (2,5 μ)

Θέμα 3^ο

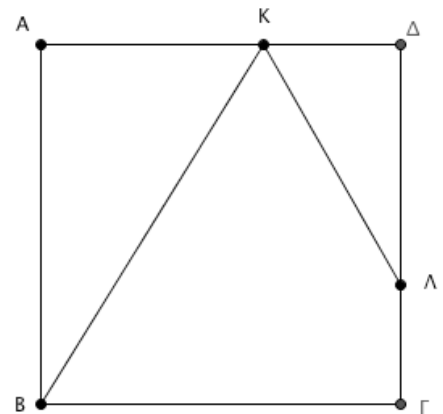
Ένα κομμάτι ύφασμα σχήματος ορθογωνίου χάνει στο πλύσιμο το $\frac{1}{20}$ του μήκους του και το

$\frac{1}{16}$ του πλάτους του. Αν το αρχικό πλάτος ήταν $\frac{4}{5}$ μ. , πόσο μήκος ύφασμα πρέπει να αγοράσουμε , για να έχουμε μετά το πλύσιμο 285 τ.μ.; (5 μ.)

Θέμα 4^ο

Έστω ΑΒΓΔ τετράγωνο με πλευρά 18 εκ. Αν το Κ βρίσκεται στην πλευρά ΑΔ και το σημείο Λ στην πλευρά ΓΔ, έτσι ώστε το $(ABK) = \frac{1}{3}(ABΓΔ)$ και το $(ΔΚΛ) = \frac{1}{6}(ΚΒΓΔ)$, να υπολογίσετε:

- α) Τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΚ και ΔΚΛ . (2 μ.)
- β) Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ και το ΔΛ. (2 μ.)
- γ) Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΒΓΛ. (1 μ.)



Σας ευχόμαστε επιτυχία!



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

12ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά «Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»

Σάββατο 18 Ιανουαρίου 2020

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται οι παραστάσεις

$$\alpha = (2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^1) : (7 \cdot 2 - 2^3)$$

$$\beta = \frac{7}{2} : (3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3})$$

A. Να υπολογιστούν οι τιμές των α και β . (2 μονάδες)

B. Αν $\alpha = 4$ και $\beta = 3$ οι τιμές των παραστάσεων από το ερώτημα A να υπολογιστεί η τιμή

της παράστασης $\Pi = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{7}{12}$ (1 μονάδα)

Γ. Αν $\alpha = 4$ και $\beta = 3$ οι τιμές των παραστάσεων από το ερώτημα A να εξεταστεί αν ο

αριθμός $\gamma = \alpha^2 + \beta^3 - 1^{2020}$ διαιρείται με το 2 και 3 συγχρόνως. (2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Οι μαθητές της Α' Γυμνασίου των Γυμνασίων της Βέροιας είναι λιγότεροι από 600.

Αν τους παρατάξουμε σε **τριάδες** περισσεύουν 2. Αν τους παρατάξουμε σε **τετράδες** ή σε **πεντάδες** επίσης περισσεύουν 2. Ποιος είναι ο **μέγιστος** αριθμός των μαθητών, αν γνωρίζουμε ότι το **άθροισμα** των **ψηφίων** τους είναι 11;

(Μονάδες 3)

B. Γράφουμε την λέξη **ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ** ξανά και ξανά, την μία δίπλα στην άλλη χωρίς κενά ώστε να σχηματιστεί η λέξη

ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

Ποιο γράμμα βρίσκεται στην 2020^η θέση;

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 3ο

Τρεις μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, όταν ξεκίνησαν το σχολείο, κατέθεσαν σε τραπεζικό λογαριασμό ένα χρηματικό ποσό. Ο πρώτος συνέβαλε στο λογαριασμό με **120 ευρώ** τα οποία αποτελούσαν τα $\frac{3}{5}$ του συνολικού χρηματικού ποσού κατάθεσης.

A. Ποιο ήταν το συνολικό χρηματικό ποσό της κατάθεσης; **(1 μονάδα)**

B. Αν ο δεύτερος συμμετείχε στην κατάθεση με τα $\frac{7}{20}$ του συνολικού χρηματικού ποσού,

πόσα χρήματα έβαλε στο λογαριασμό; **(1 μονάδα)**

Γ. Πόσα χρήματα έβαλε ο τρίτος; **(1 μονάδα)**

Δ. Μετά από αρκετά χρόνια συναντήθηκαν και σήκωσαν τα χρήματά τους από την τράπεζα που μαζί με τους τόκους είχαν γίνει **460 ευρώ**. Πως θα τα μοιραστούν, αν θεωρήσουμε ότι είναι δίκαιο να τα μοιραστούν ανάλογα με το αρχικό ποσό που είχε συμβάλει ο καθένας; **(2 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα ορθογώνιο **ΑΒΓΔ** αποτελείται από **1 άσπρο**, **3 ίσα πράσινα** και **3 ίσα κόκκινα** τετράγωνα.

Αν η πλευρά κάθε κόκκινου τετραγώνου είναι **8 cm** και η διακεκομμένη διαδρομή **Α Π Μ Τ Γ** είναι **50 cm**, να βρεθούν:

A. Η πλευρά κάθε πράσινου τετραγώνου. **(2 μονάδες)**

B. Η πλευρά του άσπρου τετραγώνου. **(1 μονάδα)**

Γ. Ο λόγος του εμβαδού των τριών πράσινων τετραγώνων προς το εμβαδόν του ορθογωνίου **ΑΒΓΔ**.

(2 μονάδες)



Καλή επιτυχία



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

15ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

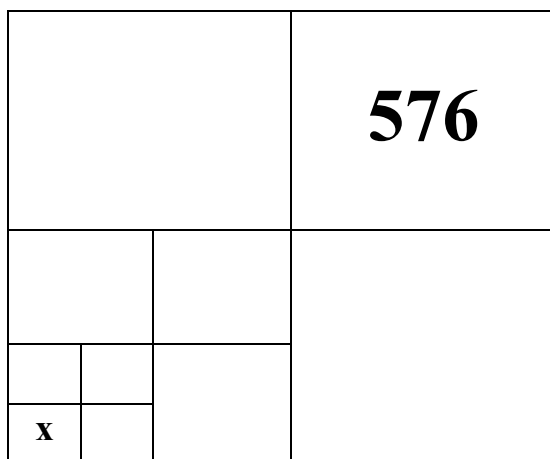
«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»

Σάββατο 20 Ιανουαρίου 2024

Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1^ο

Κάθε τετράγωνο του σχήματος χωρίζεται σε 4 ίσα τετράγωνα.



α) Να βρείτε το x .

β) Να υπολογίσετε την παράσταση: $A=3x^3-(x+3)^2-2x-1$

Θέμα 2^ο

Μία ομάδα μαθητών μοιράστηκαν μια σακούλα με καραμέλες.

- Την πρώτη μέρα έφαγαν το $\frac{1}{2}$ από τις καραμέλες της σακούλας.
- Τη δεύτερη μέρα έφαγαν τα $\frac{2}{3}$ από τις καραμέλες που έμειναν.
- Την τρίτη μέρα έφαγαν $\frac{3}{4}$ από τις καραμέλες που έμειναν.
- Την τέταρτη μέρα έφαγαν τα $\frac{4}{5}$ από τις καραμέλες που έμειναν.
- Την πέμπτη μέρα έφαγαν τα $\frac{5}{6}$ από τις καραμέλες που έμειναν.

Αν στο τέλος της πέμπτης μέρας έμεινε μόνο **1** καραμέλα, να βρείτε πόσες καραμέλες είχε αρχικά η σακούλα.

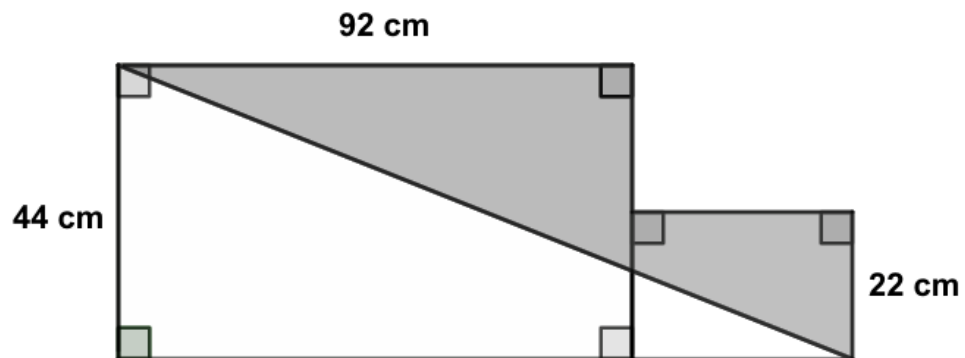
Θέμα 3^ο

α) Ένας τριψήφιος αριθμός α με πρώτο ψηφίο το 3, όταν διαιρείται με τους αριθμούς 2,3,4,5, αφήνει υπόλοιπο 1. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που ικανοποιεί τα παραπάνω;

β) Είναι πρώτος ή σύνθετος ;

Θέμα 4^ο

Να βρείτε το εμβαδόν της γκρι επιφάνειας στο παρακάτω σχήμα.



Καλή επιτυχία!

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ (Σχολ. έτος 2008-09)

ΘΕΜΑ 1^ο

Σχεδιάζουμε με τελείες πάνω σε μια ευθεία τα άτομα που περιμένουν στη σειρά. Συμφωνούμε, αυτός που είναι πιο μπροστά από κάποιον άλλο να βρίσκεται στα δεξιά του στα σχεδιαγράμματα που ακολουθούν.

Τοποθετούμε πρώτα τον Βασίλη (σημείο Β) πάνω στην ευθεία και κατόπιν την Αθηνά (σημείο Α) που βρίσκεται 3 θέσεις μπροστά από τον Βασίλη (Σχεδιάγραμμα 1).

Βάζουμε ακόμη 3 τελείες στα δεξιά του σημείου Α, ώστε μπροστά από τον Βασίλη να βρίσκονται 6 άτομα (Σχεδιάγραμμα 2). Βάζουμε 4 ακόμη τελείες αριστερά του Β, ώστε η Αθηνά να έχει πίσω της 7 άτομα (Σχεδιάγραμμα 3).

Στο τελευταίο σχεδιάγραμμα βλέπουμε ότι υπάρχουν 11 τελείες, άρα υπάρχουν συνολικά στη σειρά 11 άτομα.



Σχεδιάγραμμα 1



Σχεδιάγραμμα 2



Σχεδιάγραμμα 3

ΘΕΜΑ 2^ο

Μετατρέπουμε πρώτα τους δεκαδικούς σε κλάσματα:

$$0,7 = \frac{7}{10}, \quad 0,5 = \frac{5}{10}, \quad 0,1 = \frac{1}{10}$$

$$\text{ΕΚΠ}(2,3,4,6,10,12,60) = 60$$

Μετατρέπουμε όλους τους αριθμούς σε κλάσματα με παρονομαστή 60:

$$1^{\text{η}} \text{ γραμμή: } \frac{1}{4} = \frac{15}{60}, \quad 1 = \frac{60}{60}, \quad 0,7 = \frac{7}{10} = \frac{42}{60}, \quad \frac{2}{3} = \frac{40}{60}$$

$$2^{\text{η}} \text{ γραμμή: } \frac{5}{60}, \quad \frac{1}{3} = \frac{20}{60}, \quad \frac{1}{2} = \frac{30}{60}, \quad \frac{1}{10} = \frac{6}{60}$$

$$3^{\text{η}} \text{ γραμμή: } 0,5 = \frac{5}{10} = \frac{30}{60}, \quad \frac{1}{6} = \frac{10}{60}, \quad \frac{1}{3} = \frac{20}{60}, \quad 0,1 = \frac{1}{10} = \frac{6}{60}$$

$$4^{\text{η}} \text{ γραμμή: } \frac{3}{2} = \frac{90}{60}, \quad \frac{1}{12} = \frac{5}{60}, \quad 1 = \frac{60}{60}$$

Το τετράγωνο τώρα είναι το παρακάτω:

Για να μεταβούμε από το Α στο Β πρέπει να κάνουμε 3 οριζόντιες διαδρομές και 3 κατακόρυφες. Το άθροισμα που θέλουμε είναι ίσο με $2 = \frac{120}{60}$ και είναι το άθροισμα 7 τετραγώνων

(τα 6 της διαδρομής συν το τετράγωνο Α).

Από τα 7 τετράγωνα, τα δύο είναι τα Α και Β με

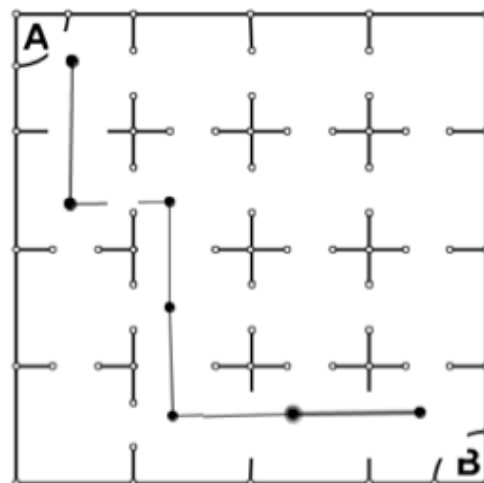
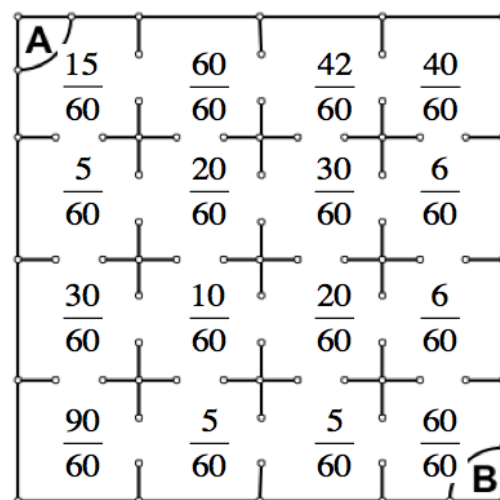
$$\text{άθροισμα } \frac{15}{60} + \frac{60}{60} = \frac{75}{60}.$$

Τα υπόλοιπα 5 τετράγωνα πρέπει να έχουν

$$\text{άθροισμα } \frac{120}{60} - \frac{75}{60} = \frac{45}{60}.$$

Η μόνη διαδρομή που μπορεί να δώσει το άθροισμα αυτό, είναι αυτή του διπλανού σχήματος, δηλ.

$$\frac{5}{60} + \frac{20}{60} + \frac{10}{60} + \frac{5}{60} + \frac{5}{60} = \frac{45}{60}.$$



ΘΕΜΑ 3^ο

α) Το έτος 1800 διαιρείται ακριβώς δια 30 ($1800:30=60$)

Τα έτη μετά το 1800 που διαιρούνται δια 30 αφήνουν υπόλοιπο 13 είναι τα:

$$1800+13=1813$$

$$1813+30=1843$$

$$1843+30=\mathbf{1873}$$

(το $1873+30=1903$ ανήκει στον 20^ο αιώνα)

β) Το 1800 διαιρούμενο δια 31 δίνει πηλίκο 58 και υπόλοιπο 2, δηλ. κατά 11 μικρότερο του 13

Το 1^ο έτος μετά το 1800 που διαιρούμενο δια 31 αφήνει υπόλοιπο 13 είναι το $1800+11=1811$.

Τα επόμενα έτη που διαιρούνται με το 31 αφήνουν υπόλοιπο 13 είναι τα

$$1811+31=1842$$

$$1842+31=\mathbf{1873}$$

(το $1873+31=1904$ ανήκει στον 20^ο αιώνα)

γ) Από τα (α) και (β) προκύπτει ότι το έτος γέννησης του Καραθεοδωρή είναι το **1873**.

δ) Για να διαιρείται ένας αριθμός δια 2 πρέπει να λήγει σε 0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8.

Για να διαιρείται δια 5 πρέπει να λήγει σε 0 ή 5.

Άρα, για να διαιρείται ταυτόχρονα δια 2 και 5 πρέπει να λήγει σε 0.

Επομένως, το έτος θανάτου του Καραθεοδωρή είναι κάποιο από τα

1910, 1920, 1930, 1940, 1950, 1960, 1970, 1980, 1990

Για να διαιρείται ένας αριθμός δια 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται δια 4. Επειδή οι αριθμοί 1920, 1940, 1960, 1980 διαιρούνται δια 4, απομένουν οι αριθμοί 1910, 1930, 1950, 1970, 1990.

Για να διαιρείται ένας αριθμός δια 3, πρέπει το άθροισμα των ψηφίων του να διαιρείται δια 3.

Από τα έτη που έμειναν, αυτό συμβαίνει μόνο στο 1950 ($1+9+5+0=15=3\cdot 5$)

Άρα ο Καραθεοδωρή πέθανε το 1950.

ε) Αφού ο Καραθεοδωρή γεννήθηκε το 1873 και πέθανε το 1950, έζησε $1950-1873=77$ χρόνια)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ (εκτός λύσης)

Ο μεγάλος μαθηματικός Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή γεννήθηκε στο Βερολίνο της Γερμανίας την 13^η Σεπτ. 1873 και πέθανε στο Μόναχο της Γερμανίας την 2^η Φεβρ. 1950 αφήνοντας πίσω του ένα πολύ μεγάλο έργο.

ΘΕΜΑ 4^ο

Ονομάζουμε Α και Β τους δύο δίσκους της ζυγαριάς.

α) Για να ζυγίσουμε βάρος 6 γραμ., θέτουμε στον δίσκο Α ένα βάρος των 15 γραμ. και στον δίσκο Β ένα βάρος των 9 γραμμαρίων.

Για να ισορροπήσει η ζυγαριά πρέπει να τοποθετήσουμε στον δίσκο Β βάρος $15-9=6$ γραμ.

β) Για να ζυγίσουμε βάρος 12 γραμ. τοποθετούμε στον δίσκο Α βάρος 21 γραμ. και στον δίσκο Β βάρος 9 γραμ. Για να ισορροπήσει η ζυγαριά πρέπει να τοποθετήσουμε στον δίσκο Β βάρος $21-9=12$ γραμ.

γ) Για να ζυγίσουμε βάρος 3 γραμ. τοποθετούμε στον δίσκο Α 2 βάρη 9 γραμ. και 15 γραμ. και στον δίσκο Β βάρος 21 γραμ. Για να ισορροπήσει η ζυγαριά πρέπει να τοποθετήσουμε στον δίσκο Β βάρος $9+15-21=3$ γραμ.

δ) Όλα τα σταθμά που έχουμε στη διάθεσή μας είναι πολλαπλάσια του 3. Κάθε βάρος που ζυγίζουμε είναι το άθροισμα ή διαφορά τέτοιων βαρών, άρα είναι και αυτό πολλαπλάσιο του 3.

ε) Επειδή ούτε το 2008 ούτε το 2009 διαιρούνται δια 3 (διότι το άθροισμα των ψηφίων τους δεν διαιρείται δια 3), δε μπορούμε να ζυγίσουμε ούτε βάρος 2008 ούτε βάρος 2009 γραμ.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

2^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα
Μαθηματικά.
«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»



Σάββατο 23 Ιανουαρίου 2010

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5 σχηματίζουμε εξαψήφιους αριθμούς χρησιμοποιώντας όλα τα ψηφία μία φορά το καθένα, π.χ 235014, 540213 κ.λ.π (το 0 δεν μπορεί να είναι 1^ο ψηφίο).

α) Δικαιολογήστε γιατί όλοι οι εξαψήφιοι αυτοί αριθμοί διαιρούνται δια του 3, αλλά δε διαιρούνται δια 9

β) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορούμε να σχηματίσουμε ώστε να διαιρείται ακριβώς και δια 4 και δια 5;

Απάντηση

α) Επειδή χρησιμοποιούμε, όλα τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, μια φορά το καθένα, το άθροισμα των ψηφίων του εξαψήφιου αριθμού που θα προκύψει είναι: $0+1+2+3+4+5=15$. Σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ο εξαψήφιος αυτός αριθμός, διαιρείται με το 3 αλλά όχι με το 9. (Ένας Φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9 όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα. Ο αριθμός 15 διαιρείται με το 3 αλλά όχι με το 9.)

β) Γνωρίζουμε ότι ένας Φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρούνται με το 4. Ενώ ένας Φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5 όταν το ψηφίο των μονάδων του είναι 0 ή 5. Επομένως το τελευταίο διψήφιο

τμήμα του αριθμού μας, πρέπει να είναι 20 ή 40. Επειδή ζητάμε τον μεγαλύτερο εξαψήφιο αριθμό, αυτός θα είναι ο 543120.

ΘΕΜΑ 2°

Ο Κώστας είχε μερικά χρυσά νομίσματα και αποφάσισε μια Κυριακή να τα ξοδέψει με τον εξής τρόπο:

Κάθε Δευτέρα θα τα διπλασίαζε και κάθε Παρασκευή θα ξόδευε 32. Αν το Σάββατο της 4ης εβδομάδας δεν του είχε απομείνει κανένα νόμισμα, πόσα νομίσματα είχε στην αρχή ;

Απάντηση

Ξεκινώντας χρονικά από τέλος έχουμε:

Σάββατο 4^{ης} εβδομάδας: 0 νομίσματα

Παρασκευή 4^{ης} εβδομάδας: είχε 32 νομίσματα , ξόδεψε 32 νομίσματα και έμειναν 0

Δευτέρα 4^{ης} εβδομάδας: είχε τα μισά της Παρασκευής. Δηλαδή $32:2=16$, τα οποία διπλασίασε και έτσι έγιναν 32 νομίσματα.

Παρασκευή 3^{ης} εβδομάδας: είχε $16+32=48$ νομίσματα , ξόδεψε 32 νομίσματα και έμειναν 16

Σκεπτόμενοι με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε ότι την

Δευτέρα 3^{ης} εβδομάδας: είχε $48:2=24$ νομίσματα, τα διπλασίασε και έγιναν 48

Παρασκευή 2^{ης} εβδομάδας: είχε $24+32=56$ νομίσματα , ξόδεψε 32 νομίσματα και έμειναν 24

Δευτέρα 2^{ης} εβδομάδας: είχε $56:2=28$ νομίσματα, τα διπλασίασε και έγιναν 56

Παρασκευή 1^{ης} εβδομάδας: $28+32=60$ είχε 60 νομίσματα , ξόδεψε 32 νομίσματα και έμειναν 28

Δευτέρα 1^{ης} εβδομάδας: είχε $60:2=30$ νομίσματα, τα διπλασίασε και έγιναν 60

ΘΕΜΑ 3°

Θεωρούμε όλους τους περιττούς αριθμούς από το 1 ως το 2009, δηλαδή τους αριθμούς 1, 3, 5, 7, ..., 2007, 2009. Το πλήθος των αριθμών αυτών το ονομάζουμε Α. Θεωρούμε επίσης όλους τους άρτιους αριθμούς από το 2 ως το 2010, δηλαδή τους αριθμούς 2, 4, 6, 8, ..., 2008, 2010. Το πλήθος των αριθμών αυτών το ονομάζουμε Β.

- α) Να δικαιολογήσετε ότι $A = B$
- β) Να βρείτε το πλήθος των αριθμών κάθε ομάδας. Είναι ο αριθμός αυτός άρτιος ή περιττός;
- γ) Να βρείτε τη θέση που κατέχει ο μεσαίος αριθμός σε κάθε ομάδα; (δηλαδή $1^{\text{ος}}, 2^{\text{ος}}, 3^{\text{ος}}, \dots$)
- δ) Να βρείτε τον μεσαίο αριθμό της δεύτερης ομάδας 2, 4, 6, 8, ..., 2008, 2010
- ε) Να βρείτε τον μεσαίο αριθμό της πρώτης ομάδας 1, 3, 5, 7, ..., 2007, 2009

Απάντηση

α) Θεωρούμε και τις δυο ομάδες μαζί από το 1 έως το 2010. Το συνολικό πλήθος των αριθμών αυτών προφανώς είναι 2010 (άρτιος αριθμός). Χωρίζοντας τους αριθμούς αυτούς στις δυο ομάδες των άρτιων και των περιττών, προκύπτουν οι δυο ισοπληθείς ομάδες A και B. Άρα είναι $A=B$.

β) Επειδή είναι $A=B$ και $A+B=2010$, άρα $A=B=1005$. Ο αριθμός αυτός είναι περιττός.

γ) Αφού η κάθε ομάδα 1005 αριθμούς, ο μεσαίος κατέχει την $503^{\text{η}}$ θέση.

δ) Ο μεσαίος αριθμός της $2^{\text{ης}}$ ομάδας είναι ο $(2+2010):2=2012:2=1006$

ε) Ο μεσαίος αριθμός της $1^{\text{ης}}$ ομάδας είναι ο $(1+2009):2=2010:2=1005$

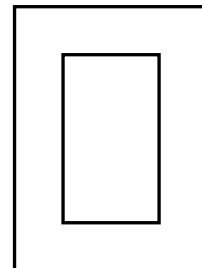
ΘΕΜΑ 4^ο

Η μεγαλύτερη πλευρά του εξωτερικού ορθογωνίου του διπλανού σχήματος μειώθηκε κατά 20% ενώ η μικρότερη πλευρά του μειώθηκε κατά 30% δημιουργήθηκε έτσι το εσωτερικό ορθογώνιο.

Αν το εμβαδόν του εσωτερικού ορθογωνίου είναι 112 τετραγωνικά εκατοστά

α) να βρεθεί το εμβαδόν του εξωτερικού ορθογωνίου.

β) αν οι πλευρές των ορθογωνίων είναι ακέραιοι αριθμοί και η περίμετρος του εσωτερικού ορθογωνίου είναι 46 εκατοστά να βρεθούν οι διαστάσεις των δύο ορθογωνίων



Απάντηση

α) Η μεγαλύτερη πλευρά του εξωτερικού ορθογωνίου, μειώθηκε κατά 20%. Επομένως η μεγαλύτερη πλευρά του εσωτερικού ορθογωνίου είναι το 80% της αντίστοιχης πλευράς του εξωτερικού ορθογωνίου. Δηλαδή είναι ίση με τα $\frac{80}{100} = \frac{8}{10}$ αυτής. Όμοια βρίσκουμε ότι η μικρότερη πλευρά του εσωτερικού

ορθογωνίου είναι ίση με τα $\frac{7}{10}$ της αντίστοιχης πλευράς του εξωτερικού ορθογωνίου.

Επομένως το εμβαδόν του εσωτερικού ορθογωνίου είναι ίσο με τα $\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{56}{100}$ του εμβαδού του εξωτερικού ορθογωνίου.

Δηλαδή τα $\frac{56}{100}$ είναι 112 τετραγωνικά εκατοστά.

Το $\frac{1}{100}$ είναι $112:56=2$ τετραγωνικά εκατοστά.

Τα $\frac{100}{100}$ είναι $2 \cdot 100=200$ τετραγωνικά εκατοστά.

Άρα το εμβαδόν του εξωτερικού ορθογωνίου είναι 200 τετραγωνικά εκατοστά.

β) Για το εσωτερικό ορθογώνιο γνωρίζουμε ότι έχει εμβαδόν 112 τετραγωνικά εκατοστά και περίμετρο 46 εκατοστά. Δηλαδή οι πλευρές του έχουν γινόμενο 112 και άθροισμα $46:2=23$. Ψάχνουμε επομένως δυο ακραίους θετικούς αριθμούς που να έχουν γινόμενο 112 και άθροισμα 23. Έχουμε:

- i. $112 \cdot 1=112$ και $112+1=113$
- ii. $56 \cdot 2=112$ και $56+2=58$
- iii. $28 \cdot 4=112$ και $28+4=32$
- iv. $16 \cdot 7=112$ και $16+7=23$ ✓
- v. $14 \cdot 8=112$ και $14+8=22$

Συνεπώς οι μοναδικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί που έχουν γινόμενο 112 και άθροισμα 23 είναι οι : 16 και 7, που είναι και οι διαστάσεις του εσωτερικού ορθογωνίου.

Για το εξωτερικό ορθογώνιο έχουμε ότι :

Τα $\frac{8}{10}$ της μεγαλύτερης πλευράς του είναι 16 εκατοστά.

Το $\frac{1}{10}$ της μεγαλύτερης πλευράς του είναι $16:8 = 2$ εκατοστά.

Τα $\frac{10}{10}$ της μεγαλύτερης πλευράς του είναι $2 \cdot 10 = 20$ εκατοστά.

Άρα η μεγαλύτερη πλευρά του εξωτερικού ορθογωνίου είναι 20 εκατοστά. Και αφού το εμβαδόν είναι 200 τ.ε. η μικρή πλευρά του είναι 10 εκατοστά.

Σημείωση Επειδή ίσως κάποιοι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου δεν είναι ακόμα ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με την έννοια της “ μεταβλητής ” απεφεύχθη η χρήση της στην λύση των ασκήσεων, αν και πιστεύουμε ότι θα ήταν χρήσιμη ειδικότερα στο 2^ο και 4^ο θέμα.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

3^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά.
«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»



Σάββατο 15 Ιανουαρίου 2011

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Να βρεθεί ο ακέραιος αριθμός α , ώστε να ισχύει : $\frac{31}{4} < \frac{\alpha}{6} < \frac{63}{8}$

ΛΥΣΗ

$$\text{Επειδή: } \frac{31}{4} = \frac{31 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{186}{24} \qquad \frac{4 \cdot \alpha}{4 \cdot 6} = \frac{4 \cdot \alpha}{24} \qquad \text{και} \qquad \frac{63}{8} = \frac{63 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{189}{24}$$

η δοσμένη σχέση είναι ισοδύναμη με την :

$$\frac{186}{24} < \frac{4 \cdot \alpha}{24} < \frac{189}{24}, \text{ επομένως και με την : } 186 < 4 \cdot \alpha < 189 .$$

$$\text{Άρα } 4 \cdot \alpha = 187 \text{ ή } 4 \cdot \alpha = 188$$

Από τις δυο αυτές εξισώσεις μόνο η δεύτερη έχει ακέραια λύση την $\alpha = 47$

ΘΕΜΑ 2^ο

Κατά τη διάρκεια του ίδιου μήνα , τρεις Κυριακές αντιστοιχούν σε άρτια ημερομηνία. Στις 20 αυτού του μήνα , ποια μέρα θα είναι ;

ΛΥΣΗ

Για να αντιστοιχούν οι τρεις Κυριακές οπουδήποτε μήνα σε άρτια ημερομηνία, πρέπει την 1^η Κυριακή να έχουμε ημερομηνία 2 , την 3^η Κυριακή 16 ($16=2+7+7$) και την 5^η Κυριακή 30 ($30=16+7+7$). Τη 2^η και την 4^η Κυριακή θα έχουμε ημερομηνία 9 και 23 αντίστοιχα. Δηλαδή περιττή ημερομηνία.

Αν την 1^η Κυριακή του μήνα έχουμε ημερομηνία 4 (άρτιος), τότε την 2^η Κυριακή θα έχουμε 11 (περιττός), την 3^η Κυριακή θα έχουμε 18 (άρτιος), την 4^η Κυριακή θα έχουμε 25 (περιττός) και την 5^η Κυριακή θα έχουμε $25+7=32$. Άτοπο.

Στο ίδιο συμπέρασμα (άτοπο) θα καταλήξουμε αν την 1^η Κυριακή του μήνα έχουμε οποιαδήποτε άλλη άρτια ημερομηνία.

Έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι στις 20 αυτού του μήνα είναι μεταξύ της 3^{ης} και 4^{ης} Κυριακής , ημέρα Πέμπτη.

Κ	Δ	Τ	Τ	Π	Π	Σ
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Κ	Δ	Τ	Τ	Π	Π	Σ
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31
32						

ΘΕΜΑ 3^ο

Ο αριθμός $k = 201020102010 \dots 2010$ έχει δημιουργηθεί επαναλαμβάνοντας 2011 φορές τον αριθμό 2010.

- α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός k διαιρείται δια 9
- β) Αν ο αριθμός k **δεν** διαιρείται δια 9, πόσες ακόμη φορές πρέπει να επαναλάβουμε το 2010 (το λιγότερο δυνατό) ώστε ο νέος αριθμός να διαιρείται δια 9;

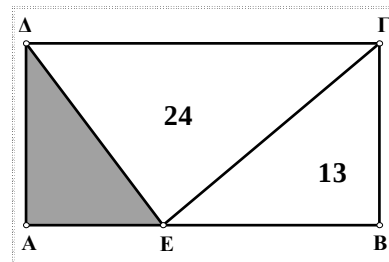
ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός 2010 έχει άθροισμα ψηφίων 3. Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού k είναι : $2011 \cdot 3 = 6033$. Ο αριθμός αυτός δεν διαιρείται δια 9 διότι έχει άθροισμα ψηφίων 12. Συνεπώς ο αριθμός k δεν διαιρείται δια 9.

β) Ο επόμενος ακέραιος μετά τον 6033 που διαιρείται με το 9, είναι ο 6039. Άρα για να διαιρείται ο k δια 9 θα πρέπει να αυξήσουμε το άθροισμα των ψηφίων του, **τουλάχιστον** κατά 6 ($6039 - 6033 = 6$). Επομένως θα πρέπει, στον αριθμό k να επαναλάβουμε το 2010 **τουλάχιστον 2 φορές**, ώστε ο νέος αριθμός να διαιρείται δια 9.

ΘΕΜΑ 4^ο

Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ αποτελείται από τρία τρίγωνα. Το εμβαδόν του $EB\Gamma$ είναι 13 τετρ. εκατοστά και το εμβαδόν του $\Gamma\Delta E$ είναι 24 τετρ. εκατοστά. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$.



ΛΥΣΗ

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχουν την ίδια βάση ($\Gamma\Delta$) και το ίδιο ύψος. Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$. Έτσι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι: $24 \cdot 2 = 48$. Συνεπώς το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι $48 - 24 - 13 = \mathbf{11}$ τετρ. εκατοστά.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

4^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά.
«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»



Σάββατο 21 Ιανουαρίου 2012

Α' Γυμνασίου

Θέμα 1^ο

Να συμπληρώσετε με ψηφία τα δύο κενά τετράγωνα του αριθμού $\boxed{2}\boxed{}$ ώστε ο τριψήφιος που θα προκύψει να διαιρείται ακριβώς δια 2, 5 και 9. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Ο αριθμός που θα προκύψει πρέπει να είναι πολλαπλάσιο κοινό πολλαπλάσιο των 2,5 και 9. Δηλαδή κοινό πολλαπλάσιο του Ε.Κ.Π. $(2,5,9) = 90$. Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 270.

β' τρόπος

Ο ζητούμενος αριθμός:

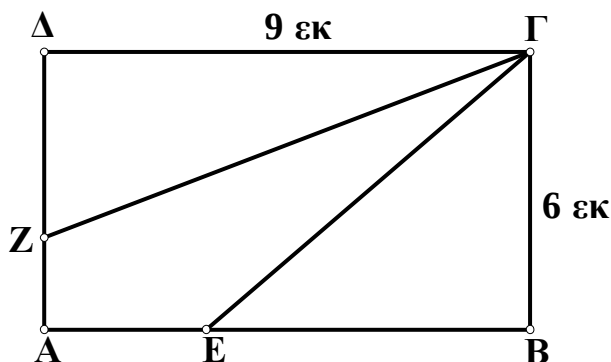
- διαιρείται δια 2 άρα είναι άρτιος (ζυγός) , επομένως το τελευταίο του ψηφίο είναι ένα από τα 0,2,4,6,8.
- διαιρείται δια 5 άρα το τελευταίο του ψηφίο είναι ένα 0 ή 5.
Άρα το τελευταίο του ψηφίο είναι το 0.
- διαιρείται δια 9 άρα το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9. Και επειδή το πρώτο ψηφίο είναι το 2, το τρίτο είναι το 0, υποχρεωτικά το δεύτερο είναι το 7 . $(2 + 7 + 0 = 9)$.
Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 270.

Θέμα 2^ο

Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, οι διαστάσεις είναι $AB = 9$ εκ. και $AD = 6$ εκ. Είναι επίσης $BE = 6$ εκ.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

β) Αν για το σημείο Ζ της πλευράς ΑΔ το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΓΖΑΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του ΑΒΓΔ, να βρεθεί το μήκος του τμήματος ΑΖ.



Λύση

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΕ είναι ίσο με $\frac{1}{2} \cdot BG \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ τετ.εκ. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $(AB) \cdot (AD) = 9 \cdot 6 = 54$ τετ.εκ. . Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. $\left(18 = \frac{1}{3} \cdot 54\right)$

β) Έχουμε: $(BGE) = \frac{1}{3} \cdot (ABGD)$ και $(GZAE) = \frac{1}{3} \cdot (ABGD)$ άρα και $(GDZ) = \frac{1}{3} \cdot (ABGD)$. Δηλαδή $(GDZ) = 18$ τετ. εκ.

Είναι: $\frac{1}{2} \cdot (GD) \cdot (DZ) = 18$ δηλαδή $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (DZ) = 18$ Επομένως $(DZ) = 4$ εκ. και $(AZ) = (AD) - (DZ) = 6 - 4 = 2$ εκ.

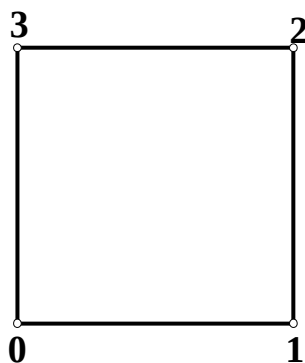
Θέμα 3^ο

Στις κορυφές του τετραγώνου του σχήματος 1 είναι τοποθετημένοι οι αριθμοί 0, 1, 2, 3. Εκλέγουμε 3 από τις 4 κορυφές και προσθέτουμε σε κάθε μια το 1 (αν π.χ εκλέξουμε τις κορυφές με τους αριθμούς 0, 1 και 3 οι κορυφές θα γίνουν 1, 2 και 4 αντίστοιχα).

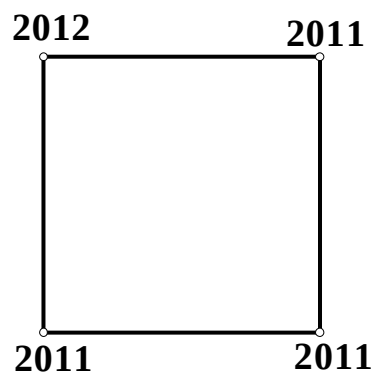
Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται όσες φορές χρειαστεί.

α) Τι παρατηρείτε για το άθροισμα των αριθμών στις 4 κορυφές μετά από κάθε διαδικασία;

β) Να αποδείξετε ότι δεν μπορούμε να φτάσουμε στο αποτέλεσμα του σχήματος 2 οσοδήποτε φορές και αν εκτελέσουμε την παραπάνω διαδικασία.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Λύση

α) Αρχικά το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στις τέσσερις κορυφές είναι: $0 + 1 + 2 + 3 = 6$. Επειδή κάθε φορά προσθέτουμε τον αριθμό 1 σε κάθε μια από τις **τρεις** κορυφές που επιλέξαμε, το υπάρχον άθροισμα αυξάνεται κατά 3 και έτσι το άθροισμα των τεσσάρων κορυφών είναι πολλαπλάσιο του 3, αφού και το 6 (αρχικό άθροισμα) είναι πολλαπλάσιο του 3.

α) Δεν μπορούμε να φτάσουμε στο αποτέλεσμα του σχήματος 2 οσοδήποτε φορές και αν εκτελέσουμε την παραπάνω διαδικασία, διότι το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών που βρίσκονται στις κορυφές του είναι:
 $2011 + 2011 + 2011 + 2012 = 8045$ που δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, διότι: $8 + 0 + 4 + 5 = 17$.

Θέμα 4^ο

Αν τοποθετήσουμε το ψηφίο 7 στο τέλος ενός διψήφιου αριθμού, ο τριψήπιος που προκύπτει είναι κατά 529 μεγαλύτερος του αρχικού διψήφιου. Να βρεθεί ο διψήπιος αριθμός.

Λύση

Έστω ότι ο διψήπιος αριθμός που έχουμε αρχικά έχει τη μορφή $\alpha\beta$. Δηλαδή το ψηφίο των δεκάδων είναι α και το μονάδων το β . Όταν τοποθετήσουμε το ψηφίο 7 στο τέλος του αριθμού αυτού ο τριψήπιος που προκύπτει έχει τη μορφή $\alpha\beta 7$. Με ψηφίο μονάδων το των 7, δεκάδων το β και εκατοντάδων το α . και ισχύει: $\alpha\beta 7 = 529 + \alpha\beta$. Δηλαδή :

$$\begin{array}{r}
 + \quad \begin{array}{ccc} 5 & 2 & 9 \\ & \alpha & \beta \\ \hline & \alpha & \beta & 7 \end{array} \quad \text{ή} \quad + \quad \begin{array}{ccc} 5 & 2 & 9 \\ & \alpha & 8 \\ \hline & \alpha & 8 & 7 \end{array} \quad \text{ή} \quad + \quad \begin{array}{ccc} 5 & 2 & 9 \\ & 5 & 8 \\ \hline 5 & 8 & 7 \end{array}
 \end{array}$$

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 58.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

5^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά «Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»



Σάββατο 12 Ιανουαρίου 2013

Α' Γυμνασίου

Απαντήσεις

Θέμα 1^ο

Ένας αριθμός αποτελείται από 4025 ψηφία από τα οποία τα 2012 είναι τριάρια και 2013 είναι δυνάρια με τυχαία σειρά (ανακατωμένα μεταξύ τους).

α) Εξηγήστε γιατί ο αριθμός διαιρείται δια 9.

Μονάδες 3

β) Ποια πρέπει να είναι τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού ώστε ο αριθμός να διαιρείται δια 4;

Μονάδες 2

Λύση

α) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο διαιρετότητας του 9:

«ένας αριθμός διαιρείται με το 9 αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9».

Αρκεί δηλαδή να υπολογίσουμε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού. Πράγματι αυτό είναι:

$$3 \cdot 2012 + 2 \cdot 2013 = 6036 + 4026 = 10.062$$

Ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 9 διότι το άθροισμα των ψηφίων του είναι $1+0+0+6+2=9$ άρα και ο αρχικός αριθμός διαιρείται με το 9.

β) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο διαιρετότητας του 4:

«ένας αριθμός διαιρείται με το 4 αν και μόνο αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4».

Αρκεί λοιπόν να βρούμε τους διψήφιους αριθμούς που αποτελούνται από τα ψηφία 2 και 3 και διαιρούνται δια 4. Όλοι οι διψήφιοι αριθμοί με ψηφία 2 και 3 είναι οι 22, 23, 32, 33. Ο μόνος που διαιρείται με το 4 είναι ο 32. Άρα, **τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού είναι τα 3 και 2.**

Θέμα 2^ο

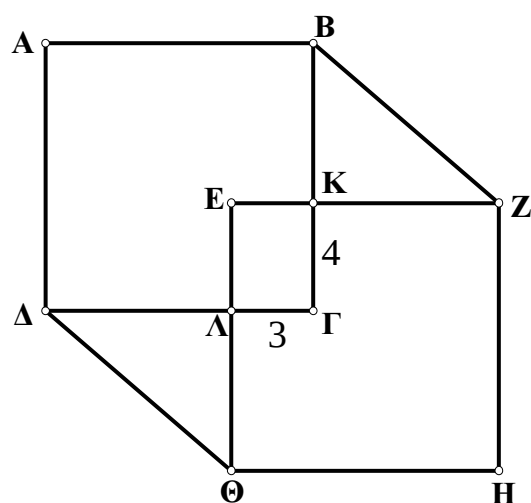
Δύο ίσα τετράγωνα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ με πλευρά 10cm το καθένα, έχουν κοινό το ορθογώνιο $E\text{K}\Gamma\Lambda$ με διαστάσεις 3cm και 4cm όπως δείχνει το σχήμα.

α) Υπολογίστε τα μήκη των καθετών πλευρών των δύο ορθογωνίων τριγώνων BKZ και $\Delta\Lambda\Theta$.

Μονάδες 1

β) Υπολογίστε το εμβαδόν του εξαγώνου $ABZH\Theta\Delta$

Μονάδες 4



Λύση

α) Είναι $BK = B\Gamma - K\Gamma = 10 - 4 = 6\text{cm}$, $KZ = EZ - EK = 10 - 3 = 7\text{cm}$,
 $\Delta\Lambda = \Gamma\Delta - \Gamma\Lambda = 10 - 3 = 7\text{cm}$, $\Lambda\Theta = E\Theta - E\Lambda = 10 - 4 = 6\text{cm}$.

β) Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του εξαγώνου το χωρίζουμε σε επιμέρους σχήματα των οποίων τα εμβαδά μπορούμε να υπολογίσουμε. Επειδή τα δύο τετράγωνα έχουν κοινό το ορθογώνιο $E\text{K}\Gamma\Lambda$, το συνολικό εμβαδόν που καλύπτουν και τα δύο μαζί είναι

$$E_{AB\Gamma\Delta} + E_{EZH\Theta} - E_{E\text{K}\Gamma\Lambda} = 10^2 + 10^2 - 3 \cdot 4 = 100 + 100 - 12 = 188 \text{ cm}^2$$

Ενώ τα εμβαδά των τριγώνων είναι:

$$E_{BKZ} = \frac{KZ \cdot BK}{2} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21 \text{ cm}^2 \quad \text{και}$$

$$E_{\Delta\Lambda\Theta} = \frac{\Delta\Lambda \cdot \Lambda\Theta}{2} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21 \text{ cm}^2$$

Άρα το εμβαδόν του εξαγώνου είναι

$$188 + 21 + 21 = 230 \text{ cm}^2.$$

Θέμα 3^ο

Ένας μαθητής της Α΄ Γυμνασίου για να πάρει μέρος στο διαγωνισμό ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ που διεξάγεται φέτος και για τους μαθητές του Νομού Φλώρινας, ξεκίνησε οδικώς από τη Βέροια για να πάει στο Αμύνταιο του Νομού Φλώρινας περνώντας από τον Πολύμυλο και κατόπιν από την Πτολεμαΐδα.

Όταν έφτασε στον Πολύμυλο παρατήρησε ότι πρέπει να διανύσει ακόμη 42 χιλιόμετρα για να

φτάσει στην Πτολεμαΐδα η οποία βρίσκεται στα $\frac{3}{4}$ της απόστασης Βέροιας – Αμυνταίου, ενώ αν διανύσει 34 χιλιόμετρα μετά τον Πολύμυλο θα έχει κάνει τα $\frac{2}{3}$ της διαδρομής Βέροιας – Αμυνταίου.

Να βρεθούν οι αποστάσεις:

α) Βέροιας – Αμυνταίου

β) Πτολεμαΐδας – Αμυνταίου

γ) Βέροιας – Πολυμύλου

Μονάδες 3

Μονάδες 1

Μονάδες 1

Λύση

α) Έστω Α το σημείο στο οποίο θα έχει διανύσει τα $\frac{2}{3}$ της διαδρομής. Τότε η απόσταση από το Α μέχρι την Πτολεμαΐδα είναι $42 - 34 = 8$ χιλιόμετρα, που αντιστοιχεί στα $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ της συνολικής διαδρομής. Αφού λοιπόν το $\frac{1}{12}$ της διαδρομής είναι 8 χιλιόμετρα, η ολόκληρη διαδρομή, δηλαδή η απόσταση Βέροιας – Αμυνταίου είναι $12 \cdot 8 = 96$ χιλιόμετρα.

β) Επειδή η απόσταση Βέροιας – Πτολεμαΐδας είναι τα $\frac{3}{4}$ της συνολικής απόστασης, η απόσταση Πτολεμαΐδας – Αμυνταίου είναι το $\frac{1}{4}$ της συνολικής απόστασης. Άρα η απόσταση της Πτολεμαΐδας από το Αμύνταιο είναι $96 : 4 = 24$ χιλιόμετρα.

γ) Η απόσταση Πολυμύλου – Πτολεμαΐδας είναι 42 χιλιόμετρα (από την υπόθεση του προβλήματος) ενώ η απόσταση Πτολεμαΐδας – Αμυνταίου είναι 24 χιλιόμετρα. Άρα η απόσταση Πολυμύλου – Αμυνταίου είναι $42 + 24 = 66$ χιλιόμετρα. Συνεπώς, η απόσταση Βέροιας – Πολυμύλου είναι $96 - 66 = 30$ χιλιόμετρα.

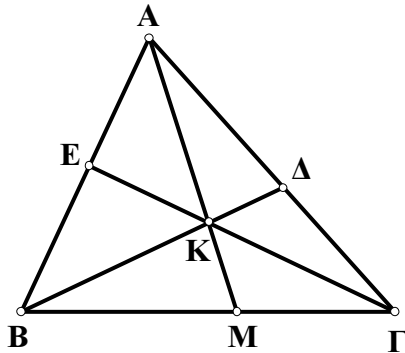


Θέμα 4^ο

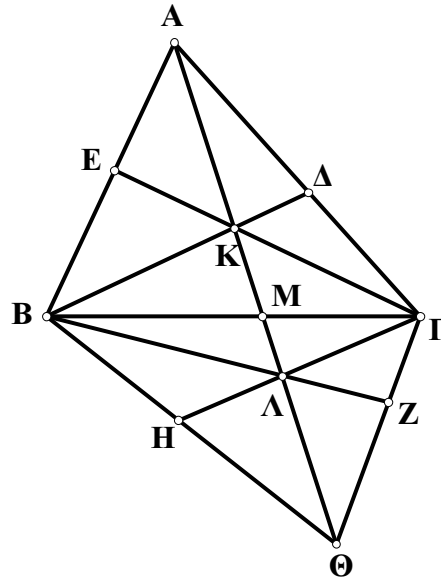
α) Να ονομάσετε τα 16 τρίγωνα όλων των μεγεθών που υπάρχουν στο σχήμα 1. **Μονάδες 2**

β) Χρησιμοποιείτε το (α) ερώτημα ή όποιον άλλο τρόπο θέλετε για να βρείτε πόσα τρίγωνα όλων των μεγεθών υπάρχουν στο σχήμα 2 και δικαιολογείτε την απάντησή σας.

(Δεν είναι υποχρεωτικό να ονομάσετε όλα τα τρίγωνα του (β) ερωτήματος). **Μονάδες 3**



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Λύση

α) Τα 16 τρίγωνα είναι:

ΑΒΓ, ΑΒΜ, ΑΒΔ, ΑΒΚ, ΑΕΚ, ΑΕΓ, ΑΔΚ, ΑΓΚ,
ΑΓΜ, ΒΓΕ, ΒΓΔ, ΒΓΚ, ΒΚΕ, ΒΜΚ, ΓΚΜ, ΓΚΔ

β) Το σχήμα 2 αποτελείται από δύο τρίγωνα της μορφής του πρώτου σχήματος (ΑΒΓ και ΒΓΘ). Το κάθε ένα από αυτά περιέχει 16 τρίγωνα (από το ερώτημα (α)). Πρέπει να μετρήσουμε τα τρίγωνα των οποίων οι κορυφές είναι άλλες στο τρίγωνο ΑΒΓ και άλλες στο ΒΓΘ. Αυτά είναι τα ΑΒΘ, ΑΒΔ, ΑΓΘ, ΑΓΔ, ΚΒΔ, ΚΓΔ, ΚΒΘ, ΚΓΘ. Έτσι, ο συνολικός αριθμός τριγώνων είναι $16 \cdot 2 + 8 = 40$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ
6ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά
«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»



Σάββατο 18 Ιανουαρίου 2014

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Ένα σχολείο έχει 50 μαθητές. Ο γυμναστής του σχολείου, θέλοντας να σχηματίσει ομάδες εργασίας, τους γράφει σε μια λίστα με αλφαβητική σειρά δίνοντάς τους και τον αντίστοιχο αύξοντα αριθμό (αριθμό καταλόγου). Δηλαδή στο μαθητή που είναι γραμμένος πρώτος στη λίστα αντιστοιχεί ο αριθμός 1 και στον τελευταίο ο αριθμός 50. Κατόπιν αναθέτει εργασίες στις 4 ομάδες, τις οποίες σχηματίζει ως εξής:

Ομάδα Α: Περιλαμβάνει τους μαθητές με αριθμό καταλόγου πολλαπλάσιο του 2. Αυτοί αναλαμβάνουν την καθαριότητα της αυλής.

Ομάδα Β: Περιλαμβάνει τους μαθητές με αριθμό καταλόγου πολλαπλάσιο του 3. Αυτοί αναλαμβάνουν το πότισμα των δένδρων του σχολείου.

Ομάδα Γ: Περιλαμβάνει τους μαθητές με αριθμό καταλόγου πολλαπλάσιο του 5. Αυτοί αναλαμβάνουν τη φύτευση καλλωπιστικών φυτών.

Ομάδα Δ: Περιλαμβάνει τους μαθητές με αριθμό καταλόγου πολλαπλάσιο του 6. Αυτοί αναλαμβάνουν το βάψιμο των διαδρόμων του σχολικού κτιρίου.

α) Πόσοι μαθητές ανήκουν σε κάθε ομάδα; **Μονάδες 2**

β) Υπάρχουν μαθητές που θα κάνουν περισσότερες από μία εργασίες; **Μονάδες 1**

γ) Πόσοι μαθητές συμμετέχουν ταυτόχρονα στις ομάδες Γ και Δ; **Μονάδες 1**

δ) Υπάρχουν μαθητές που δεν συμμετέχουν σε καμία ομάδα εργασίας και αν ναι, πόσοι είναι; **Μονάδες 1**

Απάντηση:

α) Ομάδα Α: 25 (50:2), Ομάδα Β: 16 (48:3), Ομάδα Γ: 10 (50:5), Ομάδα Δ: 8 (48:6)

β) Ναι, επειδή α) το άθροισμα των μελών όλων των ομάδων ξεπερνά το 50, ή β) τα πολλαπλάσια του 6 είναι πολλαπλάσια και του 3 ή γ) υπάρχουν κοινά πολλαπλάσια π.χ. του 3 και 5

γ) Ένας μαθητής, αυτός με αριθμό καταλόγου 30 (κοινό πολλαπλάσιο του 5 και 6)

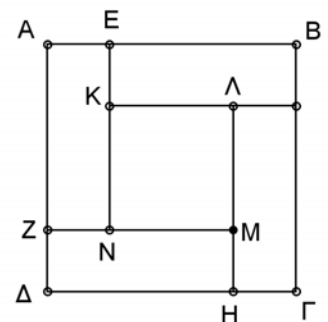
δ) Ναι. Είναι 14. Αυτοί είναι όλοι οι πρώτοι που περιέχονται στους αριθμούς από 1 έως 50 (1,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47) και το 49 που δεν είναι πολλαπλάσιο των 2,3,5,6.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Στο εξωτερικό ενός τετραγώνου ΚΛΜΝ τοποθετούμε τέσσερα ίσα ορθογώνια έτσι ώστε να δημιουργηθεί το μεγάλο τετράγωνο ΑΒΓΔ. (Βλέπε το διπλανό σχήμα).

Αν το κάθε ορθογώνιο έχει περίμετρο 40 εκ. να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 2



β) Ένας υπάλληλος ξοδεύει κάθε μήνα τα $\frac{7}{10}$ του μισθού του. Αν ελαττωθεί ο μισθός του κατά το $\frac{1}{15}$ να βρείτε ποιο μέρος του νέου μισθού πρέπει να ξοδεύει ώστε να διατηρήσει την ίδια ποιότητα ζωής, δηλαδή να ξοδεύει κάθε μήνα όσα ξόδευε και πριν τη μείωση. **Μονάδες 3**

Απάντηση:

α) Έστω $AE=x$, $AZ=y$. $\Pi_{\text{ορθ}}=2x+2y$. Τότε $40=2x+2y$, άρα $20=x+y$

Επομένως για το τετράγωνο ΑΒΓΔ ισχύει ότι $AB=x+y=20$

Τότε για το εμβαδό του ΑΒΓΔ έχουμε : $E=(AB)^2=(x+y)^2=20^2=400$ τ.εκ

β) Έστω ότι ο μισθός του είναι Χ ευρώ. Ο υπάλληλος λοιπόν ξοδεύει $\frac{7}{10}X$ ευρώ.

Ο νέος μισθός του είναι $X - \frac{1}{15}X = \frac{14}{15}X$ ευρώ. Αν το μέρος που ζητάμε είναι λ, τότε ισχύει ότι:

$$\lambda \cdot \frac{14}{15}X = \frac{7}{10}X, \text{ άρα } \lambda = \frac{7}{10} \cdot \frac{15}{14}, \text{ δηλ. } \lambda = \frac{3}{4}$$

ΘΕΜΑ 3ο

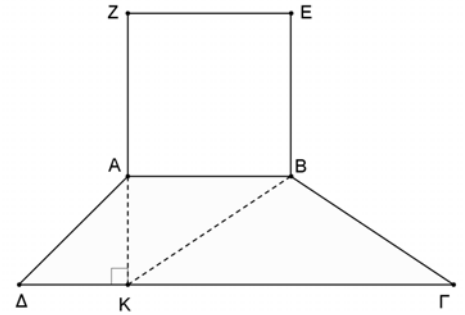
Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και το ΑΒΕΖ τετράγωνο. Αν η περίμετρος του τετραγώνου ΑΒΕΖ είναι 20 μέτρα, η μεγάλη βάση ΓΔ του τραpezίου είναι διπλάσια από τη μικρή βάση ΑΒ, το ύψος του

$AK = \frac{1}{5} \Delta\Gamma$ και το τρίγωνο ΑΔΚ είναι ισοσκελές τότε :

α) να βρείτε το εμβαδό του τραpezίου ΑΒΓΔ **Μονάδες 2**

β) να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΒΚΓ **Μονάδες 1**

γ) πόσα χρήματα θα ξοδέψουμε για να σπείρουμε με γκαζόν ένα οικόπεδο που έχει ακριβώς το σχήμα του τραpezίου ΑΒΓΔ αν για κάθε 1 τετραγωνικό μέτρο χρειάζονται 500 γραμμάρια σπόρου και το 1 κιλό σπόρου κοστίζει 20,14 €; **Μονάδες 2**



Απάντηση

$\Pi_{ABEZ} = 20$, άρα $AB = 20:4 = 5$ μέτρα. $\Gamma\Delta = 2 \cdot AB = 2 \cdot 5 = 10$ μέτρα $AK = \frac{1}{5} \Delta\Gamma = AK = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2$ μέτρα $\Delta\Delta\Delta$ ισοσκελές, άρα $\Delta\Delta\Delta = AK = 2$ μέτρα. Επομένως $K\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta\Delta\Delta = 10 - 2 = 8$ μέτρα

α) $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{1}{2} (AB + \Gamma\Delta) \cdot AK = \frac{1}{2} (5 + 10) \cdot 2 = 15$ τετραγωνικά μέτρα.

β) $E_{B\Delta\Gamma} = \frac{1}{2} K\Gamma \cdot AK = \frac{1}{2} 8 \cdot 2 = 8$ τετραγωνικά μέτρα.

γ) Χρειαζόμαστε $15 \cdot 500 = 7500$ γραμμάρια σπόρων, δηλ. 7,5 κιλά, επομένως $7,5 \cdot 20,14 = 151,05$ ευρώ

ΘΕΜΑ 4ο

Γράφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., 1000 σε μια σειρά και δημιουργούμε τον πολυψήφιο αριθμό $X = 12345678910111213141516 \dots 9991000$

α) Πόσα ψηφία χρησιμοποιήσαμε μέχρι να γράψουμε και τον αριθμό 100; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. **Μονάδες 2**

β) Ποιο ψηφίο του αριθμού X βρίσκεται στην 2014^η θέση; **Μονάδες 3**

Απάντηση

α) Από το 1 έως το 10 χρησιμοποιούμε: 11 ψηφία (πρώτη δεκάδα) ,

από το 11 έως το 20 χρησιμοποιούμε: $2 \cdot 10$ αριθμοί = 20 ψηφία (δεύτερη δεκάδα),

κτλ, από 91 έως 100: $2 \cdot 10 + 1 = 20 + 1 = 21$ ψηφία (δέκατη δεκάδα)

Άρα τα συνολικά ψηφία έως και τον αριθμό 100 είναι: $11 + 9 \cdot 20 + 1 = 11 + 180 + 1 = 192$

β) Λόγω (α) ερωτ. στην 192^η θέση βρίσκεται το ψηφίο 0 (πρώτη εκατοντάδα).

Χωρίζουμε τώρα τους αριθμούς σε εκατοντάδες αρχίζοντας από το 101

Από το 101 έως το 200 υπάρχουν: 3 ψηφία $\cdot$ 100 αριθμοί = 300 ψηφία (δεύτερη εκατοντάδα)

Από το 201 έως το 300 υπάρχουν: $3 \cdot 100 = 300$ ψηφία (Τρίτη εκατοντάδα)

κτλ. από το 601 έως 700 υπάρχουν: $3 \cdot 100 = 300$ ψηφία (Εβδομη εκατοντάδα)

Θα αθροίσουμε τα ψηφία ώστε να βρούμε αποτέλεσμα 2014:

$$192 + 6 \cdot 300 = 192 + 1800 = 1992$$

$$2014 - 1992 = 22 \text{ ακόμη ψηφία}$$

7 ακόμη αριθμοί $\cdot$ 3 ψηφία = 21 ψηφία και θέλουμε άλλο 1 ψηφίο, δηλ. έως το 707 έχουμε γράψει 2013 ψηφία και θέλουμε άλλο 1 ψηφίο, δηλ. από το 708 επιλέγουμε το 7.

Άρα στη 2014^η θέση βρίσκεται το 7

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

7ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»



Σάββατο 17 Ιανουαρίου 2015

Α' Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Να γίνουν οι πράξεις:

$$A = \frac{\left(4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4}\right) \div 1\frac{3}{2}}{\left(2\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \frac{3}{2}} + \frac{5}{9} + 2 \cdot 1007$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left(4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4}\right) \div 1\frac{3}{2}}{\left(2\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \frac{3}{2}} + \frac{5}{9} + 2 \cdot 1007 = \frac{\left(\frac{13}{3} - \frac{9}{4}\right) \div \frac{5}{2}}{\left(\frac{9}{4} - 1\right) \cdot \frac{3}{2}} + \frac{5}{9} + 2014 = \frac{\left(\frac{52}{12} - \frac{27}{12}\right) \div \frac{5}{2}}{\left(\frac{9}{4} - \frac{4}{4}\right) \cdot \frac{3}{2}} + \frac{5}{9} + 2014 = \\ &= \frac{\frac{25}{12} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}} + \frac{5}{9} + 2014 = \frac{\frac{5}{15}}{\frac{15}{8}} + \frac{5}{9} = \frac{40}{90} + \frac{5}{9} + 2014 = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} + 2014 = 1 + 2014 = 2015 \end{aligned}$$

β) Αν $A = 2015$, να λυθεί η εξίσωση $\frac{3x-3}{9} = \frac{A-2012}{3}$

ΛΥΣΗ

$$\frac{3x-3}{9} = \frac{A-2012}{3}$$

$$\frac{3x-3}{9} = \frac{A-2012}{3} \Leftrightarrow \frac{3x-3}{9} = \frac{2015-2012}{3} \Leftrightarrow \frac{3x-3}{9} = \frac{3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3x-3}{9} = 1 \Leftrightarrow 3x-3=9 \Leftrightarrow 3x=9+3 \Leftrightarrow 3x=12 \Leftrightarrow x=12 \div 3 \Leftrightarrow x=4$$

ΘΕΜΑ 2

Α) Κάθε σχήμα αντιπροσωπεύει και έναν αριθμό.

$$\square \times \square = \bigcirc$$

$$\bigcirc + 200 = 600$$

$$\bigcirc \div \triangle = 25$$

$$\square - \triangle = \text{πεντάγωνο}$$

Ποιος είναι ο αριθμός που αντιπροσωπεύει κάθε σχήμα;

ΛΥΣΗ

$$\bigcirc = 600 - 200 = 400$$

$$\square \times \square = 400 \text{ άρα } \square = 20$$

$$400 \div \triangle = 25 \text{ άρα } \triangle = 16$$

$$\text{πεντάγωνο} = 20 - 16 = 4$$

Β) Οι αριθμοί 2015 και 757 διαιρούμενοι με τον θετικό αριθμό x δίνουν και οι δύο υπόλοιπο 17.

Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x ;

ΛΥΣΗ

Οι ταυτότητες των διαιρέσεων είναι:

$$x \cdot \pi_1 + 17 = 2015 \quad \text{άρα} \quad x \cdot \pi_1 = 1998$$

$$x \cdot \pi_2 + 17 = 757 \quad \text{άρα} \quad x \cdot \pi_2 = 740$$

Το x είναι κοινός διαιρέτης των 1998 και 740

$$\begin{array}{r|l} 1998 & 2 \\ 999 & 3 \\ 333 & 3 \\ 111 & 3 \\ 37 & 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 740 & 2 \\ 370 & 2 \\ 185 & 5 \\ 37 & 37 \end{array}$$

Επομένως $740 = 2^2 \cdot 5 \cdot 37$ και $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$

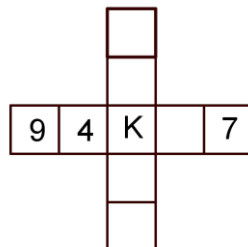
Οι κοινοί διαιρέτες των 1998 και 740 είναι οι: 1, 2, 37, 74

Επειδή το υπόλοιπο είναι μικρότερο από το διαιρέτη, πρέπει $x > 17$.

Επομένως $x = 37$ ή 74

ΘΕΜΑ 3

Τοποθετήστε τους αριθμούς από το 1 έως το 9 έναν σε κάθε τετράγωνο (κάθε αριθμός χρησιμοποιείται μόνο μία φορά) ώστε το άθροισμα της οριζόντιας στήλης να είναι ίσο με το άθροισμα της κατακόρυφης στήλης.

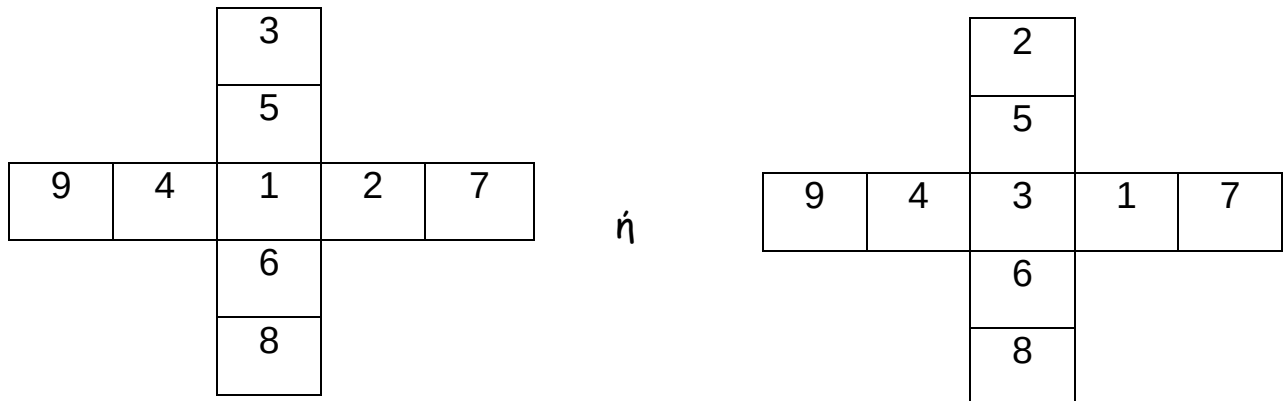


Ποιες τιμές παίρνει το K;

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος

Οι μαθητές με δοκιμές μπορούν να βρουν ότι:



2ος τρόπος

Αν ονομάσουμε A_4 το άθροισμα των τεσσάρων ψηφίων εκτός του K τότε έχουμε $20 < A_4 \leq 22$ (το άθροισμα όλων των αριθμών από το 1 έως και το 9 είναι 45)

Άρα $A_4 = 21$ ή $A_4 = 22$

Επίσης το άθροισμα των ψηφίων της οριζόντιας στήλης είναι ίσο με το άθροισμα των ψηφίων της κατακόρυφης στήλης οπότε έχουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $A_4 = 21$ τότε $A_4 = 9 + 4 + 7 + 1 = 21 = 8 + 6 + 5 + 2$ οπότε $K=3$
- Αν $A_4 = 22$ τότε $A_4 = 9 + 4 + 7 + 2 = 22 = 8 + 6 + 5 + 3$ οπότε $K=1$

ΘΕΜΑ 4ο

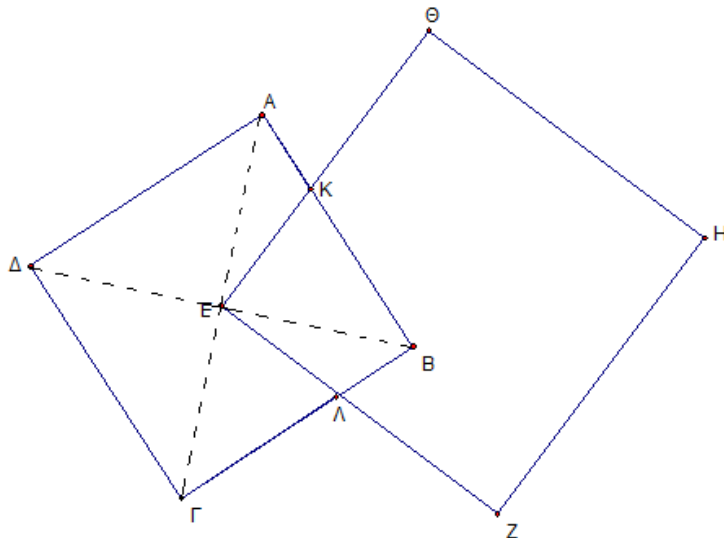
Το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει εμβαδόν 36 τετραγωνικά μέτρα και το $E\Theta H Z$ έχει πλευρά 7,5 μέτρα. Αν ξέρουμε ότι $KB = 2 AK$ και $\Gamma\Lambda = 2 \Lambda B$, να βρείτε:

α) Την πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΘΗΖ

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΒΛ

δ) Αν η κορυφή Ε είναι το κέντρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ, να βρείτε το εμβαδόν του κοινού μέρους τους, δηλαδή το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΒΛΕ.



ΛΥΣΗ

α) Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά $\sqrt{36} = 6$ μ.

β) $E_{EZHQ} = 7,5^2 = 56,25$ τ.μ.

γ) Αφού $KB=2AK$ είναι $KB = \frac{2}{3}AB$ και $ΓΛ=2ΛΒ$, άρα $BL = \frac{1}{3}BG$

Το τρίγωνο ΚΒΛ είναι ορθογώνιο, επομένως,

$$E_{KBL} = \frac{1}{2} \times KB \times BL = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times AB \times \frac{1}{3} \times BG = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 6 \times \frac{1}{3} \times 6 = 4 \text{ τ.μ.}$$

$$\delta) E_{KBLE} = E_{EBL} + E_{EKB} = \frac{BL \times u}{2} + \frac{KB \times u}{2} = \frac{\frac{1}{3} \times 6 \times 3}{2} + \frac{\frac{2}{3} \times 6 \times 3}{2} = 3 + 6 = 9 \text{ τ.μ.}$$



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ
8ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά «Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»
Σάββατο 16 Ιανουαρίου 2016

Α' Γυμνασίου

Θέμα 1°

Αν $x + y = 6 \cdot 2015 + [(4 + 2) : 2 - 6 : (2^2 - 1)]^{10} - 6 \cdot 2014$ και $y - \omega = \frac{46}{16} \cdot \frac{2}{23} + \frac{11}{6} - \frac{1}{8} : \frac{3}{2}$

α) Ναδειχθεί ότι ο αριθμός: $x + 2 \cdot y - \omega + 2$ είναι πρώτος.

β) Μεταξύ ποιων διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται ο αριθμός: $K = A + \frac{B}{5}$ όπου $A = x + y$ και $B = y - \omega$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $x + y = 6 \cdot 2015 + [(4 + 2) : 2 - 6 : (2^2 - 1)]^{10} - 6 \cdot 2014$

$x + y = 6 \cdot (2015 - 2014) + [6 : 2 - 6 : 3]^{10}$

$x + y = 6 \cdot 1 + (3 - 2)^{10}$

$x + y = 6 + 1^{10}$

$x + y = 6 + 1$

$x + y = 7$

$y - \omega = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{23} + \frac{11}{6} - \frac{1}{8} : \frac{3}{2}$

$y - \omega = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{1} + \frac{11}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$

$y - \omega = \frac{1}{4} + \frac{11}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$

$y - \omega = \frac{3}{12} + \frac{22}{12} - \frac{1}{12}$

$y - \omega = \frac{24}{12}$

$y - \omega = 2$

Επομένως $x + 2 \cdot y - \omega + 2 = x + y + y - \omega + 2 = (x + y) + (y - \omega) + 2 = 7 + 2 + 2 = 11$, ο οποίος είναι πρώτος.

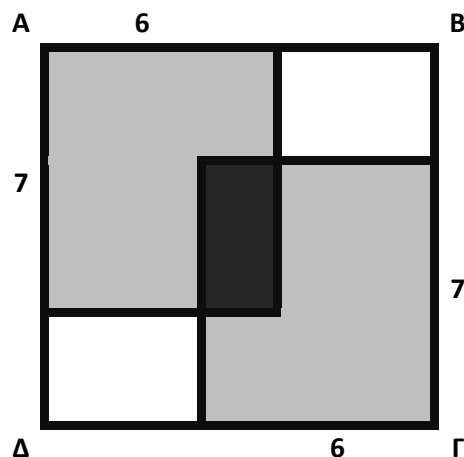
β) $K = A + \frac{B}{2} = 7 + \frac{2}{5} = \frac{37}{5} = 7,4$, επομένως ο αριθμός K βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 7 και 8.

Θέμα 2°

Δύο ίδια φύλλα χαρτιού με πλευρές 6 εκ. και 7 εκ. τοποθετούνται στις γωνίες του τετραγώνου **ΑΒΓΔ** πλευράς 10 εκ. Τα δύο φύλλα επικαλύπτονται, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Πόσο είναι το εμβαδό και πόση η περίμετρος της επικαλυπτόμενης περιοχής;

β) Πόσο είναι το εμβαδό της υπόλοιπης περιοχής;



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Για το μήκος της επικαλυπτόμενης περιοχής: $6 - (10 - 6) = 6 - 4 = 2$ εκ

Για το πλάτος της επικαλυπτόμενης περιοχής: $7 - (10 - 7) = 7 - 3 = 4$ εκ

Επομένως, $E_{\text{καλυπτ}} = 2 \cdot 4 = 8$ τετρ. εκ και $\Pi_{\text{καλυπτ}} = 2 + 2 + 4 + 4 = 12$ εκ

β) $E_{\text{υπολ.}} = E_{\text{τετρ}} - E_{\text{καλυπτ}} = 10^2 - 8 = 100 - 8 = 92$ τετρ. εκ

Θέμα 3^ο

Δίνεται η πράξη $\alpha \# \beta = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha \cdot \beta$, όπου α, β φυσικοί αριθμοί.

α) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων i) $8 \# 12$ και ii) $(2 \# 3) \# (4 \# 5)$

β) Να υπολογιστεί η τιμή του α όταν ο φυσικός αριθμός α είναι πολλαπλάσιος του 5 και $\alpha \# 5 = 75$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) i) $8 \# 12 = 8^2 + 12^2 - 8 \cdot 12 = 64 + 144 - 96 = 112$ και **ii)** $2 \# 3 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 = 4 + 9 - 6 = 7$ ενώ $4 \# 5 = 4^2 + 5^2 - 4 \cdot 5 = 16 + 25 - 20 = 21$. Άρα, $(2 \# 3) \# (4 \# 5) = 7^2 + 21^2 - 7 \cdot 21 = 49 + 441 - 147 = 343$

β) Είναι $\alpha = 10$, γιατί το 10 είναι πολλαπλάσιο του 5 και $10 \# 5 = 10^2 + 5^2 - 10 \cdot 5 = 100 + 25 - 50 = 75$

Θέμα 4^ο

Δίνεται ο αριθμός **A=122333444455555...1515...15**, όπου κάθε αριθμός εμφανίζεται τόσες φορές όσες είναι η τιμή του στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (το **1** μία φορά, το **2** δύο φορές, το **3** τρεις φορές, κ.τ.λ. και τέλος το **15** δεκαπέντε φορές)

α) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων που χρειαζόμαστε για να γράψουμε τον αριθμό **A**

β) Ποιο ψηφίο βρίσκεται στην **100^η** θέση;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Το πλήθος των ψηφίων είναι: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 =$
 $= (1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5 + (20 + 30) + (22 + 28) + (24 + 26) = 4 \cdot 10 + 5 + 3 \cdot 50 = 40 + 5 + 150 = 195$

β) Μετρώντας βρίσκουμε ότι:

Ο αριθμός 1 βρίσκεται στην 1η θέση

Ο αριθμός 2 βρίσκεται στις θέσεις 2 – 3

Ο αριθμός 3 βρίσκεται στις θέσεις 4 – 6

Ο αριθμός 4 βρίσκεται στις θέσεις 7 – 10

Ο αριθμός 5 βρίσκεται στις θέσεις 11 – 15

Ο αριθμός 6 βρίσκεται στις θέσεις 16 – 21

Ο αριθμός 7 βρίσκεται στις θέσεις 22 – 28

Ο αριθμός 8 βρίσκεται στις θέσεις 29 – 36

Ο αριθμός 9 βρίσκεται στις θέσεις 37 – 45

Ο αριθμός 10 βρίσκεται στις θέσεις 46 – 65 (10 διψήφιοι, δηλαδή 20 ψηφία)

Ο αριθμός 11 βρίσκεται στις θέσεις 66 – 87 (11 διψήφιοι, δηλαδή 22 ψηφία)

Ο αριθμός 12 βρίσκεται στις θέσεις 88 – 111 (12 διψήφιοι, δηλαδή 24 ψηφία)

Γράφοντας 12 φορές τον αριθμό 12, στις άρτιου πλήθους θέσεις 88, 90, 92, ..., 110 βρίσκεται το ψηφίο 1, ενώ το 2 βρίσκεται στις περιττού πλήθους θέσεις.

Επομένως στην 100^η θέση βρίσκεται το ψηφίο 1.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

9ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»

Σάββατο 28 Ιανουαρίου 2017

Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1^ο

Δίνονται οι παραστάσεις $A = (2^5 - 3^3) : 5 + (6,4 - 5) \cdot \frac{20}{4}$ και $B = 18 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} : \frac{3}{4}\right) \cdot \left(1\frac{3}{6} - 1\right)$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων A και B. (2 ΜΟΝ.)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A^2 + B^2 + A \cdot B + 1$ (2 ΜΟΝ.)

γ) Αν οι κ, λ είναι αντίστροφοι αριθμοί, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης (1 ΜΟΝ.)

$$(\kappa \cdot \lambda)^{2017} + \kappa \left(\lambda + \frac{1}{\kappa} \right)$$

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \quad A = (2^5 - 3^3) : 5 + (6,4 - 5) \cdot \frac{20}{4}$$

$$A = (32 - 27) : 5 + 1,4 \cdot 5$$

$$A = 5 : 5 + 7$$

$$A = 1 + 7$$

$$A = 8$$

$$B = 18 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} : \frac{3}{4}\right) \cdot \left(1\frac{3}{6} - 1\right)$$

$$B = 18 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{9}{6} - 1\right)$$

$$B = 18 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{9}{6} - \frac{6}{6}\right)$$

$$B = 18 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6}$$

$$B = 3$$

$$\beta) \quad A^2 + B^2 + A \cdot B + 1 = 8^2 + 3^2 + 3 \cdot 8 + 1 = 64 + 9 + 24 + 1$$

$$\gamma) \quad (\kappa \cdot \lambda)^{2017} + \kappa \left(\lambda + \frac{1}{\kappa} \right) = 1^{2017} + \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \frac{1}{\kappa} = 1 + 1 + 1 = 3$$

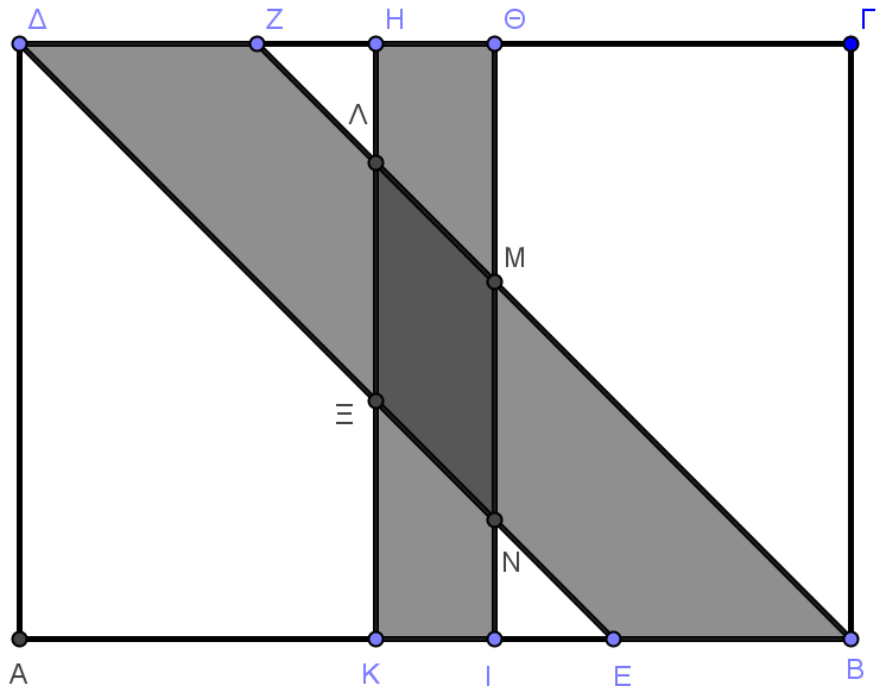
Θέμα 2^ο

Το διπλανό χωράφι $AB\Gamma\Delta$ είναι σχήματος ορθογωνίου με πλευρές $AB=7\text{εκ.}$ και $A\Delta=5\text{εκ.}$ από το οποίο διέρχονται δύο δρόμοι. Ακόμη, δίνεται ότι $\Lambda\Xi=2\text{εκ.}$ $\Delta Z = BE = 2\text{εκ}$ και $H\Theta = KI = 1\text{εκ.}$

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωραφιού $AB\Gamma\Delta$. (1 MON.)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου $\Lambda M N \Xi$. (2 MON.)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτεται από δρόμους. (2 MON.)



ΛΥΣΗ

α) $E_{AB\Gamma\Delta} = AB \cdot A\Delta = 5 \cdot 7 = 35 \text{ τεκ.}$

β) $E_{\Lambda M N \Xi} = \Lambda\Xi \cdot H\Theta = 2 \cdot 1 = 2 \text{ τεκ.}$

γ) $E = E_{\Delta Z E B} + E_{H\Theta I K} - E_{\Lambda M N \Xi} = EB \cdot A\Delta + KI \cdot KH - 2 = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 - 2 = 13 \text{ τεκ.}$

Θέμα 3^ο

Ένας διψήφιος αριθμός είναι **πενταπλάσιος** από το άθροισμα των ψηφίων του.

α) Να δικαιολογήσετε πλήρως ότι το ψηφίο των μονάδων του είναι 0 ή 5. (2 MON.)

β) Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (3 MON.)

ΛΥΣΗ

A) Αφού ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 5 άρα το τελευταίο του ψηφίο θα είναι 0 ή 5

B) Έστω ότι ο αριθμός είναι της μορφής ab ή αλλιώς $10a+b$

Αφού το τελευταίο του ψηφίο είναι 0ή 5 θα έχουμε:

$$\text{Για } \beta=0 \quad 10a = 5a \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ άτοπο}$$

$$\text{Για } \beta=5 \quad 10a + 5 = 5(a + 5) \Leftrightarrow \alpha = 4$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι 45.

Θέμα 4^ο

Στο 8ο Πανελλήνιο Μαθηματικό Καλοκαιρινό Σχολείο της Νάουσας συμμετείχαν συνολικά **2017 μαθητές** (αγόρια και κορίτσια) από **8 τάξεις** (Ε' Δημοτικού έως και Γ' Λυκείου) από **9 νομούς**.

α) Να δικαιολογήσετε ότι υπήρχαν τουλάχιστον **1009 μαθητές** του ίδιου φύλου. **(2 MON.)**

β) Να δικαιολογήσετε ότι υπήρχαν **15 μαθητές** του ίδιου φύλου, ίδιας τάξης και από τον ίδιο νομό. **(3 MON.)**

ΛΥΣΗ

A) Αφού $2017 = 2 \cdot 1008 + 1$ άρα θα υπάρχουν τουλάχιστον 1009 μαθητές του ίδιου φύλου (1008+1)

B) Του ίδιου φύλου θα είναι 1009 τουλάχιστον μαθητές

Της ίδιας τάξης $1009 = 8 \cdot 126 + 1$ άρα από την ίδια τάξη θα είναι 127 τουλάχιστον μαθητές (126+1)

Τέλος από τον ίδιο νομό $127 = 9 \cdot 14 + 1$ δηλαδή $14+1=15$ μαθητές

Σας ευχόμαστε επιτυχία!



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

10ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»

Σάββατο 20 Ιανουαρίου 2018

Α΄ Γυμνασίου

Θέμα 1^ο

α) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \frac{3^2 + 4^2}{5} + \left[(3^2 - 2^3)^{2018} + 3 \cdot 6 + 1 \right]$ (2μ)

β) Να βρεθούν όλοι οι τριψήφιοι $\overline{\alpha\beta\gamma}$ αριθμοί (α εκατοντάδες, β δεκάδες, γ μονάδες) έτσι ώστε το άθροισμα $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ να είναι διαιρέτης του αριθμού Α όπου $a \neq 0$. (3μ)

ΛΥΣΗ

$$\alpha) A = \frac{3^2 + 4^2}{5} + (3^2 - 2^3)^{2018} + 3 \cdot 6 + 1$$

$$A = \frac{9+16}{5} + (9-8)^{2018} + 18+1$$

$$A = \frac{25}{5} + 1^{2018} + 19$$

$$A = 5 + 1 + 19$$

$$A = 25$$

β) Οι διαιρέτες του 25 είναι οι 1, 5, 25.

- Αν $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, τότε $\alpha=1$ και $\beta=\gamma=0$, δηλαδή ο 100 είναι ένας τέτοιος τριψήφιος αριθμός.
- Αν $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 5$, τότε $\alpha=2$, $\beta=1$ και $\gamma=0$ ή $\alpha=2$, $\beta=0$ και $\gamma=1$ ή $\alpha=1$, $\beta=2$ και $\gamma=0$ ή $\alpha=1$, $\beta=0$ και $\gamma=2$, δηλαδή οι 210, 201, 102, 120 είναι άλλοι τέσσερις τέτοιοι τριψήφιοι αριθμοί.
- Αν $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 25$, τότε οι α, β και γ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 5.
 - αν $\alpha=5$ τότε $\beta=\gamma=0$, δηλαδή ένας ζητούμενος τριψήφιος αριθμός είναι ο 500. Επομένως, εξαντλήσαμε την περίπτωση που κάποιο ψηφίο είναι ίσο με 5.
 - αν $\alpha=4$, τότε $\beta^2 + \gamma^2 = 9$. Μία περίπτωση είναι $\beta=3$ και $\gamma=0$ ή $\beta=0$ και $\gamma=3$. Αν $\beta=2$ τότε $\gamma^2=5$, άτοπο. Ομοίως, αν $\beta=1$. Άρα, άλλοι πιθανοί αριθμοί είναι οι 430, 403, 340, 304. Επομένως, εξαντλήσαμε την περίπτωση που κάποιο ψηφίο είναι ίσο με 4.
 - Αν $\alpha=3$, τότε $\beta^2 + \gamma^2 = 16$. Επειδή, οι β και γ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 3, ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση, καταλήγουμε γρήγορα σε άτοπο.

Τελικά οι τριγώνιοι αριθμοί είναι οι: 100, 102, 120, 201, 210, 304, 340, 403, 430, 500.

Θέμα 2^ο

α) Μπορείτε να χωρίσετε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9 σε τρεις ομάδες των τριών αριθμών έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών στην κάθε ομάδα να είναι το ίδιο; Αν ναι να παρουσιάσετε μια τέτοια λύση, αν όχι να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(1μ)**

β) Μπορείτε να κάνετε το ίδιο με το πρώτο ερώτημα για τους αριθμούς 1, 3, 5, 7, 9, 12, 13, 14 και 15. **(2μ)**

γ) Μπορείτε να κάνετε το ίδιο με το πρώτο ερώτημα για τους αριθμούς 101, 202, 303, 404, 505, 606, 708, 2017 και 2018. **(2μ)**

ΛΥΣΗ

α) Η απάντηση είναι θετική. Παράδειγμα : 9, 5, 1 / 8, 3, 4 / 7, 6, 2.

β) Η απάντηση είναι αρνητική. Το άθροισμα όλων των αριθμών είναι :

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 12 + 13 + 14 + 15 = 79$. Επομένως το άθροισμα των αριθμών σε κάθε ομάδα πρέπει να είναι $79:3 = 26,333\dots$, αδύνατο αφού πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός.

γ) Η απάντηση είναι αρνητική. Το άθροισμα όλων των αριθμών είναι :

$101 + 202 + 303 + 404 + 505 + 606 + 708 + 2017 + 2018 = 6864$. Επομένως το άθροισμα των αριθμών σε κάθε ομάδα πρέπει να είναι $6864:3 = 2288$. Στην ομάδα που θα μπει ο 2018 οι άλλοι δύο αριθμοί πρέπει να έχουν άθροισμα $2288 - 2018 = 270$. Αλλά οι δύο μικρότεροι αριθμοί (101 και 202) έχουν άθροισμα 303. Άρα δεν μπορούμε να βάλουμε στην ομάδα του 2018 άλλους αριθμούς.

Θέμα 3^ο

Από τους μαθητές ενός γυμνασίου το $\frac{1}{4}$ συμμετέχει στη θεατρική ομάδα του σχολείου, το $\frac{1}{5}$ στην περιβαλλοντική ομάδα, το $\frac{1}{3}$ στην ομάδα φωτογραφίας ενώ οι υπόλοιποι 60 μαθητές συμμετέχουν σε άλλες ομάδες του σχολείου. Οι μαθητές των τριών αυτών ομάδων συμμετέχουν μόνο σε μία από αυτές εκτός από 8 μαθητές που συμμετέχουν στη θεατρική και στην περιβαλλοντική ομάδα.

α) Να βρεθεί πόσοι είναι οι μαθητές του σχολείου. **(3μ)**

β) Αν το πλήθος των μαθητών είναι 240, να βρεθεί πόσοι μαθητές συμμετέχουν μόνο στη θεατρική ομάδα. **(2μ)**

ΛΥΣΗ

α) Στις 3 ομάδες του σχολείου παίρνουν μέρος τα $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$ των μαθητών του σχολείου. Σε αυτούς όμως 8 άτομα μετρήθηκαν 2 φορές. Επομένως, οι $60 - 8 = 52$ μαθητές είναι τα $\frac{13}{60}$ των μαθητών του σχολείου. Άρα όλοι οι μαθητές είναι $52 \cdot 60 / 13 = 240$.

β) Το πλήθος των μαθητών που συμμετέχουν μόνο στη θεατρική ομάδα είναι $240 \cdot \frac{1}{4} - 8 = 60 - 8 = 52$.

Θέμα 4^ο

Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και αυξάνουμε το πλάτος του κατά 20% και μειώνουμε το μήκος του κατά 10%. Έτσι, σχηματίζεται ένα νέο τετράπλευρο.

α) Να υπολογίσετε πόσο επί τοις εκατό αυξήθηκε ή μειώθηκε το εμβαδόν του σχήματος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(2μ)**

β) Αν το νέο τετράπλευρο είναι τετράγωνο με εμβαδόν 144 τ. μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου και να αποδείξετε ότι η περίμετρος αυξήθηκε λιγότερο από 3%. **(3μ)**

ΛΥΣΗ

Έστω χ και ψ το μήκος και το πλάτος του αρχικού ορθογωνίου και χ' , ψ' οι διαστάσεις του τελικού τετραπλεύρου.

α) Είναι $\chi' = 0,9 \cdot \chi$ και $\psi' = 1,2 \cdot \psi$. Το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου είναι $E = \chi \cdot \psi$. Το εμβαδόν του τελικού ορθογωνίου είναι $E' = \chi' \cdot \psi' = 1,08 \cdot \chi \cdot \psi = 1,08 \cdot E$. Οπότε, το εμβαδόν του ορθογωνίου αυξήθηκε κατά 8%.

β) Η πλευρά του τετραγώνου είναι 12 μέτρα, αφού $12 \cdot 12 = 144$ τ. μέτρα. Άρα, $\chi' = \psi' = 12$ μέτρα.

Έτσι $\chi = \frac{12}{0,9} = \frac{120}{9} = \frac{40}{3}$ και $\psi = \frac{12}{1,2} = 10$. Η περίμετρος του αρχικού ορθογωνίου είναι

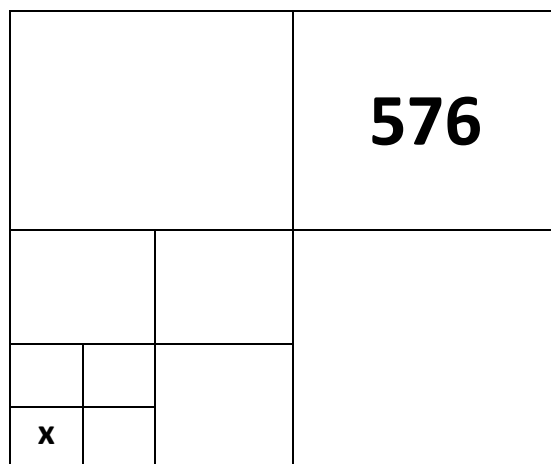
$\Pi = 2(\chi + \psi) = 2\left(10 + \frac{40}{3}\right) = \frac{140}{3}$ ενώ του τετραγώνου είναι $\Pi' = 4 \cdot 12 = 48 = \frac{144}{3}$. Επομένως, η

περίμετρος αυξήθηκε κατά $\frac{4}{3}$ μέτρα και το ποσοστό αύξησης είναι $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{140}{3}} = \frac{4}{140} = \frac{1}{35} = \frac{3}{105} < \frac{3}{100} = 3\%$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 15^{ου} ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

ΘΕΜΑ 1^ο

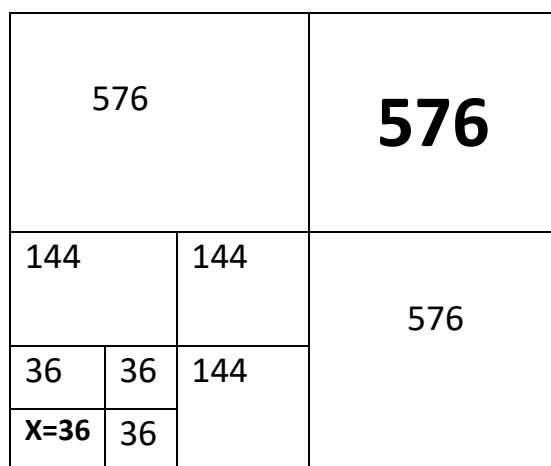
Κάθε τετράγωνο του σχήματος χωρίζεται σε 4 ίσα τετράγωνα.



α) Να βρείτε το x.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = 3x^3 - (x+3)^2 - 2x - 1$

Λύση



α) Επειδή κάθε τετράγωνο του σχήματος χωρίζεται σε 4 ίσα τετράγωνα, $x=36$

β) $A = 3 \cdot (36)^3 - (36+3)^2 - 2 \cdot (36) - 1$
 $= 3 \cdot (46656) - (39)^2 - 72 - 1$
 $= 139968 - 1521 - 72 - 1$
 $= 138374$

ΘΕΜΑ 2^ο

Μία ομάδα μαθητών μοιράστηκαν μια σακούλα με καραμέλες.

- Την πρώτη μέρα έφαγαν το $\frac{1}{2}$ από τις καραμέλες της σακούλας.
- Τη δεύτερη μέρα έφαγαν τα $\frac{2}{3}$ από τις καραμέλες που έμειναν.
- Την τρίτη μέρα έφαγαν $\frac{3}{4}$ από τις καραμέλες που έμειναν.
- Την τέταρτη μέρα έφαγαν τα $\frac{4}{5}$ από τις καραμέλες που έμειναν.
- Την πέμπτη μέρα έφαγαν τα $\frac{5}{6}$ από τις καραμέλες που έμειναν.

Αν στο τέλος της πέμπτης μέρας έμεινε μόνο **1** καραμέλα, να βρείτε πόσες καραμέλες είχε αρχικά η σακούλα.

Λύση

- Την πέμπτη μέρα έφαγαν τα $\frac{5}{6}$ από τις καραμέλες που έμειναν, άρα περίσσεψε το $\frac{1}{6}$ που είναι **1** καραμέλα.

Επομένως την πέμπτη μέρα στη σακούλα είχε **6** καραμέλες.

- Την τέταρτη μέρα έφαγαν τα $\frac{4}{5}$ από τις καραμέλες που έμειναν, άρα περίσσεψε το $\frac{1}{5}$ που είναι **6** καραμέλες.

Επομένως την τέταρτη μέρα στη σακούλα είχε **30** καραμέλες.

- Την τρίτη μέρα έφαγαν τα $\frac{3}{4}$ από τις καραμέλες που έμειναν, άρα περίσσεψε το $\frac{1}{4}$ που είναι **30** καραμέλα.

Επομένως την τρίτη μέρα στη σακούλα είχε **120** καραμέλες.

- Την δεύτερη μέρα έφαγαν τα $\frac{2}{3}$ από τις καραμέλες που έμειναν, άρα περίσσεψε το $\frac{1}{3}$ που είναι **120** καραμέλες.

Επομένως την δεύτερη μέρα στη σακούλα είχε **360** καραμέλες.

- Την πρώτη μέρα έφαγαν τα $\frac{1}{2}$ από τις καραμέλες που έμειναν, άρα περίσσεψε το $\frac{1}{2}$ που είναι **360** καραμέλες.

Επομένως αρχικά στη σακούλα είχε **720** καραμέλες.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Ένας τριψήφιος αριθμός α με πρώτο ψηφίο το 3, όταν διαιρείται με τους αριθμούς 2,3,4,5, αφήνει υπόλοιπο 1. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που ικανοποιεί τα παραπάνω;

β. Είναι πρώτος ή σύνθετος ;

Λύση

$\alpha/2$ αφήνει υπόλοιπο 1 $(\alpha-1)/2$ αφήνει υπόλοιπο 0

$\alpha/3$ αφήνει υπόλοιπο 1 **άρα** $(\alpha-1)/3$ αφήνει υπόλοιπο 0

$\alpha/4$ αφήνει υπόλοιπο 1 $(\alpha-1)/4$ αφήνει υπόλοιπο 0

$\alpha/5$ αφήνει υπόλοιπο 1 $(\alpha-1)/5$ αφήνει υπόλοιπο 0

επομένως ο $\alpha-1$ είναι πολλαπλάσιο των αριθμών (2,3,4,5).

Βρίσκω το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τους που είναι $\text{ΕΚΠ}(2,3,4,5)=60$.

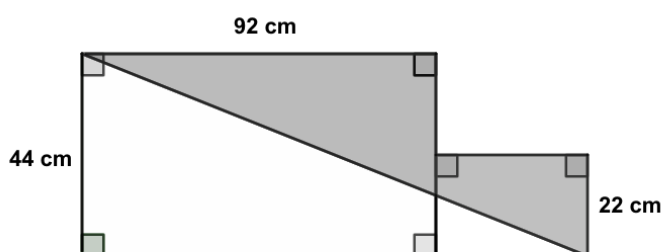
Τα επόμενα πολλαπλάσια είναι 120, 180, 240, 300, 360, 420,

Άρα $\alpha-1=300$ οπότε $\alpha=301$.

β. Είναι σύνθετος γιατί $301 = 7 \cdot 43$ δηλαδή δεν διαιρείται μόνο με τον εαυτό του και την μονάδα.

ΘΕΜΑ 4^ο

Να βρείτε το εμβαδόν της γκρι επιφάνειας στο παρακάτω σχήμα.



Λύση

	Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\frac{(92+x) \cdot 44}{2} - 22 \cdot x =$ $(92+x) \cdot 22 - 22 \cdot x =$ $92 \cdot 22 + x \cdot 22 - 22 \cdot x =$ $92 \cdot 22 =$ 2024
--	--